Eléments sur les quaternions

A.Balan

June 5, 2018

On désigne par $\mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{H}$ les corps des réels, complexes et quaternions.

1 Les espaces vectoriels quaternioniques

1.1 Définition

On appelle espace vectoriel quaternionique le produit tensoriel suivant :

$$E = \mathbf{H} \otimes_{\mathbf{R}} E'$$

avec $\mathbf{H}$ le corps des quaternions et E' un espace vectoriel réel. On a alors une multiplication à gauche et à droite par les quaternions :

$$q(q' \otimes x) = qq' \otimes x \quad (q' \otimes x)q = q'q \otimes x$$

Un espace vectoriel quaternionique possède une multiplication à droite et à gauche.

1.2 Somme de deux espaces vectoriels sur H

Soient $E = \mathbf{H} \otimes_{\mathbf{R}} E', F = \mathbf{H} \otimes_{\mathbf{R}} F'$ deux espaces vectoriels sur $\mathbf{H}$; dès lors, on peut faire leur somme direct :

$$E \oplus F = \mathbf{H} \otimes_{\mathbf{R}} (E' \oplus F')$$

Il s'agit du produit cartésien qui possède une multiplication à droite et à gauche par les quaternions :

$$q(e \oplus f) = qe \oplus qf \quad (e \oplus f)q = eq \oplus fq$$

1.3 Le produit tensoriel de deux espaces sur H

Etant donnés deux espaces vectoriels quaternioniques, on peut réaliser leur produit tensoriel :

$$E = \mathbf{H} \otimes_{\mathbf{R}} E' \quad F = \mathbf{H} \otimes_{\mathbf{R}} F'$$

$$E \otimes_{\mathbf{H}} F = (\mathbf{H} \otimes_{\mathbf{H}} \mathbf{H}) \otimes_{\mathbf{R}} E \otimes_{\mathbf{R}} F$$

Comme par multiplication on a $\mathbf{H} \otimes_{\mathbf{H}} \mathbf{H} = \mathbf{H}$, le produit tensoriel est aussi :

$$E \otimes_{\mathbf{H}} F = \mathbf{H} \otimes_{\mathbf{R}} E \otimes_{\mathbf{R}} F$$

$$eq \otimes f = e \otimes qf$$

C'est un espace vectoriel quaternionique.

$$q(e \otimes f) = qe \otimes f \quad (e \otimes f)q = e \otimes fq$$

2 Les algèbres de Clifford quaternioniques

2.1 Les formes quadratiques quaternioniques

On se donne un espace vectoriel quaternionique, $E = \mathbf{H} \otimes_{\mathbf{R}} E'$ et une forme bilinéaire symétrique $\tilde{g}$ sur E' (ce qui est équivalent à une forme quadratique $\tilde{Q}$).

La forme bilinéaire sur E est donné par les produits scalaires suivants :

$$g(q \otimes x, q' \otimes y) = qq'\tilde{g}(x, y)$$

Elle est non symétrique et vérifie :

$$g(qe, f) = qg(e, f) \quad g(e, fq) = g(e, f)q \quad g(eq, f) = g(e, qf)$$

$$Q(e) = g(e, e) \quad Q(q \otimes x) = q^2\tilde{Q}(x)$$

Dans la base qui diagonalise $\tilde{Q}$, Q est aussi diagonalisable.

Remarque : on peut aussi définir une forme hermitienne quaternionique en prenant $q\bar{q}'$ dans la définition.

2.2 L'algèbre de Clifford quaternionique

On considère la somme directe des produits tensoriels d'un espace vectoriel E par lui-même :

$$T(E) = \mathbf{H} \oplus E \oplus (E \otimes_{\mathbf{H}} E) \oplus \dots$$

et on quotiente par les relations suivantes :

$$e \otimes f + f \otimes e = -g(e, f) - g(f, e)$$

On a :

$$Cliff_{\mathbf{H}}(E, Q) = T(E)/\sim = \mathbf{H} \otimes_{\mathbf{R}} Cliff_{\mathbf{R}}(E', \tilde{Q})$$

Et aussi, pour un vecteur e :

$$e^2 = -Q(e)$$

3 L'algèbre linéaire quaternionique

3.1 Les endomorphismes

On se donne deux espaces vectoriels quaternioniques $E = \mathbf{H} \otimes_{\mathbf{R}} E'$ et $F = \mathbf{H} \otimes_{\mathbf{R}} F'$. Un morphisme f de E dans F est une application linéaire à droite de E dans F :

$$f(eq) = f(e)q$$

Un endomorphisme $f \in End(E)$ de E est un morphisme de E dans E. Un automorphisme $f \in Aut(E)$ de E est un endomorphisme inversible à gauche et à droite. L'ensemble des automorphismes forme un groupe de Lie quaternionique.

3.2 Les matrices quaternioniques

Si on se donne une base de E, les endomorphismes de E sont alors assimilables à des matrices à coefficients dans $\mathbf{H}$. En effet un vecteur $e = q \otimes x$ s'écrit aussi $e = (1 \otimes x)q$ et on se place sur une base $e_i = 1 \otimes x_i$. Le produit des matrices correspond à la composition des endomorphismes. On a :

$$End(E) \cong M_n(\mathbf{H})$$

$$Aut(E) \cong Gl_n(\mathbf{H})$$

4 Les fibrés quaternioniques

On se donne une variété de base M, un fibré vectoriel E sur M est constructible par des cocycles de Čech. On a un recouvrement de M, $\cup_i U_i$ et sur chaque intersection $U_i \cap U_j$, on se donne des fonctions $g_{ij} \in Gl_n(\mathbf{H})$ tel que $g_{ij} g_{jk} = g_{ik}$. Un fibré vectoriel quaternionique possède une multiplication à droite par un quaternion. Une variété différentielle est appelée quaternionique si son fibré tangent peut être muni d'une structure de fibré quaternionique.

5 Les connexions quaternioniques

Les connexions quaternioniques sont données par des connexions sur les fibrés E qui conservent la structure quaternionique ; c'est-à-dire que :

$$\nabla(sq) = \nabla(s)q$$

pour toute section s et tout quaternion q. De plus pour toute fonction quaternionique q, on a aussi :

$$\nabla_X(sq) = sX(q) + \nabla_X(s)q$$

(on a appliqué un vecteur X à une fonction q).

6 Définition du groupe $Spin^H(n)$

On appelle groupe spinoriel quaternionique le groupe suivant :

$$Spin^H(n) = Spin(n) \times_{\{1,-1\}} SU(2)$$

On identifie $(-g, -q)$ avec (g, q).

6.1 L'algèbre de Clifford quaternionique

On considère l'algèbre de Clifford quaternionique :

$$Cliff_n(\mathbf{H}) = \mathbf{H} \otimes_{\mathbf{R}} Cliff_n$$

Dès lors, on peut voir le groupe spinoriel quaternionique plongé dans l'algèbre de Clifford quand on considère les éléments de norme 1. On prend le produit pair de vecteurs de norme 1, $e = q \otimes x$, $|q| = 1$ et $|x| = 1$. On a :

$$Spin(n) \cap H = \{1, -1\}$$

6.2 Représentation spinorielle

Les algèbres de Clifford possèdent la propriété suivante [F] :

$$Cliff^{\mathbf{C}}_{n+2} = Cliff^{\mathbf{C}}_n \otimes_{\mathbf{C}} M_2(\mathbf{C})$$

Le produit tensoriel de l'algèbre de Clifford avec les endomorphismes de rang 2 des quaternions. On construit ainsi une représentation du groupe spinoriel quaternionique $Spin^H(n)$ dans $\mathbf{R}^3 \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}^{2^n}$. Il s'agit du produit tensoriel de deux représentations, pour $Spin(n)$ et pour $SU(2)$.

7 Les $Spin^H$-structures

7.1 Définition

Une $Spin^H$-structure sur un fibré principal $SO(n)$ Q est une réduction du groupe à un $Spin^H(n)$ fibré P selon un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} P \times Spin^H(n) & \rightarrow & P \\ \downarrow & & \downarrow \\ Q \times SO(n) & \rightarrow & Q \end{array}$$

7.2 Existence d'une $Spin^H$-structure

On a un isomorphisme $SU(2) \cong Spin(3)$ de sorte qu'il existe une injection :

$$Spin^H(n) \hookrightarrow Spin(n+3)$$

Se donner une $Spin^H$-structure sur TM est donc équivalent à se donner une *Spin*-structure sur le fibré $TM \oplus F$ où F est un $SU(2)$ fibré.

$$\begin{array}{ccc} Spin^H(n) & \hookrightarrow & Spin(n+3) \\ \downarrow & & \downarrow \\ SO(n) \times SO(3) & \hookrightarrow & SO(n+3) \end{array}$$

Se donner une *Spin* structure est aussi équivalent à l'annulation de la seconde classe de Stiefel-Whitney qui est stable, on a donc :

$$0 = \omega_2(TM \oplus F) = \omega_2(TM) + \omega_2(F) + \omega_1(TM)\omega_1(F) = \omega_2(TM) + \omega_2(F)$$

car la variété est supposée orientable.

$$\omega_2(TM) = \omega_2(F)$$

car les coefficients sont $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

On a donc démontré le théorème suivant :

Théorème 1 *L'existence d'une $Spin^H$-structure est équivalente à trouver une représentation de la seconde classe de Stiefel-Whitney par un $SU(2)$ fibré.*

8 L'opérateur de Dirac pour une $Spin^H$-structure

On se donne une $Spin^H$-structure sur le fibré tangent. On a donc une connexion de Levi-Civita sur le fibré tangent et on se donne une connexion A sur le $SU(2)$ fibré E associé à la $Spin^H$-structure. On peut dès lors définir un opérateur de Dirac $\mathcal{D}_A$:

$$\mathcal{D}_A(\psi) = \sum_i e_i \nabla^A_{e_i}(\psi)$$

avec ∇^A la connexion sur le fibré $TM \otimes E$ et (e_i) une base orthonormée du tangent local.

9 Les équations de Seiberg-Witten quaternioniques

On se place dans le cas où le fibré des spineurs est tensorisé par un fibré en droites quaternionique et la connexion est à valeurs dans $i\mathbf{R} + j\mathbf{R} + k\mathbf{R}$. Les équations de Seiberg-Witten portent sur une paire (A, ψ) avec A une connexion et ψ un spineur quaternionique, de sorte que l'on a :

$$\mathcal{D}_A(\psi) = 0$$

et

$$F_+(A) = -\frac{1}{4}\omega_\psi$$

$F_+(A)$ est la partie auto-duale de la courbure de la connexion A et ω_ψ est la 2-forme associée au spineur [F].

References

[F] T.Friedrich, "Dirac operators in Riemannian Geometry", Graduate Studies in Mathematics vol 25, AMS, 2000.