

Les équations KdV sur les variétés

A.Balan

February 23, 2018

Abstract

Sur des variétés différentielles, des équations KdV sont définies.

1 Les équations KdV

Les équations KdV sont les suivantes [KdV] :

$$u_t = u_{xxx} + 6uu_x$$

avec u_t la dérivée par rapport au temps et u_x celle par rapport à l'espace.

Il s'agit d'un système intégrable [D].

2 Les équations KdV sur des variétés

On se donne une variété différentielle M et un champ de vecteurs X . Dès lors, les équations KdV peuvent être définies pour une fonction lisse sur M :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = X^3(f) + 6f.X(f)$$

Il s'agit d'un système intégrable. On pourrait remplacer la dérivée par rapport au temps par un autre champ de vecteurs Y :

$$Y(f) = X^3(f) + 6f.X(f)$$

Il y a une paire de Lax A, B :

$$A = -X^2 + f \quad B = 4X^3 - 3fX - 3X(f)$$

Les équations peuvent se mettre sous la forme :

$$\frac{\partial A}{\partial t} = [A, B]$$

Cela montre que les équations sont intégrables.

3 Les équations KdV sur le tore

Si on choisit un tore comme variété, on peut se placer sur $[0, 1]^2$ et se donner un champ de vecteur constant $X = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}$.

3.1 Développement en séries de Fourier

La fonction u est alors développable en séries de Fourier :

$$u(x, y, t) = \sum_{k, k'} u_{k, k'}(t) e^{2i\pi kx} e^{2i\pi k' y}$$

et l'équation KdV se calcule sur les coefficients de la série de Fourier.

$$\frac{\partial u_{k, k'}(t)}{\partial t} = (2i\pi)^3 (ak + bk')^3 u_{k, k'}(t) + 6 \sum_{i, i'} 2i\pi (ai + bi') u_{i, i'}(t) u_{k-i, k'-i'}(t)$$

3.2 Solution quand la pente est rationnelle

On peut se servir de la solution de KdV [D] pour définir une solution à KdV sur le tore. En effet,

$$u(x, t) = \frac{2\chi^2}{\cosh^2(\chi(x - 4\chi^2 t - \eta))}$$

est la solution usuelle de KdV, ce qui donne dans le cas périodique, x est remplacé par $(x/2a) + (y/2b)$ et on pose, comme la pente est rationnelle, $\mu_k = 2kpa = 2kqb$, on choisit $\chi = 2i\pi\mu_k$, c'est la solution de KdV sur le tore :

$$u_k(x, y, t) = \frac{-8\pi^2 \mu_k^2}{\cos^2(2\pi(kpx + kqy) + 32\pi^3 \mu_k^3 t - \eta)}$$

On a une famille indexée par les entiers de solutions à KdV sur le tore.

4 Résolution par le flot

On considère le flot du champ de vecteurs X , $g_z = e^{zX}$ on a :

$$\frac{\partial f(g_t(x))}{\partial t} = X(f(g_t(x)))$$

On pose :

$$u(x, z, t) = u(g_z(x), t) = v_x(z, t)$$

Dès lors on a :

$$\frac{\partial v_x(z, t)}{\partial t} = \frac{\partial^3 v_x(z, t)}{\partial z^3} + 6v_x(z, t) \frac{\partial v_x(z, t)}{\partial z}$$

De sorte qu'on obtient KdV usuel pour v_x , la solution de KdV est donc :

$$u(x, t) = v_x(0, t) = u(x, 0, t)$$

References

- [D] M.Dunajski, "Solitons, Instantons and Twistors", Oxford University Press, New-York, 2010.
- [KdV] D. J. Korteweg et G. de Vries, "On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal, and on a New Type of Long Stationary Waves ", Philosophical Magazine, vol. 39, 1895, p. 422-443.