A Equação Guedes-Schroedinger: Uma Teoria Quântica-Relativística Para o Átomo com um Núcleo e um Elétron

Edigles Guedes

4 de novembro de 2017

Resumo. Nós ampliamos a apresentação da teoria proposta no artigo precedente [1], a fim de que nossa concepção alcançasse um público mais amplo.

PACS numbers: 02.20.−a, 02.30.Jr, 03.30.+p, 03.65.−w, 03.65.Pm.

1. Introdução: um pouco da história da teoria quântica

No mês de janeiro do ano de 1926, Erwin Schroedinger (Viena-Erdberg, 12-8-1887 — Viena, 4-1-1961) publicou no *Annalen der Physick* o artigo "*Quantisierung als Eigenwertproblem*" (Quantização como um Problema de Autovalor) em mecânica de ondas (ou mecânica quântica não-relativística) e deduziu a equação física que hoje é conhecido como a equação de Schroedinger. Neste artigo ele deu uma "derivação" da equação de onda para sistemas independentes de tempo, e mostrou que fornecia autovalores de energia corretos para o átomo hidrogenoide (com um núcleo e um életron). Este artigo é considerado universalmente como uma das conquistas mais proeminentes do século XX, pois revolucionou a mecânica quântica, e com isto toda a física e a química. Um segundo artigo foi apresentado apenas quatro semanas depois e resolveu o oscilador harmônico quântico, o rotor rígido e a molécula diatômica, e dá uma nova derivação da equação de Schroedinger. Um terceiro artigo, em maio do mesmo ano, mostrou a equivalência da sua abordagem à de Heisenberg e deu o devido tratamento do efeito Stark. Um quarto artigo de sua série mais marcante mostrou como tratar os problemas nos quais o sistema muda com o tempo, como nos problemas de dispersão. Estes trabalhos foram os principais de sua carreira e imediatamente reconhecidos como de importância primordial pela comunidade científica de então.

A equação popularíssima de Schroedinger dependente do tempo é

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\Psi+V\Psi=\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}, \tag{1.1}$$

onde μ é a massa reduzida, $\hbar$ é a constante de Planck reduzida, isto é, h dividido por 2π, ∇^2 é o operador Laplaciano, V é a energia potencial e $\Psi:=\Psi(x,y,z,t)$ é a função de onda. Se usarmos o formalismo de operadores [2, pp. 8 - 30], podemos reescrevê-la como

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=\hat{H}\Psi, \tag{1.2}$$

aqui, temos

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V. \tag{1.3}$$

Em 19 de julho de 2012, este autor derivou, por meio de um experimento mental, uma equação que generaliza a equação de Schroedinger dependente do tempo, tal como é escrito abaixo:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla'^2\Psi' + V'\Psi' = \mathrm{i}\hbar\frac{\partial\Psi'}{\partial t'} + \frac{\hbar^2}{2\mu c^2}\frac{\partial^2\Psi'}{\partial t'^2}; \tag{1.4}$$

bem como derivou a equação de sua autofunção, como segue:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla'^2\psi' + V'\psi' = E\psi' - \frac{E^2}{2\mu c^2}\psi', \tag{1.5}$$

porquanto considerou $\Psi' = \psi' \cdot \exp(-\mathrm{i}(E - E^2 / (2\mu c^2))t / \hbar)$; pois levou em conta a contração do espaço-tempo, com relação a perda de energia. Daí, conseguiu a autofunção aceitável, em coordenadas esféricas,

$$\psi_{nlm_l}(r, \theta, \varphi) = e^{\mathrm{i}m_l\varphi}\mathrm{sen}^{|m_l|}\theta P_l^{|m_l|}(\cos\theta)e^{-Zr/(na_0)}\left(\frac{Zr}{a_0}\right)^l L_n^l\left(\frac{Zr}{a_0}\right).$$

Porém, somente publicou estas equações, conhecidas por Guedes-Schroedinger, em 15 de março de 2013, no viXra [1]. E, até hoje, decorrido 4 (quatro) anos, desde a sua publicação, as equações permanecem desconhecidas nos meios acadêmicos de Física.

Este artigo tem dois objetivos eminentes: primeiro, reapresentar a derivação da equação Guedes-Schroedinger; segundo, iremos futuramente aplicar a teoria ora desenvolvida nestas páginas em alguns casos clássicos de física quântica ondulatória; a fim de que este tratamento desperte o interesse de futuras gerações de físicos.

Como nasceu a equação de Guedes-Schroedinger? Quando aprendemos a mecânica quântica-relativística dá-se, primeiramente, por meio da equação de Klein-Gordon para a partícula subatômica de píon (ou méson pi); daí, segue-se a equação de Dirac para o elétron e o pósitron; e, geralmente, os livros didáticos finalizam com a apresentação da equação de Hermann Weyl para o neutrino [3]. Tudo isso em linhas gerais, com as devidas modificações de autor para autor, o que é óbvio. Desafortunadamente, é costume de muitos imiscuir no meio da explanação sobre a equação de Klein-Gordon, a equação de Schroedinger; por exemplo, veja [3, p. 18], onde o autor discorre sobre o Lagrangeano e o tensor energia-momento da equação de Schroedinger. No entanto, não houve sequer uma linha escrita sobre a derivação da equação de Schroedinger em termos de mecânica quântica-relativística. Por que não houve? Porque o autor desconhece tal derivação; e transpõe, sem mais nem menos, uma equação quântica não-relativística para o meio de uma apresentação quântico-relativística. Pois bem, é justamente esta lacuna do conhecimento humano que pretendemos preencher.

Quais as raízes da equação Guedes-Schroedinger? Em outras palavras, qual o pontapé inicial que levou à descoberta da equação? As próprias palavras de Schroedinger. Ao ler o artigo "*Quantisierung als Eigenwertproblem*", traduzido para o inglês com o título "*Quantisation as a Problem of Proper Values*" (Part I), (*Annalen der Physic*, (4), vol. 79, 1926), em E. Schroedinger (1982): *Collected papers on wave mechanics*, Chelsea Publications, pp. 1-12, logo no primeiro parágrafo, o autor escreve:

"*A nova concepção é capaz de generalização (grifo nosso), e os sucessos, acredito, são muito profundos na verdadeira natureza das regras quânticas.*"[1.1]

O próprio Schroedinger tinha consciência de que sua concepção da equação do átomo hidrogenoide era capaz de uma generalização; porém, ele não nos forneceu a sobredita generalização, apenas conjecturou sobre sua futura existência.

Quer ouvir algo horripilante sobre a equação de Schroedinger? Pois bem, a equação de Schroedinger dependente do tempo não é uma equação de onda, mas uma equação física de difusão. Como é que falamos de função de onda, se a equação à qual essa função se aplica é uma equação de difusão? Veja o que escreve Peter Atkins e Ronald Friedman [4, p. 40]:

"*O alinhamento da relatividade e da mecânica quântica foi alcançado por P.A.M. Dirac, que encontrou uma maneira de tratar o espaço e o tempo simetricamente, e no processo explicou a existência do spin de um elétron. Finalmente, ele pode notar que a equação de Schroedinger dependente do tempo não é uma equação de onda (grifo nosso). Uma equação de onda tem uma segunda derivada em relação ao tempo, enquanto que a equação de Schroedinger possui uma primeira derivada. Temos de concluir que a equação de Schroedinger dependente do tempo é, portanto, um tipo de equação de difusão, uma equação da forma*

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D\nabla^2 f,$$

onde f é uma densidade de probabilidade e D é um coeficiente de difusão. Há talvez uma satisfação intuitiva na noção de que as soluções da equação básica da mecânica quântica evoluam para algum tipo de difusão."[1.2]

1.1. "The new conception is capable of generalisation, and strikes, I believe, very deeply at the true nature of the quantum rules."

1.2. "*The alignment of relativity and quantum mechanics was achieved by P.A.M. Dirac, who found a way of treating space and time symmetrically, and in the process accounted for the existence of electron spin.* ***Finally, it should be noted that the time-dependent Schrödinger equation is not a wave equation*** *(grifo nosso). A wave equation has a second derivative with respect to time, whereas the Schrödinger equation has a first derivative. We have to conclude that the time-dependent Schrödinger equation is therefore a kind of diffusion equation, an equation of the form*

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D\nabla^2 f,$$

Desafortunadamente, o próprio Dirac, com todo seu aparato matemático e físico, também não conseguiu derivar uma equação de onda para o átomo com um núcleo e um elétron.

A palavra "generalização", usada por Schroedinger, a lacuna do conhecimento em mecânica quântica-relativística e o fato gritante que a equação de Schroedinger dependente do tempo não se trata de uma equação de onda, mas de uma equação de difusão, são os fios condutores dessa nova concepção.

Diante do que foi dito anteriormente, ressaltamos que o artigo de 2012, publicado em 2013, é um artigo ímpar; pois, pela primeira vez na história da física quântica, obtemos uma equação de onda dependente do tempo para o átomo com um núcleo e um elétron.

2. A derivação da equação clássica de Schroedinger

O modelo físico inicial, que adotamos frequentemente para derivar a equação clássica de Schroedinger para o átomo hidrogenoide, é o modelo heliocêntrico, em que o sol representa o núcleo atômico e, ao seu redor, gira um planeta chamado elétron. Isto é possível, porque usamos a técnica de massa reduzida, em que substituímos o átomo real por um átomo no qual o núcleo é infinitamente massivo e o elétron tem massa reduzida μ, dada por

$$\mu = \left(\frac{M}{m+M}\right) m,$$

aqui, m é a massa real do elétron e M é a massa real do núcleo. Veja Fig. 2.1, para o sistema real and Fig. 2.2, para o modelo do sistema de Schroedinger.

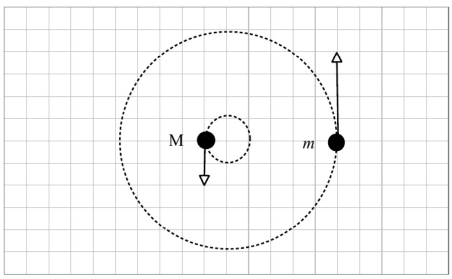

Figura 2.1. Sistema real. Um elétron de massa m e um núcleo de massa M movem-se em torno do centro de massa fixo, ambos em trajetória circular.

---

where f is a probability density and D is a diffusion coefficient. There is perhaps an intuitive satisfaction in the notion that the solutions of the basic equation of quantum mechanics evolve by some kind of diffusion."

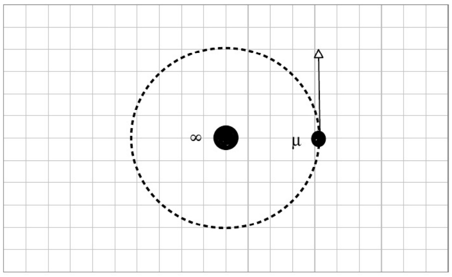

Figura 2.2. Modelo do sistema de massa reduzida de Schroedinger. Neste modelo atômico equivalente, uma partícula de massa reduzida μ move-se em torno do núcleo estacionário de massa infinita, em trajetória circular.

O leitor pode comparar tudo o que foi dito com a Figura 7-1, em [5, p. 302].

Uma vez que o núcleo infinitamente massivo deve permanecer estacionário, basta tratarmos apenas do movimento do elétron de massa reduzida no modelo proposto.

Portanto, consideremos um elétron de massa reduzida μ, o qual se move sob a força do potencial coulombiano

$$V = V(x, y, z) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \tag{2.1}$$

onde x, y and z são coordenadas retangulares do elétron de carga $-e$ em relação ao núcleo fixo na origem. A raiz quadrada no denominador é justamente a distância r, a qual separa o elétron do núcleo. A carga nuclear é $+Ze$ ($Z = 1$ para o átomo de hidrogênio neutro, $Z = 2$ para o átomo de hélio uma vez ionizado etc...).

A energia total E desse sistema tem a seguinte expressão clássica

$$\frac{1}{2\,\mu}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V(x, y, z) = E, \tag{2.2}$$

onde p_x, p_y e p_z são as componentes x, y e z do momento linear do elétron. Logo, o primeiro termo à esquerda é a energia cinética do sistema e o segundo é a sua energia potencial. Substituindo as grandezas dinâmicas p_x, p_y, p_z e E pelos operadores diferenciais associados, isso nos dá a equação de operador

$$-\frac{\hbar^2}{2\,\mu}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) + V(x, y, z) = \mathrm{i}\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}, \tag{2.3}$$

operando com cada termo da função de onda

$$\Psi = \Psi(x, y, z, t), \tag{2.4}$$

obtemos a equação de Schroedinger para o sistema

$$\begin{gathered} -\frac{\hbar^2}{2\,\mu}\left(\frac{\partial^2\,\Psi(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\,\Psi(x, y, z, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\,\Psi(x, y, z, t)}{\partial z^2}\right) \\ +V(x, y, z)\;\Psi(x, y, z, t) = \mathrm{i}\hbar\,\frac{\partial\,\Psi(x, y, z, t)}{\partial t}. \end{gathered} \tag{2.5}$$

Por conveniência, escreveremos isso como

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\Psi + V\Psi = \mathrm{i}\hbar\,\frac{\partial\Psi}{\partial t}, \tag{2.6}$$

onde foi usado o símbolo

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

denotado operador Laplaciano, ou ainda, "nabla dois" em coordenadas retangulares.

A equação (2.6) é a célebre *equação de Schroedinger dependente do tempo*; ela é uma equação não-relativística e, como explicamos anteriormente, é uma equação de difusão.

Pela técnica de separação de variáveis, uma vez que a função potencial $V(x, y, z)$ é independente do tempo, é fácil mostrar que existem soluções da equação de Schroedinger do tipo

$$\Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z)\, e^{-\mathrm{i}\,Et/\hbar},$$

onde a autofunção $\psi(x, y, z)$ é uma solução da *equação de Schroedinger independente do tempo*

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\psi(x, y, z) + V\psi(x, y, z) = E\psi(x, y, z). \tag{2.7}$$

Tudo que foi visto aqui, até o momento, é o que encontramos em livros de Física Quântica, por exemplo, [5, pp. 301-304].

Na seção seguinte, começaremos nossa aventura empolgante pelo mundo quântico-relativístico.

3. A derivação da equação de Guedes-Schroedinger por experimento mental.

O que é um experimento mental? Em filosofia, em física ou em matemática, um experimento mental ou experiência mental (da expressão alemã *Gedankenexperiment*) constitui um raciocínio lógico sobre um experimento não realizável na prática, mas cujas consequências podem ser exploradas pela imaginação, tanto por física quanto por matemática ou por filosofia. Por isso o autor deste artigo prefere o nome de experiência de pensamento ou experimento de imaginação à experimento mental ou experiência mental; pois o protagonista principal dessa sorte de experimento é a imaginação (seja ela física, matemática ou filosófica).

Esses experimentos são utilizados para compreender aspectos não experimentáveis do Universo. A expressão foi popularizada pelos *Gedankenexperiment* utilizados por Albert Einstein, o mestre da imaginação física, para explorar algumas das consequências da Teoria da Relatividade. Aqui, podemos ressaltar o paradoxo dos gêmeos, talvez o paradoxo mais famoso da Relatividade Especial, e que se trata de um experimento mental.

Entretanto, o conceito de experimento mental é muito mais antigo e remonta à tradição grega. Um famoso exemplo é a alegoria do mito da caverna de Platão, que era discípulo de Sócrates. Os experimentos mentais em física remontam ao menos à época de Galileu Galilei.

Muitos experimentos mentais incluem aparentes paradoxos sobre fatos conhecidos ou aceitos que têm permitido reformular ou precisar em maior medida diferentes teorias científicas. Em outras palavras, os experimentos mentais sempre foram usados para elucidar aspectos de uma teoria preexistente.

O artigo sobre a equação de Guedes-Schroedinger, publicado em 15 de março de 2013, no viXra [1], rompe com duas barreiras, antes intransponíveis: primeiro, como já foi elencada anteriormente, a questão de uma equação quântico-relativística para o átomo hidrogenoide; segundo, tão importante quanto este último, é o fato de derivarmos as equações acima por um experimento mental, algo inédito, ou seja, partimos de um experimento mental para a construção de uma teoria. Por isso, o artigo supracitado é revolucionário e a maioria das pessoas optam por não se deter a estudá-lo.

Nós repetiremos tal experimento mental nessas páginas, porém, daremos um novo viés; a fim de que chame a atenção não de acadêmicos, mas de uma nova geração de físicos ou de aficionados. Com tal intuito em mente, exploraremos o universo das revistas em quadrinhos, já que elas contribuem de maneira significativa para a popularização da ciência, inclusive, alcançando um público leigo.

Esperamos que o leitor coloque em sua mochila de viagem ao mundo quântico, a seguinte citação de Albert Einstein: "*Nada acontece até algo se mover*".

Pronto! agora comecemos a nossa viagem.

Imaginemos que o leitor encontrou a roupa do Homem-Formiga. E, curioso, como se espera que sejam todos os bons leitores de artigos de ciências naturais, toma a decisão de vestir o traje de super-herói. Ao testar a roupa, sem querer, ativa a partícula do Dr. Henry Jonathan "Hank" Pym, que é formado em Física, com especialização em Física Quântica. Num piscar de olhos, o leitor encolherá; visto que a partícula Pym diminui a distância entre os átomos. Suponhamos primeiramente que ela seja capaz de encolher o leitor à distância subatômica apropriada para observar o átomo hidrogenoide. Segundo, o leitor estará acompanhado de sua formiga, que também encolheu sob o efeito da partícula Pym. Daí então, o leitor resolve explorar esse admirável mundo novo. Sobe em sua formiga alada, que consegue atingir velocidades altíssimas, muito próximo a velocidade da luz. Instintivamente, sua formiga não atingirá a velocidade da luz; pois, caso o faça, transformar-se-ia em energia, segundo a famosa equação de Einstein: $E = m_0 c^2$. E este não é seu intuito ao fazer uma programação turística pelo mundo subatômico. De repente, você resolve visitar uma nuvem de átomos hidrogenoides numa estrela hipergigante. Bastante emocionado com o que vê por ali, você aumenta a velocidade de sua formiga alada, de maneira gradativa, a ponto de quase atingir a velocidade da luz. Isto sem perder de vista os átomos hidrogenoides; que, do seu ponto de vista, parecem correr ao seu encontro. Que fenômeno ocorreria em cada átomo hidrogenoide?

Obviamente, podemos imaginar que a leitora encontrou a roupa da Vespa. E, curiosa, como se espera que sejam todos os bons leitores de artigos de ciências naturais, toma a decisão de vestir o traje da super-heroína. Ao testar a roupa, sem querer, ativa a partícula de seu pai, o Dr. Henry Jonathan “Hank” Pym, que é formado em Física, com especialização em Física Quântica. Imediatamente, a leitora astuta encolherá; visto que a partícula Pym diminui a distância entre os átomos. Suponhamos primeiramente que ela seja capaz de encolher a leitora à distância subatômica apropriada para observar o átomo hidrogenoide. Segundo, a leitora estará acompanhada de suas asas enormes, que também encolheu sob o efeito da partícula Pym. Daí então, a leitora resolve explorar esse admirável mundo novo. Ativa suas asas elegantes, que consegue atingir velocidades altíssimas, muito próximo a velocidade da luz. Instintivamente, você não atingiria a velocidade da luz, pois caso o faça, transformar-se-ia em energia, segundo a famosa equação de Einstein: $E = m_0 c^2$. E este não é seu intuito ao fazer uma programação turística pelo mundo subatômico. De repente, a leitora sagaz resolve visitar uma nuvem de átomos hidrogenoides numa estrela hipergigante. Bastante emocionada com o que vê por ali, você aumenta a velocidade de suas asas esplendorosas, de maneira gradativa, a ponto de quase atingir a velocidade da luz. Isto sem perder de vista os átomos hidrogenoides; que, do seu ponto de vista, parecem correr ao seu encontro. Que fenômeno ocorreria em cada átomo hidrogenoide?

Vamos considerar, então, que algum leitor ou leitora perspicaz resolve arguir o seguinte: As asas, tanto da formiga, quanto da Vespa, para impulsionar o Homem-Formiga ou a Vespa, bateriam numa velocidade maior do que a velocidade da luz, para que o corpo dos nossos heróis fossem um bocadinho menos rápido do que a velocidade da luz. E, aí, o que você faria, Dr. Pym? Qual experimento mental você usaria?

Poderíamos mudar um pouco o nosso experimento mental da seguinte maneira:

Imaginemos que o leitor encontrou a roupa do Homem-Formiga; a leitora esbarrou com a roupa da Vespa. Ambos, curiosos, como se espera que sejam todos os bons leitores de artigos de ciências naturais, tomam a decisão de vestir o traje do super-herói ou da super-heroína. Ao testarem a roupa, sem querer, ativa a partícula do Dr. Henry Jonathan “Hank” Pym, que é formado em Física, com especialização em Física Quântica. Num piscar de olhos, o leitor ou a leitora encolherá; visto que a partícula Pym diminui a distância entre os átomos. Suponhamos primeiramente que ela seja capaz de encolher o leitor ou a leitora à distância subatômica apropriada para observar o átomo hidrogenoide. Daí então, o leitor ou a leitora resolve explorar esse admirável mundo novo. Cheio de edifícios imponentes, ruas brilhantes etc. O que fazer? Aí, dá-se conta do sistema de transportes existentes, observando que vários táxis se movimentam de lá para cá. Você ergue a mão e grita por um táxi qualquer. De repente, um táxi de feixe de luz breca ao seu lado. Você se assusta. Põe a mão no coração, que palpita com a surpresa. Você respira profundamente, e entra no veículo. Ao adentrar no táxi, o motorista Fóton indaga: “Vai aonde?” Você responde: “Queria pegar carona até uma nuvem átomos hidrogenoides, numa estrela hipergigante”. O Fóton declara: “E lá vamos nós!” E dispara em louca corrida pela cidade Quântica. Bastante emocionado com o que vê por ali, você pede ao motorista Fóton para aumentar a velocidade de seu táxi de luz, de maneira gradativa, a ponto de quase atingir a velocidade da luz. Isto sem perder de vista os átomos hidrogenoides; que, do seu ponto de vista, parecem correr ao seu encontro. Que fenômeno ocorreria em cada átomo hidrogenoide?

Muito bem!

Se o leitor ou a leitora adotasse o modelo da massa reduzida para representar o átomo hidrogenoide, notaria um estranho fenômeno. Uma vez que estaria próximo da velocidade da luz, a órbita do elétron tornar-se-ia cada vez mais próximo de seu núcleo, pois sua órbita seria levemente elíptica, em vez de circular, em virtude da contração da coordenada x' em relação a x, por meio da fórmula: $x' = \gamma(x - vc)$, onde $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, enquanto a coordenada y' em relação a y permaneceria igual, segundo as transformações de Lorentz. Veja Fig.1 e Fig. 2.

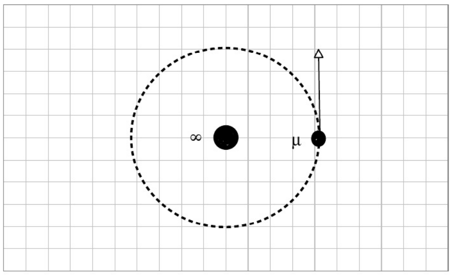

Figura 3.1. Modelo do sistema de massa reduzida de Schroedinger. Neste modelo atômico equivalente, uma partícula de massa reduzida μ move-se em torno do núcleo estacionário de massa infinita, em trajetória circular. Note que não se fala em momento algum de movimento do observador.

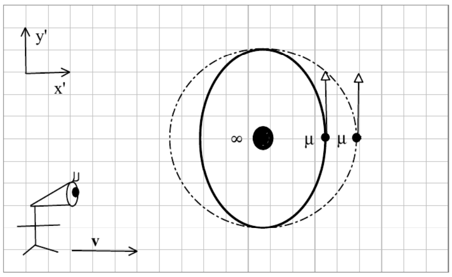

Figura 3.2. Modelo do sistema de massa reduzida de Guedes-Schroedinger. Aqui, também, uma partícula de massa reduzida move-se em torno de um núcleo estacionário e de massa infinita, com a distinção que a trajetória é elíptica. Por quê? Porque as transformações de Lorentz, em que há uma contração da coordenada x' em relação a x, expressa pela seguinte fórmula: $x' = \gamma(x - vc)$, onde $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, força a partícula a realizar uma trajetória elíptica. Frisamos que, neste modelo, o observador está em movimento.

Vamos sair de 2-D para 3-D, acrescentando uma nova coordenada, denotada por z, respectivamente, z'. Por transformações de Lorentz [5, p. 841, (A-12)], temos

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}(x - vc), \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}(t - vx/c^2). \end{aligned} \tag{3.1}$$

De (3.1), deduzimos facilmente que

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}(x'+vt'),\\ y &= y',\\ z &= z',\\ t &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}(t'+vx'/c^2). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Substitua o lado direito das coordenadas cartesianas em (3.2) no lado direito da coordenadas cartesianas em (2.1); logo, o potencial coulombiano seria

$$V' = V(x',y',z',t') = -\frac{Ze^2\sqrt{1-v^2/c^2}}{4\pi\epsilon_0\sqrt{(x'+vt')^2+(1-v^2/c^2)y'^2+(1-v^2/c^2)z'^2}}, \tag{3.3}$$

e poderíamos modificar o operador Laplaciano para o operador D'alembertiano

$$\Box'^2 = \nabla'^2 + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2} = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}. \tag{3.4}$$

Por conseguinte, acharíamos a seguinte equação de operador

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\right) + V(x',y',z',t') = \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \tag{3.5}$$

operando com cada termo da função de onda

$$\Psi' = \Psi(x',y',z',t'); \tag{3.6}$$

encontramos, assim, a equação Guedes-Schrödinger para o sistema em questão

$$\begin{aligned} &-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{\partial^2\Psi(x',y',z',t')}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2\Psi(x',y',z',t')}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2\Psi(x',y',z',t')}{\partial z'^2}\right.\\ &\left.+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi(x',y',z',t')}{\partial t'^2}\right) + V(x',y',z',t')\,\Psi(x',y',z',t') = \mathrm{i}\hbar\frac{\partial\Psi(x',y',z',t')}{\partial t'}, \end{aligned} \tag{3.7}$$

A equação (3.7) pode ser escrita como

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\Box'^2\Psi' + V'\Psi' = \mathrm{i}\hbar\frac{\partial\Psi'}{\partial t'}; \tag{3.8}$$

contudo, por conveniência, escreveremos dessa maneira

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla'^2\Psi' + V'\Psi' = \mathrm{i}\hbar\frac{\partial\Psi'}{\partial t'} + \frac{\hbar^2}{2\mu c^2}\frac{\partial^2\Psi'}{\partial t'^2}. \tag{3.9}$$

De (3.3), após uma breve manipulação algébrica, obtemos a seguinte equação da força do potencial coulombiano

$$\begin{aligned} V' = V(x',y',z',t') &= -\frac{Ze^2\sqrt{1-v^2/c^2}}{4\pi\epsilon_0\sqrt{(x'+vt')^2+(1-v^2/c^2)y'^2+(1-v^2/c^2)z'^2}}\\ &= -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0\sqrt{(x'+vt')^2/(1-v^2/c^2)+y'^2+z'^2}}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Considere que $v \ll c$ em (3.10), e encontre

$$V' = V(x', y', z') = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}. \tag{3.11}$$

De (3.7) e (3.11), obtemos

$$\begin{aligned} &-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{\partial^2 \Psi(x', y', z', t')}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \Psi(x', y', z', t')}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \Psi(x', y', z', t')}{\partial z'^2}\right) \\ &+V(x', y', z')\, \Psi(x', y', z', t') = \mathrm{i}\hbar \frac{\partial \Psi(x', y', z', t')}{\partial t'} + \frac{\hbar^2}{2\mu c^2}\frac{\partial^2 \Psi(x', y', z', t')}{\partial t'^2}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

A função $V(x', y', z')$ é independente do tempo, então, pela técnica de separação de variáveis, existem soluções para a equação (3.12) do tipo

$$\Psi(x', y', z', t') = \psi(x', y', z') e^{-i\left(E - \frac{E^2}{2\mu c^2}\right)t/\hbar}, \tag{3.13}$$

onde a autofunção $\psi(x', y', z')$ é uma solução da equação independente do tempo, mencionada logo abaixo:

$$\begin{aligned} &-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla'^2\, \psi(x', y', z') + V(x', y', z')\, \psi(x', y', z') \\ &= E\psi(x', y', z') - \frac{E^2}{2\mu c^2}\, \psi(x', y', z'). \end{aligned} \tag{3.14}$$

Ressaltamos que derivamos essas equações do ponto de vista do observador, tal como é feito em relatividade especial.

4. Conclusão: "E, agora, Dr. Pym, o que virá?"

Neste artigo alcançamos o nosso objetivo de elucidar alguns aspectos que pareciam nebulosos em [1]; mas que, no decorrer de nossa explanação, se tornaram bastante claros. Embora não pareça, aplicamos em nossa teoria o grupo de Lorentz, por meio das suas transformações.

O conhecimento, bafejado nessas páginas, será uma ferramenta ímpar para o que almejamos fazer. Por ora, ajuntemos as nossas indagações à indagação do título desta seção:

"E, agora, Dr. Pym, o que virá?"

Nos próximos artigos, continuaremos a nossa viagem ao mundo quântico-relativístico, derivando algumas generalizações para problemas clássicos de física quântica, por meio das soluções da equação Guedes-Schroedinger dependente e independente do tempo.

O primeiro desses artigos tratará do oscilador harmônico amortecido para estados estacionários.

Referências

[1] Guedes, Edigles, *Uma Equação Similar à Equação de Schroedinger Para o Átomo com um Elétron, que se Move, do Ponto de Vista de um Observador*, **viXra:1303.0118**.

[2] Landau, L. D. and Lifshitz, E. M., *Quantum Mechanics: non-Relativistic Theory*, Course of Theoretical Physics, Volume 3, Second Edition, London, Pergamon Press, 1965.

[3] Greiner, Walter, *Relativistic Quantum Mechanics, Wave Equations*, Third Edition, Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 2000.

[4] Atkins, Peter and Friedman, Ronald, *Molecular Quantum Mechanics*, Oxford, Oxford University Press, 2005.

[5] Eisberg, Robert e Resnick, Robert, *Física Quântica, Átomos, Moléculas, Sólidos, Núcleos e Partículas*, Rio de Janeiro, Elsevier Editora LTDA, 1979.