

L'opérateur de Dirac symplectique

A.Balan

20 juin 2017

Résumé

Un opérateur de Dirac de type symplectique est défini à partir d'une variété kählérienne. La formule de Schrödinger-Lichnerowicz est démontrée dans ce cadre kählérien.

1 Définition de l'opérateur de Dirac symplectique

On commence par définir une 2-forme à valeurs dans les opérateurs linéaires différentiels d'ordre un sur l'espace des spineurs :

$$\mathcal{D}(X,Y)\psi = X.\nabla_Y\psi - Y.\nabla_X\psi$$

avec X,Y des champs de vecteurs, ψ un spineur, \cdot est la multiplication de Clifford et ∇ est la connexion de Levi-Civita. On a :

$$\mathcal{D}(X,Y) \in \bigwedge^2 TM \otimes Diff_1(\Sigma)$$

avec TM le fibré tangent à la variété M et Σ le fibré des spineurs, $Diff_1$ est l'espace des opérateurs différentiels d'ordre un. Soit une 2-forme $\omega = \sum_i e_i \wedge f_i$, on définit un opérateur différentiel sur les spineurs :

$$\mathcal{D}_\omega\psi = \omega.\mathcal{D}(X,Y)\psi = \sum_i e_i.\nabla_{f_i}\psi - f_i.\nabla_{e_i}\psi$$

L'opérateur de Dirac symplectique est celui où la 2-forme est la forme symplectique sur la variété. Pour une base hermitienne du tangent, on a :

$$\mathcal{D}_\omega\psi = \sum_i e_{2i}.\nabla_{e_{2i+1}}\psi - e_{2i+1}.\nabla_{e_{2i}}\psi$$

2 La formule de Schrödinger-Lichnerowicz

On montre maintenant une formule de Schrödinger-Lichnerowicz pour l'opérateur de Dirac symplectique.

Théorème 1 *On a la formule suivante :*

$$\mathcal{D}_\omega^2 + \Delta = \alpha$$

avec α , un scalaire.

Démonstration 1

En effet :

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_\omega^2 \psi + \Delta \psi &= \left(\sum_i e_{2i} \cdot \nabla_{e_{2i+1}} - e_{2i+1} \cdot \nabla_{e_{2i}} \right)^2 \psi + \Delta \psi = \\
&= \sum_i \sum_j e_{2i} \cdot \nabla_{e_{2i+1}} (e_{2j} \cdot \nabla_{e_{2j+1}} \psi) - \sum_i \sum_j e_{2i} \cdot \nabla_{e_{2i+1}} (e_{2j+1} \cdot \nabla_{e_{2j}} \psi) - \\
&- \sum_i \sum_j e_{2i+1} \cdot \nabla_{e_{2i}} (e_{2j} \cdot \nabla_{e_{2j+1}} \psi) + \sum_i \sum_j e_{2i+1} \cdot \nabla_{e_{2i}} (e_{2j+1} \cdot \nabla_{e_{2j}} \psi) + \\
&\quad + \sum_i \nabla_{e_i} \nabla_{e_i} \psi + \sum_i \operatorname{div}(e_i) \nabla_{e_i} \psi = \\
&= \sum_i \sum_j e_{2i} \cdot \nabla_{e_{2i+1}} (e_{2j}) \cdot \nabla_{e_{2j+1}} \psi + \sum_{i \neq j} e_{2i} \cdot e_{2j} \cdot \nabla_{e_{2i+1}} \nabla_{e_{2j+1}} \psi - \\
&- \sum_i \sum_j e_{2i} \cdot \nabla_{e_{2i+1}} (e_{2j+1}) \cdot \nabla_{e_{2j}} \psi - \sum_i \sum_j e_{2i} \cdot e_{2j+1} \cdot \nabla_{e_{2i+1}} \nabla_{e_{2j}} \psi - \\
&- \sum_i \sum_j e_{2i+1} \cdot \nabla_{e_{2i}} (e_{2j}) \cdot \nabla_{e_{2j+1}} \psi - \sum_i \sum_j e_{2i+1} \cdot e_{2j} \cdot \nabla_{e_{2i}} \nabla_{e_{2j+1}} \psi + \\
&+ \sum_i \sum_j e_{2i+1} \cdot \nabla_{e_{2i}} (e_{2j+1}) \cdot \nabla_{e_{2j}} \psi + \sum_{i \neq j} e_{2i+1} \cdot e_{2j+1} \cdot \nabla_{e_{2i}} \nabla_{e_{2j}} \psi + \\
&\quad + \sum_i \operatorname{div}(e_i) \nabla_{e_i} \psi = \\
&= \sum_{i,j,k} g(\nabla_{e_{2i+1}} e_{2j}, e_k) e_{2i} \cdot e_k \cdot \nabla_{e_{2j+1}} \psi + \sum_{i \neq j} e_{2i} \cdot e_{2j} \cdot \nabla_{e_{2i+1}} \nabla_{e_{2j+1}} \psi - \\
&- \sum_{i,j,k} g(\nabla_{e_{2i+1}} e_{2j+1}, e_k) e_{2i} \cdot e_k \cdot \nabla_{e_{2j}} \psi - \sum_i \sum_j e_{2i} \cdot e_{2j+1} \cdot \nabla_{e_{2i+1}} \nabla_{e_{2j}} \psi - \\
&- \sum_{i,j,k} g(\nabla_{e_{2i}} e_{2j}, e_k) e_{2i+1} \cdot e_k \cdot \nabla_{e_{2j+1}} \psi - \sum_i \sum_j e_{2i+1} \cdot e_{2j} \cdot \nabla_{e_{2i}} \nabla_{e_{2j+1}} \psi + \\
&+ \sum_{i,j,k} g(\nabla_{e_{2i}} e_{2j+1}, e_k) e_{2i+1} \cdot e_k \cdot \nabla_{e_{2j}} \psi + \sum_{i \neq j} e_{2i+1} \cdot e_{2j+1} \cdot \nabla_{e_{2i}} \nabla_{e_{2j}} \psi + \\
&\quad + \sum_j \sum_i g(\nabla_{e_i} e_j, e_i) \nabla_{e_j} \psi = \\
&= \alpha
\end{aligned}$$

Pour montrer que l'expression est bien scalaire, il faut et il suffit de montrer qu'elle est tensorielle en ψ . On remplace donc ψ par $f\psi$:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j,k} g(\nabla_{e_{2i+1}} e_{2j}, e_k) e_{2i} \cdot e_k \cdot \nabla_{e_{2j+1}} f\psi + \sum_{i \neq j} e_{2i} \cdot e_{2j} \cdot \nabla_{e_{2i+1}} \nabla_{e_{2j+1}} f\psi - \\
&- \sum_{i,j,k} g(\nabla_{e_{2i+1}} e_{2j+1}, e_k) e_{2i} \cdot e_k \cdot \nabla_{e_{2j}} f\psi - \sum_i \sum_j e_{2i} \cdot e_{2j+1} \cdot \nabla_{e_{2i+1}} \nabla_{e_{2j}} f\psi -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i,j,k} g(\nabla_{e_{2i}} e_{2j}, e_k) e_{2i+1} \cdot e_k \cdot \nabla_{e_{2j+1}} f \psi - \sum_i \sum_j e_{2i+1} \cdot e_{2j} \cdot \nabla_{e_{2i}} \nabla_{e_{2j+1}} f \psi + \\
& + \sum_{i,j,k} g(\nabla_{e_{2i}} e_{2j+1}, e_k) e_{2i+1} \cdot e_k \cdot \nabla_{e_{2j}} f \psi + \sum_{i \neq j} e_{2i+1} \cdot e_{2j+1} \cdot \nabla_{e_{2i}} \nabla_{e_{2j}} f \psi + \\
& + \sum_j \sum_i g(\nabla_{e_i} e_j, e_i) \nabla_{e_j} f \psi =
\end{aligned}$$

Selon la courbure, on a $R(X, Y)\psi = \nabla_X \nabla_Y \psi - \nabla_Y \nabla_X \psi - \nabla_{[X, Y]}\psi$, c'est un tenseur, il faut donc montrer, en remplaçant, que l'expression suivante est tensorielle:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i,j,k} g(\nabla_{e_{2i+1}} e_{2j}, e_k) e_{2i} \cdot e_k \cdot \nabla_{e_{2j+1}} f \psi + \sum_{i < j} e_{2i} \cdot e_{2j} \cdot \nabla_{[e_{2i+1}, e_{2j+1}]} f \psi - \\
& - \sum_{i,j,k} g(\nabla_{e_{2i+1}} e_{2j+1}, e_k) e_{2i} \cdot e_k \cdot \nabla_{e_{2j}} f \psi - \sum_{i \leq j} e_{2i} \cdot e_{2j+1} \cdot \nabla_{[e_{2i+1}, e_{2j}]} f \psi - \\
& - \sum_{i,j,k} g(\nabla_{e_{2i}} e_{2j}, e_k) e_{2i+1} \cdot e_k \cdot \nabla_{e_{2j+1}} f \psi - \sum_{i \leq j} e_{2i+1} \cdot e_{2j} \cdot \nabla_{[e_{2i}, e_{2j+1}]} f \psi + \\
& + \sum_{i,j,k} g(\nabla_{e_{2i}} e_{2j+1}, e_k) e_{2i+1} \cdot e_k \cdot \nabla_{e_{2j}} f \psi + \sum_{i < j} e_{2i+1} \cdot e_{2j+1} \cdot \nabla_{[e_{2i}, e_{2j}]} f \psi + \\
& + \sum_j \sum_i g(\nabla_{e_i} e_j, e_i) \nabla_{e_j} f \psi
\end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer l'annulation de:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i,j,k} g(\nabla_{e_{2i+1}} e_{2j}, e_k) e_{2i} \cdot e_k (e_{2j+1} f) + \sum_{i < j} e_{2i} \cdot e_{2j} ([e_{2i+1}, e_{2j+1}] f) - \\
& - \sum_{i,j,k} g(\nabla_{e_{2i+1}} e_{2j+1}, e_k) e_{2i} \cdot e_k (e_{2j} f) - \sum_{i \leq j} e_{2i} \cdot e_{2j+1} ([e_{2i+1}, e_{2j}] f) - \\
& - \sum_{i,j,k} g(\nabla_{e_{2i}} e_{2j}, e_k) e_{2i+1} \cdot e_k (e_{2j+1} f) - \sum_{i \leq j} e_{2i+1} \cdot e_{2j} ([e_{2i}, e_{2j+1}] f) + \\
& + \sum_{i,j,k} g(\nabla_{e_{2i}} e_{2j+1}, e_k) e_{2i+1} \cdot e_k (e_{2j} f) + \sum_{i < j} e_{2i+1} \cdot e_{2j+1} ([e_{2i}, e_{2j}] f) + \\
& + \sum_j \sum_i g(\nabla_{e_i} e_j, e_i) (e_j f)
\end{aligned}$$

On utilise que la connexion est une connexion de Levi-Civita :

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i,j,k} g(e_{2j}, \nabla_{e_{2i+1}} e_k) e_{2i} \cdot e_k (e_{2j+1} f) + \sum_{i < j} e_{2i} \cdot e_{2j} ([e_{2i+1}, e_{2j+1}] f) + \\
& + \sum_{i,j,k} g(e_{2j+1}, \nabla_{e_{2i+1}} e_k) e_{2i} \cdot e_k (e_{2j} f) - \sum_{i \leq j} e_{2i} \cdot e_{2j+1} ([e_{2i+1}, e_{2j}] f) + \\
& + \sum_{i,j,k} g(e_{2j}, \nabla_{e_{2i}} e_k) e_{2i+1} \cdot e_k (e_{2j+1} f) - \sum_{i \leq j} e_{2i+1} \cdot e_{2j} ([e_{2i}, e_{2j+1}] f) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i,j,k} g(e_{2j+1}, \nabla_{e_{2i}} e_k) e_{2i+1} \cdot e_k (e_{2j} f) + \sum_{i < j} e_{2i+1} \cdot e_{2j+1} \cdot ([e_{2i}, e_{2j}] f) - \\
& \quad - \sum_j \sum_i g(e_j, \nabla_{e_i} e_i) (e_j f) = \\
& = - \sum_{i,j,k} g(e_{2j}, \nabla_{e_{2i+1}} e_{2k}) e_{2i} \cdot e_{2k} (e_{2j+1} f) + \sum_{i < j} e_{2i} \cdot e_{2j} ([e_{2i+1}, e_{2j+1}] f) + \\
& \quad + \sum_{i,j,k} g(e_{2j+1}, \nabla_{e_{2i+1}} e_{2k}) e_{2i} \cdot e_{2k} (e_{2j} f) - \sum_{i \leq j} e_{2i} \cdot e_{2j+1} ([e_{2i+1}, e_{2j}] f) + \\
& \quad + \sum_{i,j,k} g(e_{2j}, \nabla_{e_{2i}} e_{2k}) e_{2i+1} \cdot e_{2k} (e_{2j+1} f) - \sum_{i \leq j} e_{2i+1} \cdot e_{2j} ([e_{2i}, e_{2j+1}] f) - \\
& \quad - \sum_{i,j,k} g(e_{2j+1}, \nabla_{e_{2i}} e_{2k}) e_{2i+1} \cdot e_{2k} (e_{2j} f) + \sum_{i < j} e_{2i+1} \cdot e_{2j+1} \cdot ([e_{2i}, e_{2j}] f) + \\
& \quad + \sum_j \sum_i g(e_j, \nabla_{e_i} e_k) e_i \cdot e_k (e_j f) - \\
& - \sum_{i,j,k} g(e_{2j}, \nabla_{e_{2i+1}} e_{2k+1}) e_{2i} \cdot e_{2k+1} (e_{2j+1} f) + \sum_{i,j,k} g(e_{2j+1}, \nabla_{e_{2i+1}} e_{2k+1}) e_{2i} \cdot e_{2k+1} (e_{2j} f) + \\
& + \sum_{i,j,k} g(e_{2j}, \nabla_{e_{2i}} e_{2k+1}) e_{2i+1} \cdot e_{2k+1} (e_{2j+1} f) - \sum_{i,j,k} g(e_{2j+1}, \nabla_{e_{2i}} e_{2k+1}) e_{2i+1} \cdot e_{2k+1} (e_{2j} f) =
\end{aligned}$$

On a $g = J \cdot \omega$

$$\begin{aligned}
& = - \sum_{i,j,k} \omega(e_{2j}, \nabla_{e_{2i+1}} e_{2k+1}) e_{2i} \cdot e_{2k} (e_{2j+1} f) + \sum_{i < j} e_{2i} \cdot e_{2j} ([e_{2i+1}, e_{2j+1}] f) + \\
& \quad + \sum_{i,j,k} \omega(e_{2j+1}, \nabla_{e_{2i+1}} e_{2k+1}) e_{2i} \cdot e_{2k} (e_{2j} f) - \sum_{i \leq j} e_{2i} \cdot e_{2j+1} ([e_{2i+1}, e_{2j}] f) + \\
& \quad + \sum_{i,j,k} \omega(e_{2j}, \nabla_{e_{2i}} e_{2k+1}) e_{2i+1} \cdot e_{2k} (e_{2j+1} f) - \sum_{i \leq j} e_{2i+1} \cdot e_{2j} ([e_{2i}, e_{2j+1}] f) - \\
& \quad - \sum_{i,j,k} \omega(e_{2j+1}, \nabla_{e_{2i}} e_{2k+1}) e_{2i+1} \cdot e_{2k} (e_{2j} f) + \sum_{i < j} e_{2i+1} \cdot e_{2j+1} \cdot ([e_{2i}, e_{2j}] f) + \\
& \quad + \sum_j \sum_{i=k} g(e_j, \nabla_{e_i} e_k) e_i \cdot e_k (e_j f) + \\
& + \sum_{i,j,k} \omega(e_{2j}, \nabla_{e_{2i+1}} e_{2k}) e_{2i} \cdot e_{2k+1} (e_{2j+1} f) - \sum_{i,j,k} \omega(e_{2j+1}, \nabla_{e_{2i+1}} e_{2k}) e_{2i} \cdot e_{2k+1} (e_{2j} f) - \\
& - \sum_{i,j,k} \omega(e_{2j}, \nabla_{e_{2i}} e_{2k}) e_{2i+1} \cdot e_{2k+1} (e_{2j+1} f) + \sum_{i,j,k} \omega(e_{2j+1}, \nabla_{e_{2i}} e_{2k}) e_{2i+1} \cdot e_{2k+1} (e_{2j} f) =
\end{aligned}$$

On a $\nabla J = 0$

$$\begin{aligned}
& = - \sum_{i,j,k} g(e_{2j+1}, \nabla_{e_{2i+1}} e_{2k+1}) e_{2i} \cdot e_{2k} (e_{2j+1} f) + \sum_{i < j} e_{2i} \cdot e_{2j} ([e_{2i+1}, e_{2j+1}] f) + \\
& \quad + \sum_{i,j,k} g(e_{2j}, \nabla_{e_{2i+1}} e_{2k+1}) e_{2i} \cdot e_{2k} (e_{2j} f) - \sum_{i \leq j} e_{2i} \cdot e_{2j+1} ([e_{2i+1}, e_{2j}] f) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i,j,k} g(e_{2j+1}, \nabla_{e_{2i}} e_{2k+1}) e_{2i+1} \cdot e_{2k} (e_{2j+1} f) - \sum_{i \leq j} e_{2i+1} \cdot e_{2j} ([e_{2i}, e_{2j+1}] f) - \\
& - \sum_{i,j,k} g(e_{2j}, \nabla_{e_{2i}} e_{2k+1}) e_{2i+1} \cdot e_{2k} (e_{2j} f) + \sum_{i < j} e_{2i+1} \cdot e_{2j+1} \cdot ([e_{2i}, e_{2j}] f) + \\
& + \sum_j \sum_{i=k} g(e_j, \nabla_{e_i} e_k) e_i \cdot e_k (e_j f) + \\
& + \sum_{i,j,k} g(e_{2j+1}, \nabla_{e_{2i+1}} e_{2k}) e_{2i} \cdot e_{2k+1} (e_{2j+1} f) - \sum_{i,j,k} g(e_{2j}, \nabla_{e_{2i+1}} e_{2k}) e_{2i} \cdot e_{2k+1} (e_{2j} f) - \\
& - \sum_{i,j,k} g(e_{2j+1}, \nabla_{e_{2i}} e_{2k}) e_{2i+1} \cdot e_{2k+1} (e_{2j+1} f) + \sum_{i,j,k} g(e_{2j}, \nabla_{e_{2i}} e_{2k}) e_{2i+1} \cdot e_{2k+1} (e_{2j} f) = \\
& = 0
\end{aligned}$$

Par la torsion nulle de la connexion de Levi-Civita.

Références

- [F] T.Friedrich, “Dirac operators in Riemannian Geometry”, Graduate Studies in Mathematics vol 25, AMS, 2000.