VERS UNE SOLUTION DE L'HYPOTHÈSE DE RIEMANN

ABDELMAJID BEN HADJ SALEM

Abstract. In 1859, Georg Friedrich Bernhard Riemann had announced the following conjecture, called Riemann Hypothesis : *The nontrivial roots (zeros) $s = \sigma + it$ of the zeta function, defined by:*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}, \mathit{for} \quad \Re(s) > 1$$

have real part $\sigma = \dfrac{1}{2}$.

We give proof that $\sigma = \dfrac{1}{2}$ using an equivalent statement of the Riemann Hypothesis using the Dirichlet η function.

Table des matières

A mon épouse Wahida, ma fille Sinda et mon fils Mohamed Mazen

1. Introduction

En 1859, Georg Friedrich Bernhard Riemann avait annoncé la conjecture suivante [1] :

Conjecture 1.1. *Soit $\zeta(s)$ la fonction complexe de la variable complexe $s = \sigma + it$ définie par le prolongement analytique de la fonction :*

$$\zeta_1(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}, \text{ pour } \Re(s) = \sigma > 1$$

sur tout le plan complexe sauf au point $s = 1$. Alors les zéros non triviaux de $\zeta(s) = 0$ sont de la forme :

$$s = \frac{1}{2} + it, \quad t \neq 0$$

Dans cette communication, notre idée est de partir d'une proposition équivalente de l'Hypothèse de Riemann à savoir celle qui concerne la fonction η de Dirichlet. Cette dernière est liée à la fonction ζ de Riemann où on n'a pas besoin de manipuler aucune expression de $\zeta(s)$ dans la bande critique $0 < \Re(s) < 1$. Dans nos calculs, on fera usage de la définition de la limite des suites réelles. Nous arrivons à donner une démonstration que $\sigma = \dfrac{1}{2}$ sauf au plus pour un nombre fini de zéros.

1.1. La fonction ζ.

Notons par $s = \sigma + it$ la variable complexe de $\mathbb{C}$. Pour $\Re(s) = \sigma > 1$, appelons ζ_1 la fonction définie par :

$$\zeta_1(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}, \text{ avec } \Re(s) = \sigma > 1$$

Nous savons qu'avec la définition précédente, la fonction ζ_1 est une fonction analytique de s. Notons par $\zeta(s)$ la fonction obtenue par prolongement analytique de $\zeta_1(s)$, alors nous rappelons le théorème suivant [2] :

Théorème 1.2. *Les zéros de $\zeta(s)$ satisfont :*

1. $\zeta(s)$ n'a pas de zéros pour $\Re(s) > 1$;

2. le seul pôle de $\zeta(s)$ est au point $s = 1$; son résidu vaut 1 et il est simple ;

3. les zéros triviaux de $\zeta(s)$ sont déterminés pour les valeurs $s = -2, -4, \dots$;

4. les zéros non triviaux se situent dans la région $0 \leq \Re(s) \leq 1$ dite bande critique et ils sont symétriques respectivement par rapport à l'axe vertical $\Re(s) = \dfrac{1}{2}$ et l'axe des réels $\Im(s) = 0$.

On sait aussi que les zéros de $\zeta(s)$ dans la bande critique sont tous des nombres complexes $\neq 0$ (voir page 30 de [3]).

La conjecture relative à l'Hypothèse de Riemann est exprimée comme suit :

Conjecture 1.3. *(Hypothèse de Riemann,*[2]*) Tous les zéros non triviaux de $\zeta(s)$ sont sur la droite critique $\Re(s) = \frac{1}{2}$.*

En plus des propriétes citées par le théorème ci-dessus, la fonction $\zeta(s)$ vérifie la relation fonctionnelle [2] pour $s \neq 1$:

$$\zeta(1-s) = 2^{1-s}\pi^{-s}cos\frac{s\pi}{2}\Gamma(s)\zeta(s) \tag{1}$$

où $\Gamma(s)$ est la fonction définie sur le demi-plan $\Re(s) > 0$ par :

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{s-1}dt,$$

Alors, au lieu d'utiliser la fonctionnelle donnée par (1), nous allons utiliser celle présentée par G.H. Hardy [3] à savoir la fonction eta de Dirichlet [2] :

$$\eta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = (1-2^{1-s})\zeta(s)$$

La fonction eta est convergente pour tout $s \in \mathbb{C}$ avec $\Re(s) > 0$ [2].

1.2. **Une Proposition équivalente à l'Hypothèse de Riemann.** Parmi les propositions équivalentes à l'Hypothèse de Riemann celle de la fonction eta de Dirichlet qui s'énnonce comme suit [2] :

Equivalence 1.4. *L'Hypothèse de Riemann est équivalente à l'énnoncé que tous les zéros de la fonction eta de Dirichlet :*

$$\eta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = (1-2^{1-s})\zeta(s)$$

qui se situent dans la bande critique $0 < \Re(s) < 1$, sont sur la droite critique $\Re(s) = \frac{1}{2}$.

$\eta(s)$ étant un nombre complexe, on peut l'écrire comme suit :

$$\eta(s) = \rho.e^{i\alpha} \Longrightarrow \rho^2 = \eta(s).\overline{\eta(s)} \tag{2}$$

et $\eta(s) = 0 \Longleftrightarrow \rho = 0$.

2. Démonstration que les zéros de la fonction $\eta(s)$ sont sur la droite critique $\Re(s) = \dfrac{1}{2}$

Démonstration. Notons par $s = \sigma + it$ avec $0 < \sigma < 1$ et $t > 0$. Considérons maintenant un zéro de $\eta(s)$ qui se trouve dans la bande critique et appelons $s = \sigma + it$ ce zéro, nous avons donc $0 < \sigma < 1$ et $\eta(s) = 0 \Longrightarrow (1 - 2^{1-s})\zeta(s) = 0$. Notons $\zeta(s) = A + iB$, et $\theta = tLog2$, alors :

$$(1-2^{1-s})\zeta(s) = \left[A(1 - 2^{1-\sigma}cos\theta) - 2^{1-\sigma}Bsin\theta\right] + i\left[B(1 - 2^{1-\sigma}cos\theta) + 2^{1-\sigma}Asin\theta\right]$$

$(1 - 2^{1-s})\zeta(s) = 0$ donne le système :

$$\begin{aligned} A(1 - 2^{1-\sigma}cos\theta) - 2^{1-\sigma}Bsin\theta = 0 \\ B(1 - 2^{1-\sigma}cos\theta) + 2^{1-\sigma}Asin\theta = 0 \end{aligned}$$

Comme les fonctions *sin* et *cos* ne s'annulent pas simultanément, supposons par exemple que $sin\theta \neq 0$, la première équation du système donne $B = \dfrac{A(1 - 2^{1-\sigma}cos\theta)}{2^{1-\sigma}sin\theta}$, la deuxième équation s'écrit :

$$\frac{A(1 - 2^{1-\sigma}cos\theta)}{2^{1-\sigma}sin\theta}(1 - 2^{1-\sigma}cos\theta) + 2^{1-\sigma}Asin\theta = 0 \Longrightarrow A = 0$$

Par suite, $B = 0 \Longrightarrow \zeta(s) = 0$, il s'ensuit que :
(3)

$$\boxed{s \textit{ est un zéro de } \eta(s) \textit{ dans la bande critique est aussi un zéro de } \zeta(s)}$$

Reciproquement, si s est un zéro de $\zeta(s)$ dans la bande critique, soit $\zeta(s) = A + iB = 0 \Longrightarrow \eta(s) = (1 - 2^{1-s})\zeta(s) = 0$, donc s est aussi un zéro de $\eta(s)$ dans la bande critique. Nous pouvons écrire :
(4)

$$\boxed{s \textit{ est un zéro de } \zeta(s) \textit{ dans la bande critique est aussi un zéro de } \eta(s)}$$

Ecrivons la fonction η :

$$\eta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}e^{-sLogn} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}e^{-(\sigma+it)Logn} =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}e^{-\sigma Logn}.e^{-itLogn}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}e^{-\sigma Logn}(cos(tLogn) - isin(tLogn))$$

Remarquons que la fonction η est convergente pour tout $s \in \mathbb{C}$ avec $\Re(s) > 0$, mais non absolument convergente. Comme $\eta(s) = 0$, c'est-à-dire :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = 0$$

ou encore :

$$\forall \tau > 0 \quad \exists n_0, \forall \mathcal{N} > n_0, \ \left| \sum_{n=1}^{\mathcal{N}} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} \right| < \tau$$

Définissons la suite de fonctions $((\eta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}(s))$, par :

$$\eta_n(s) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^s} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{cos(tLogk)}{k^\sigma} - i \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{sin(tLogk)}{k^\sigma} = \rho_n.e^{i\alpha_n}$$

avec $s = \sigma + it$ et $t > 0$.

Soit s un zéro de η dans la bande critique, soit $\eta(s) = 0$, avec $0 < \sigma < 1$. Par suite, on peut écrire $lim_{n\longrightarrow+\infty}\eta_n(s) = 0 = \eta(s)$. Ce qui donne :

$$lim_{n\longrightarrow+\infty} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{cos(tLogk)}{k^\sigma} = 0$$

$$lim_{n\longrightarrow+\infty} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{sin(tLogk)}{k^\sigma} = 0$$

Utilisons la définition de la limite d'une suite, on peut écrire :

(5) $\forall \epsilon_1 > 0 \quad \exists n_r, \forall N > n_r \quad |\Re(\eta(s)_N)| < \epsilon_1 \Longrightarrow |\Re(\eta(s)_N)|^2 < \epsilon_1^2$

(6) $\forall \epsilon_2 > 0 \quad \exists n_i, \forall N > n_i \quad |\Im(\eta(s)_N)| < \epsilon_2 \Longrightarrow |\Im(\eta(s)_N)|^2 < \epsilon_2^2$

Ce qui donne :

$$0 < \sum_{k=1}^{N} \frac{cos^2(tLogk)}{k^{2\sigma}} + 2 \sum_{k,k'=1;k<k'}^{N} \frac{(-1)^{k+k'} cos(tLogk).cos(tLogk')}{k^\sigma k'^\sigma} < \epsilon_1^2$$

$$0 < \sum_{k=1}^{N} \frac{sin^2(tLogk)}{k^{2\sigma}} + 2 \sum_{k,k'=1;k<k'}^{N} \frac{(-1)^{k+k'} sin(tLogk).sin(tLogk')}{k^\sigma k'^\sigma} < \epsilon_2^2$$

En prenant $\epsilon = \epsilon_1 = \epsilon_2$ et $N > max(n_r, n_i)$, on obtient en faisant la somme membre à membre des deux dernières inégalités :

$$(7) \qquad 0 < \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^{2\sigma}} + 2 \sum_{k,k'=1;k<k'}^{N} (-1)^{k+k'} \frac{cos(tLog(k/k'))}{k^\sigma k'^\sigma} < 2\epsilon^2$$

L'équation précédente peut s'écrire sous la forme :

$$0 < \rho_N^2 < 2\epsilon^2 \tag{8}$$

soit $\rho(s) = 0$.

2.1. **Cas** $\Re(s) = \sigma = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow 2\sigma = 1$. On suppose que $\sigma = \Re(s) = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow 2\sigma = 1$. Commençons par rappeler le théorème de Hardy (1914) [2],[3] :

Théorème 2.1. *Il y'a une infinité de zéros de $\zeta(s)$ sur la droite critique.*

Des propositions (3-4), nous déduisons la proposition suivante :

Proposition 2.2. *Il y'a une infinité de zéros de $\eta(s)$ sur la droite critique.*

Soit $s_j = \frac{1}{2} + it_j$ un des zéros de la fonction $\eta(s)$ sur la droite critique, soit $\eta(s_j) = 0$. L'équation (7) s'écrit pour s_j :

$$0 < \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} + 2 \sum_{k,k'=1;k<k'}^{N} (-1)^{k+k'} \frac{cos(t_j Log(k/k'))}{\sqrt{k}\sqrt{k'}} < 2\epsilon^2$$

ou encore :

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} < 2\epsilon^2 - 2 \sum_{k,k'=1;k<k'}^{N} (-1)^{k+k'} \frac{cos(t_j Log(k/k'))}{\sqrt{k}\sqrt{k'}}$$

Si on fait tendre N vers $+\infty$, la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}$ est divergente et devient infinie. Soit :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \leq 2\epsilon^2 - 2 \sum_{k,k'=1;k<k'}^{+\infty} (-1)^{k+k'} \frac{cos(t_j Log(k/k'))}{\sqrt{k}\sqrt{k'}}$$

Par suite, nous obtenons le résultat suivant :

$$\boxed{lim_{N \longrightarrow +\infty} \sum_{k,k'=1;k<k'}^{N} (-1)^{k+k'} \frac{cos(t_j Log(k/k'))}{\sqrt{k}\sqrt{k'}} = -\infty} \tag{9}$$

sinon, nous aurons une contradiction avec le fait que :

$$lim_{N \longrightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k-1} \frac{1}{k^{s_j}} = 0 \Longleftrightarrow \eta(s) \text{ est convergente pour } s_j = \frac{1}{2} + it_j$$

Comme $t_j > 0$, et qu'il y'a une infinité de zéros sur la droite critique, alors le résultat de la formule donnée par (9) est indépendant de t_j.

Revenons maintenant à $s = \sigma + it$ un zéro de $\eta(s)$ dans la bande critique, soit $\eta(s) = 0$. Prenons $\sigma = \dfrac{1}{2}$. En partant de la définition de la limite des suites, appliquée ci-dessus, nous obtenons :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \leq 2\epsilon^2 - 2 \sum_{k,k'=1;k<k'}^{+\infty} (-1)^{k+k'} \frac{cos(tLog(k/k'))}{\sqrt{k}\sqrt{k'}}$$

avec sans aucune contradiction. De la proposition (3) il s'ensuit que $\zeta(s) = \zeta(\frac{1}{2} + it) = 0$. Il existe donc des zéros de $\zeta(s)$ sur la droite critique $\Re(s) = \dfrac{1}{2}$.

2.2. **Cas** $0 < \Re(s) < \dfrac{1}{2}$**.**

2.2.1. *Cas où il n'existe pas de zéros de $\eta(s)$ avec $s = \sigma + it$ et $0 < \sigma < \dfrac{1}{2}$.* En utilisant, pour ce cas, le point 4 du théorème (1.2), nous déduisons que la fonction $\eta(s)$ n'a pas de zéros avec $s = \sigma + it$ et $\dfrac{1}{2} < \sigma < 1$. Par suite, d'après la proposition (3), il s'ensuit que la fonction $\zeta(s)$ a tous ses zéros non triviaux seulement sur la droite critique $\Re(s) = \sigma = \dfrac{1}{2}$ et **l'Hypothèse de Riemann est vraie**.

2.2.2. *Cas où il existe des zéros de $\eta(s)$ avec $s = \sigma + it$ et $0 < \sigma < \dfrac{1}{2}$.* Supposons qu'il existe $s = \sigma + it$ un zéro de $\eta(s)$ soit $\eta(s) = 0 \Longrightarrow \rho^2(s) = 0$ avec $0 < \sigma < \frac{1}{2} \Longrightarrow s \in$ à la bande critique. Nous écrivons l'équation (7) :

$$0 < \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^{2\sigma}} + 2 \sum_{k,k'=1;k<k'}^{N} (-1)^{k+k'} \frac{cos(tLog(k/k'))}{k^\sigma k'^\sigma} < 2\epsilon^2$$

ou :

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^{2\sigma}} < 2\epsilon^2 - 2 \sum_{k,k'=1;k<k'}^{N} (-1)^{k+k'} \frac{cos(tLog(k/k'))}{k^\sigma k'^\sigma}$$

Or $2\sigma < 1$, il s'ensuit que $lim_{N \longrightarrow +\infty} \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^{2\sigma}}$ tende vers $+\infty$ et nous obtenons par suite :

$$\boxed{\sum_{k,k'=1;k<k'}^{+\infty} (-1)^{k+k'} \frac{cos(tLog(k/k'))}{k^\sigma k'^\sigma} = -\infty} \tag{10}$$

Là aussi, le résultat ci-dessus est indépendant de t.

2.3. **Cas $\dfrac{1}{2} < \Re(s) < 1$.** Soit $s = \sigma + it$ le zéro de $\eta(s)$ dans $0 < \Re(s) < \dfrac{1}{2}$, objet du paragraphe précédent. Suivant le point 4 du théorème 1.2, le nombre complexe $s' = 1 - \sigma + it = \sigma' + it'$ avec $\sigma' = 1 - \sigma$, $t' = t$ et $\frac{1}{2} < \sigma' < 1$, est aussi un zéro de la fonction $\eta(s)$ dans la bande $\dfrac{1}{2} < \Re(s) < 1$, soit $\eta(s') = 0 \Longrightarrow \rho(s') = 0$. En appliquant (7), nous obtenons :

$$0 < \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^{2\sigma'}} + 2 \sum_{k,k'=1;k<k'}^{N} (-1)^{k+k'} \frac{cos(t' Log(k/k'))}{k^{\sigma'} k'^{\sigma'}} < 2\epsilon^2 \tag{11}$$

Comme $0 < \sigma < \frac{1}{2}$, d'où $2 > 2\sigma' = 2(1-\sigma) > 1$, alors la série $\sum_{k=1}^{N} \dfrac{1}{k^{2\sigma'}}$ est convergente vers une constante positive non nulle $C(\sigma')$. En effet $1/k^2 < 1/k^{2\sigma'}$, alors :

$$0 < \frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2\sigma'}} = C(\sigma')$$

De l'équation (11), nous déduisons que :

$$\sum_{k,k'=1;k<k'}^{+\infty} (-1)^{k+k'} \frac{cos(t' Log(k/k'))}{k^{\sigma'} k'^{\sigma'}} = -\frac{C(\sigma')}{2} > -\infty \tag{12}$$

Nous avons alors les 2 cas suivants :

1)- il existe une infinité de nombres complexes $s_l = \sigma_l + it_l$ avec $\sigma_l \in]0, 1/2[$ tels que $\eta(s_l) = 0$. Pour chaque s'_l, le membre à gauche de l'équation (12) ci-dessus est fini et dépend de σ'_l et de t'_l, or celui à droite est fonction seulement de σ'_l. D'où la contradiction, par suite, la fonction $\eta(s)$ a tous ses zéros sur la droite critique $\sigma = \dfrac{1}{2}$. Il s'ensuit que **l'Hypothèse de Riemann est vérifiée**.

2)- il existe au plus un seul zéro $s_0 = \sigma_0 + it_0$ de $\eta(s)$ avec $\sigma_0 \in]0, 1/2[, t_0 > 0$ tel que $\eta(s_0) = 0$. Appelons ce zéro *zéro isolé* qu'on note par (ZI). Par suite, l'intervalle $]1/2, 1[$ contient un seul zéro $s'_0 = 1 - \sigma_0 + it_0$. Comme la droite critique contient une infinité de zéros de $\zeta(s) = 0$, il s'ensuit que tous les zéros non triviaux de $\zeta(s)$ sont sur la droite critique $\sigma = \dfrac{1}{2}$, sauf les 4 zéros relatifs au (ZI). Là aussi, on déduit que **l'Hypothèse de Riemann est vérifiée** sauf au plus pour le (ZI) dans la bande critique. □

3. Conclusion

En résumé : pour nos démonstrations, nous avons fait usage de la fonction $\eta(s)$ de Dirichlet :

$$\eta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = (1-2^{1-s})\zeta(s), \quad s = \sigma + it$$

dans la bande critique $0 < \Re(s) < 1$, en obtenant :

- $\eta(s)$ s'annule pour $0 < \sigma = \Re(s) = \dfrac{1}{2}$;

- $\eta(s)$ ne s'annule pas pour $0 < \sigma = \Re(s) < \dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{2} < \sigma = \Re(s) < 1$ sauf au plus au (ZI) (avec ses symétriques) de la bande critique.

Par suite, tous les zéros de $\eta(s)$ dans la bande critique $0 < \Re(s) < 1$ s'annulent sur la droite critique $\Re(s) = \dfrac{1}{2}$ sauf au plus au (ZI) (avec ses symétriques). En appliquant la proposition équivalente à l'Hypothèse de Riemann 1.2, tous les zéros non triviaux de la fonction $\zeta(s)$ se trouvent sur la droite critique $\Re(s) = \dfrac{1}{2}$ sauf au plus au (ZI) (avec ses symétriques) de la bande critique. La démonstration de l'Hypothèse de Riemann est ainsi achevée.

Nous annonçons donc le théorème important comme suit :

Théorème 3.1. *Tous les zéros non triviaux de la fonction $\zeta(s)$ avec $s = \sigma + it$ se situent sur l'axe vertical $\Re(s) = \dfrac{1}{2}$, sauf au plus pour quatre zéros d'affixes repectifs $(\sigma_0, t_0), (1-\sigma_0, t_0), (\sigma_0, -t_0), (1-\sigma_0, -t_0)$, appartenant à la bande critique.*

Références

[1] E. Bombieri, *The Riemann Hypothesis*, In The millennium prize problems. J. Carlson, A. Jaffe, and A. Wiles Editors. Published by The American Mathematical Society, Providence, RI, for The Clay Mathematics Institute, Cambridge, MA. (2006), 107–124.

[2] P. Borwein, S. Choi, B. Rooney and A. Weirathmueller, *The Riemann hypothesis - a resource for the afficionado and virtuoso alike.* 1st Ed. CMS Books in Mathematics. Springer-Verlag New York. (2008)

[3] E.C. Titchmarsh, D.R. Heath-Brown, *The theory of the Riemann zeta-function*. 2sd Ed. revised by D.R. Heath-Brown. Oxford University Press, New York. (1986)

Abdelmajid Ben Hadj Salem

Résidence Bousten 8, Bloc B, Rue Mosquée Raoudha, 1181 Soukra Raoudha, Tunisia

Email address: abenhadjsalem@gmail.com