UNE SOLUTION DE L'HYPOTHÈSE DE RIEMANN

par

Abdelmajid Ben Hadj Salem

A mon épouse Wahida

Résumé. — En 1898, Georg Friedrich Bernhard Riemann avait annoncé la conjecture suivante [**1**], dite Hypothèse de Riemann : *Les zéros non triviaux $s = \sigma + it$ de la fonction zeta définie par :*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}, \ pour \quad \Re(s) > 1$$

ont comme parties réelles $\sigma = \dfrac{1}{2}$.

On donne une démonstration que $\sigma = \dfrac{1}{2}$ en utilisant une proposition équivalente de l'Hypothèse de Riemann.

***Abstract* (A Solution of Riemann Hypothesis).** — In 1898, Georg Friedrich Bernhard Riemann had announced the following conjecture [**1**], called Riemann Hypothesis : *The nontrivial roots (zeros) $s = \sigma + it$ of the zeta function, defined by:*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}, \ for \quad \Re(s) > 1$$

have real part $\sigma = \dfrac{1}{2}$.

We give a proof that $\sigma = \dfrac{1}{2}$ using an equivalent statement of Riemann Hypothesis.

Table des matières

1. Introduction

En 1898, G.F.B. Riemann avait annoncé la conjecture suivante [**1**] :

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 11-XX.
Mots clefs. — La fonction zeta, zéros non triviaux de la fonction zeta, propositions équivalentes, définition des limites des suites réelles.

Conjecture 1.1. — *Soit $\zeta(s)$ la fonction complexe de la variable complexe $s = \sigma + it$ définie par le prolongement analytique de la fonction :*

$$\zeta_1(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}, \textit{ pour } \Re(s) = \sigma > 1$$

sur tout le plan complexe sauf au point $s = 1$. Alors les zéros non triviaux de $\zeta(s) = 0$ sont de la forme :

$$s = \frac{1}{2} + it$$

Dans cette communication, nous donnons une démonstration que $\sigma = \dfrac{1}{2}$. Notre idée est de partir d'une proposition équivalente de l'Hypothèse de Riemann et en utilisant la définition de la limite des suites réelles.

1.1. La fonction ζ. — Notons par $s = \sigma + it$ la variable complexe de $\mathbb{C}$. Pour $\Re(s) = \sigma > 1$, appelons ζ_1 la fonction définie par :

$$\zeta_1(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}, \text{ avec } \Re(s) = \sigma > 1$$

Nous savons qu'avec la définition précédente, la fonction ζ_1 est une fonction analytique de s. Notons par $\zeta(s)$ la fonction obtenue par prolongement analytique de $\zeta_1(s)$, alors nous rappelons le théorème suivant [**2**] :

Théorème 1.2. — *Les zéros de $\zeta(s)$ satisfont :*

1. $\zeta(s)$ n'a pas de zéros pour $\Re(s) > 1$;
2. le seul pôle de $\zeta(s)$ est au point $s = 1$; son résidu vaut 1 et il est simple ;
3. les zéros triviaux de $\zeta(s)$ sont déterminés pour les valeurs $s = -2, -4, \ldots$;
4. les zéros non triviaux se situent dans la région $0 \leq \Re(s) \leq 1$ dite bande critique et ils sont symétriques respectivement par rapport à l'axe vertical $\Re(s) = \dfrac{1}{2}$ et l'axe des réels $\Im(s) = 0$.

Par suite, la conjecture relative à l'Hypothèse de Riemann est exprimée comme suit :

Conjecture 1.3. — *(Hypothèse de Riemann,[**2**]) Tous les zéros non triviaux de $\zeta(s)$ sont sur la droite critique $\Re(s) = \dfrac{1}{2}$.*

En plus des propriétes citées par le théorème cité ci-dessus, la fonction $\zeta(s)$ vérifie la relation fonctionnelle [**2**] pour $s \neq 1$:

$$\zeta(1-s) = 2^{1-s}\pi^{-s} cos\frac{s\pi}{2}\Gamma(s)\zeta(s) \tag{1.1}$$

où $\Gamma(s)$ est la fonction définie sur le demi-plan $\Re(s) > 0$ par :

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{s-1}dt,$$

Alors, au lieu d'utiliser la fonctionnelle donnée par (1.1), nous allons utiliser celle présentée par G.H. Hardy [**3**] à savoir la fonction eta de Dirichlet [**2**] :

$$\eta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = (1 - 2^{1-s})\zeta(s)$$

Elle est convergente pour tout $s \in \mathbb{C}$ avec $\Re(s) > 0$.

1.2. Une Proposition équivalente à l'Hypothèse de Riemann. — Parmi les propositions équivalentes à l'Hypothèse de Riemann celle de la fonction eta de Dirichlet qui s'énnonce comme suit [**2**] :

Equivalence 1.4. — *L'Hypothèse de Riemann est équivalente à l'énnoncé que tous les zéros de la fonction eta de Dirichlet :*

$$\eta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = (1-2^{1-s})\zeta(s)$$

qui se situent dans la bande critique $0 < \Re(s) < 1$*, sont sur la droite critique* $\Re(s) = \dfrac{1}{2}$.

2. Démonstration que les zéros de la $\eta(s)$ sont sur la droite critique $\Re(s) = \frac{1}{2}$

Notons par $s = \sigma + it$ avec $0 < \sigma < 1$. Considérons maintenant un zéro de $\eta(s)$ qui se trouve dans la bande critique et appelons $s = \sigma + it$ ce zéro, nous avons donc $0 < \sigma < 1$ et $\eta(s) = 0 \Longrightarrow (1-2^{1-s})\zeta(s) = 0$. Notons $\zeta(s) = A + iB$, et $\theta = tLog2$, alors :

$$(1-2^{1-s})\zeta(s) = \left[A(1-2^{1-\sigma}cos\theta) - 2^{1-\sigma}Bsin\theta\right] + i\left[B(1-2^{1-\sigma}cos\theta) + 2^{1-\sigma}Asin\theta\right]$$

$(1-2^{1-s})\zeta(s) = 0$ donne le système :

$$A(1-2^{1-\sigma}cos\theta) - 2^{1-\sigma}Bsin\theta = 0$$
$$B(1-2^{1-\sigma}cos\theta) + 2^{1-\sigma}Asin\theta = 0$$

Comme les fonctions *sin* et *cos* ne s'annulent pas simultanément, supposons par exemple que $sin\theta \neq 0$, la première équation du système donne $B = \dfrac{A(1-2^{1-\sigma}cos\theta)}{2^{1-\sigma}sin\theta}$, la deuxième équation s'écrit :

$$\frac{A(1-2^{1-\sigma}cos\theta)}{2^{1-\sigma}sin\theta}(1-2^{1-\sigma}cos\theta) + 2^{1-\sigma}Asin\theta = 0 \Longrightarrow A = 0$$

Par suite, $B = 0 \Longrightarrow \zeta(s) = 0$, il s'ensuit que :

$$\boxed{s \text{ est un zéro de } \eta(s) \text{ dans la bande critique est aussi un zéro de } \zeta(s)} \tag{2.2}$$

Reciproquement, si s est un zéro de $\zeta(s)$ dans la bande critique, soit $\zeta(s) = A + iB = 0 \Longrightarrow \eta(s) = (1-2^{1-s})\zeta(s) = 0$, donc s est aussi un zéro de $\eta(s)$ dans la bande critique. Nous pouvons écrire :

$$\boxed{s \text{ est un zéro de } \zeta(s) \text{ dans la bande critique est aussi un zéro de } \eta(s)} \tag{2.3}$$

Ecrivons la fonction η :

$$\eta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}e^{-sLogn} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}e^{-(\sigma+it)Logn} =$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}e^{-\sigma Logn}.e^{-itLogn}$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}e^{-\sigma Logn}(cos(tLogn) - isin(tLogn))$$

Définissons la suite de fonctions $((\eta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}(s))$, par :

$$\eta_n(s) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^s} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{cos(tLogk)}{k^\sigma} - i\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{sin(tLogk)}{k^\sigma}$$

avec $s=\sigma+it$ et $t\neq 0$.

Soit s un zéro de η dans la bande critique, soit $\eta(s)=0$, avec $0<\sigma<1$. Par suite, on peut écrire $lim_{n\longrightarrow+\infty}\eta_n(s)=0=\eta(s)$. Ce qui donne :

$$lim_{n\longrightarrow+\infty}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{cos(tLogk)}{k^{\sigma}}=0$$
$$lim_{n\longrightarrow+\infty}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{sin(tLogk)}{k^{\sigma}}=0$$

Utilisons la définition de la limite d'une suite, on peut écrire :

$$\forall\epsilon_1>0\quad\exists n_r,\forall N>n_r\quad|\Re(\eta(s)_N)|<\epsilon_1$$
$$\forall\epsilon_2>0\quad\exists n_i,\forall N>n_i\quad|\Im(\eta(s)_N)|<\epsilon_2$$

En prenant $\epsilon=\epsilon_1=\epsilon_2$ et $N>max(n_r,n_i)$, on obtient :

$$0<\sum_{k=1}^{N}\frac{cos^2(tLogk)}{k^{2\sigma}}+2\sum_{k,k'=1;k<k'}^{N}\frac{(-1)^{k+k'}cos(tLogk).cos(tLogk')}{k^{\sigma}k'^{\sigma}}<\epsilon^2$$
$$0<\sum_{k=1}^{N}\frac{sin^2(tLogk)}{k^{2\sigma}}+2\sum_{k,k'=1;k<k'}^{N}\frac{(-1)^{k+k'}sin(tLogk).sin(tLogk')}{k^{\sigma}k'^{\sigma}}<\epsilon^2$$

En faisant la somme des deux dernières inégalités, on obtient :

$$0<\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^{2\sigma}}+2\sum_{k,k'=1;k<k'}^{N}(-1)^{k+k'}\frac{cos(tLog(k/k'))}{k^{\sigma}k'^{\sigma}}<2\epsilon^2 \tag{2.4}$$

2.1. Cas $\sigma=\dfrac{1}{2}\Longrightarrow 2\sigma=1$. — On suppose que $\sigma=\dfrac{1}{2}\Longrightarrow 2\sigma=1$. Commençons par rappeler le théorème de Hardy (1914) [**2**],[**3**] :

Théorème 2.1. — *Il y'a une infinité de zéros de $\zeta(s)$ sur la droite critique.*

Des propositions (2.2-2.3), nous déduisons la proposition suivante :

Proposition 2.2. — *Il y'a une infinité de zéros de $\eta(s)$ sur la droite critique.*

Soit $s_j=\frac{1}{2}+it_j$ un des zéros de la fonction $\eta(s)$ sur la droite critique, soit $\eta(s_j)=0$. L'équation (2.4) s'écrit pour s_j :

$$0<\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}+2\sum_{k,k'=1;k<k'}^{N}(-1)^{k+k'}\frac{cos(t_jLog(k/k'))}{\sqrt{k}\sqrt{k'}}<2\epsilon^2$$

ou encore :

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}<2\epsilon^2-2\sum_{k,k'=1;k<k'}^{N}(-1)^{k+k'}\frac{cos(t_jLog(k/k'))}{\sqrt{k}\sqrt{k'}}$$

Si on fait tendre N vers $+\infty$, la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}$ est divergente et devient infinie. Soit :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}\leq 2\epsilon^2-2\sum_{k,k'=1;k<k'}^{+\infty}(-1)^{k+k'}\frac{cos(t_jLog(k/k'))}{\sqrt{k}\sqrt{k'}}$$

Par suite, nous obtenons le résultat important suivant :

$$\boxed{lim_{N\longrightarrow +\infty}\sum_{k,k'=1;k<k'}^{N}(-1)^{k+k'}\frac{cos(t_jLog(k/k'))}{\sqrt{k}\sqrt{k'}}=-\infty} \tag{2.5}$$

sinon, nous aurons une contradiction avec le fait que :

$$lim_{N\longrightarrow +\infty}\sum_{k=1}^{N}(-1)^{k-1}\frac{1}{k^{s_j}}=0$$

Comme $t_j\neq 0$, et qu'il y'a une infinité de zéros sur la droite critique, alors le résultat de la formule donnée par (2.5) est indépendant de t_j. Revenons maintenant à $s=\sigma+it$ un zéro de $\eta(s)$ dans la bande critique, soit $\eta(s)=0$. Prenons $\sigma=\dfrac{1}{2}$. En partant de la définition de la limite des suites appliquée ci-dessus, nous obtenons :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}\leq 2\epsilon^2-2\sum_{k,k'=1;k<k'}^{+\infty}(-1)^{k+k'}\frac{cos(tLog(k/k'))}{\sqrt{k}\sqrt{k'}}$$

avec sans aucune contradiction. De la proposition (2.2) il s'ensuit que $\zeta(s)=\zeta(\frac{1}{2}+it)=0$. Il existe donc des zéros de $\zeta(s)$ sur la droite critique $\Re(s)=\dfrac{1}{2}$.

2.2. Cas $0<\sigma<\dfrac{1}{2}$. —

2.2.1. *Cas où il n'existe pas de zéros de $\eta(s)$ avec $s=\sigma+it$ et $0<\sigma<\dfrac{1}{2}$.* — En utilisant, pour ce cas, le point 4 du théorème (1.2), nous déduisons que la fonction $\eta(s)$ n'a pas de zéros avec $s=\sigma+it$ et $\dfrac{1}{2}<\sigma<1$. Par suite, d'après la proposition (2.2), il s'ensuit que la fonction $\zeta(s)$ a ses zéros seulement sur la droite critique $\Re(s)=\sigma=\dfrac{1}{2}$ et **l'Hypothèse de Riemann est vraie**.

2.2.2. *Cas où il existe des zéros de $\eta(s)$ avec $s=\sigma+it$ et $0<\sigma<\dfrac{1}{2}$.* — Supposons qu'il existe $s=\sigma+it$ un zéro de $\eta(s)$ soit $\eta(s)=0$ avec $0<\sigma<\frac{1}{2}\Longrightarrow s\in$ à la bande critique. Nous écrivons l'équation (2.4), :

$$0<\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^{2\sigma}}+2\sum_{k,k'=1;k<k'}^{N}(-1)^{k+k'}\frac{cos(tLog(k/k'))}{k^{\sigma}k'^{\sigma}}<2\epsilon^2$$

ou :

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^{2\sigma}}<2\epsilon^2-2\sum_{k,k'=1;k<k'}^{N}(-1)^{k+k'}\frac{cos(tLog(k/k'))}{k^{\sigma}k'^{\sigma}}$$

Or $2\sigma<1$, il s'ensuit que $lim_{N\longrightarrow +\infty}\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^{2\sigma}}$ tende vers $+\infty$ et nous obtenons :

$$\sum_{k,k'=1;k<k'}^{+\infty}(-1)^{k+k'}\frac{cos(tLog(k/k'))}{k^{\sigma}k'^{\sigma}}=-\infty$$

2.3. Cas $\frac{1}{2} < \Re(s) < 1$. — Soit $s = \sigma + it$ le zéro de $\eta(s)$ dans $0 < \Re(s) < \frac{1}{2}$, objet du paragraphe précédent. Suivant le point 4 du théorème 1.2, le nombre complexe $s' = 1 - \sigma + it$ est aussi un zéro de la fonction $\eta(s)$ dans la bande $\frac{1}{2} < \Re(s) < 1$. En appliquant (2.4), nous avons :

$$0 < \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^{2\sigma'}} + 2 \sum_{k,k'=1;k<k'}^{N} (-1)^{k+k'} \frac{cos(tLog(k/k'))}{k^{\sigma'} k'^{\sigma'}} < 2\epsilon^2 \tag{2.6}$$

Or $2\sigma' = 2(1-\sigma) > 1 \Longrightarrow \sigma < \frac{1}{2}$, la série $\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^{2\sigma'}}$ est convergente vers une constante $C(\sigma')$. De l'équation (2.6), nous déduisons que :

$$\sum_{k,k'=1;k<k'}^{+\infty} (-1)^{k+k'} \frac{cos(tLog(k/k'))}{k^{\sigma'} k'^{\sigma'}} = -\frac{C(\sigma')}{2} > -\infty$$

Maintenant fixons $t = \Im(s')$ et considérons la fonction $F_N(u)$ définie par :

$$F_N(u) = \sum_{k,k'=1;k<k'}^{N} (-1)^{k+k'} \frac{cos(tLog(k/k'))}{k^u k'^u} =$$

$$= \sum_{k,k'=1;k<k'}^{N} (-1)^{k+k'} cos(tLog(k/k')) e^{-uLog(kk')}, \quad u \in]0,1[$$

La fonction $F_N(u)$ est continue pour $\forall N \in \mathbb{N}^*$ et $u \in]0,1[$, et nous avons obtenu précédement que pour $N \longrightarrow +\infty$:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k,k'=1;k<k'}^{+\infty} (-1)^{k+k'} \frac{cos(tLog(k/k'))}{k^{\sigma'} k'^{\sigma'}} = -\frac{C(\sigma')}{2} \quad \text{pour } u = \sigma' = 1 - \sigma > \frac{1}{2} \\ \displaystyle\sum_{k,k'=1;k<k'}^{+\infty} (-1)^{k+k'} \frac{cos(tLog(k/k'))}{\sqrt{k}\sqrt{k'}} = -\infty \quad \text{pour } \ u = \frac{1}{2} \\ \displaystyle\sum_{k,k'=1;k<k'}^{+\infty} (-1)^{k+k'} \frac{cos(tLog(k/k'))}{k^{\sigma} k'^{\sigma}} = -\infty \quad \text{pour } u = \sigma < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ecrivons que $F_N(u)$ est continue au point $u = 1/2$, on peut écrire :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta \text{ tel que } \forall\, u \,/\, |u - 1/2| < \delta \Longrightarrow |F_N(u) - F_N(1/2)| < \epsilon$$

Soit $u = \sigma' \in]0,1[$ avec $\sigma' > \frac{1}{2}$ vérifiant $\sigma' - \frac{1}{2} < \delta$, on a alors l'équation :

$$|F_N(\sigma) - F_N(1/2)| < \epsilon \Longrightarrow -\epsilon + F_N(\sigma') < \sum_{k,k'=1;k<k'}^{N} (-1)^{k+k'} \frac{cos(tLog(k/k'))}{\sqrt{k}\sqrt{k'}} < \epsilon + F_N(\sigma')$$

$$\Longrightarrow -\epsilon + \sum_{k,k'=1;k<k'}^{N} (-1)^{k+k'} \frac{cos(tLog(k/k'))}{k^{\sigma'} k'^{\sigma'}} < \sum_{k,k'=1;k<k'}^{N} (-1)^{k+k'} \frac{cos(tLog(k/k'))}{\sqrt{k}\sqrt{k'}}$$

Comme pour t, u fixés, la fonction F_N est définie pour tout entier $N > 0$, faisons alors tendre N vers $+\infty$, nous obtenons :

$$-\epsilon + \sum_{k,k'=1;k<k'}^{+\infty} (-1)^{k+k'} \frac{cos(tLog(k/k'))}{k^{\sigma'} k'^{\sigma'}} \leq \sum_{k,k'=1;k<k'}^{+\infty} (-1)^{k+k'} \frac{cos(tLog(k/k'))}{\sqrt{k}\sqrt{k'}}$$

$$\Longrightarrow -\epsilon - \frac{C(\sigma')}{2} \leq \sum_{k,k'=1;k<k'}^{+\infty} (-1)^{k+k'} \frac{cos(tLog(k/k'))}{\sqrt{k}\sqrt{k'}} = -\infty$$

D'où la contradiction avec $C(\sigma')$ bornée. Par suite, l'hypothèse qu'il existe des zéros de $\eta(s)$ dans l'intervalle $\frac{1}{2} < \Re(s) < 1$ étudiée dans [2.3] est fausse. Il s'ensuit que la fonction $\eta(s)$ ne s'annule pas dans les intervalles $0 < \Re(s) < \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2} < \Re(s) < 1$ et par suite la fonction $\eta(s)$ a ses zéros non triviaux sur la droite critique $\Re(s) = \frac{1}{2}$ de la bande critique.

3. Conclusion

En résumé : pour nos démonstrations, nous avons fait usage de la fonction $\eta(s)$ de Dirichlet :

$$\eta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = (1 - 2^{1-s})\zeta(s), \quad s = \sigma + it$$

dans la bande critique $0 < \Re(s) < 1$, en obtenant :
- $\eta(s)$ s'annule pour $0 < \sigma = \Re(s) = \frac{1}{2}$;
- $\eta(s)$ ne s'annule pas pour $0 < \sigma = \Re(s) < \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2} < \sigma = \Re(s) < 1$.

Par suite, tous les zéros non triviaux de $\eta(s)$ dans la bande critique $0 < \Re(s) < 1$ s'annulent sur la droite critique $\Re(s) = \frac{1}{2}$. En appliquant la proposition équivalente à l'Hypothèse de Riemann 1.2, les zéros non triviaux de la fonction $\zeta(s)$ se trouvent sur la droite critique $\Re(s) = \frac{1}{2}$. La démonstration de l'Hypothèse de Riemann est ainsi achevée. Nous annonçons donc le théorème important :

Théorème 3.1. — (Abdelmajid Ben Hadj Salem, 2017) :
Tous les zéros non triviaux de la fonction $\zeta(s)$ avec $s = \sigma + it$ se situent sur l'axe vertical $\Re(s) = \frac{1}{2}$.

Références

[1] Enrico Bombieri. *The Riemann Hypothesis*, pp 107-124. The Millennium Prize Problems. J. Carlson, A. Jaffe, and A. Wiles Editors. 160 pages. Published by The American Mathematical Society, Providence, RI, for The Clay Mathematics Institute, Cambridge, MA. 2006.

[2] Peter Borwein, Stephen Choi, Brendan Rooney and Andrea Weirathmueller. *The Riemann Hypothesis - A Resource for the Afficionado and Virtuoso Alike.* First Edition. CMS Books in Mathematics. Springer-Verlag New York. 533 pages. 2008.

[3] E.C. Titchmarsh, D.R. Heath-Brown. *The Theory of the Riemann Zeta-Function.* Second Edition revised by D.R. Heath-Brown. Oxford University Press, New York. 418 pages. 1986.

Abdelmajid Ben Hadj Salem, 6, rue du Nil, Cité Soliman Er-Riadh, 8020 Soliman, Tunisie
E-mail : abenhadjsalem@gmail.com