L'Hypothèse de Riemann Asymptotique (HRA)

A.Balan

January 21, 2017

1 Introduction

Rappelons tout d'abord la problématique de l'Hypothèse de Riemann (HR). La fonction d'Euler-Riemann [R] est la fonction zeta :

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$$

On peut étendre la fonction en une fonction méromorphe sur tout le point avec un seul pôle en un. La fonction zeta possède une équation fonctionnelle suivant la fonction ksi. On peut énoncer l'Hypothèse de Riemann (HR): les zéros non triviaux de la fonction zeta sont localisés sur la droite critique. On définit dès lors l'Hypothèse de Riemann Asymptotique (HRA): les zéros sont sur la droite critique quand la partie imaginaire de s est suffisamment grande.

2 L'intégrale tronquée

La fonction ksi peut se mettre sous la forme suivante :

$$\xi(2s) = \frac{1}{\pi^s}\zeta(2s)\Gamma(s)$$

$$\xi(s) = \int_1^{\infty} (t^{s-1} + t^{-s}) f(t) dt$$

avec:

$$f(t) = \theta_3(t^2) - 1 - \frac{1}{t}$$

Si on coupe l'intégrale jusqu'à une certaine valeur :

$$\xi_B(s) = \int_1^{B} (t^{s-1} + t^{-s}) f(t) dt,$$

on a alors HRA pour la fonction ainsi obtenue. Pour le démontrer, on sépare les parties réelle et imaginaire et on fait une intégration par parties après avoir fait un changement de variables exponentiel et avoir appliqué la formule de Taylor à l'ordre un sur la partie imaginaire, ce qui permet de factoriser $(2x - 1)$.

3 Déformations de ksi et points doubles

On a vu une intégrale tronquée qui vérifie HRA. On considère des déformations de ksi qui conservent la symétrie entre s et $1-s$. On peut suivre pendant la déformation la courbe $s(B)$ que dessine un zéro.

$$\xi_B(s(B)) = 0$$

Si la déformation vérifie HRA, on en déduit qu'à un moment donné, on est arrivé sur la droite critique. Comme on a une symétrie entre s et $1-s$, on a donc un point double sur la droite critique, d'où un système de deux équations en ce point: $\xi_{B_0}(s_0) = 0, \xi'_{B_0}(s_0) = 0$ pour $s_0 = \frac{1}{2} + iy_0$.

4 Déformation critique de ksi

On considère la déformation critique de ksi :

$$\xi_B(s) = \int_1^B [t^{s-1} + t^{-s}]f(t)dt$$

Cette déformation vérifie HRA. De plus, le système des points doubles est :

$$\int_1^B (t^{s-1} + t^{-s})f(t)dt = 0$$

et

$$\int_1^B (t^{s-1} - t^{-s})\ln(t)f(t)dt = 0$$

On voit que le système est simple et on obtient une équation * en $s = \frac{1}{2} + iy$:

$$F'_B(y) = 0 \quad (*)$$

avec:

$$F_B(y) = i\ln\left(-\frac{\int_1^B t^{-s}f(t)dt}{\int_1^B t^{s-1}f(t)dt}\right)$$

5 L'équation * et HRA

On a une équivalence entre HRA et le fait que l'équation * n'admet qu'un nombre fini de zéros en $B = \infty$, ce qui permet de remplacer une équation en s, $\xi(s) = 0$ par l'équation * en seulement une seule variable y réelle, $F'_\infty(y) = 0$. Si l'équation * admet une infinité de zéros, alors ses dérivées aussi par le théorème de Rolle. On écrit F_∞ sous forme de série et on fait tendre y vers l'infini.

References

[BS] N.Berline, C.Sabbah, éd., "La fonction zêta", Les Editions de l'Ecole Polytechnique, 2002.

[D] J.Dieudonné, "Abrégé d'Histoire des Mathématiques", Hermann, Paris, 1986.

[E] H.M.Edwards, "Riemann's Zeta Function", Dover, New-York, 2001.

[R] B.Riemann, "Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Groesse", Berliner Akademie, 1859.

[T] E.C.Titchmarsh, "The Theory of the Riemann Zeta-Function", Oxford Univ.Press, London and New-York, 1951.