

SISTEME VIBRANTE TRILOBICE

Florentin Smarandache, Mircea Eugen Şelariu

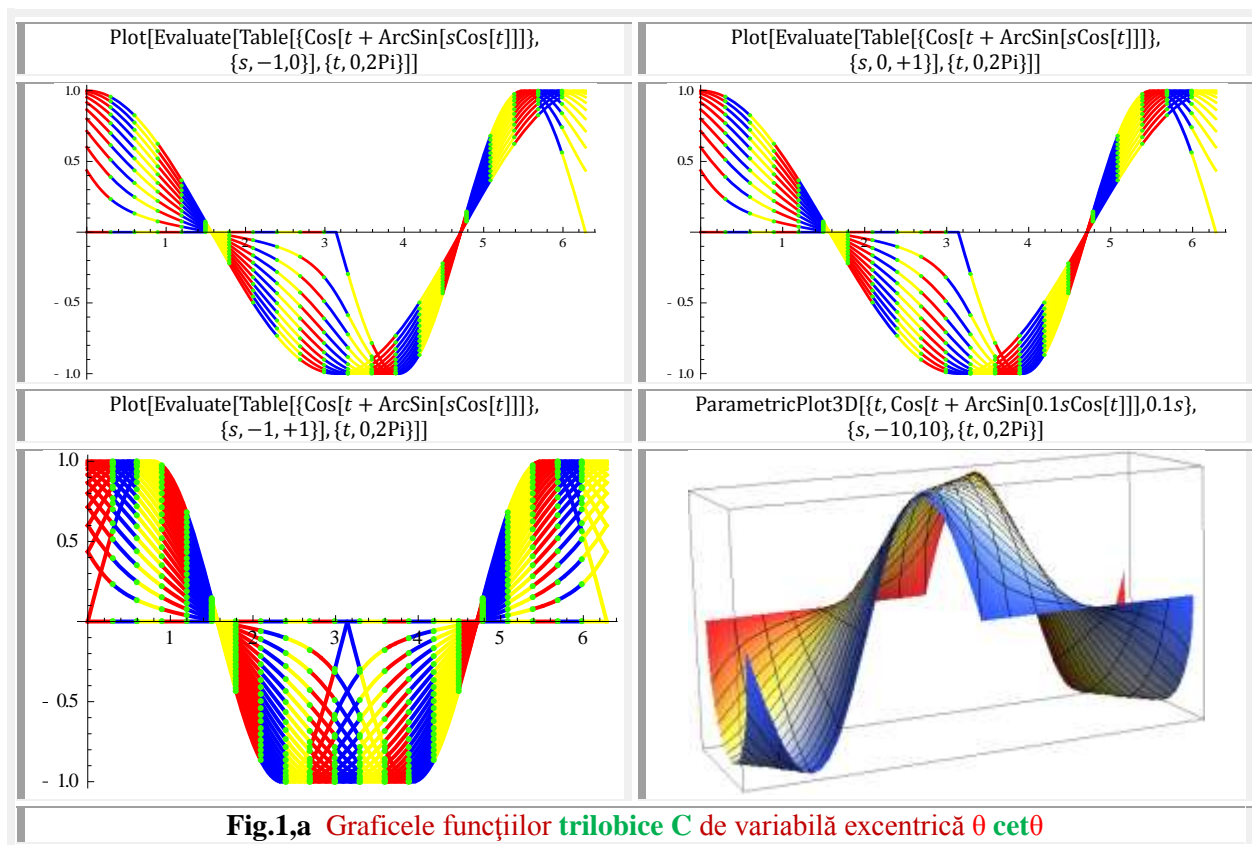
1.INTRODUCERE

Trilobele sunt **funcții supermatematice circulare excentrice (FSM-CE)** de excentricitate unghiulară $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$, cu notațiile **cet** θ și **set** θ , pentru **cosinusul** și, respectiv, **sinusul excentrice trilobice**, având ecuațiile:

$$(1) \quad \begin{cases} \text{cet}\theta = \text{cex} \left[\theta, S \left(s, \frac{\pi}{2} \right) \right] = \cos \left\{ \theta - \arcsin \left[s \cdot \sin \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \right] \right\} = \cos \left[\theta + \arcsin \left[s \cdot \cos \theta \right] \right] \\ \text{set}\theta = \text{sex} \left[\theta, S \left(s, \frac{\pi}{2} \right) \right] = \sin \left\{ \theta - \arcsin \left[s \cdot \sin \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \right] \right\} = \sin \left[\theta + \arcsin \left[s \cdot \cos \theta \right] \right] \end{cases}$$

în care **S** este un punct, denumit **excentru**, din planul cercului unitate **CU**[O(0, 0), R = 1], de coordonate polare **S(s,ε)**. În care **s** ∈ [-1,+1] este **excentricitatea liniară numerică** și **e = Rs** este **excentricitatea liniară reală**, pentru un cerc oarecare de rază **R**, iar **ε** este **excentricitatea unghiulară**.

Graficele **funcțiilor supermatematice excentrice trilobice (FSM-ET)** sunt prezentate în **figura 1**.



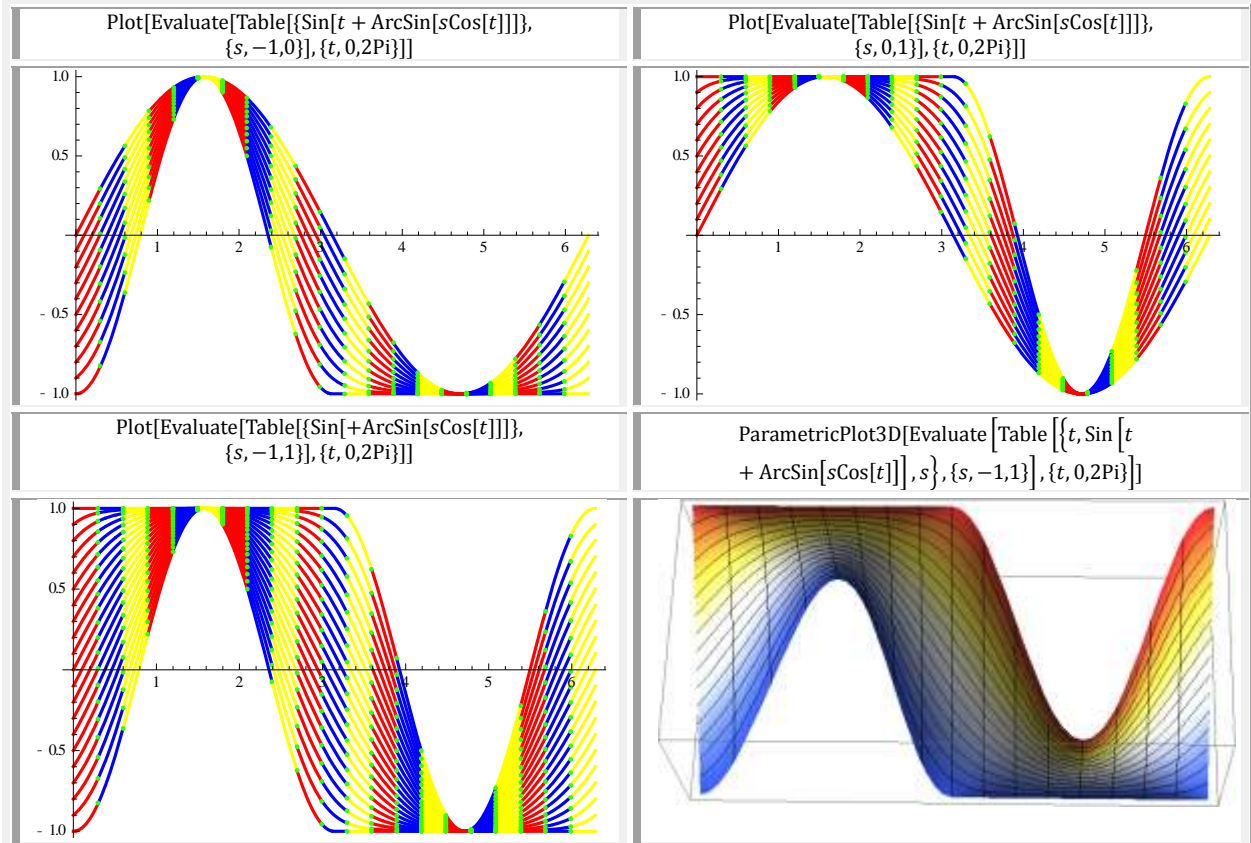


Fig.1,b Graficele funcțiilor trilobice S de variabilă excentrică θ set θ

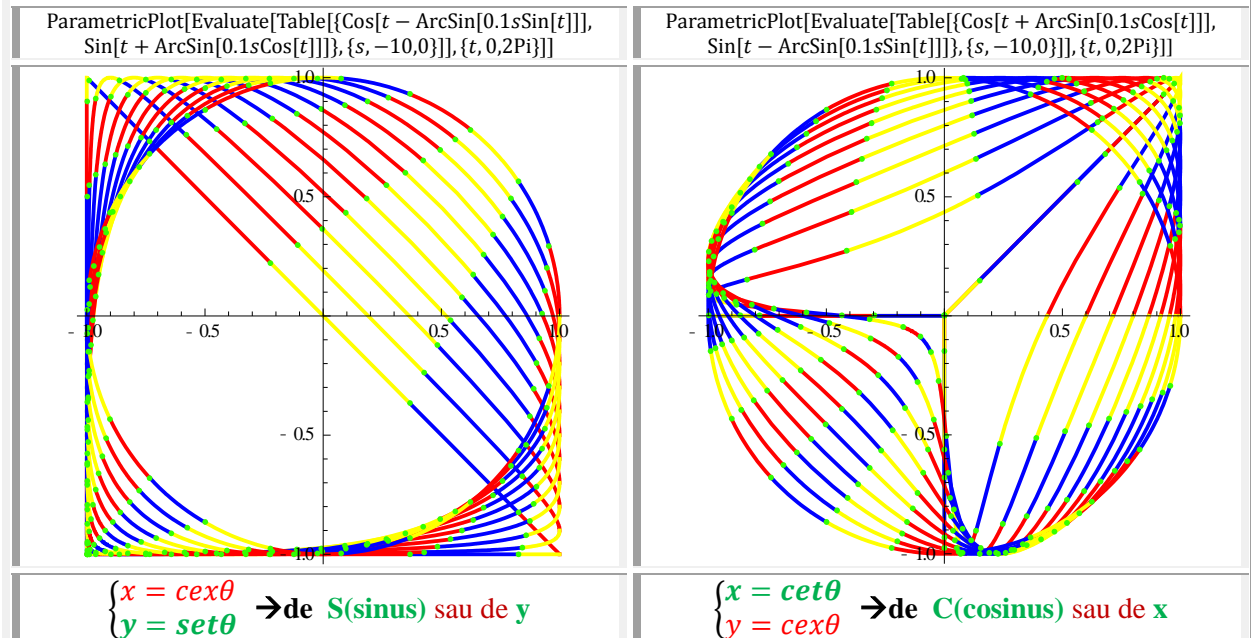


Fig.2,a Graficele trilobelor S (TS) ◀ și a trilobelor C (TC) ▶ de variabilă excentrică θ în 2D

Funcțiile supermatematice excentrice trilobice sunt abreviate cu (FSM-ET).

Rezultă că, pentru o excentricitate liniară numerică $s = 0$, FSM-ET degenează în funcții **circulare centrice (FSM-CC)** sau **funcții circulare / trigonometrice Euler** ordinare $\cos\alpha$ și $\sin\alpha$ ($s = 0 \rightarrow \alpha \equiv \theta$), iar pentru o excentricitate unghiulară $\varepsilon = 0$ și $s \neq 0$ degenează în FSM-CE $\text{cex}\theta$ și, respectiv, $\text{sex}\theta$.

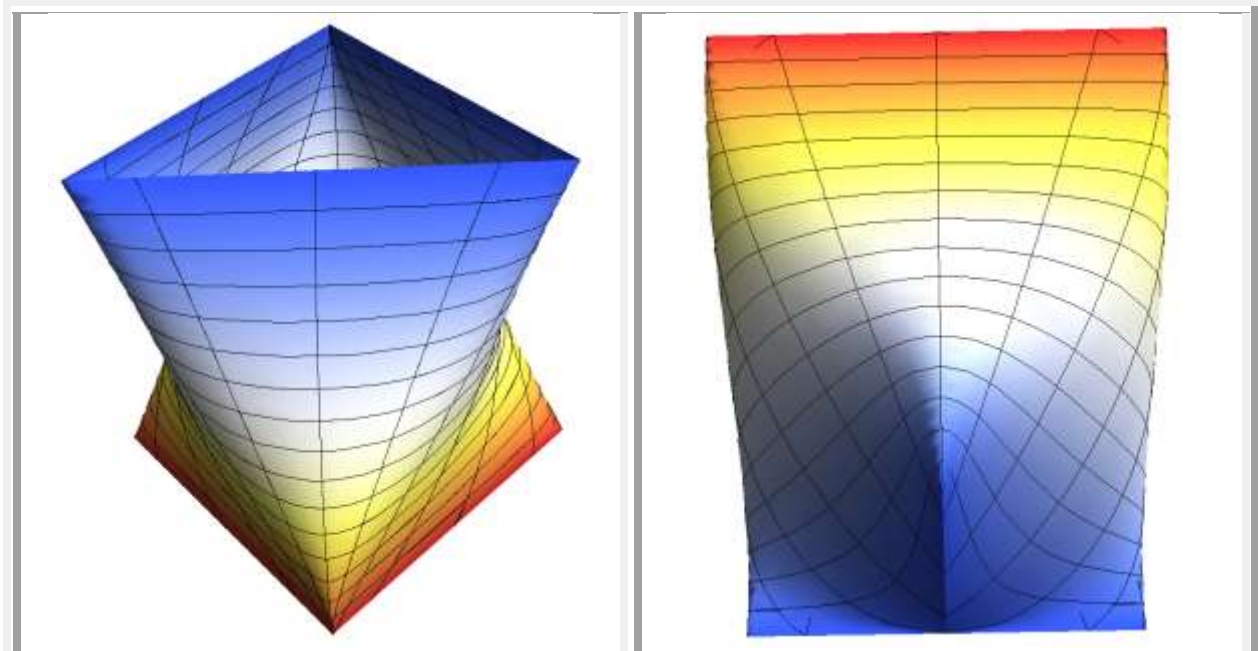


Fig.2,b Graficele trilobelor S ◀ și a trilobelor C ▶ de variabilă excentrică θ în 3D

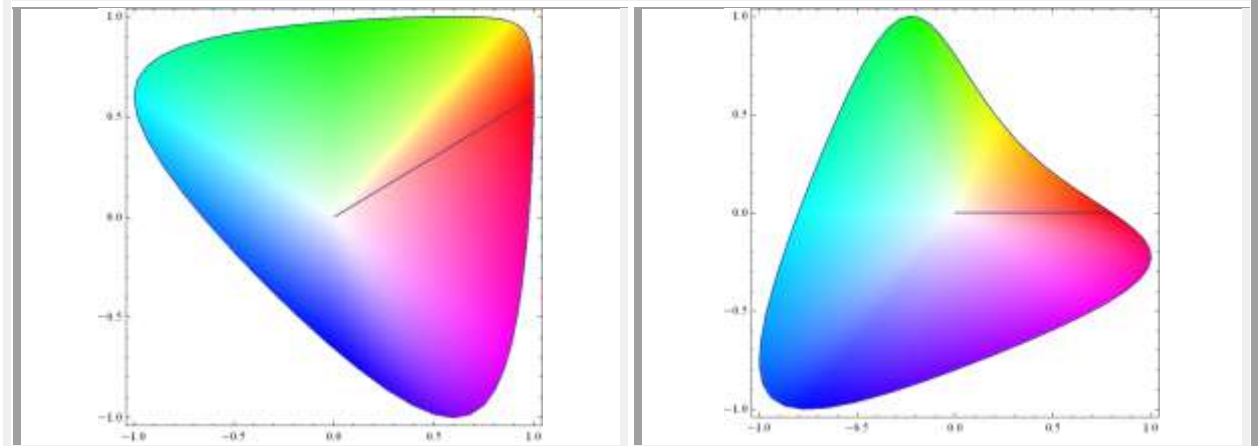


Fig.2,c Discuri trilobice S ◀ și C ▶ de $s = 0,6$

Denumirea de FSM-ET provine din faptul că pentru $s \in (0, 1)$, ecuațiile parametrice, formate dintr-o combinație de FSM-CE și FSM-ET, exprimă curbe plane închise cu **3 lobi**, care, pentru $s = 0$, degenează într-un cerc perfect și pentru $s = \pm 1$ în **triunghi isoscel dreptunghic (TS)** sau în **triunghi isoscel dreptunghic excentric (TC)** ◀, o figură în formă de **Y înclinat**, vizibilă în graficele din figurile 2a ▶.

2.ECUAȚIA DIFERENȚIALĂ A SISTEMELOR VIBRANTE TRILOBICE

Fie funcțiile $x(t), y(t) : \mathbb{R} \rightarrow [-1,+1]$ și $\theta = \Omega.t$

$$(1) \begin{cases} x(t) = \text{cet}[\Omega t, S(s, \varepsilon)] \\ y(t) = \text{set}[\Omega t, S(s, \varepsilon)] \end{cases}$$

de același excentru $S(s, \varepsilon)$, în care s este raza polară și ε – unghiul polar, într-un cerc unitate de rază $R = 1 \rightarrow \text{CU}(O,1)$.

Derivatele acestora, pentru $\theta = \Omega \cdot t$ și $\frac{d\theta}{dt} = \Omega = 1$, sunt :

$$(2) \begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{d}{dt} \text{cet}[\Omega t, S(s, \varepsilon)] = \frac{d\theta}{dt} \frac{d}{d\theta} \text{cet}[\theta, S(s, \varepsilon)] = \Omega \cdot \frac{d}{d\theta} \text{cet}[\theta, S(s, \varepsilon)] = -\Omega \cdot \text{det}\theta \cdot \text{set}\theta \\ \dot{y}(t) = \frac{d}{dt} \text{set}[\Omega t, S(s, \varepsilon)] = \frac{d\theta}{dt} \frac{d}{d\theta} \text{set}[\theta, S(s, \varepsilon)] = \Omega \cdot \frac{d}{d\theta} \text{set}[\theta, S(s, \varepsilon)] = +\Omega \cdot \text{det}\theta \cdot \text{cet}\theta \end{cases}$$

în care $\Omega \cdot \text{det}\theta = \omega$ și explicit:

$$(3) \begin{cases} \dot{x}(t) = -\Omega \cdot \left(1 - \frac{s \cdot \sin\theta}{\sqrt{1-s^2 \cos^2\theta}}\right) \sin[\theta + \arcsin(s \cdot \cos\theta)] = -\omega \cdot \text{set}\theta \\ \dot{y}(t) = \Omega \cdot \left(1 + \frac{s \cdot \sin\theta}{\sqrt{1-s^2 \cos^2\theta}}\right) \cos[\theta + \arcsin(s \cdot \sin\theta)] = \omega \cdot \text{cet}\theta \end{cases}$$

din care rezultă expresia **FSM-ET derivată excentrică trilobică** de variabilă excentrică θ :

$$(4) \quad \text{det}\theta = 1 - \frac{s \cdot \sin\theta}{\sqrt{1-s^2 \cos^2\theta}} = \frac{d\alpha(\theta)}{d\theta} = \frac{\text{aet}\theta}{d\theta}, \text{ cu graficele din figura 3.}$$

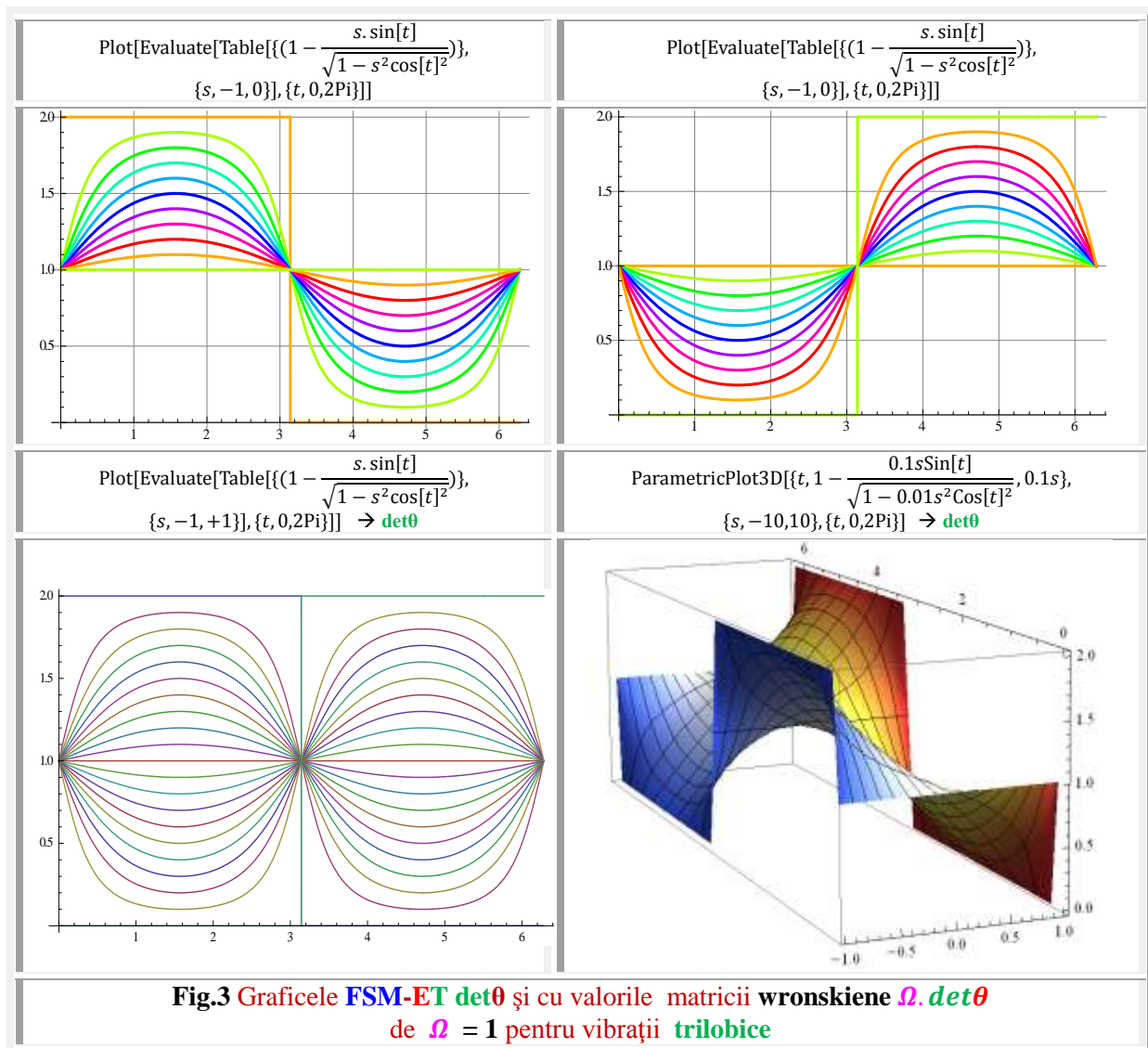
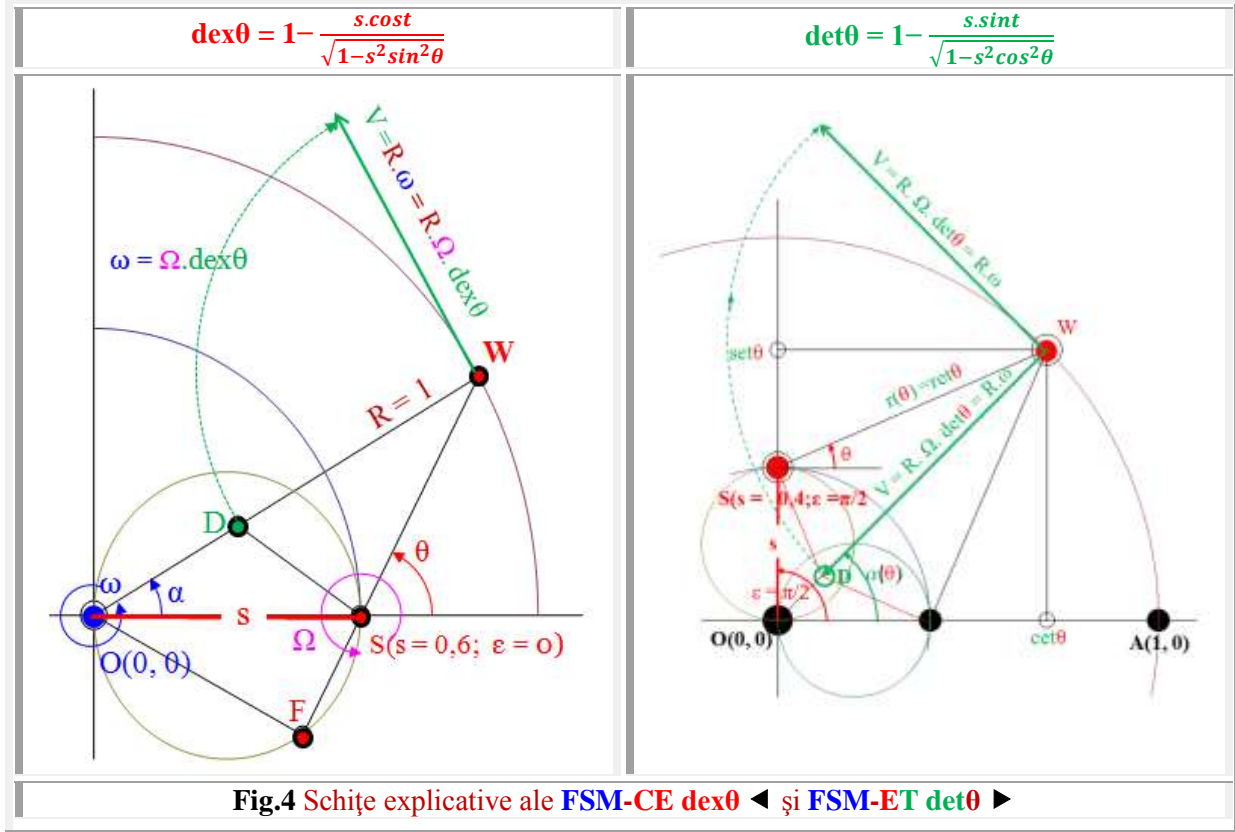


Fig.3 Graficele FSM-ET $\det\theta$ și cu valorile matricii wronskiene $\Omega \cdot \text{det}\theta$ de $\Omega = 1$ pentru vibrații trilobice



Funcția **amplitudine excentrică trilobică actθ = α(θ)** este reprezentată prin unghiul $\alpha(\theta)$ sau de **variabila centrică α**, la centrul $O(0, 0)$, ca funcție de unghiul θ la excentrul $S(s, \frac{\pi}{2})$ sau de **variabila excentrică θ** (Fig. 4 ▶), iar $\Omega \cdot \text{det}\theta = \omega(t)$, astfel că a doua derivată a **FSM-ET (3)** este:

$$(5) \quad \begin{cases} \ddot{x} = \frac{d}{dt}(-\omega \cdot \text{set}\theta) = -3 \cdot \text{set}\theta - \omega^2 \cdot \text{cet}\theta \\ \ddot{y} = \frac{d}{dt}(\omega \cdot \text{cet}\theta) = 3 \cdot \text{cet}\theta - \omega^2 \cdot \text{set}\theta \end{cases}$$

în care, s-a notat cu $3 = \frac{d\Omega}{dt}$ accelerația unghiulară a mișcării unui punct pe cercul de ecuații parametriche exprimate de relațiile (1), cu viteze unghiulare variabile (4), așa cum se poate observa în **figura 5**, urmărind distribuția unghiulară a culorilor.

Matricea **wronskiană** a sistemului vibrațiilor trilobice este :

$$(6) \quad \begin{vmatrix} x(t) & y(t) \\ \dot{x}(t) & \dot{y}(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{cet}[\Omega t, S(s, \varepsilon)] & \text{set}[\Omega t, S(s, \varepsilon)] \\ -\Omega \cdot \text{det}\theta \cdot \text{set}\theta & +\Omega \cdot \text{det}\theta \cdot \text{cet}\theta \end{vmatrix} = \Omega \cdot \text{det}\theta [\text{cet}^2\theta + \text{set}^2\theta] = \Omega \cdot \text{det}\theta$$

deoarece $\text{cet}^2\theta + \text{set}^2\theta = 1$, ca și omoloagele lor $\text{cex}^2\theta + \text{sex}^2\theta = 1$, precum și arhaicele lor **înaintașe / precursorae** $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

Graficele matricii **wronskiene**, pentru $\Omega = 1$, sunt prezentate în **figura 3**, din care se poate deduce că valorile ei sunt strict pozitive pentru $|s| < 1$ și, în consecință, există o **ecuație diferențială liniară**, a unui sistem tehnic dinamic, de caracteristică elastică neliniară, ce admite aceste funcții drept sistem fundamental de soluții.

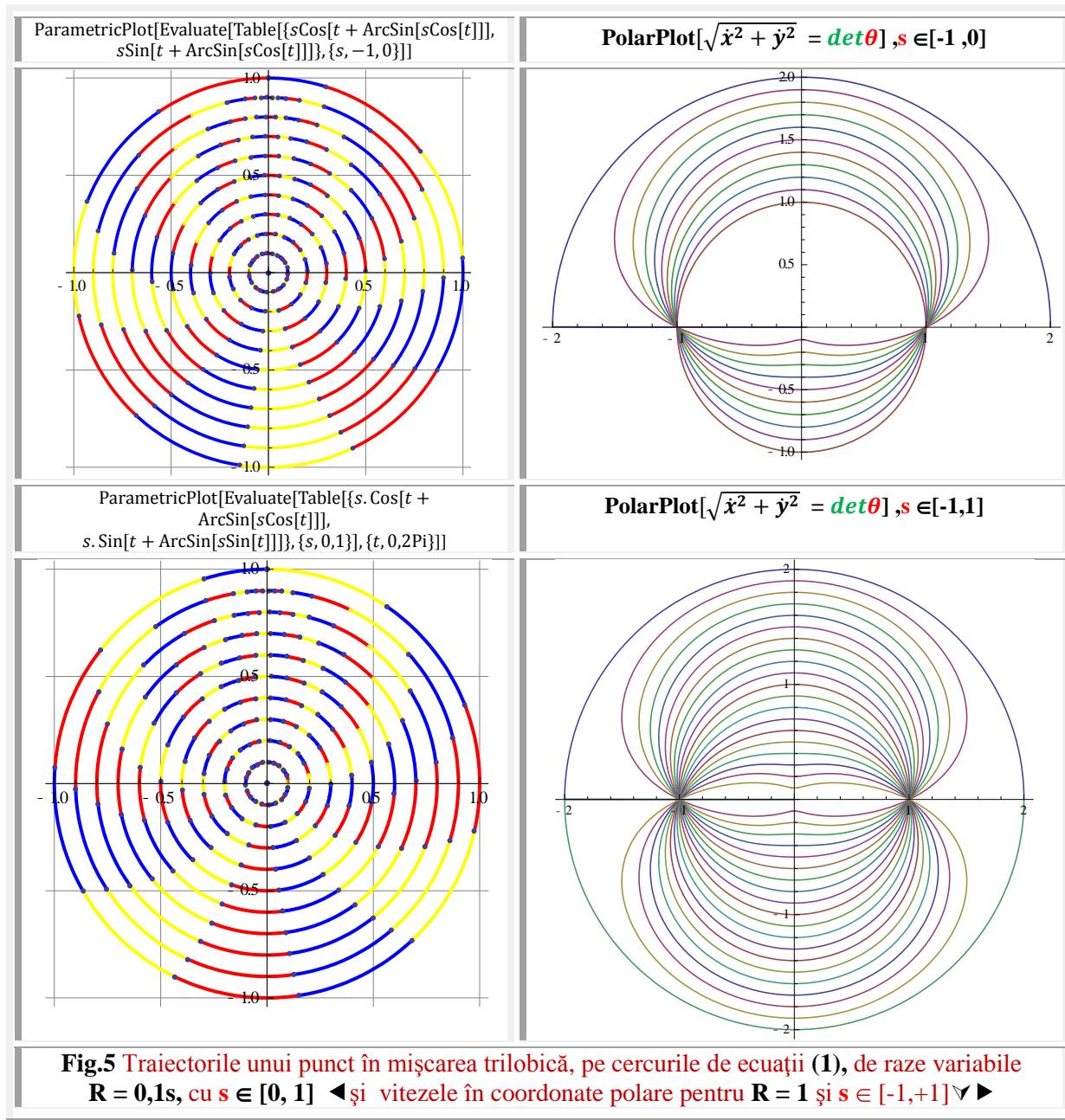
Acest sistem fundamental de soluții este :

$$(7) \quad Z = C_1 \text{cet}\Omega t + C_2 \text{set}\Omega t,$$

în care $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ sunt constante și (7) este soluția generală a următoarei ecuații diferențiale:

Ecuația este :

$$(8) \quad \begin{vmatrix} z & \dot{x} & \dot{y} \\ \dot{z} & \ddot{x} & \ddot{y} \\ \ddot{z} & \ddot{\dot{x}} & \ddot{\dot{y}} \end{vmatrix} = 0$$



$$(9) \quad \ddot{z} \begin{vmatrix} x & y \\ \dot{x} & \dot{y} \end{vmatrix} - \dot{z} \begin{vmatrix} x & y \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{vmatrix} = 0$$

$$(8^*) \quad \begin{vmatrix} z & \text{cet}\theta & \text{set}\theta \\ \dot{z} & -\omega \cdot \text{set}\theta & \omega \cdot \text{cet}\theta \\ \ddot{z} & -3 \cdot \text{set}\theta - \omega^2 \cdot \text{cet}\theta & 3 \cdot \text{cet}\theta - \omega^2 \cdot \text{set}\theta \end{vmatrix} = 0$$

$$(8') \quad \ddot{z} \begin{vmatrix} \text{cet}\theta & \text{set}\theta \\ -\omega \cdot \text{set}\theta & \omega \cdot \text{cet}\theta \end{vmatrix} - \dot{z} \begin{vmatrix} \text{cet}\theta & \text{set}\theta \\ -3 \cdot \text{set}\theta - \omega^2 \cdot \text{cet}\theta & 3 \cdot \text{cet}\theta - \omega^2 \cdot \text{set}\theta \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} -\omega \cdot \text{set}\theta & \omega \cdot \text{cet}\theta \\ -3 \cdot \text{set}\theta - \omega^2 \cdot \text{cet}\theta & 3 \cdot \text{cet}\theta - \omega^2 \cdot \text{set}\theta \end{vmatrix} = 0$$

$$(10) \quad \ddot{z} \cdot \omega (\text{cet}^2\theta + \text{set}^2\theta) - \dot{z} \cdot [3 \cdot \text{cet}^2\theta - \omega^2 \cdot \text{cet}\theta \text{set}\theta + 3 \cdot \text{set}^2\theta + \omega^2 \cdot \text{cet}\theta \cdot \text{set}\theta] + z[-3 \cdot \omega \cdot \text{cet}\theta \text{set}\theta + \omega^3 \cdot \text{set}^2\theta + 3 \cdot \omega \text{set}\theta \cdot \text{cet}\theta + \omega^3 \cdot \text{cet}^2\theta] = 0$$

$$(10') \quad \ddot{z} \cdot \omega - \dot{z} \cdot 3 + z \cdot \omega^3 = 0$$

sau

$$(10'') \quad \ddot{z} - \dot{z} \frac{3}{\omega} + z \omega^2 = 0$$

care este ecuația diferențială a vibrațiilor libere, neamortizate, ale sistemelor mecanice trilobice, ecuație identică, **ca formă**, cu cea a vibrațiilor libere neamortizate, ale sistemelor **excentrice** și cu a celor **quadrilobice** (cvadrilobice).

3.CURBELE INTEGRALE ÎN PLANUL FAZELOR

Sunt curbele plane descrise de vitezele punctelor ce se rotesc pe cercul unitate de $R = 1$, sau un alt cerc de raza egală cu amplitudinea maximă de oscilație $R = A$, în funcție de poziția proiecției lor pe axa Ox , adică $V(x)$ și sunt reprezentate în **figura 6**.

Ecuațiile lor parametrice sunt:

- pentru trilobele C

$$(11) \quad \begin{cases} x = \text{cet}\theta \\ y = -\Omega \cdot \text{det}\theta \cdot \text{set}\theta \end{cases}$$

- pentru trilobele S

$$(12) \quad \begin{cases} x = \text{set}\theta \\ y = \Omega \cdot \text{det}\theta \cdot \text{cet}\theta \end{cases}$$

cu graficele din **figura 6,a** și, respectiv, **6,b**.

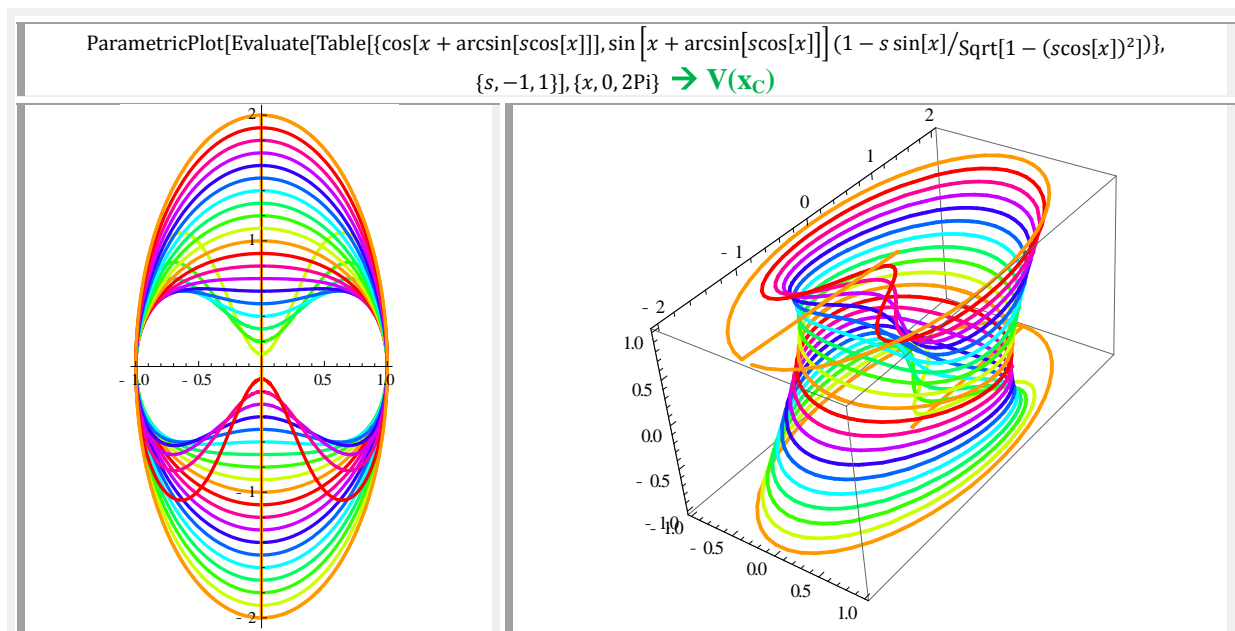


Fig.6,a Curbe integrale ale vibrațiilor libere neamortizate ale sistemelor mecanice trilobice C în planul fazelor

În cazul vibrațiilor libere, neamortizate în sistem există doar două forțe:

- forța exercitată de elementul elastic al sistemului, proporțională cu deplasarea x , adică

$$(13) \quad F_{el} = k \cdot x = \begin{cases} k \cdot c \cdot e^{\omega t} \\ k \cdot s \cdot e^{\omega t} \end{cases}$$

în care k este constanta elastica a elementului și forța de accelerație, proporțională cu masa m a sistemului oscilant și cu accelerația masei acestui sistem, adică

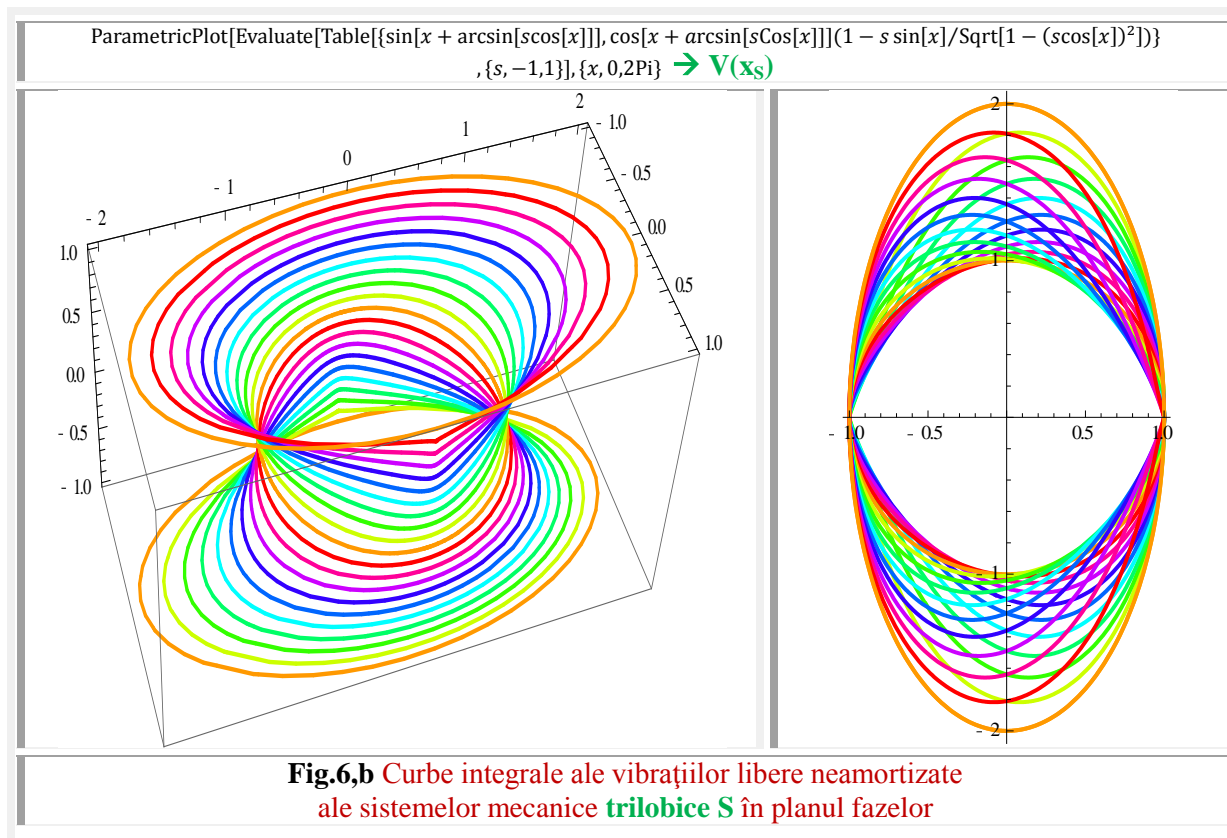


Fig.6,b Curbe integrale ale vibrațiilor libere neamortizate ale sistemelor mecanice **trilobice S** în planul fazelor

$$(14) \quad \mathbf{F}_{acc} = m \cdot \ddot{\mathbf{x}} = \begin{cases} m(-3 \cdot s \cdot e^{\omega t} - \omega^2 \cdot c \cdot e^{\omega t}) \\ m(+3 \cdot c \cdot e^{\omega t} - \omega^2 \cdot s \cdot e^{\omega t}) \end{cases}$$

4.CARACTERISTICI ELASTICE STATICE (CES) ALE SISTEMELOR OSCILANTE TRILOBICE

Existând numai două forțe în sistemul considerat, în condiții de echilibru dinamic, acestea trebuie să fie egale și de semn / sensuri cotrare, adică

$$(15) \quad \mathbf{F}_{el} + \mathbf{F}_{acc} = 0, \quad \rightarrow \quad \mathbf{F}_{el} = - \mathbf{F}_{acc}$$

și, ca urmare, **caracteristicile elastice statice (CES)** ale **sistemelor trilobice** sunt exprimate de ecuațiile parametrice

$$(16) \quad \begin{cases} x = c \cdot e^{\omega t} \\ y = \ddot{x} = -(-3 \cdot s \cdot e^{\omega t} - \omega^2 \cdot c \cdot e^{\omega t}) \end{cases}$$

și explicit, pentru **sistemele trilobice C** :

$$(16') \quad \begin{cases} x = \cos[\theta + \arcsin(s \cdot \cos\theta)] \\ y = -(-\cos[x + \arcsin[s \cdot \cos[x]]] \left(1 - \frac{s \cdot \sin[x]}{\sqrt{1-s^2 \cos^2[x]}}\right)^2 - \left(-\frac{s \cdot \cos[x]}{\sqrt{1-s^2 \cos^2[x]}} + \frac{\cos[x] \sin[x]^2}{(1-s^2 \cos^2[x])^{3/2}}\right) \sin[x + \arcsin[s \cdot \cos[x]]]) \end{cases}$$

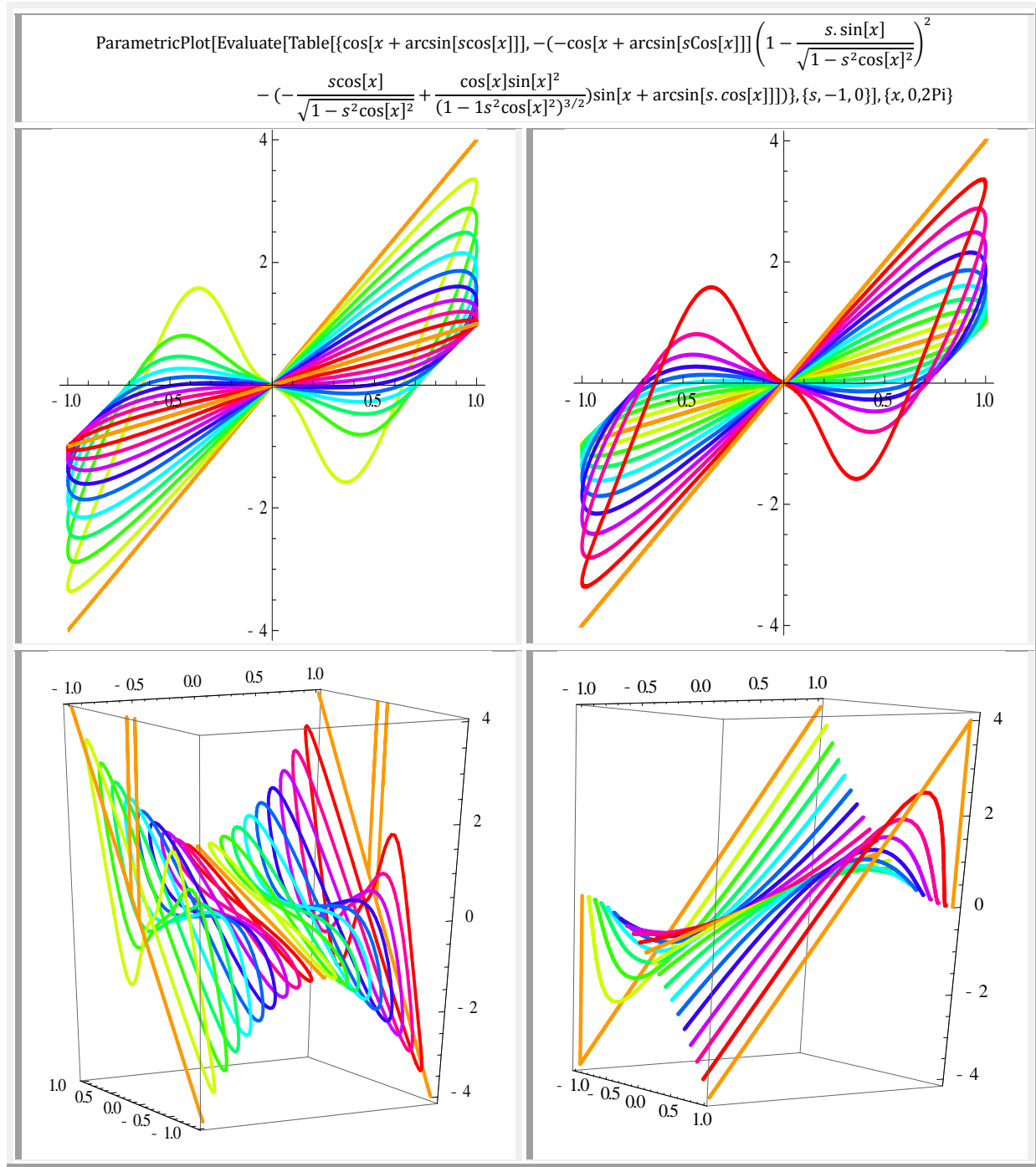
cu graficele din **figura 7** [▲], iar pentru sistemele **trilobice S** ecuațiile parametrice sunt :

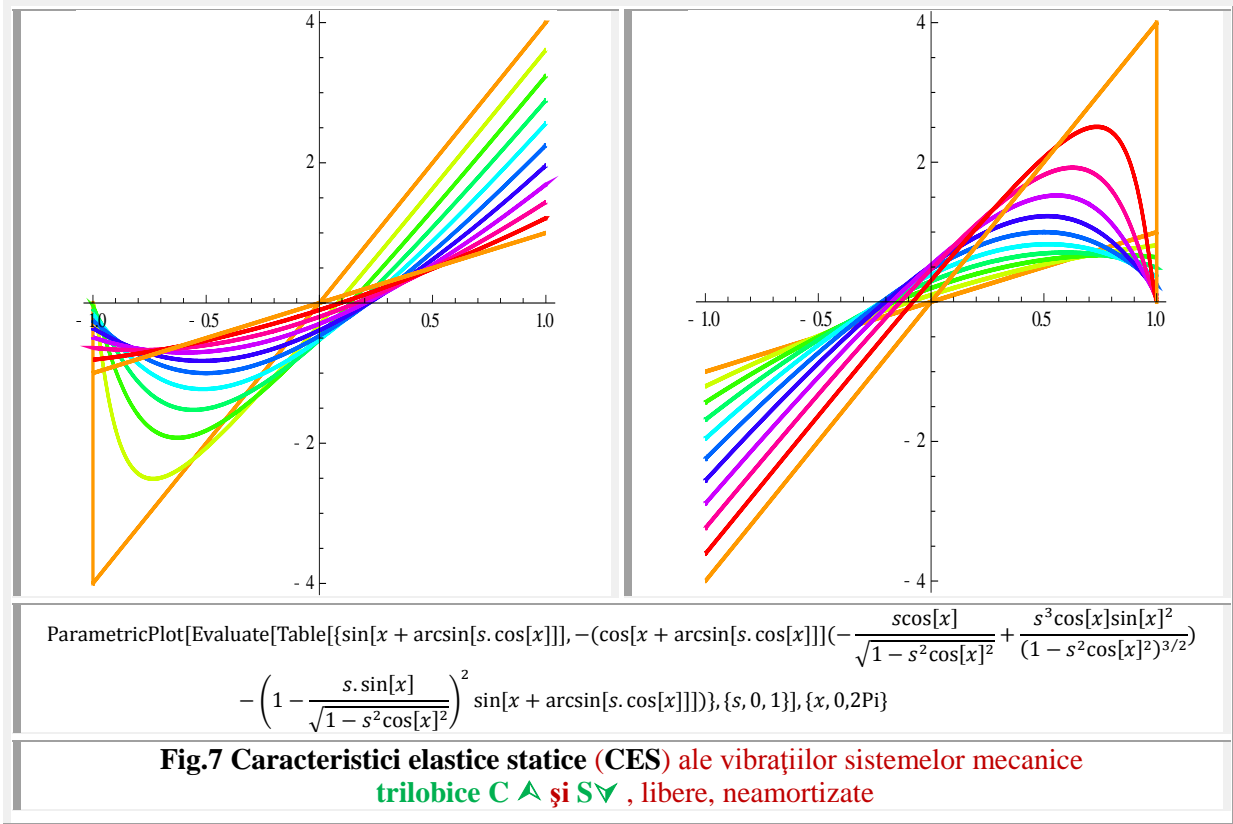
$$(17) \quad \begin{cases} x = \text{set}\theta \\ y = \dot{y} = -(3 \cdot \text{cet}\theta - \omega^2 \cdot \text{set}\theta) \end{cases}$$

și, explicit:

$$(17') \quad \begin{cases} x = \sin[\theta + \arcsin(s \cdot \cos\theta)] \\ y = -(\cos[x + \arcsin[s \cdot \cos[x]]](-\frac{\text{sCos}[x]}{\sqrt{1-s^2\cos[x]^2}} + \frac{s^3\cos[x]\sin[x]^2}{(1-s^2\cos[x]^2)^{3/2}}) - (1 - \frac{s \cdot \sin[x]}{\sqrt{1-s^2\cos[x]^2}})^2 \sin[x + \arcsin[s \cdot \cos[x]]]) \end{cases}$$

cu graficele din **figura 7**.





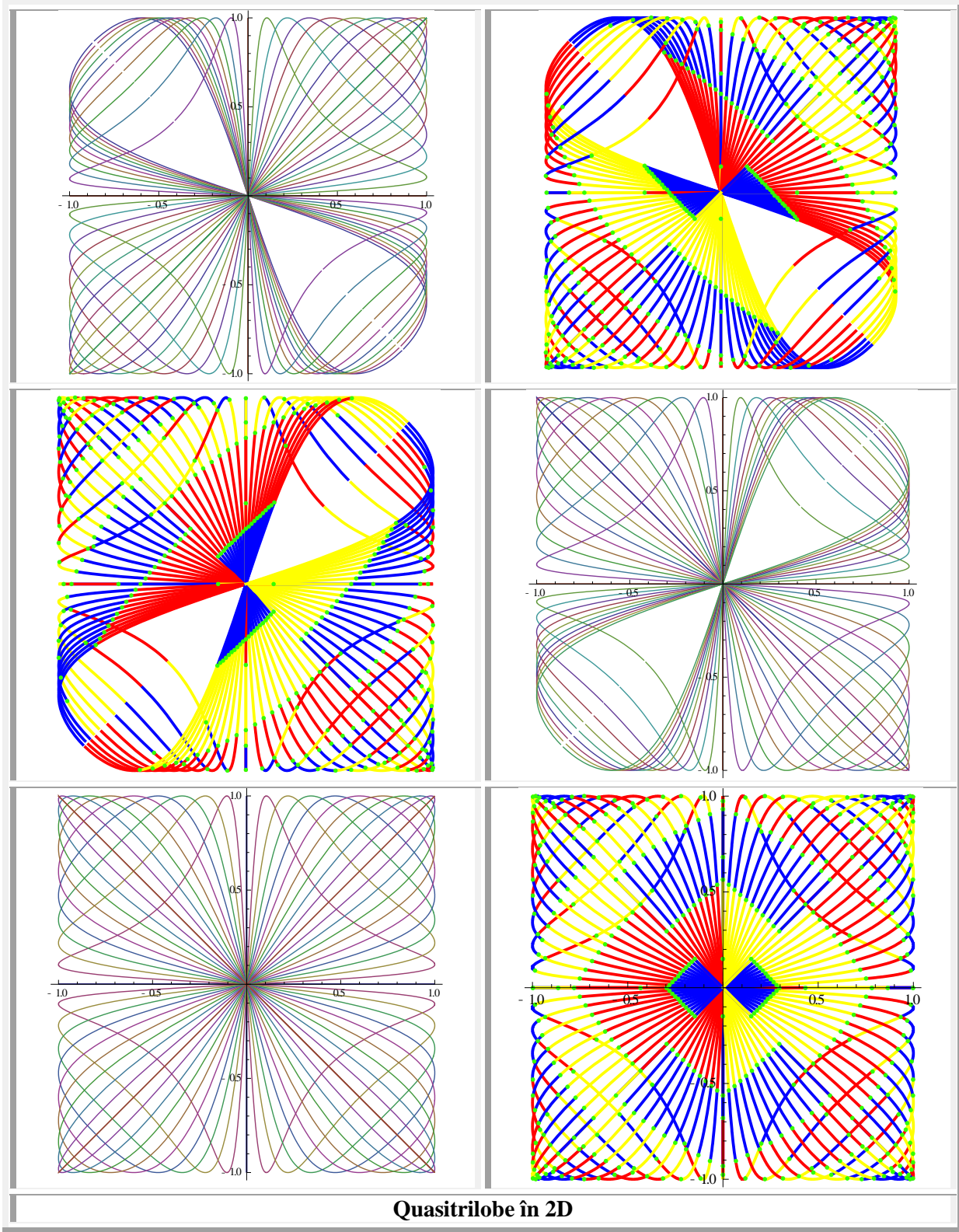
Din grafice din **figura 7** rezultă **CES liniare** pentru **s = 0**, ceea ce era de așteptat, deoarece în acest caz suntem în **domeniul centric**, al vibrațiilor sistemelor liniare clasice, exprimate de funcțiile circulare centrice **cos α** și **sin α** , dar și pentru **s = ± 1** , care constituie un rezultat mai puțin așteptat, chiar o surpriză, care a apărut și în cazul celorlalte sisteme exprimate de **funcții supermatematice** amintite anterior (**quadrilobe**, exprimate prin funcțiile **quadrilobe coq θ** și **siq θ** , dar și de **FSM- circulare excentrice**, prin funcțiile **cex θ** și **sex θ**).

BIBLIOGRAFIE

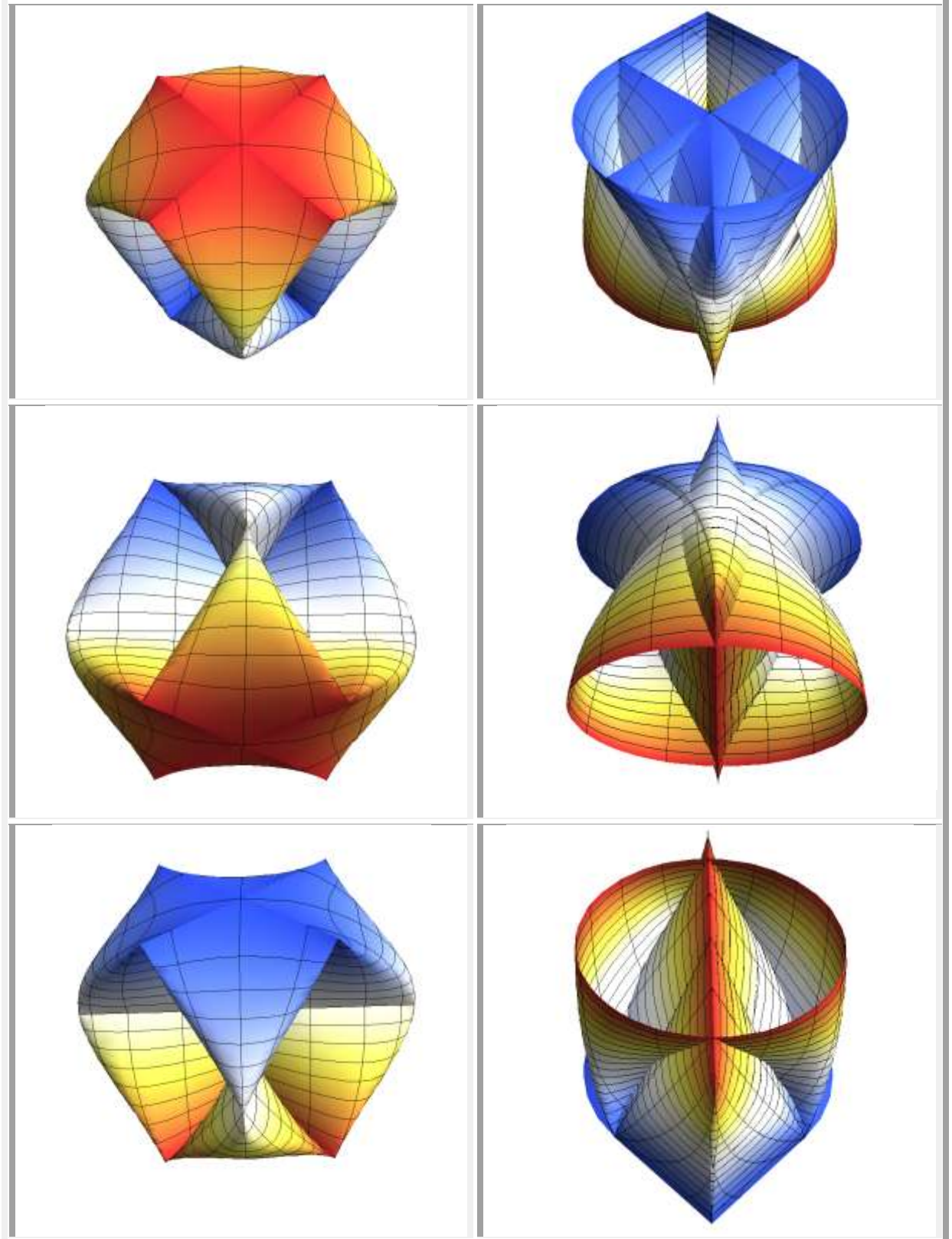
- | | | | |
|---|----------------------|--|---|
| 1 | Șelariu Mircea Eugen | STUDIUL VIBRAȚIILOR LIBERE ALE UNUI SISTEM NELINIAR, CONSERVATIV CU AJUTORUL FUNCȚIILOR CIRCULARE EXCENTRICE | Com. I Conf. Naț. Vibr. în C.M. Timișoara, 1978, pag. 95...100 |
| 2 | Șelariu Mircea Eugen | FUNCȚIILE SUPERMATEMATICE CIRCULARE EXCENTRICE cexθ și sexθ DE VARIABILĂ EXCENTRICĂ θ – SOLUȚIILE UNOR SISTEME MECANICE NELINIARE | Com. A VII-a Conf. Naț. V.C.M., Timișoara, 1993, pag. 275...284. |
| 3 | Șelariu Mircea Eugen | FUNCȚIILE SUPERMATEMATICE CIRCULARE EXCENTRICE Cexα și Sexα DE VARIABILĂ CENTRICĂ α CA SOLUȚII ALE UNOR SISTEME OSCILANTE NELINIARE | TEHNO ' 98. A VIII-a Conferința de Inginerie Managerială și Tehnologică, Timișoara 1998, pag 557...572 |
| 4 | Șelariu Mircea Eugen | QUADRILOBIC VIBRATION SYSTEMS | The 11 –th International Conference on Vibration Engineering, Timișoara, Sept. 27-30, 2005 pag. 77 ... 82 |

5	Şelariu Mircea Eugen	SUPERMATEMATICA. FUNDAMENTE, Eiþia a 2-a Vol. I si Vol. II	Editura POLITEHNICA, Timiþoara, 2012
6	Şelariu Mircea Eugen	SUPERMATEMATICA. FUNDAMENTE,	Editura POLITEHNICA, Timiþoara, 2007
7	Şelariu Mircea Eugen	FUNCTII CIRCULARE EXCENTRICE	Com. I Conferinþa Naþionalã de Vibraþii în Construcþia de Maþini, Timiþoara , 1978, pag.101...108.
8	Şelariu Mircea Eugen	FUNCTII CIRCULARE EXCENTRICE þi EXTENSIA LOR.	Bul .St.þi Tehn. al I.P. ”TV” Timiþoara, Seria Mecanicã, Tomul 25(39), Fasc. 1- 1980, pag. 189...196
9	Şelariu Mircea Eugen	RIGIDITATEA DINAMICã EXPRIMATã CU FUNCTII SUPERMATEMATICE	Com.VII Conf. Internaþ. De Ing. Manag. Si Tehn., TEHNO’95 Timiþoara, 1995 Vol.7 : Mecatronicã, Dispoz. Si Rob.Ind.,pag. 185...194
10	Şelariu Mircea Eugen	DETERMINAREA ORICãT DE EXACTã A RELAþIEI DE CALCUL A INTEGRALEI ELIPTICE COMPLETE DE SPETA INTãIA K(k)	Bul. VIII-a Conf. De Vibr. Mec., Timiþoara,1996, Vol III, pag.15 ... 24.
11	Şelariu Mircea Eugen	SMARANDACHE STEPPED FUNCTIONS	Revista: “Scientia Magna” Vol. 3, No. 1, 2007, ISSN 1556-6706
12	Şelariu Mircea Eugen	TEHNO ART OF ŞELARIU SUPERMATHEMATICS FUNCTIONS	(ISBN-10):1-59973-037-5 (ISBN-13):974-1-59973-037-0 (EAN): 9781599730370
13	Preda Horea	REPREZENTAREA ASISTATã A TRAIECTORILOR ÎN PLANUL FAZELOR A VIBRAþIILOR NELINIARE	Com. VI-a Conf.Naþ.Vibr. în C.M. Timiþoara, 1993
15	Smarandache Florentin Şelariu Mircea Eugen	IMMEDIATE CALCULATION OF SOME POISSON TYPE INTEGRALS USING SUPERMATHEMATICS CIRCULAR EX- CENTRIC FUNCTIONS	http://arxiv.org/abs/0706.4238 Archiv arXiv (United States) viXra.org > Functions and Analysis > viXra:1004.0053
16	Şelariu Mircea Eugen	MIŞCAREA CIRCLARã EXCENTRICã. PENDULUL SUPERMATEMATIC	www.cartiaz.ro pag.a 3-a
17	Şelariu Mircea Eugen	ELEMENTE NELINIARE LEGATE ÎN SERIE	www.cartiaz.ro pag.a 3-a
18	Şelariu Mircea Eugen	RIGIDITATEA DINAMICã EXPRIMATã CU FUNCTII SUPERMATEMATICE	www.cartiaz.ro pag.a 4-a
19	Şelariu Mircea Eugen	OPTIMIZAREA TRANSPORTULUI VIBRAþIONAL CU AJUTORUL FUNCTIILOR SUPERMATEMATICE CIRCULARE EXCENTRICE (FSM-CE)	www.cartiaz.ro pag.a 4-a
20	Şelariu Mircea Eugen	O METODA NOUA DE INTEGRARE. INTEGRAREA PRIN DIVIZAREA DIFERENþIALEI	www.cartiaz.ro pag.a 4-a
21	Şelariu Mircea Eugen	INTEGRALE SI FUNCTII ELIPTICE EXCENTRICE	www.cartiaz.ro pag.a 4-a
22	Şelariu Mircea Eugen	LOBELE - CURBE MATEMATICE NOI	www.cartiaz.ro pag.a 6-a

ANEXA 1



Quasitrilobe în 2D



Quasirilobe în 3D