DEMONSTRATION DE LA CONJECTURE DE SOPHIE GERMAIN

IDRISS OLIVIER BADO
virostake@gmail.com

8 octobre 2016

ABSTRACT In this paper we give the proof of Sophie Germain's conjecture by using the Chébotarev's density theorem, the inclusion-exclusion principle of Moivre, Mertens formula.

RESUME Dans ce present document nous donnons la preuve de la conjecture de Sophie Germain en utilisant le theorème de Che'botarev, le principe d'inclusion-exclusion de Moivre, la formule de Mertens.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

En théorie des nombres, un nombre premier p est dit de Sophie Germain si 2p+1 est un nombre premier et le nombre premier associé 2p+1 est dit nombre prémier sûr.
Par exemple 29 est un nombre prémier de Sophie Germain et 59 est un nombre prémier sûr.
Les nombres prémiers de Sophie ont été introduit après les investigations de la Mathématicienne Française autodictate MARIE Sophie Germain, pour sa démonstration partielle du dernier théorème de Fermat. Les nombres prémiers de Sophie Germain ont une merveilleuse application en cryptographie et dans les tests de la primalité. Il a été conjecturé qu'il existe une infinité de nombres premiers de Sophie Germain. Pour notre part, nous allons apporter une preuve élégante à la conjecture de Sophie Germain.

Chapitre 2

Comment démontrer la conjecture de Sophie Germain ?

Considérons X>0 un réel arbitrairement grand,désignons par $M = \{4, 6, 8, 9, 10...\}$ l'ensemble des entiers composés de [4,X].

Soit l'application injective : $\begin{array}{ccc} f : M & \to & \mathbb{N} \\ m & \mapsto & 2m+1 \end{array}$

Posons $M^* = f(M)$ alors f induit une bijection de M sur M^*.
Partitionnons l'ensemble M^* en deux sous ensembles .
Notons G le sous ensemble de M^* constitué d'entiers composés.
G' le sous ensemble de M^* constitué d'entiers premiers.

Soit $\mathbb{P}$ l'ensemble de tous les entiers premiers de l'intervalle [2,2X+1].
G'$\subset \mathbb{P}$ et $\mathbb{P}\backslash G' \neq \emptyset$ puisqu'il contient 2,3,5
Nous allons classer les nombres premiers de [2,2X+1] en deux groupes, en isolant $\{2, 3\}$ de ceux de [5,2X+1].
Cela se justifie par le fait que 2 et 3 ne soient pas des nombres premiers sûrs.
Désignons par E l'ensemble définit comme suit : $E = \{p \in \mathbb{P}\backslash G' : p \geq 5\}$

Lemme 1 $\forall p \in E, \frac{p-1}{2} \in \mathbb{P}$

Preuve : Désignons par $A = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$ l'ensemble de tous les entiers de [1,X]
Il est évident que $A = M \cup \{p \in \mathbb{P} : p \leq X\} \cup \{1\}$

$\forall p \in E$ on a : $\frac{p-1}{2} \notin$ M comme $p \geq 5$

On a
$\frac{p-1}{2} \geq 2 \quad \Rightarrow \frac{p-1}{2} \in A\backslash M \cup \{1\}$

$\Rightarrow \frac{p-1}{2} \in \mathbb{P}$

Lemme 2 $\forall p \in \mathbb{P}$ *tel qu'il existe* $m \in \mathbb{P}$ *vérifiant p=2m+1 alors* $p \in E$ *et réciproquement.*

preuve : Comme E et $\{2, 3\}$ forment une partition de $\mathbb{P}\backslash G'$ vu que 2 et 3 ne soient pas des nombres premiers sûrs, alors $\forall p \in \mathbb{P}$ tel qu'il existe $m \in \mathbb{P}$ vérifiant :
$p = 2m + 1 \Rightarrow m = \frac{p-1}{2} \in \mathbb{P} \Rightarrow \frac{p-1}{2} \geq 2 \Rightarrow p \geq 5$

Donc $p \in E$ reciproquement si $p \in E$ le lemme 1 nous permet de conclure.

Lemme 3 *l'ensemble E est en bijection avec une partie B de l'ensemble des nombres premiers de Sophie Germain.*

<u>**preuve**</u> : Considérons l'application injective : $\begin{array}{ccc} g:E & \to & \mathbb{P} \\ p & \mapsto & \frac{p-1}{2} \end{array}$

Posons B=g(E) il est clair que B est un sous ensemble des nombres premiers de Sophie Germain inférieur ou égaaux à 2X+1 . C'est à dire ceux de $\mathbb{P}$.
Comme g est injective alors g réalise une bijection de E sur B.
Pour évaluer l'infinitude de la classe des nombres prémiers de Sophie Germain nous allons démontrer que le cardinal de E est infini lorsque X tend vers l'infini vu que $Card(\mathbb{P}\backslash G') = Card(E) + 2$. Nous serons amené à évaluer avec précision le cardinal de $\mathbb{P}\backslash G'$.

notation 1 *Désignons par a(2X+1) le cardinal de $\mathbb{P}\backslash G'$, $\delta(2X+1)$ le cardinal de G' et $\pi(2X+1)$ le cardinal de $\mathbb{P}$.*
Comme $\mathbb{P}\backslash G'$ et G' forment une partition de $\mathbb{P}$ alors : $Card(\mathbb{P}\backslash G') + Card(G') = Card\mathbb{P} \Leftrightarrow \delta(2X+1) + a(2X+1) = \pi(2X+1)$.

Sans perte de généralité, observons que chaque nombre $m \in M$ (m composé) est divisible par au moins un nombre premier $\leq \sqrt{m} \leq \sqrt{X}$

Soit $\Lambda = \{2, 3, 5, 7, 11, ..., p_r\}$ l'ensemble des nombres premiers p_i (i=$\overline{1, r}$) avec $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_r = max\{p \in \mathbb{P} : p \leq \sqrt{X}\}$.
Tout élément de M (noté m) à au moins un diviseur dans cet ensemble Λ.

Considérons les suites arithmétiques $S_p \subset M$ formées des multiples inférieurs à X ne contenant pas p des différents $p \in \Lambda$ donc $\forall p \in \Lambda$ $S_p = \{2p, 3p, 4p, ..., [\frac{X}{p}]p\}$
<u>Remarque</u> : le premier élément de S_p est 2p, le dernier élément est $[\frac{X}{p}]p$. La raison de S_p est p.
En d'autre terme $M = \bigcup_{p\in\Lambda} S_p$.
Considérons les suites arithmétiques $(\dot{S_p})_{p\in\Lambda} \subset M$ définit par $\dot{S_p} = f(S_p)$ où $\begin{array}{ccc} f:M & \to & M^* \\ m & \mapsto & 2m+1 \end{array}$
Clairement $\dot{S_p} = \{4p+1, 6p+1, ...; 2[\frac{X}{p}]p+1\}$.

Comme $M^* = f(M) = f(\bigcup_{p\in\Lambda} S_p)$, alors $M^* = \bigcup_{p\in\Lambda} f(S_p) = \bigcup_{p\in\Lambda} \dot{S_p}$

Dans ce qui suivra nous allons appliquer le théorème de densité de Chébotarev d'une part et d'autre part le principe inclusion-exclusion de Moivre, afin d'évaluer les nombres premiers de $\bigcup_{p\in\Lambda} \dot{S_p}$.
Le théorème de la progression arithmétique de Dirichlet généralisé par Nikolai Chébotarev affirme que l'ensemble des nombres premiers en progression arithmétique de m a une densité naturelle parmis les nombres premiers de $\frac{1}{\varphi(m)}$. Où φ designe la fonction indicatrice d'Euler.

Autrement dit : soit a,b>0 tel que pgcd(a,b)=1.
Soit $\Pi(X, a, b) = |\{p \leq X : p \equiv a[b]\}|$

$\Pi(X) =| \{p \leq X\} |$ où $| \,.\, |= Card()$ et $p \in \mathbb{P}$. Alors le théorème de densité de Chébotarev affirme que $\frac{\Pi(X,a,b)}{\Pi(X)} \sim_\infty \frac{1}{\varphi(b)}$.
Le théorème des nombres premiers affirme quant à lui que $\Pi(X) \sim_\infty \frac{X}{lnX}$ Donc $\Pi(X, a, b) \sim_\infty \frac{\Pi(X)}{\varphi(b)} \sim_\infty \frac{X}{\varphi(b)lnX}$
$\Pi(X, a, b) \sim_\infty \frac{X}{\varphi(b)lnX}$.
Dans la suite, nous allons justifier l'application du théorème de Chébotarev aux suites $(\dot{S_p})_{p\in\Lambda}$ puis à leurs intersections.
Remmarques : Lorsque X tend vers l'infini il en est de même pour $\sqrt{X}$ et donc le nombre de terme de $\dot{S_p}$ tend vers l'infini avec X puisque $p \leq \sqrt{X}$. Le premier terme de chaque suite $\dot{S_p}$ vaut 4p+1, ces nombres constituent des sortes de briques élémentaires auxquels il nous faut ajouter la raison 2p pour obtenir les autres. Pour justifier les hypothèses du théorème de densité de Chébotarev il sera question pour nous de montrer que pgcd(4p+1,2p)=1. Ce qui est évident puisque $1 \times (4p + 1) - 2 \times 2p = 1$. De plus, comme

$S_{p_i} \cap S_{p_j} = \{2p_ip_j, 3p_ip_j, ..., [\frac{X}{p_ip_j}]p_ip_j\}$. C'est à dire les multiples de p_ip_j ne contenant pas p_ip_j et inférieurs à X. Les différents $p_i, p_j \in \Lambda$ avec $i \neq j$
D'où $\dot{S_{p_i}} \cap \dot{S_{p_j}} = \{4p_ip_j + 1, 6p_ip_j + 1, ..., 2[\frac{X}{p_ip_j}]p_ip_j + 1\}$.
Le premier terme de $\dot{S_{p_i}} \cap \dot{S_{p_j}}$ vaut $4p_ip_j + 1$ et sa raison est $2p_ip_j$ Comme $1 \times (4p+1) - 2 \times 2p = 1$ nous sommes dans les conditions d'application du théorème de densité de Chébotarev.

De la même manière nous justifions $\dot{S_{p_i}} \cap \dot{S_{p_j}} \cap \dot{S_{p_k}}$ et de proche en proche $\bigcap_{1 \leq j \leq r} \dot{S_{p_j}}$.
Nous sommes dans le cadre d'application du théorème de Chébotarev aux suites $(\dot{S_p})_{p \in \Lambda}$.

Chapitre 3

Demonstration de la conjecture de Sophie Germain

3.1 Théorème

Théorème 1 *Soit X>0 arbitrairement grand* c_2 *la constante des nombres premiers jumeaux,* γ *la constante d'Euler-Macheroni. G(X) le cardinal des nombres premiers sûrs*$\leq X$.

$$G(X) \simeq \frac{2\exp(-\gamma)c_2 X}{(lnX)^2}$$

3.2 Lemme utile

Lemme 4 *Soit* $a_1, a_2, \ldots, a_r$ *des réels strictement positifs alors,*

$$1 - \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{a_i} + \sum_{1\leq i\leq j\leq r} \frac{1}{a_i a_j} + \ldots + \frac{(-1)^r}{a_1 \ldots a_r} = \prod_{i=1}^{r} \frac{a_i - 1}{a_i}$$

preuve du lemme

Considérons le polynôme $P(X) = \prod_{i=1}^{r}(X - \frac{1}{a_i})$

D'après les relations coefficients-racines $P(X) = X^r - \sigma_1 X^{r-1} + \ldots + (-1)^r \sigma_r$ où $\sigma_j = \sum_{1\leq i1<\ldots<ij\leq r} x_{i1} \ldots x_{ij}$, $p(x_{im}) = 0 \ \forall m \in \overline{1, j}$
en prenant X=1 on a :

$P(1) = 1 - \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + (-1)^r \sigma_r$ Comme les racines de P sont $\frac{1}{a_i}$ $\forall i \in \overline{1, r}$, alors Alors

$p(1) = 1 - \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{a_i} + \sum_{1\leq i<j\leq r} \frac{1}{a_i a_j} + \ldots + \frac{(-1)^r}{a_1.a_2\ldots a_r}$
D'où $\prod_{i=1}^{r}(1 - \frac{1}{a_i}) = \prod_{i=1}^{r} \frac{a_i - 1}{a_i} = 1 - \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{a_i} + \sum_{1\leq i<j\leq r} \frac{1}{a_i a_j} + \ldots + \frac{(-1)^r}{a_1.a_2\ldots a_r}$

Le lemme étant ainsi prouvé.

DEMONSTRATION DU THEOREME 1
D'après le principe d'inclusion-exclusion de Moivre on a :

$$\varrho(\bigcup_{i=1}^{r} \dot{S}_{p_i}) = \sum_{i=1}^{r} \varrho(\dot{S}_{p_i}) - \sum_{1\leq i<j\leq r} \varrho(\dot{S}_{p_i} \cap \dot{S}_{p_j}) + \sum_{1\leq i<j<k\leq r} \varrho(\dot{S}_{p_i} \cap \dot{S}_{p_j} \cap \dot{S}_{p_k}) - \sum_{1\leq i<j<k<l\leq r} \varrho(\dot{S}_{p_i} \cap \dot{S}_{p_j} \cap \dot{S}_{p_k} \cap \dot{S}_{p_l}) + \ldots$$

où ϱ désigne la densité des nombres premiers et $r = Max\{i, p_i \leq \sqrt{X}\}$ donc

$$\varrho(M^*) = \varrho(\bigcup_{i=1}^{r} \dot{S}_{p_i}) = CardG' = \delta(2X + 1)$$

D'après le théorème de densité de Chebotarev :
$\varrho(\dot{S}_{p_i}) = \frac{\pi(2X+1)}{\varphi(2p_i)}$
$\varrho(\dot{S}_{p_i} \cap \dot{S}_{p_j}) = \frac{\pi(2X+1)}{\varphi(2p_ip_j)}$
$\varrho(\dot{S}_{p_i} \cap \dot{S}_{p_j} \cap \dot{S}_{p_k}) = \frac{\pi(2X+1)}{\varphi(2p_ip_jp_k)}$
$\varrho(\dot{S}_{p_i} \cap \dot{S}_{p_j} \cap \dot{S}_{p_k} \cap \dot{S}_{p_l}) = \frac{\pi(2X+1)}{\varphi(2p_ip_jp_kp_l)}$
Ainsi de suite. D'où :

$$\delta(2X+1) = \sum_{i=1}^{r} \frac{\pi(2X+1)}{\varphi(2p_i)} - \sum_{1\leq i<j\leq r} \frac{\pi(2X+1)}{\varphi(2p_ip_j)} + \sum_{1\leq i<j<k\leq r} \frac{\pi(2X+1)}{\varphi(2p_ip_jp_k)} - \sum_{1\leq i<j<k<l\leq r} \frac{\pi(2X+1)}{\varphi(2p_ip_jp_kp_l)} + \dots$$

Comme $p_1 = 2$ et $\varphi(4) = 2$ nous allons scinder les sommes suivant $p_1 = 2$ et en remarquant que 4 est premier avec $p_2, p_3, \ldots, p_r$, alors

$$\delta(2X+1) = \frac{\pi(2X+1)}{\varphi(2p_1)} + \sum_{i=2}^{r} \frac{\pi(2X+1)}{\varphi(2p_i)} - \sum_{i=2}^{r} \frac{\pi(2X+1)}{\varphi(2p_1p_i)} - \sum_{2\leq i<j\leq r} \frac{\pi(2X+1)}{\varphi(2p_ip_j)}$$
$$+ \sum_{2\leq i<j\leq r} \frac{\pi(2X+1)}{\varphi(2p_1p_ip_j)} + \sum_{2\leq i<j<k\leq r} \frac{\pi(2X+1)}{\varphi(2p_ip_jp_k)}$$
$$- \sum_{2\leq i<j<k\leq r} \frac{\pi(2X+1)}{\varphi(2p_1p_ip_jp_k)} - \sum_{1\leq i<j<k<l\leq r} \frac{\pi(2X+1)}{\varphi(2p_ip_jp_kp_l)} + \ldots$$
$$\delta(2X+1) = \frac{\pi(2X+1)}{\varphi(4)} + \sum_{i=2}^{r} \frac{\pi(2X+1)}{\varphi(2p_i)} - \sum_{i=2}^{r} \frac{\pi(2X+1)}{\varphi(4p_i)} - \sum_{2\leq i<j\leq r} \frac{\pi(2X+1)}{\varphi(2p_ip_j)}$$
$$+ \sum_{2\leq i<j\leq r} \frac{\pi(2X+1)}{\varphi(4p_ip_j)} + \sum_{2\leq i<j<k\leq r} \frac{\pi(2X+1)}{\varphi(2p_ip_jp_k)}$$
$$- \sum_{2\leq i<j<k\leq r} \frac{\pi(2X+1)}{\varphi(4p_ip_jp_k)} - \sum_{2\leq i<j<k<l\leq r} \frac{\pi(2X+1)}{\varphi(2p_ip_jp_kp_l)} + \ldots$$
$$\delta(2X+1) = \frac{\pi(2X+1)}{2} + \sum_{i=2}^{r} \frac{\pi(2X+1)}{\varphi(2)\varphi(p_i)} - \sum_{i=2}^{r} \frac{\pi(2X+1)}{\varphi(4)\varphi(p_i)} - \sum_{2\leq i<j\leq r} \frac{\pi(2X+1}{\varphi(2)\varphi(p_i)\varphi(p_j)}$$
$$+ \sum_{2\leq i<j\leq r} \frac{\pi(2X+1)}{\varphi(4)\varphi(p_i)\varphi(p_j)} + \sum_{2\leq i<j<k\leq r} \frac{\pi(2X+1)}{\varphi(2)\varphi(p_i)\varphi(p_j)\varphi(p_k)}$$
$$- \sum_{2\leq i<j<k\leq r} \frac{\pi(2X+1)}{\varphi(4)\varphi(p_i)\varphi(p_j)\varphi(p_k)} - \sum_{2\leq i<j<k<l\leq r} \frac{\pi(2X+1)}{\varphi(2)\varphi(p_i)\varphi(p_j)\varphi(p_k)\varphi(p_l)} + \ldots$$
$$\delta(2X+1) = \frac{\pi(2X+1)}{2} + \sum_{i=2}^{r} \frac{\pi(2X+1)}{\varphi(p_i)} - \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{r} \frac{\pi(2X+1)}{\varphi(p_i)} - \sum_{2\leq i<j\leq r} \frac{\pi(2X+1)}{\varphi(p_i)\varphi(p_j)}$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{2\leq i<j\leq r} \frac{\pi(2X+1)}{\varphi(p_i)\varphi(p_j)} + \sum_{2\leq i<j<k\leq r} \frac{\pi(2X+1)}{\varphi(p_i)\varphi(p_j)\varphi(p_k)}$$
$$- \frac{1}{2}\sum_{2\leq i<j<k\leq r} \frac{\pi(2X+1)}{\varphi(p_i)\varphi(p_j)\varphi(p_k)} - \sum_{2\leq i<j<k<l\leq r} \frac{\pi(2X+1)}{\varphi(p_i)\varphi(p_j)\varphi(p_k)\varphi(p_l)} + \ldots$$
$$\delta(2X+1) = \frac{\pi(2X+1)}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{r} \frac{\pi(2X+1)}{\varphi(p_i)} - \frac{1}{2}\sum_{2\leq i<j\leq r} \frac{\pi(2X+1)}{\varphi(p_i)\varphi(p_j)}$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{2\leq i<j<k\leq r} \frac{\pi(2X+1)}{\varphi(p_i)\varphi(p_j)\varphi(p_k)} - \frac{1}{2}\sum_{2\leq i<j<k<l\leq r} \frac{\pi(2X+1)}{\varphi(p_i)\varphi(p_j)\varphi(p_k)\varphi(p_l)} + \ldots$$
$$\delta(2X+1) = \frac{\pi(2X+1)}{2}[1 + \sum_{i=2}^{r} \frac{1}{\varphi(p_i)} - \sum_{2\leq i<j\leq r} \frac{1}{\varphi(p_i)\varphi(p_j)}$$
$$+ \sum_{2\leq i<j<k\leq r} \frac{1}{\varphi(p_i)\varphi(p_j)\varphi(p_k)} - \sum_{2\leq i<j<k<l\leq r} \frac{1}{\varphi(p_i)\varphi(p_j)\varphi(p_k)\varphi(p_l)} + \ldots]$$
$$\delta(2X+1) = \frac{\pi(2X+1)}{2}[1 - (-1 + (1 - \sum_{i=2}^{r} \frac{1}{p_i-1} + \sum_{2\leq i<j\leq r} \frac{1}{(p_i-1)(p_j-1)}$$
$$- \sum_{2\leq i<j<k\leq r} \frac{1}{(p_i-1)(p_j-1)(p_k-1)} + \sum_{2\leq i<j<k<l\leq r} \frac{1}{(p_i-1)(p_j-1)(p_k-1)(p_l-1)} + \ldots))]$$
$$\delta(2X+1) = \frac{\pi(2X+1)}{2}[2 - (1 - \sum_{i=2}^{r} \frac{1}{p_i-1} + \sum_{2\leq i<j\leq r} \frac{1}{(p_i-1)(p_j-1)}$$
$$- \sum_{2\leq i<j<k\leq r} \frac{1}{(p_i-1)(p_j-1)(p_k-1)} + \sum_{2\leq i<j<k<l\leq r} \frac{1}{(p_i-1)(p_j-1)(p_k-1)(p_l-1)} + \ldots)]$$

D'après le lemme utile on a :
$\delta(2X+1) = \frac{\pi(2X+1)}{2}(2 - \prod_{i=2}^{r} \frac{p_i - 2}{p_i - 1})$
Donc $\delta(2X+1) = \pi(2X+1)(1 - \frac{1}{2}\prod_{i=2}^{r} \frac{p_i-2}{p_i-1})$
Or $\delta(2X+1) = \pi(2X+1) - a(2X+1)$ donc $a(2X+1) = \pi(2X+1) - \delta(2X+1)$
$a(2X+1) = \pi(2X+1) - \pi(2X+1)(1 - \frac{1}{2}\prod_{i=2}^{r} \frac{p_i-2}{p_i-1})$
$a(2X+1) = \frac{\pi(2X+1)}{2}\prod_{i=2}^{r} \frac{p_i-2}{p_i-1}$
Comme $r = max\{i : p_i \leq \sqrt{X}\}$ alors :

$$a(2X+1) = \frac{\pi(2X+1)}{2}\prod_{p=3}^{\sqrt{X}} \frac{p-2}{p-1}.$$

Nous allons donc appliquer le troisième théorème de Mertens communément appelé formule de Mertens et utiliser la constante de Shah et Wilson (constante des nombres premiers jumeaux) pour évaluer le second membre de la relation precédente.

La formule de Mertens s'ecrit :

$\prod_{p\leq x}(1 - \frac{1}{p}) = \frac{\exp(-\gamma)}{lnX}(1 + \bigcirc(\frac{1}{lnX}))$

où γ est la constante d'Euler-Mascheroni.
Donc $\prod_{p=2}^{\sqrt{X}}(1 - \frac{1}{p}) = \frac{2\exp(-\gamma)}{lnX}(1 + \bigcirc(\frac{1}{lnX}))$

La constante c_2 des nombres premiers jumeaux vaut : $c_2 = \prod_{p>2} \frac{p(p-2)}{(p-1)^2} \simeq 0,66$
Donc $c_2 = \prod_{p>2} \frac{p}{p-1} \prod_{p>2} \frac{p-2}{p-1}$

Pour X suffisament grand on peut écrire : $c_2 \simeq \prod_{p=3}^{\sqrt{X}} \frac{p}{p-1} \prod_{p=3}^{\sqrt{X}} \frac{p-2}{p-1}$

Donc $\prod_{p=3}^{\sqrt{X}} \frac{p-2}{p-1} \simeq c_2 \prod_{p=3}^{\sqrt{X}} \frac{p-1}{p}$

$\Rightarrow \prod_{p=3}^{\sqrt{X}} \frac{p-2}{p-1} \simeq 2c_2 \prod_{p=2}^{\sqrt{X}}(1 - \frac{1}{p})$

D'où $\prod_{p=3}^{\sqrt{X}} \frac{p-2}{p-1} \simeq \frac{2c_2 \times 2\exp(-\gamma)}{lnX}$

$\prod_{p=3}^{\sqrt{X}} \frac{p-2}{p-1} \simeq \frac{4c_2\exp(-\gamma)}{lnX}$

Comme $\pi(2X+1) = \frac{2X}{lnX}(1 + \bigcirc(\frac{1}{lnX}))$

Alors
$a(2X+1) \simeq \frac{4Xc_2\exp(-\gamma)}{(lnX)^2}$

$\Rightarrow a(X) \simeq \frac{2Xc_2\exp(-\gamma)}{(lnX)^2}$

Comme G(X)=Card(E)= $a(X) - 2$

Doù $G(X) \simeq \frac{2Xc_2\exp(-\gamma)}{(lnX)^2} - 2 \simeq \frac{2Xc_2\exp(-\gamma)}{(lnX)^2}$

Ce qui prouve le théorème.

Corrolaire 1 *Il existe une infinité de nombres premiers de Sophie Germain.*

Preuve

Soit R(X) le nombre de nombres premiers de Sophie Germain inférieur ou égal à X.
Pour tout X>0 on a : R(X)>G(X)

Donc on a :

$R(X) > \frac{2Xc_2 \exp(-\gamma)}{(lnX)^2}$
En faisant tendre $X \to \infty$ on a $R(X) \to \infty$

Bibliographie

[1] Not always buried deep selection from analytic and combunatorial number theory 2003,2004 Paul POLLACK

[2]

[3] An amazing prime heuristic Chris K. CALDWELL

[4]

[5] Demonstration de l'hypothèse de GOLBACH, Sambegou DIALLO

[6]

[7] Les nombres premiers entre l'ordre et le chaos. Gerald TENEMBAUM

[8]

[9] The Chebotarev Density theorem. Hendrick LENSTRA

[10] [10, https : //en.m.wikipedia.org] [10, https : //planetmath.org/safeprime] [10, Quaspierfree.fr/twin]