

La Conjecture de BEAL : Démonstration Complète Suivie d'Exemples Numériques

Abdelmajid Ben Hadj Salem, Dipl.-Eng.

Email : abenhadjalem@gmail.com

6, Rue du Nil, Cité Soliman Er-Riadh, 8020 Soliman, Tunisia.

Résumé

En 1997, Andrew Beal [1] avait annoncé la conjecture suivante : *Soient $A, B, C, m, n,$ et l des entiers positifs avec $m, n, l > 2$. Si $A^m + B^n = C^l$ alors $A, B,$ et C ont un facteur en commun.* Nous considérons le polynôme $P(x) = (x - A^m)(x - B^n)(x + C^l) = x^3 - px + q$ avec p, q des entiers qui dépendent de A^m, B^n et C^l . La résolution de $x^3 - px + q = 0$ nous donne les trois racines x_1, x_2, x_3 comme fonctions de p, q et d'un paramètre θ . Comme $A^m, B^n, -C^l$ sont les seules racines de $x^3 - px + q = 0$, nous discutons les conditions pour que x_1, x_2, x_3 soient des entiers. Quatre exemples numériques sont présentés.

Abstract

In 1997, Andrew Beal [1] announced the following conjecture : *Let $A, B, C, m, n,$ and l be positive integers with $m, n, l > 2$. If $A^m + B^n = C^l$ then $A, B,$ and C have a common factor.* We begin to construct the polynomial $P(x) = (x - A^m)(x - B^n)(x + C^l) = x^3 - px + q$ with p, q integers depending of A^m, B^n and C^l . We resolve $x^3 - px + q = 0$ and we obtain the three roots x_1, x_2, x_3 as functions of p, q and a parameter θ . Since $A^m, B^n, -C^l$ are the only roots of $x^3 - px + q = 0$, we discuss the conditions that x_1, x_2, x_3 are integers. Four numerical examples are given.

Keywords: Prime numbers, divisibility, roots of polynomials of third degree.

2010 MCS 11AXX 11D41

*A mon épouse Wahida,
mes enfants Senda et Mohamed Mazen*

Table des matières

1	Introduction	2
1.1	Cas trivial	2
2	Calculs Préliminaires	3
2.1	Démonstration	4
3	La Démonstration du Principal Théorème	5
3.1	Cas $\cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{1}{b}$	6

3.1.1	$b = 1$	6
3.1.2	$b = 2$	6
3.1.3	$b = 3$	7
3.2	Cas $a > 1$, $\cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{a}{b}$	7
3.2.1	Hypothèse : $\{3 p \text{ et } b 4p\}$	7
3.2.2	Hypothèse : $\{3 a \text{ et } b 4p\}$	28
4	Exemples Numériques	45
4.1	Exemple 1 :	45
4.2	Exemple 2 :	46
4.3	Exemple 3 :	46
4.4	Exemple 4 :	46
5	Conclusion	47

1 Introduction

En 1997, Andrew Beal [1] avait annoncé la conjecture suivante :

Conjecture 1.1. Soient A, B, C, m, n , et l des entiers positifs avec $m, n, l > 2$. Si :

$$A^m + B^n = C^l \quad (1.1)$$

alors A, B , et C ont un facteur commun.

Dans ce papier, nous allons donner une démonstration complète de la conjecture de Beal. Notre idée est de considérer un polynôme $P(x)$ de troisième degré ayant comme racines les nombres A^m, B^n et $-C^l$ en tenant compte de la condition (1.1). Le papier est organisé comme suit : dans la section 2, nous exprimons les racines de $P(x) = x^3 - px + q = 0$ en fonction de deux paramètres ρ, θ qui dépendent de A^m, B^n et C^l . La section 3 représente la partie importante du papier, nous obtenons que $A^{2m} = \frac{4p}{3} \cos^2 \frac{\theta}{3}$. Comme A^{2m} est un entier, il s'ensuit que $\cos^2 \frac{\theta}{3}$ doit être écrit comme une fraction $\frac{a}{b}$ où a, b sont deux entiers positifs non nuls copremiers. Nous discutons alors les conditions de divisibilité de p, a, b telles que l'expression de A^{2m} soit un entier et que a, b restent copremiers. Suivant les cas étudiés, nous obtenons que A, B, C aient ou non un facteur commun. Dans la section 4, quatre exemples numériques sont présentés et nous finissons par la conclusion en section 5.

1.1 Cas trivial

Nous commençons avec le cas trivial où $A^m = B^n$. L'équation (1.1) devient :

$$2A^m = C^l \quad (1.2)$$

Comme $l > 2$, nous déduisons facilement que 2 est un facteur commun. La conjecture (1.1) est vérifiée.

Nous supposons dans la suite que $A^m > B^n$.

2 Calculs Préliminaires

Nous supposons la donnée de $m, n, l \in \mathbb{N}^*$ > 2 et $A, B, C \in \mathbb{N}^*$ tels que :

$$A^m + B^n = C^l \quad (2.1)$$

Nous appellerons :

$$P(x) = (x - A^m)(x - B^n)(x + C^l) \quad (2.2)$$

Utilisant l'équation (2.1), $P(x)$ peut s'écrire :

$$P(x) = x^3 + x[A^m B^n - (A^m + B^n)^2] + A^m B^n (A^m + B^n) \quad (2.3)$$

Nous introduisons les notations :

$$p = (A^m + B^n)^2 - A^m B^n; \quad q = A^m B^n (A^m + B^n) \quad (2.4)$$

Comme $A^m \neq B^n$, nous obtenons $p > 0$. L'équation (2.3) devient :

$$P(x) = x^3 - px + q \quad (2.5)$$

en utilisant l'équation (2.2), $P(x) = 0$ a trois racines réelles différentes : A^m, B^n et $-C^l$. Maintenant, résolvons l'équation :

$$P(x) = x^3 - px + q = 0 \quad (2.6)$$

Pour résoudre (2.6), posons :

$$x = u + v; \quad \alpha = A^m B^n > 0; \quad \beta = (A^m + B^n)^2 \quad (2.7)$$

Alors $P(x) = 0$ donne les deux conditions sur u et v :

$$u^3 + v^3 = -q; \quad uv = p/3 > 0 \quad (2.8)$$

Alors u^3 et v^3 sont solutions de l'équation du second degré :

$$X^2 + qX + p^3/27 = 0 \quad (2.9)$$

Son discriminant Δ s'écrit :

$$\Delta = q^2 - 4p^3/27 = \frac{27q^2 - 4p^3}{27} = \frac{\bar{\Delta}}{27}$$

avec :

$$\bar{\Delta} = 27q^2 - 4p^3 = 27\alpha^2\beta - 4(\beta - \alpha)^3$$

Comme $\alpha \neq 0$, nous pouvons aussi re-écrire l'équation précédente comme :

$$\bar{\Delta} = \alpha^3 \left(27 \frac{\beta}{\alpha} - 4 \left(\frac{\beta}{\alpha} - 1 \right)^3 \right)$$

Nous appelons t le paramètre $\frac{\beta}{\alpha}$, $\bar{\Delta}$ devient :

$$\bar{\Delta} = \alpha^3 (27t - 4(t - 1)^3)$$

Notons :

$$y = y(t) = 27t - 4(t - 1)^3 \quad (2.10)$$

Comme $\alpha > 0$, le signe de $\bar{\Delta}$ est aussi le signe de $y(t)$. L'étude du signe de la fonction y montre que $y < 0$ pour $t > 4$. Dans notre cas, nous sommes intéressés à $t > 0$. Pour $t = 4$ nous obtenons $y(4) = 0$ et pour $t \in]0, 4[$ $y > 0$. Comme nous avons $t = \frac{\beta}{\alpha} > 4$ parce que $A^m \neq B^n$:

$$(A^m - B^n)^2 > 0 \implies \beta = (A^m + B^n)^2 > 4\alpha = 4A^m B^n \quad (2.11)$$

Alors $y < 0 \implies \bar{\Delta} < 0 \implies \Delta < 0$. Alors l'équation (2.9) n'a pas de racines réelles u^3 et v^3 . Retrouvons les solutions u et v avec $x = u + v$ un réel positif ou négatif et $u.v = p/3$.

2.1 Démonstration

Démonstration. Les solutions de l'équation (2.9) sont :

$$X_1 = \frac{-q + i\sqrt{-\Delta}}{2}; \quad X_2 = \bar{X}_1 = \frac{-q - i\sqrt{-\Delta}}{2}$$

Nous devons résoudre :

$$u^3 = \frac{-q + i\sqrt{-\Delta}}{2}; \quad v^3 = \frac{-q - i\sqrt{-\Delta}}{2}$$

Ecrivons X_1 sous la forme $X_1 = \rho e^{i\theta}$ avec :

$$\rho = \frac{\sqrt{q^2 - \Delta}}{2} = \frac{p\sqrt{p}}{3\sqrt{3}}; \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2\rho} > 0; \quad \cos\theta = -\frac{q}{2\rho} < 0 \quad (2.12)$$

alors $\theta [2\pi] \in]\frac{\pi}{2}, +\pi[$, soit :

$$\boxed{\frac{\pi}{2} < \theta < +\pi \implies \frac{\pi}{6} < \frac{\theta}{3} < \frac{\pi}{3} \implies \frac{1}{2} < \cos\frac{\theta}{3} < \frac{\sqrt{3}}{2}} \quad (2.13)$$

et :

$$\boxed{\frac{1}{4} < \cos^2\frac{\theta}{3} < \frac{3}{4}} \quad (2.14)$$

d'où l'expression de X_2 : $X_2 = \rho e^{-i\theta}$. Posons :

$$u = r e^{i\psi}; \quad \text{et } j = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}} \quad (2.15)$$

avec j est une racine complexe cubique de l'unité, alors les solutions u et v sont :

$$\begin{cases} u_1 = r e^{i\psi_1} = \sqrt[3]{\rho} e^{i\frac{\theta}{3}} \\ u_2 = r e^{i\psi_2} = \sqrt[3]{\rho} j e^{i\frac{\theta}{3}} = \sqrt[3]{\rho} e^{i\frac{\theta+2\pi}{3}} \\ u_3 = r e^{i\psi_3} = \sqrt[3]{\rho} j^2 e^{i\frac{\theta}{3}} = \sqrt[3]{\rho} e^{i\frac{4\pi}{3}} e^{i\frac{\theta}{3}} = \sqrt[3]{\rho} e^{i\frac{\theta+4\pi}{3}} \end{cases} \quad (2.16)$$

et similairement :

$$\begin{cases} v_1 = re^{-i\psi_1} = \sqrt[3]{\rho}e^{-i\frac{\theta}{3}} \\ v_2 = re^{-i\psi_2} = \sqrt[3]{\rho}j^2e^{-i\frac{\theta}{3}} = \sqrt[3]{\rho}e^{i\frac{4\pi}{3}}e^{-i\frac{\theta}{3}} = \sqrt[3]{\rho}e^{i\frac{4\pi-\theta}{3}} \\ v_3 = re^{-i\psi_3} = \sqrt[3]{\rho}je^{-i\frac{\theta}{3}} = \sqrt[3]{\rho}e^{i\frac{2\pi-\theta}{3}} \end{cases} \quad (2.17)$$

Nous devons choisir u_k et v_h tels que $u_k + v_h$ soit réel. Dans ce cas, nous avons nécessairement :

$$v_1 = \overline{u_1}; \quad v_2 = \overline{u_2}; \quad v_3 = \overline{u_3}$$

Nous obtenons comme solutions réelles de l'équation (2.6) :

$$\begin{cases} x_1 = u_1 + v_1 = 2\sqrt[3]{\rho}\cos\frac{\theta}{3} > 0 \\ x_2 = u_2 + v_2 = 2\sqrt[3]{\rho}\cos\frac{\theta+2\pi}{3} = -\sqrt[3]{\rho}\left(\cos\frac{\theta}{3} + \sqrt{3}\sin\frac{\theta}{3}\right) < 0 \\ x_3 = u_3 + v_3 = 2\sqrt[3]{\rho}\cos\frac{\theta+4\pi}{3} = \sqrt[3]{\rho}\left(-\cos\frac{\theta}{3} + \sqrt{3}\sin\frac{\theta}{3}\right) > 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

Comparant les expressions de x_1 et x_3 , nous obtenons facilement $x_1 > x_3$. Comme A^m, B^n et $-C^l$ sont les seules solutions réelles de (2.6), nous considérons, comme A^m est supposé supérieur à B^n , les expressions :

$$\boxed{\begin{cases} A^m = x_1 = u_1 + v_1 = 2\sqrt[3]{\rho}\cos\frac{\theta}{3} \\ B^n = x_3 = u_3 + v_3 = 2\sqrt[3]{\rho}\cos\frac{\theta+4\pi}{3} = \sqrt[3]{\rho}\left(-\cos\frac{\theta}{3} + \sqrt{3}\sin\frac{\theta}{3}\right) \\ -C^l = x_2 = u_2 + v_2 = 2\sqrt[3]{\rho}\cos\frac{\theta+2\pi}{3} = -\sqrt[3]{\rho}\left(\cos\frac{\theta}{3} + \sqrt{3}\sin\frac{\theta}{3}\right) \end{cases}} \quad (2.19)$$

□

3 La Démonstration du Principal Théorème

Theorem 3.1. Soient A, B, C, m, n , et l des entiers positifs avec $m, n, l > 2$. Si :

$$A^m + B^n = C^l \quad (3.1)$$

alors A, B , et C ont un facteur commun.

Démonstration. $A^m = 2\sqrt[3]{\rho}\cos\frac{\theta}{3}$ est un entier $\Rightarrow A^{2m} = 4\sqrt[3]{\rho^2}\cos^2\frac{\theta}{3}$ est un entier.

Mais :

$$\sqrt[3]{\rho^2} = \frac{p}{3} \quad (3.2)$$

Alors :

$$A^{2m} = 4\sqrt[3]{\rho^2}\cos^2\frac{\theta}{3} = 4\frac{p}{3}\cos^2\frac{\theta}{3} = p\cdot\frac{4}{3}\cos^2\frac{\theta}{3} \quad (3.3)$$

Comme A^{2m} est un entier, et p est un entier, alors $\cos^2\frac{\theta}{3}$ doit être écrit sous la forme :

$$\boxed{\cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{1}{b} \quad \text{ou} \quad \cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{a}{b}} \quad (3.4)$$

avec $b \in \mathbb{N}^*$, pour la dernière condition $a \in \mathbb{N}^*$ et a, b copremiers.

Notations : dans la suite du papier les scalaires $a, b, \dots, z, \alpha, \beta, \dots, A, B, C, \dots$ et Δ, Φ, \dots représentent des entiers positifs sauf les paramètres θ, ρ , ou ceux mentionnés dans le texte, sont des réels.

3.1 Cas $\cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{1}{b}$

Nous obtenons :

$$A^{2m} = p \cdot \frac{4}{3} \cdot \cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{4 \cdot p}{3 \cdot b} \quad (3.5)$$

Comme $\frac{1}{4} < \cos^2 \frac{\theta}{3} < \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} < \frac{1}{b} < \frac{3}{4} \Rightarrow b < 4 < 3b \Rightarrow b = 1, 2, 3$.

3.1.1 $b = 1$

$b = 1 \Rightarrow 4 < 3$ ce qui est impossible.

3.1.2 $b = 2$

$b = 2 \Rightarrow A^{2m} = p \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot p}{3} \Rightarrow 3|p \Rightarrow p = 3p'$ avec $p' \neq 1$ parce que $3 \ll p$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} A^{2m} &= (A^m)^2 = \frac{2p}{3} = 2 \cdot p' \implies 2|p' \implies p' = 2^\alpha p_1^2 \\ &\text{avec } 2 \nmid p_1, \quad \alpha + 1 = 2\beta \\ A^m &= 2^\beta p_1 \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$B^n C^l = \sqrt[3]{\rho^2} \left(3 - 4 \cos^2 \frac{\theta}{3} \right) = p' = 2^\alpha p_1^2 \quad (3.7)$$

De l'équation (3.6), il s'ensuit que $2|A^m \implies A = 2^i A_1, i \geq 1$ et $2 \nmid A_1$. Par suite, nous avons $\beta = i \cdot m = im$. L'équation (3.7) entraîne que $2|(B^n C^l) \implies 2|B^n$ ou $2|C^l$.

Cas $2|B^n$: Si $2|B^n \implies 2|B \implies B = 2^j B_1$ avec $2 \nmid B_1$. L'expression de $B^n C^l$ devient :

$$B_1^n C^l = 2^{2im-1-jn} p_1$$

- Si $2im - 1 - jn \geq 1, 2|C^l \implies 2|C$ en accord avec $C^l = 2^{im} A_1^m + 2^{jn} B_1^n$ et la conjecture (1.1) est vérifiée.

- Si $2im - 1 - jn \leq 0 \implies 2 \nmid C^l$, d'où la contradiction avec $C^l = 2^{im} A_1^m + 2^{jn} B_1^n$.

Cas $2|C^l$: Si $2|C^l$: de la même manière traitée ci-dessus, nous obtenons les mêmes résultats.

3.1.3 $b = 3$

$b = 3 \Rightarrow A^{2m} = p \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4p}{9} \Rightarrow 9|p \Rightarrow p = 9p'$ avec $p' \neq 1$ comme $9 \ll p$ alors $A^{2m} = 4p'$. Si p' est premier c'est impossible. Nous supposons que p' est non premier, comme $m \geq 3$, il s'ensuit que $2|p'$, d'où $2|A^m$. Or $B^n C^l = 5p'$ et $2|(B^n C^l)$. En utilisant la manière traitée du cas $b = 2$, nous obtenons les mêmes résultats.

3.2 Cas $a > 1$, $\cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{a}{b}$

Nous avons donc :

$$\cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{a}{b}; \quad A^{2m} = p \cdot \frac{4}{3} \cdot \cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{4 \cdot p \cdot a}{3 \cdot b} \quad (3.8)$$

où a, b vérifient l'une des deux conditions :

$$\boxed{\{3|p \text{ et } b|4p\}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\{3|a \text{ et } b|4p\}} \quad (3.9)$$

et en utilisant l'équation (2.14), nous obtenons une troisième condition :

$$\boxed{b < 4a < 3b} \quad (3.10)$$

Pour ces conditions, $A^{2m} = 4 \sqrt[3]{\rho^2} \cos^2 \frac{\theta}{3} = 4 \frac{p}{3} \cdot \cos^2 \frac{\theta}{3}$ est un entier.

Etudions alors les conditions données par l'équation (3.9).

3.2.1 Hypothèse : $\{3|p \text{ et } b|4p\}$

3.2.1.1. Cas $b = 2$ et $3|p$ $3|p \Rightarrow p = 3p'$ avec $p' \neq 1$ parce que $3 \ll p$, et $b = 2$, nous obtenons :

$$A^{2m} = \frac{4p \cdot a}{3b} = \frac{4 \cdot 3p' \cdot a}{3b} = \frac{4 \cdot p' \cdot a}{2} = 2 \cdot p' \cdot a \quad (3.11)$$

Comme :

$$\frac{1}{4} < \cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{a}{b} = \frac{a}{2} < \frac{3}{4} \Rightarrow a < 2 \Rightarrow a = 1 \quad (3.12)$$

mais $a > 1$ alors le cas $b = 2$ et $3|p$ est impossible.

3.2.1.2. Cas $b = 4$ et $3|p$ Nous avons $3|p \Rightarrow p = 3p'$ avec $p' \in \mathbb{N}^*$, il s'ensuit :

$$A^{2m} = \frac{4p \cdot a}{3b} = \frac{4 \cdot 3p' \cdot a}{3 \times 4} = p' \cdot a \quad (3.13)$$

et :

$$\frac{1}{4} < \cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{a}{b} = \frac{a}{4} < \frac{3}{4} \Rightarrow 1 < a < 3 \Rightarrow a = 2 \quad (3.14)$$

mais a, b sont coprimiers. Alors le cas $b = 4$ et $3|p$ est impossible.

3.2.1.3. Cas : $b \neq 2, b \neq 4, b|p$ et $3|p$ Comme $3|p$ alors $p = 3p'$ et :

$$A^{2m} = \frac{4p}{3} \cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{4p}{3} \frac{a}{b} = \frac{4 \times 3p' a}{3 b} = \frac{4p' a}{b} \quad (3.15)$$

Nous considérons le cas : $b|p' \implies p' = bp''$ et $p'' \neq 1$ (si $p'' = 1$, alors $p = 3b$, voir paragraphe **3.2.1.8**. Cas $k' = 1$). Finalement, nous obtenons :

$$A^{2m} = \frac{4bp''a}{b} = 4ap''; \quad B^n C^l = p'' \cdot (3b - 4a) \quad (3.16)$$

** A-1- Supposons que p'' est premier, d'où $A^{2m} = 4ap'' = (A^m)^2 \implies p''|a$. Or $B^n C^l = p''(3b - 4a) \implies p''|B^n$ ou $p''|C^l$.

** A-1-1- Si $p''|B^n \implies p''|B \implies B = p''B_1$ with $B_1 \in \mathbb{N}^*$. Par suite : $p''^{n-1}B_1^n C^l = 3b - 4a$. Or $n > 2$ alors $(n-1) > 1$ et $p''|a$, d'où $p''|3b \implies p'' = 3$ ou $p''|b$.

** A-1-1-1- Si $p'' = 3 \implies 3|a$, avec a s'écrit sous la forme $a = 3a'^2$. Or $A^m = 6a' \implies 3|A^m \implies 3|A \implies A = 3A_1$. D'où $3^{m-1}A_1^m = 2a' \implies 3|a' \implies a' = 3a''$. Mais $p''^{n-1}B_1^n C^l = 3^{n-1}B_1^n C^l = 3b - 4a \implies 3^{n-2}B_1^n C^l = b - 36a''^2$. Comme $n > 2 \implies n-2 \geq 1$, donc $3|b$ d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** A-1-1-2- Nous supposons maintenant que $p''|b$, mais $p''|a$, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** A-1-2- De la même façon si $p''|C^l$ nous arrivons à des contradictions.

** A-2- Nous considérons que p'' n'est pas premier.

** A-2-1- p'', a copremiers : $A^{2m} = 4ap'' \implies A^m = 2a'.p_1$ avec $a = a'^2$ et $p'' = p_1^2$, donc a', p_1 sont aussi copremiers. Comme $A^m = 2a'.p_1$ alors $2|a'$ ou $2|p_1$.

** A-2-1-1- $2|a'$, alors $2|a' \implies 2 \nmid p_1$. Or $p'' = p_1^2$.

** A-2-1-1-1- Si p_1 est premier c'est impossible avec $A^m = 2a'.p_1$.

** A-2-1-1-2- Donc p_1 est non premier et il s'écrit $p_1 = \omega^m \implies p'' = \omega^{2m}$. Par suite $B^n C^l = \omega^{2m}(3b - 4a)$.

** A-2-1-1-2-1- Si ω est premier, il est différent de 2, alors $\omega|(B^n C^l) \implies \omega|B^n$ ou $\omega|C^l$.

** A-2-1-1-2-1-1- Si $\omega|B^n \implies \omega|B \implies B = \omega^j B_1$ avec $\omega \nmid B_1$, d'où $B_1^n \cdot C^l = \omega^{2m-nj}(3b - 4a)$.

** A-2-1-1-2-1-1-1 Si $2m - n.j = 0$, nous obtenons $B_1^n \cdot C^l = 3b - 4a$. Comme $C^l = A^m + B^n \implies \omega|C^l \implies \omega|C$, et $\omega|(3b - 4a)$. Or $\omega \neq 2$ et ω est premier avec a' donc premier avec a , par suite $\omega \nmid (3b)$, donc $\omega \neq 3$ et $\omega \nmid b$. La conjecture (1.1) est vérifiée.

** A-2-1-1-2-1-1-2 Si $2m - nj \geq 1$, là aussi, avec le même raisonnement, nous avons $\omega|C^l \implies \omega|C$ et $\omega|(3b-4a)$ et $\omega \nmid a$ et $\omega \neq 3$ et $\omega \nmid b$. La conjecture (1.1) est vérifiée.

** A-2-1-1-2-1-1-3 Si $2m - nj < 0 \implies \omega^{n.j-2m} B_1^n . C^l = 3b - 4a$. Comme $\omega|C$ utilisant $C^l = A^m + B^n$ d'où $C = \omega^h . C_1 \implies \omega^{n.j-2m+h.l} B_1^n . C_1^l = 3b - 4a$. Si $n.j - 2m + h.l < 0 \implies \omega|B_1^n C_1^l$ par suite la contradiction avec $\omega \nmid B_1$ ou $\omega \nmid C_1$. Donc $n.j - 2m + h.l > 0$ et $\omega|(3b - 4a)$ avec ω, a, b copremiers et la conjecture est vérifiée.

** A-2-1-1-2-1-2- Nous obtenons les mêmes résultats si $\omega|C^l$.

** A-2-1-1-2-2- Maintenant, $p'' = \omega^{2m}$ et ω non premier, nous écrivons $\omega = \omega_1^f . \Omega$ avec ω_1 premier $\nmid \Omega$ et $f \geq 1$ un entier, et $\omega_1|A$. D'où $B^n C^l = \omega_1^{2f.m} \Omega^{2m} (3b-4a) \implies \omega_1|(B^n C^l) \implies \omega_1|B^n$ ou $\omega_1|C^l$.

** A-2-1-1-2-2-1- Si $\omega_1|B^n \implies \omega_1|B \implies B = \omega_1^j B_1$ avec $\omega_1 \nmid B_1$, d'où $B_1^n . C^l = \omega_1^{2.m-nj} \Omega^{2m} (3b - 4a)$:

** A-2-1-1-2-2-1-1- Si $2f.m - n.j = 0$, nous obtenons $B_1^n . C^l = \Omega^{2m} (3b - 4a)$. Comme $C^l = A^m + B^n \implies \omega_1|C^l \implies \omega_1|C$, et $\omega_1|(3b - 4a)$. Or $\omega_1 \neq 2$ et ω_1 est premier avec a' donc premier avec a , par suite $\omega_1 \nmid (3b)$, donc $\omega_1 \neq 3$ et $\omega_1 \nmid b$. La conjecture (1.1) est vérifiée.

** A-2-1-1-2-2-1-2 Si $2f.m - n.j \geq 1$, là aussi, avec le même raisonnement, nous avons $\omega_1|C^l \implies \omega_1|C$ et $\omega_1|(3b - 4a)$ et $\omega_1 \nmid a$ et $\omega_1 \neq 3$ et $\omega_1 \nmid b$. La conjecture (1.1) est vérifiée.

** A-2-1-1-2-2-1-3 Si $2f.m - n.j < 0 \implies \omega_1^{n.j-2m.f} B_1^n . C^l = \Omega^{2m} (3b - 4a)$. Comme $\omega_1|C$ utilisant $C^l = A^m + B^n$ d'où $C = \omega_1^h . C_1 \implies \omega^{n.j-2m.f+h.l} B_1^n . C_1^l = \Omega^{2m} (3b - 4a)$. Si $n.j - 2m.f + h.l < 0 \implies \omega_1|B_1^n C_1^l$ par suite la contradiction avec $\omega_1 \nmid B_1$ et $\omega_1 \nmid C_1$. Donc $n.j - 2m.f + h.l > 0$ et $\omega_1|(3b - 4a)$ avec ω_1, a, b copremiers et la conjecture (1.1) est vérifiée.

** A-2-1-1-2-2-2- Nous obtenons les mêmes résultats si $\omega_1|C^l$.

** A-2-1-2- Si $2|p_1$: alors $2|p_1 \implies 2 \nmid a' \implies 2 \nmid a$. Or $p'' = p_1^2$.

** A-2-1-2-1- Si p_1 est premier égal à 2, nous obtenons $A^m = 4a' \implies 2|a'$, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** A-2-1-2-2- Donc p_1 est non premier et $2|p_1$. Comme $A^m = 2a'p_1$, p_1 s'écrit sous la forme $p_1 = 2^{m-1} \omega^m \implies p'' = 2^{2m-2} \omega^{2m}$. Par suite $B^n C^l = 2^{2m-2} \omega^{2m} (3b-4a) \implies 2|B^n$ ou $2|C^l$.

** A-2-1-2-2-1- Si $2|B^n \implies 2|B$, comme $2|A$, par suite $2|C$. De $B^n C^l = 2^{2m-2} \omega^{2m} (3b-4a)$ s'ensuit que si $2|(3b-4a) \implies 2|b$ mais comme $2 \nmid a$, il n'y aura de contradiction avec a, b copremiers et la conjecture (1.1) est vérifiée.

** A-2-1-2-2-2- Si $2|C^l$, nous obtenons les mêmes résultats.

** A-2-2- p^n , a non copremiers : Soit ω un nombre premier tel que $\omega|a$ et $\omega \nmid p^n$.

** A-2-2-1- Supposons que $\omega = 3$. Comme $A^{2m} = 4ap^n \implies 3|A$, or $3|p$, comme $p = A^{2m} + B^{2n} + A^m B^n \implies 3|B^{2n} \implies 3|B$, par suite $3|C^l \implies 3|C$. Nous écrivons $A = 3^i A_1$, $B = 3^j B_1$, $C = 3^h C_1$ avec 3 est copremier avec A_1, B_1 et C_1 et $p = 3^{2im} A_1^{2m} + 3^{2nj} B_1^{2n} + 3^{im+jn} A_1^m B_1^n = 3^k \cdot g$ avec $k = \min(2im, 2jn, im + jn)$ et $3 \nmid g$. Nous avons aussi $(\omega = 3)|a$ et $(\omega = 3)|p^n$ ce qui donne $a = 3^\alpha a_1$, $3 \nmid a_1$ et $p^n = 3^\mu p_1$, $3 \nmid p_1$ avec $A^{2m} = 4ap^n = 3^{2im} A_1^{2m} = 4 \times 3^{\alpha+\mu} \cdot a_1 \cdot p_1 \implies \alpha + \mu = 2im$. Comme $p = 3p' = 3b \cdot p^n = 3b \cdot 3^\mu p_1 = 3^{\mu+1} \cdot b \cdot p_1$. L'exposant du facteur 3 de p est k , l'exposant du facteur 3 du membre à gauche de l'équation précédente est $\mu + 1$ ajouté de l'exposant β de 3 du facteur b , avec $\beta \geq 0$, soit $\min(2im, 2jn, im + jn) = \mu + 1 + \beta$ en rappelant que $\alpha + \mu = 2im$. Mais $B^n C^l = p^n (4b - 3a)$ ce qui donne $3^{(nj+hl)} B_1^n C_1^l = 3^{\mu+1} p_1 (b - 4 \times 3^{(\alpha-1)} a_1) = 3^{\mu+1} p_1 (3^\beta b_1 - 4 \times 3^{(\alpha-1)} a_1)$, $3 \nmid b_1$. Nous avons aussi $A^m + B^n = C^l$ donne $3^{im} A_1^m + 3^{jn} B_1^n = 3^{hl} C_1^l$. Posons $\epsilon = \min(im, jn)$, nous avons $\epsilon = hl = \min(im, jn)$. Nous avons les conditions :

$$k = \min(2im, 2jn, im + jn) = \mu + 1 + \beta \quad (3.17)$$

$$\alpha + \mu = 2im \quad (3.18)$$

$$\epsilon = hl = \min(im, jn) \quad (3.19)$$

$$3^{(nj+hl)} B_1^n C_1^l = 3^{\mu+1} p_1 (3^\beta b_1 - 4 \times 3^{(\alpha-1)} a_1) \quad (3.20)$$

** A-2-2-1-1- $\alpha = 1 \implies a = 3a_1$ et $3 \nmid a_1$, l'équation (3.18) devient :

$$1 + \mu = 2im \quad (3.21)$$

et la première équation (3.17) s'écrit :

$$k = \min(2im, 2jn, im + jn) = 2im + \beta \quad (3.22)$$

- Si $k = 2im \implies \beta = 0$ soit $3 \nmid b$. Nous obtenons $2im \leq 2jn \implies im \leq jn$, et $2im \leq im + jn \implies im \leq jn$. La troisième équation donne $hl = im$. La dernière équation donne $nj + hl = \mu + 1 = 2im \implies im = nj$, par suite $im = nj = hl$ et $B_1^n C_1^l = p_1 (b - 4a_1)$. Si a, b sont copremiers, la conjecture (1.1) est vérifiée.

- Si $k = 2in$ ou $k = im + in$, nous obtenons $\beta = 0$, $im = jn = hl$ et $B_1^n C_1^l = p_1 (b - 4a_1)$. Si a, b sont copremiers, la conjecture (1.1) est vérifiée.

** A-2-2-1-2- $\alpha > 1 \implies \alpha \geq 2$.

- Si $k = 2im \implies 2im = \mu + 1 + \beta$, or $\mu = 2im - \alpha$ ce qui donne $\alpha = 1 + \beta \geq 2 \implies \beta \neq 0 \implies 3|b$, mais $3|a$ c'est la contradiction avec a, b copremiers.

- Si $k = 2jn = \mu + 1 + \beta \leq 2im \implies \mu + 1 + \beta \leq \mu + \alpha \implies 1 + \beta \leq \alpha \implies \beta = 0$ ou $\beta = 1$. Si $\beta = 1 \implies 3|b$ or $3|a$, d'où la contradiction avec a, b copremiers. Si $\beta = 0 \implies 3 \nmid b$. Nous obtenons $jn = hl < im$ car $\alpha > 1$, par suite la conjecture (1.1) est vérifiée.

- Si $k = im + jn \implies im + jn \leq 2im \implies jn \leq im$, et $im + jn \leq 2jn \implies im \leq jn$, par suite $im = jn$. Comme $k = im + jn = 2im = 1 + \mu + \beta$ et $\alpha + \mu = 2im$ qui donne $\alpha = 1 + \beta \geq 2 \implies \beta \geq 1 \implies 3|b$, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** A-2-2-2- Nous supposons que $\omega \neq 3$. Nous écrivons $a = \omega^\alpha a_1$ avec $\omega \nmid a_1$ et $p^n = \omega^\mu p_1$ avec $\omega \nmid p_1$. Comme $A^{2m} = 4ap^n = 4\omega^{\alpha+\mu} \cdot a_1 \cdot p_1 \implies \omega|A \implies A = \omega^i A_1$,

$\omega \nmid A_1$. Or $B^n C^l = p''(3b - 4a) = \omega^\mu p_1(3b - 4a) \implies \omega | B^n C^l \implies \omega | B^n$ ou $\omega | C^l$.

** A-2-2-2-1- $\omega | B^n \implies \omega | B \implies B = \omega^j B_1$ et $\omega \nmid B_1$. De $A^m + B^n = C^l \implies \omega | C^l \implies \omega | C$. Comme $p = bp' = 3bp'' = 3\omega^\mu bp_1 = \omega^k(\omega^{2im-k} A_1^{2m} + \omega^{2jn-k} B_1^{2n} + \omega^{im+jn-k} A_1^m B_1^n)$ avec $k = \min(2im, 2jn, im + jn)$. Par suite :

- Si $\mu = k$, alors $\omega \nmid b$ et la conjecture (1.1) est vraie.
- Si $k > \mu$, alors $\omega | b$, or $\omega | a$ d'où la contradiction avec a, b copremiers.
- Si $k < \mu$, il s'ensuit de :

$$3\omega^\mu bp_1 = \omega^k(\omega^{2im-k} A_1^{2m} + \omega^{2jn-k} B_1^{2n} + \omega^{im+jn-k} A_1^m B_1^n)$$

que $\omega | A_1$ ou $\omega | B_1$ ce qui en contradiction avec les hypothèses.

** A-2-2-2-2- Si $\omega | C^l \implies \omega | C \implies C = \omega^h C_1$ avec $\omega \nmid C_1$. De $A^m + B^n = C^l \implies \omega | (C^l - A^m) \implies \omega | B$. Par suite, nous obtenons les mêmes résultats de A-3-2-1-ci-dessus.

Vérifions la condition (3.10) donnée par $b < 4a < 3b$. Dans notre cas, la condition devient :

$$p < 3A^{2m} < 3p \quad \text{avec} \quad p = A^{2m} + B^{2n} + A^m B^n \quad (3.23)$$

et $3A^{2m} < 3p \implies A^{2m} < p$ est donc vérifié. Si :

$$p < 3A^{2m} \implies 2A^{2m} - A^m B^n - B^{2n} \overset{?}{>} 0$$

En étudiant le signe du polynôme $Q(Y) = 2Y^2 - B^n Y - B^{2n}$ et en prenant $Y = A^m > B^n$, la condition $2A^{2m} - A^m B^n - B^{2n} > 0$ est vérifiée, par suite, la condition $b < 4a < 3b$ est vraie.

Dans la suite du papier, nous vérifions facilement que la condition $b < 4a < 3b$ implique à vérifier $A^m > B^n$ ce qu'est vrai.

3.2.1.4. Cas $b = 3$ et $3|p$: comme $3|p \implies p = 3p'$, nous écrivons :

$$A^{2m} = \frac{4p}{3} \cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{4p}{3} \frac{a}{b} = \frac{4 \times 3p' a}{3 \times 3} = \frac{4p' a}{3} \quad (3.24)$$

Comme A^{2m} est un entier et que a et b sont copremiers et $\cos^2 \frac{\theta}{3}$ ne peut pas prendre la valeur 1 en référence à l'équation (2.13), alors nous avons nécessairement $3|p' \implies p' = 3p''$ avec $p'' \neq 1$, si non $p = 3p' = 3 \times 3p'' = 9$ mais $9 \ll (p = A^{2m} + B^{2n} + A^m B^n)$, l'hypothèse $p'' = 1$ est impossible, alors $p'' > 1$. D'où :

$$A^{2m} = \frac{4p' a}{3} = \frac{4 \times 3p'' a}{3} = 4p'' a; \quad B^n C^l = p'' \cdot (9 - 4a) \quad (3.25)$$

Comme $\frac{1}{4} < \cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{a}{b} = \frac{a}{3} < \frac{3}{4} \implies 3 < 4a < 9 \implies$ comme $a > 1$, $a = 2$ et nous obtenons :

$$A^{2m} = 4p'' a = 8p''; \quad B^n C^l = \frac{3p''(9 - 4a)}{3} = p'' \quad (3.26)$$

Les 2 dernières équations ci-dessus impliquent que p^n n'est pas premier. Soit l'écriture de p^n en facteurs premiers : $p^n = \prod_{i \in I} p_i^{\alpha_i}$ où les p_i sont des entiers premiers et I un ensemble fini d'indices. Nous pouvons écrire $p^n = p_1^{\alpha_1} \cdot q_1$ avec $p_1 \nmid q_1$. De (3.26), nous avons $p_1 | A$ et $p_1 | B^n C^l \implies p_1 | B^n$ ou $p_1 | C^l$.

** B-1- Supposons que $p_1 | B^n \implies B = p_1^{\beta_1} \cdot B_1$ avec $p_1 \nmid B_1$ et $\beta_1 \geq 1$. Par suite, nous obtenons $B_1^n C^l = p_1^{\alpha_1 - n\beta_1} \cdot q_1$ avec les cas suivants :

- Si $\alpha_1 - n\beta_1 \geq 1 \implies p_1 | C^l \implies p_1 | C$, il s'ensuit que la conjecture (1.1) est vraie.

- Si $\alpha_1 - n\beta_1 = 0 \implies \alpha_1 = n\beta_1 \implies B_1 C^l = q_1 \implies p_1 \nmid C^l$ ce qui en contradiction avec $p_1 | (A^n - B^n)$ soit $p_1 | C^l$. Donc ce cas est impossible.

- Si $\alpha_1 - n\beta_1 < 0$, nous obtenons $p_1^{n\beta_1 - \alpha_1} B_1^n C^l = q_1 \implies p_1 | q_1$ ce qui en contradiction avec $p_1 \nmid q_1$. Donc ce cas est impossible.

** B-2- Supposons maintenant que $p_1 | C^l \implies p_1 | C \implies C = p_1^{\gamma_1} \cdot C_1$ avec $p_1 \nmid C_1$ et $\gamma_1 \geq 1$. Par suite nous obtenons $B^n C_1^l = p_1^{\alpha_1 - l\gamma_1} \cdot q_1$ avec les cas suivants :

- Si $\alpha_1 - l\gamma_1 \geq 1 \implies p_1 | B^n \implies p_1 | B$, il s'ensuit que la conjecture (1.1) est vraie.

- Si $\alpha_1 - l\gamma_1 = 0 \implies \alpha_1 = l\gamma_1 \implies B^n C_1 = q_1 \implies p_1 \nmid B^n$ ce qui en contradiction avec $p_1 | (C^l - A^m)$ soit $p_1 | B^n$. Donc ce cas est impossible.

- Si $\alpha_1 - l\gamma_1 < 0$, nous obtenons $p_1^{l\gamma_1 - \alpha_1} B^n C_1 = q_1 \implies p_1 | q_1$ ce qui en contradiction avec $p_1 \nmid q_1$. Donc ce cas est impossible.

3.2.1.5. Cas $3|p$ et $b = p$: Nous avons $\cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{a}{b} = \frac{a}{p}$ et :

$$A^{2m} = \frac{4p}{3} \cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{4p}{3} \cdot \frac{a}{p} = \frac{4a}{3} \quad (3.27)$$

Comme A^{2m} est un entier, ce-ci implique que $3|a$, mais $3|p \implies 3|b$. Comme a et b sont copremiers, d'où la contradiction. Alors le cas $3|p$ et $b = p$ est impossible.

3.2.1.6. Cas $3|p$ et $b = 4p$ $3|p \implies p = 3p'$, $p' \neq 1$ car $3 \ll p$, par suite $b = 4p = 12p'$.

$$A^{2m} = \frac{4p}{3} \cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{4p}{3} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{3} \implies 3|a \quad (3.28)$$

car A^{2m} est un entier. Mais $3|p \implies 3|(4p) = b$, ce qui en contradiction avec l'hypothèse a, b copremiers. Alors le cas $b = 4p$ est impossible.

3.2.1.7. Cas $3|p$ et $b = 2p$ $3|p \implies p = 3p'$, $p' \neq 1$ car $3 \ll p$, d'où $b = 2p = 6p'$.

$$A^{2m} = \frac{4p}{3} \cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{4p}{3} \cdot \frac{a}{b} = \frac{2a}{3} \implies 3|a \quad (3.29)$$

car A^{2m} est un entier, mais $3|p \implies 3|(2p) \implies 3|b$, ce qui en contradiction avec l'hypothèse a, b sont copremiers. Alors le cas $b = 2p$ est impossible.

3.2.1.8. Cas $3|p$ et $b \neq 3$ est un diviseur de p Nous avons $b = p' \neq 3$, et p s'écrit $p = kp'$ avec $3|k \implies k = 3k'$ et :

$$A^{2m} = \frac{4p}{3} \cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{4p}{3} \cdot \frac{a}{b} = 4ak' \quad (3.30)$$

$$B^n C^l = \frac{p}{3} \cdot \left(3 - 4 \cos^2 \frac{\theta}{3} \right) = k'(3p' - 4a) = k'(3b - 4a) \quad (3.31)$$

** C-1- $k' \neq 1$:

** C-1-1- Nous supposons que k' est premier, d'où $A^{2m} = 4ak' = (A^m)^2 \implies k'|a$. Or $B^n C^l = k'(3b - 4a) \implies k'|B^n$ ou $k'|C^l$.

** C-1-1-1- Si $k'|B^n \implies k'|B \implies B = k'B_1$ with $B_1 \in \mathbb{N}^*$. Par suite $k'^{n-1} B_1^n C^l = 3b - 4a$. Or $n > 2$ alors $(n-1) > 1$ et $k'|a$, d'où $k'|3b \implies k' = 3$ ou $k'|b$.

** C-1-1-1-1- Si $k' = 3 \implies 3|a$, avec a s'écrit sous la forme $a = 3a'^2$. Or $A^m = 6a' \implies 3|A^m \implies 3|A \implies A = 3A_1$ with $A_1 \in \mathbb{N}^*$. D'où $3^{m-1} A_1^m = 2a' \implies 3|a' \implies a' = 3a''$. Mais $k'^{n-1} B_1^n C^l = 3^{n-1} B_1^n C^l = 3b - 4a \implies 3^{n-2} B_1^n C^l = b - 36a''^2$. Comme $n > 2 \implies n-2 \geq 1$, donc $3|b$ d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** C-1-1-1-2- Nous supposons maintenant que $k'|b$, mais $k'|a$, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** C-1-1-2- De la même façon si $k'|C^l$, nous arrivons à des contradictions.

** C-1-2- On considère que k' n'est pas premier.

** C-1-2-1- Nous supposons que k', a copremiers : $A^{2m} = 4ak' \implies A^m = 2a'.p_1$ avec $a = a'^2$ et $k' = p_1^2$, donc a', p_1 sont aussi copremiers. Comme $A^m = 2a'.p_1$ alors $2|a'$ ou $2|p_1$.

** C-1-2-1-1- $2|a'$, alors $2|a' \implies 2 \nmid p_1$. Or $k' = p_1^2$.

** C-1-2-1-1-1- Si p_1 est premier c'est impossible avec $A^m = 2a'.p_1$.

** C-1-2-1-1-2- Donc p_1 est supposé non premier et il s'écrit $p_1 = \omega^m \implies k' = \omega^{2m}$. Par suite $B^n C^l = \omega^{2m}(3b - 4a)$.

** C-1-2-1-1-2-1- Si ω est premier, il est différent de 2, alors $\omega|(B^n C^l) \implies \omega|B^n$ ou $\omega|C^l$.

** C-1-2-1-1-2-1-1- Si $\omega|B^n \implies \omega|B \implies B = \omega^j B_1$ avec $\omega \nmid B_1$, d'où $B_1^n \cdot C^l = \omega^{2m-nj}(3b - 4a)$.

- Si $2m - nj = 0$, nous obtenons $B_1^n \cdot C^l = 3b - 4a$ Comme $C^l = A^m + B^n \implies \omega|C^l \implies \omega|C$, et $\omega|(3b - 4a)$. Or $\omega \neq 2$ et ω est premier avec a' donc premier avec a , par suite $\omega \nmid (3b)$, donc $\omega \neq 3$ et $\omega \nmid b$. La conjecture (1.1) est vérifiée.

- Si $2m - nj \geq 1$, là aussi, avec le même raisonnement, nous avons $\omega|C^l \implies \omega|C$ et $\omega|(3b - 4a)$ et $\omega \nmid a$ et $\omega \neq 3$ et $\omega \nmid b$. La conjecture (1.1) est vérifiée.

- Si $2m - nj < 0 \implies \omega^{n \cdot j - 2m} B_1^n \cdot C^l = 3b - 4a$. Comme $\omega | C$ utilisant $C^l = A^m + B^n$ d'où $C = \omega^h \cdot C_1 \implies \omega^{n \cdot j - 2m + h \cdot l} B_1^n \cdot C_1^l = 3b - 4a$. Si $n \cdot j - 2m + h \cdot l < 0 \implies \omega | B_1^n C_1^l$ par suite la contradiction avec $\omega \nmid B_1$ ou $\omega \nmid C_1$. Donc $n \cdot j - 2m + h \cdot l > 0$ et $\omega | (3b - 4a)$ avec ω, a, b copremiers et la conjecture (1.1) est vérifiée.

** C-1-2-1-1-2-2- Si $\omega | C^l$, nous obtenons les mêmes résultats.

** C-1-2-1-1-2-2- Maintenant, $k' = \omega^{2m}$ et ω non premier, nous écrivons $\omega = \omega_1^f \cdot \Omega$ avec ω_1 premier $\nmid \Omega$ et $f \geq 1$ un entier, et $\omega_1 | A$. D'où $B^n C^l = \omega_1^{2f \cdot m} \Omega^{2m} (3b - 4a) \implies \omega_1 | (B^n C^l) \implies \omega_1 | B^n$ ou $\omega_1 | C^l$.

** C-1-2-1-1-2-2-1- Si $\omega_1 | B^n \implies \omega_1 | B \implies B = \omega_1^j B_1$ avec $\omega_1 \nmid B_1$, d'où $B_1^n \cdot C^l = \omega_1^{2 \cdot m - nj} \Omega^{2m} (3b - 4a)$.

- Si $2f \cdot m - n \cdot j = 0$, nous obtenons $B_1^n \cdot C^l = \Omega^{2m} (3b - 4a)$. Comme $C^l = A^m + B^n \implies \omega_1 | C^l \implies \omega_1 | C$, et $\omega_1 | (3b - 4a)$. Or $\omega_1 \neq 2$ et ω_1 est premier avec a' donc premier avec a , par suite $\omega_1 \nmid (3b)$, donc $\omega_1 \neq 3$ et $\omega_1 \nmid b$. La conjecture (1.1) est vérifiée.

- Si $2f \cdot m - n \cdot j \geq 1$, là aussi, avec le même raisonnement, nous avons $\omega_1 | C^l \implies \omega_1 | C$ et $\omega_1 | (3b - 4a)$ et $\omega_1 \nmid a$ et $\omega_1 \neq 3$ et $\omega_1 \nmid b$. La conjecture (1.1) est vérifiée.

- Si $2f \cdot m - n \cdot j < 0 \implies \omega_1^{n \cdot j - 2m \cdot f} B_1^n \cdot C^l = \Omega^{2m} (3b - 4a)$. Comme $\omega_1 | C$ utilisant $C^l = A^m + B^n$, d'où $C = \omega_1^h \cdot C_1 \implies \omega^{n \cdot j - 2m \cdot f + h \cdot l} B_1^n \cdot C_1^l = \Omega^{2m} (3b - 4a)$. Si $n \cdot j - 2m \cdot f + h \cdot l < 0 \implies \omega_1 | B_1^n C_1^l$, par suite la contradiction avec $\omega_1 \nmid B_1$ et $\omega_1 \nmid C_1$. Donc $n \cdot j - 2m \cdot f + h \cdot l > 0$ et $\omega_1 | (3b - 4a)$ avec ω_1, a, b copremiers et la conjecture (1.1) est vérifiée.

** C-1-2-1-1-2-2-2- Nous obtenons les mêmes résultats si $\omega_1 | C^l$.

** C-1-2-1-2- Si $2|p_1$: alors $2|p_1 \implies 2 \nmid a' \implies 2 \nmid a$. Or $k' = p_1^2$.

** C-1-2-1-2-1- Si p_1 est premier égal à 2, nous obtenons $A^m = 4a' \implies 2|a'$, d'où la contradiction.

** C-1-2-1-2-2- Donc p_1 est non premier et $2|p_1$. Comme $A^m = 2a' p_1$, p_1 s'écrit sous la forme $p_1 = 2^{m-1} \omega^m \implies p^n = 2^{2m-2} \omega^{2m}$. Par suite $B^n C^l = 2^{2m-2} \omega^{2m} (3b - 4a) \implies 2|B^n$ ou $2|C^l$.

** C-1-2-1-2-2-1- Si $2|B^n \implies 2|B$, comme $2|A$, par suite $2|C$. De $B^n C^l = 2^{2m-2} \omega^{2m} (3b - 4a)$ s'ensuit que si $2|(3b - 4a) \implies 2|b$ mais comme $2 \nmid a$, il n'y aura de contradiction avec a, b copremiers et la conjecture (1.1) est vérifiée.

** C-1-2-1-2-2-2- Même résultat Si $2|C^l$.

** C-1-2-2- Nous supposons k', a non copremiers : soit ω un nombre premier tel que $\omega | a$ et $\omega | p^n$.

** C-1-2-2-1- Supposons que $\omega = 3$. Comme $A^{2m} = 4ak' \implies 3|A$, or $3|p$, comme $p = A^{2m} + B^{2n} + A^m B^n \implies 3|B^{2n} \implies 3|B$, par suite $3|C^l \implies 3|C$. Nous écrivons $A = 3^i A_1$, $B = 3^j B_1$, $C = 3^h C_1$ avec 3 est copremier avec A_1, B_1 et C_1 et $p = 3^{2im} A_1^{2m} + 3^{2nj} B_1^{2n} + 3^{im+jn} A_1^m B_1^n = 3^s \cdot g$ avec $s = \min(2im, 2jn, im + jn)$ et

$3 \nmid g$. Nous avons aussi $(\omega = 3)|a$ et $(\omega = 3)|k'$ ce qui donne $a = 3^\alpha a_1$, $3 \nmid a_1$ et $k' = 3^\mu p_1$, $3 \nmid p_1$ avec $A^{2m} = 4ak' = 3^{2im} A_1^{2m} = 4 \times 3^{\alpha+\mu} \cdot a_1 \cdot p_1 \implies \alpha + \mu = 2im$. Comme $p = 3p' = 3b \cdot k' = 3b \cdot 3^\mu p_1 = 3^{\mu+1} \cdot b \cdot p_1$. L'exposant du facteur 3 de p est s , l'exposant du facteur 3 du membre à gauche de l'équation précédente est $\mu + 1$ ajouté de l'exposant β de 3 du facteur b , avec $\beta \geq 0$, soit $\min(2im, 2jn, im + jn) = \mu + 1 + \beta$ en rappelant que $\alpha + \mu = 2im$. Mais $B^n C^l = k'(4b - 3a)$ ce qui donne $3^{(nj+hl)} B_1^n C_1^l = 3^{\mu+1} p_1 (b - 4 \times 3^{(\alpha-1)} a_1) = 3^{\mu+1} p_1 (3^\beta b_1 - 4 \times 3^{(\alpha-1)} a_1)$, $3 \nmid b_1$. Nous avons aussi $A^m + B^n = C^l$ donne $3^{im} A_1^m + 3^{jn} B_1^n = 3^{hl} C_1^l$. Posons $\epsilon = \min(im, jn)$, nous avons $\epsilon = hl = \min(im, jn)$. Nous avons les conditions :

$$s = \min(2im, 2jn, im + jn) = \mu + 1 + \beta \quad (3.32)$$

$$\alpha + \mu = 2im \quad (3.33)$$

$$\epsilon = hl = \min(im, jn) \quad (3.34)$$

$$3^{(nj+hl)} B_1^n C_1^l = 3^{\mu+1} p_1 (3^\beta b_1 - 4 \times 3^{(\alpha-1)} a_1) \quad (3.35)$$

** C-1-2-2-1-1- $\alpha = 1 \implies a = 3a_1$ et $3 \nmid a_1$, l'équation (3.33) devient :

$$1 + \mu = 2im \quad (3.36)$$

et la première équation (3.32) s'écrit :

$$s = \min(2im, 2jn, im + jn) = 2im + \beta \quad (3.37)$$

- Si $s = 2im \implies \beta = 0$ soit $3 \nmid b$. Nous obtenons $2im \leq 2jn \implies im \leq jn$, et $2im \leq im + jn \implies im \leq jn$. La troisième équation (3.34) donne $hl = im$. La dernière équation (3.35) donne $nj + hl = \mu + 1 = 2im \implies im = jn$, par suite $im = jn = hl$ et $B_1^n C_1^l = p_1 (b - 4a_1)$. Si a, b sont copremiers, la conjecture (1.1) est vérifiée.

- Si $s = 2jn$ ou $s = im + jn$, nous obtenons $\beta = 0$, $im = jn = hl$ et $B_1^n C_1^l = p_1 (b - 4a_1)$. Là aussi, si a, b sont copremiers, la conjecture (1.1) est vérifiée.

** C-1-2-2-1-2- $\alpha > 1 \implies \alpha \geq 2$.

- Si $s = 2im \implies 2im = \mu + 1 + \beta$, or $\mu = 2im - \alpha$ ce qui donne $\alpha = 1 + \beta \geq 2 \implies \beta \neq 0 \implies 3|b$, mais $3|a$ c'est la contradiction avec a, b copremiers.

- Si $s = 2jn = \mu + 1 + \beta \leq 2im \implies \mu + 1 + \beta \leq \mu + \alpha \implies 1 + \beta \leq \alpha \implies \beta = 0$ ou $\beta = 1$. Si $\beta = 1 \implies 3|b$ or $3|a$, d'où la contradiction avec a, b copremiers et la conjecture (1.1) est non vérifiée. Si $\beta = 0 \implies 3 \nmid b$. Nous obtenons $jn = hl < im$ car $\alpha > 1$, par suite la conjecture (1.1) est vérifiée.

- Si $s = im + jn \implies im + jn \leq 2im \implies jn \leq im$, et $im + jn \leq 2jn \implies im \leq jn$, par suite $im = jn$. Comme $s = im + jn = 2im = 1 + \mu + \beta$ et $\alpha + \mu = 2im$ qui donne $\alpha = 1 + \beta \geq 2 \implies \beta \geq 1 \implies 3|b$, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** C-1-2-2-2- Nous supposons que $\omega \neq 3$. Nous écrivons $a = \omega^\alpha a_1$ avec $\omega \nmid a_1$ et $k' = \omega^\mu p_1$ avec $\omega \nmid p_1$. Comme $A^{2m} = 4ak' = 4\omega^{\alpha+\mu} \cdot a_1 \cdot p_1 \implies \omega|A \implies A = \omega^i A_1$, $\omega \nmid A_1$. Or $B^n C^l = k'(3b - 4a) = \omega^\mu p_1 (3b - 4a) \implies \omega|B^n C^l \implies \omega|B^n$ ou $\omega|C^l$.

** C-1-2-2-2-1- $\omega|B^n \implies \omega|B \implies \omega^j B_1^n$ et $\omega \nmid B_1$. De $A^m + B^n = C^l \implies \omega|C^l \implies \omega|C$. Comme $p = bp' = 3bk' = 3\omega^\mu bp_1 = \omega^s (\omega^{2im-s} A_1^{2m} + \omega^{2jn-s} B_1^{2n} + \omega^{im+jn-s} A_1^m B_1^n)$ avec $s = \min(2im, 2jn, im + jn)$. Par suite :

- Si $\mu = s$, alors $\omega \nmid b$ et la conjecture (1.1) est vraie.

- Si $s > \mu$, alors $\omega|b$, or $\omega|a$ d'où la contradiction avec a, b copremiers.
- Si $s < \mu$, il s'ensuit de :

$$3\omega^\mu b p_1 = \omega^s (\omega^{2im-s} A_1^{2m} + \omega^{2jn-s} B_1^{2n} + \omega^{im+jn-s} A_1^m B_1^n)$$

que $\omega|A_1$ ou $\omega|B_1$ ce qui en contradiction avec les hypothèses.

** C-1-2-2-2-2- Si $\omega|C^l \implies \omega|C \implies C = \omega^h C_1$ avec $\omega \nmid C_1$. De $A^m + B^n = C^l \implies \omega|(C^l - A^m) \implies \omega|B$. Par suite, nous obtenons les mêmes résultats de 2-2-1- ci-dessus.

** C-2- $k' = 1$: par suite $k' = 1 \implies p = 3b$, alors nous avons $A^{2m} = 4a$, par suite a est pair et :

$$A^m B^n = 2 \sqrt[3]{\rho} \cos \frac{\theta}{3} \cdot \sqrt[3]{\rho} \left(\sqrt{3} \sin \frac{\theta}{3} - \cos \frac{\theta}{3} \right) = \frac{p\sqrt{3}}{3} \sin \frac{2\theta}{3} - 2a$$

ou encore :

$$A^{2m} + 2A^m B^n = \frac{2p\sqrt{3}}{3} \sin \frac{2\theta}{3} = 2b\sqrt{3} \sin \frac{2\theta}{3} \quad (3.38)$$

Le membre à gauche de (3.38) est un entier et b aussi, alors $2\sqrt{3} \sin \frac{2\theta}{3}$ peut être écrit sous la forme :

$$2\sqrt{3} \sin \frac{2\theta}{3} = \frac{k_1}{k_2} \quad (3.39)$$

où k_1, k_2 sont deux entiers copremiers et $k_2|b \implies b = k_2.k_3$.

** C-2-1- $k' = 1$ et $k_3 \neq 1$: alors $A^{2m} + 2A^m B^n = k_3.k_1$. Soit μ un entier premier tel que $\mu|k_3$. Si $\mu = 2 \implies 2|b$ mais $2|a$, ce-ci est en contradiction avec a, b copremiers. Nous supposons donc $\mu \neq 2$ et $\mu|k_3$, alors $\mu|A^m(A^m + 2B^n) \implies \mu|A^m$ ou $\mu|(A^m + 2B^n)$.

** C-2-1-1- $\mu|A^m$: Si $\mu|A^m \implies \mu|A^{2m} \implies \mu|4a \implies \mu|a$. Comme $\mu|k_3 \implies \mu|b$ et que a, b sont copremiers d'où la contradiction.

** C-2-1-2- $\mu|(A^m + 2B^n)$: Si $\mu|(A^m + 2B^n) \implies \mu \nmid A^m$ et $\mu \nmid 2B^n$ alors $\mu \neq 2$ et $\mu \nmid B^n$. $\mu|(A^m + 2B^n)$, nous pouvons écrire $A^m + 2B^n = \mu.t'$. Il s'ensuit :

$$A^m + B^n = \mu t' - B^n \implies A^{2m} + B^{2n} + 2A^m B^n = \mu^2 t'^2 - 2t' \mu B^n + B^{2n}$$

En utilisant l'expression de p , nous obtenons :

$$p = t'^2 \mu^2 - 2t' B^n \mu + B^n (B^n - A^m)$$

Comme $p = 3b = 3k_2.k_3$ et $\mu|k_3$ d'où $\mu|p \implies p = \mu\mu'$, alors nous avons :

$$\mu' \mu = \mu(\mu t'^2 - 2t' B^n) + B^n (B^n - A^m)$$

et $\mu|B^n(B^n - A^m) \implies \mu|B^n$ ou $\mu|(B^n - A^m)$.

** C-2-1-2-1- $\mu|B^n$: Si $\mu|B^n \implies \mu|B$ ce qui est en contradiction avec C-2-1-2-.

** C-2-1-2-2- $\mu|(B^n - A^m)$: Si $\mu|(B^n - A^m)$ et utilisant $\mu|(A^m + 2B^n)$, nous obtenons :

$$\mu|3B^n \implies \begin{cases} \mu|B^n \implies \mu|B \\ \text{ou} \\ \mu = 3 \end{cases} \quad (3.40)$$

** C-2-1-2-2-1- $\mu|B^n$: Si $\mu|B^n \implies \mu|B$ ce qui est en contradiction avec C-2-1-2- ci-dessus.

** C-2-1-2-2-2- $\mu = 3$: Si $\mu = 3 \implies 3|k_3 \implies k_3 = 3k'_3$, et nous avons $b = k_2k_3 = 3k_2k'_3$, il s'ensuit $p = 3b = 9k_2k'_3$ alors $9|p$, mais $p = (A^m - B^n)^2 + 3A^mB^n$ alors :

$$9k_2k'_3 - 3A^mB^n = (A^m - B^n)^2$$

que nous écrivons :

$$3(3k_2k'_3 - A^mB^n) = (A^m - B^n)^2 \quad (3.41)$$

d'où :

$$3|(3k_2k'_3 - A^mB^n) \implies 3|A^mB^n \implies 3|A^m \text{ ou } 3|B^n$$

** C-2-1-2-2-2-1- $3|A^m$: Si $3|A^m \implies 3|A$ et nous avons aussi $3|A^{2m}$, mais $A^{2m} = 4a \implies 3|4a \implies 3|a$. Comme $b = 3k_2k'_3$ alors $3|b$, mais a, b sont copremiers d'où la contradiction. Alors $3 \nmid A$.

** C-2-1-2-2-2-2- $3|B^n$: Si $3|B^n \implies 3|B$, or l'équation (3.41) implique $3|(A^m - B^n)^2 \implies 3|(A^m - B^n) \implies 3|A^m \implies 3|A$. Mais en utilisant le résultat du cas précédent, nous obtenons $3 \nmid A$.

Alors l'hypothèse $k_3 \neq 1$ est impossible.

** C-2-2- Maintenant, nous supposons que $k_3 = 1 \implies b = k_2$ et $p = 3b = 3k_2$. Nous avons alors :

$$2\sqrt{3}\sin\frac{2\theta}{3} = \frac{k_1}{b} \quad (3.42)$$

avec k_1, b copremiers, nous écrivons (3.42) comme :

$$4\sqrt{3}\sin\frac{\theta}{3}\cos\frac{\theta}{3} = \frac{k_1}{b}$$

Prenons le carré des deux membres et en remplaçant $\cos^2\frac{\theta}{3}$ par $\frac{a}{b}$, nous obtenons :

$$3 \times 4^2 \cdot a(b - a) = k_1^2 \quad (3.43)$$

ce qui implique que :

$$3|a \text{ ou } 3|(b - a)$$

** C-2-2-1- $3|a$: Si $3|a$, comme $A^{2m} = 4a \implies 3|A^m$, mais $p = (A^m - B^n)^2 + 3A^mB^n$ et que $3|p \implies 3|(A^m - B^n)^2 \implies 9|(A^m - B^n)^2$. D'où $9|(p = 3b) \implies 3|b$, il s'ensuit la contradiction avec a, b copremiers.

** C-2-2-2- $3|(b - a)$: Considérons maintenant que $3|(b - a)$. Comme $k_1 = A^m(A^m + 2B^n)$ d'après l'équation (3.38) et que $3|k_1 \implies 3|A^m(A^m + 2B^n) \implies 3|A^m$ ou

$3|(A^m + 2B^n)$.

** C-2-2-2-1- $3|A^m$: Si $3|A^m \implies 3|A \implies 3|A^{2m}$ alors $3|4a \implies 3|a$, mais $3|(b - a) \implies 3|b$ d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** C-2-2-2-2- $3|(A^m + 2B^n)$: Si :

$$3|(A^m + 2B^n) \implies 3|(A^m - B^n) \quad (3.44)$$

mais $p = A^{2m} + B^{2n} + A^m B^n = (A^m - B^n)^2 + 3A^m B^n$ alors $p - 3A^m B^n = (A^m - B^n)^2 \implies 9|(p - 3A^m B^n)$ ou $9|(3b - 3A^m B^n)$, d'où $3|(b - A^m B^n)$ mais $3|(b - a) \implies 3|(a - A^m B^n)$. Comme $A^{2m} = 4a = (A^m)^2 \implies \exists a' \in \mathbb{N}^*$ et $a = a'^2 \implies A^m = 2a'$. Nous arrivons à $3|(a'^2 - 2a' B^n) \implies 3|a'(a' - 2B^n)$:

** C-2-2-2-2-1- $3|a'$: Si $3|a' \implies 3|a'^2 \implies 3|a$, mais $3|(b - a) \implies 3|b$, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** C-2-2-2-2-2- $3|(a' - 2B^n)$: Si $3|(a' - 2B^n) \implies 3|(2a' - 4B^n) \implies 3|(A^m - 4B^n) \implies 3|(A^m - B^n)$, nous retrouvons l'hypothèse de départ (3.44) ci-dessus.

L'étude du cas **3.2.1.8.** est donc achevée.

3.2.1.9 Cas $3|p$ et $b|4p$: Les cas suivants ont été déjà étudiés :

* $3|p, b = 2 \implies b|4p$: cas **3.2.1.1.**

* $3|p, b = 4 \implies b|4p$: cas **3.2.1.2.**

* $3|p \implies p = 3p', b|p' \implies p' = bp'', p'' \neq 1$: cas **3.2.1.3.**

* $3|p, b = 3 \implies b|4p$: cas **3.2.1.4.**

* $3|p \implies p = 3p', b = p' \implies b|4p$: cas **3.2.1.8.**

** D-1- Cas particulier : $b = 12$. En effet $3|p \implies p = 3p'$ et $4p = 12p'$. En prenant $b = 12$, nous avons $b|4p$. Or $b < 4a < 3b$, ce qui donne $12 < 4a < 36 \implies 3 < a < 9$. Comme $2|b$ et $3|b$, les valeurs possibles de a sont 5 et 7.

** D-1-1- $a = 5$ et $b = 12 \implies 4p = 12p' = bp'$. Or $A^{2m} = \frac{4p}{3} \cdot \frac{a}{b} = \frac{5bp'}{3b} = \frac{5p'}{3} \implies 3|p' \implies p' = 3p''$ avec $p'' \in \mathbb{N}^*$, alors $p = 9p''$. Nous avons :

$$A^{2m} = 5p'' \quad (3.45)$$

$$B^n C^l = \frac{4p}{3} \left(3 - 4\cos^2 \frac{\theta}{3} \right) = 4p'' \quad (3.46)$$

Si p'' est premier : c'est impossible. Nous supposons que p'' est non premier, il s'écrit $p'' = \omega^s p_1, s \geq 1, s \nmid p_1$. L'équation (3.47) devient $A^{2m} = 5\omega^s p_1 \implies \omega|A^{2m} \implies \omega|A$. L'équation (3.48) donne $B^n C^l = 4\omega^s p_1 \implies \omega|B^n$ ou $\omega|C^l$. Si $\omega|B^n \implies \omega|B$. Comme $C^l = A^m + B^n$, par suite $\omega|C^l \implies \omega|C$. a, b sont copremiers, par suite, la conjecture (1.1) est vérifiée.

De même, si $\omega|C^l \implies \omega|B$, et la conjecture (1.1) est vérifiée.

** D-1-2- $a = 7$ et $b = 12 \implies 4p = 12p' = bp'$. Or $A^{2m} = \frac{4p}{3} \cdot \frac{a}{b} = \frac{12p'}{3} \cdot \frac{7}{12} = \frac{7p'}{3} \implies 3|p' \implies p = 9p''$. Nous avons :

$$A^{2m} = 7p'' \quad (3.47)$$

$$B^n C^l = \frac{4p}{3} \left(3 - 4\cos^2 \frac{\theta}{3} \right) = 8p'' \quad (3.48)$$

En utilisant la même méthode utilisée en D-1-1- ci-dessus, nous obtenons que la conjecture (1.1) est vérifiée.

Comme $3|p \implies p = 3p'$ et $b|4p \implies \exists k_1 \in \mathbb{N}^*$ et $4p = 12p' = k_1 b$.

** D-2- $k_1 = 1$: Si $k_1 = 1$ donc $b = 12p'$, ($p' \neq 1$ sinon $p = 3 \ll A^{2m} + B^{2n} + A^m B^n$). Mais $A^{2m} = \frac{4p}{3} \cdot \cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{12p' a}{3 b} = \frac{4p' a}{12p'} = \frac{a}{3} \implies 3|a$ car A^{2m} est un entier, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** D-3- $k_1 = 3$: Si $k_1 = 3$, d'où $b = 4p'$ et $A^{2m} = \frac{4p}{3} \cdot \cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{k_1 a}{3} = a$. Le calcul de $A^m B^n$ donne $A^m B^n = \frac{p\sqrt{3}}{3} \sin \frac{2\theta}{3} - \frac{a}{2}$, soit :

$$A^{2m} + 2A^m B^n = \frac{2p\sqrt{3}}{3} \sin \frac{2\theta}{3} = 2p' \sqrt{3} \sin \frac{2\theta}{3} \quad (3.49)$$

Le membre à gauche de (3.49) est un entier et p' aussi, alors $2\sqrt{3} \sin \frac{2\theta}{3}$ peut être écrit sous la forme :

$$2\sqrt{3} \sin \frac{2\theta}{3} = \frac{k_2}{k_3} \quad (3.50)$$

où k_2, k_3 sont deux entiers copremiers et $k_3|p' \implies p' = k_3 \cdot k_4$.

** D-3-1- $k_4 \neq 1$: Nous supposons $k_4 \neq 1$, alors :

$$A^{2m} + 2A^m B^n = k_2 \cdot k_4 \quad (3.51)$$

Soit μ un entier premier tel que $\mu|k_4$. Alors $\mu|A^m(A^m + 2B^n) \implies \mu|A^m$ ou $\mu|(A^m + 2B^n)$.

** D-3-1-1- $\mu|A^m$: Si $\mu|A^m \implies \mu|A^{2m} \implies \mu|a$. Comme $\mu|k_4 \implies \mu|p' \implies \mu|(4p' = b)$. Or a, b sont copremiers d'où la contradiction.

** D-3-1-2- $\mu|(A^m + 2B^n)$: Si $\mu|(A^m + 2B^n) \implies \mu \nmid A^m$ et $\mu \nmid 2B^n$ alors $\mu \neq 2$ et $\mu \nmid B^n$. $\mu|(A^m + 2B^n)$, nous pouvons écrire $A^m + 2B^n = \mu \cdot t'$. Il s'ensuit :

$$A^m + B^n = \mu t' - B^n \implies A^{2m} + B^{2n} + 2A^m B^n = \mu^2 t'^2 - 2t' \mu B^n + B^{2n}$$

Utilisant l'expression de p , nous obtenons $p = t'^2 \mu^2 - 2t' B^n \mu + B^n (B^n - A^m)$. Comme $p = 3p'$ et $\mu|p' \implies \mu|(3p') \implies \mu|p$, on peut écrire $\exists \mu'$ et $p = \mu \mu'$, alors nous avons :

$$\mu' \mu = \mu(\mu t'^2 - 2t' B^n) + B^n (B^n - A^m)$$

et $\mu|B^n(B^n - A^m) \implies \mu|B^n$ ou $\mu|(B^n - A^m)$.

** D-3-1-2-1- $\mu|B^n$: Si $\mu|B^n \implies \mu|B$ ce qui est en contradiction avec D-3-1-2-.

** D-3-1-2-2- $\mu|(B^n - A^m)$: Si $\mu|(B^n - A^m)$ et utilisant $\mu|(A^m + 2B^n)$, nous obtenons :

$$\mu|3B^n \implies \begin{cases} \mu|B^n \\ \text{ou} \\ \mu = 3 \end{cases} \quad (3.52)$$

** D-3-1-2-2-1- $\mu|B^n$: Si $\mu|B^n \implies \mu|B$ ce qui est en contradiction avec D-3-1-2-.

** D-3-1-2-2-2- $\mu = 3$: Si $\mu = 3 \implies 3|k_4 \implies k_4 = 3k'_4$, et nous avons $p' = k_3k_4 = 3k_3k'_4$, il s'ensuit $p = 3p' = 9k_3k'_4$, alors $9|p$, mais $p = (A^m - B^n)^2 + 3A^mB^n$ alors :

$$9k_4k'_5 - 3A^mB^n = (A^m - B^n)^2$$

que nous écrivons : $3(3k_4k'_5 - A^mB^n) = (A^m - B^n)^2$, d'où : $3|(3k_4k'_5 - A^mB^n) \implies 3|A^mB^n \implies 3|A^m$ ou $3|B^n$.

** D-3-1-2-2-2-1- $3|A^m$: Si $3|A^m \implies 3|A^{2m} \Rightarrow 3|a$, mais $3|p' \Rightarrow 3|(4p')$ soit $3|b$ d'où la contradiction avec a, b copremiers. Alors $3 \nmid A$.

** D-3-1-2-2-2-2- $3|B^n$: Si $3|B^n$ or $A^m = \mu t' - 2B^n = 3t' - 2B^n \implies 3|A^m$, ce qui est contradictoire. Alors l'hypothèse $k_4 \neq 1$ est impossible.

** D-3-2- $k_4 = 1$: Maintenant, nous supposons que $k_4 = 1 \implies p' = k_3k_4 = k_3$. Nous avons alors :

$$2\sqrt{3}\sin\frac{2\theta}{3} = \frac{k_2}{p'} \quad (3.53)$$

avec k_2, p' copremiers, nous écrivons (3.53) comme :

$$4\sqrt{3}\sin\frac{\theta}{3}\cos\frac{\theta}{3} = \frac{k_2}{p'}$$

Prenons le carré des deux membres et en remplaçant $\cos^2\frac{\theta}{3}$ par $\frac{a}{b}$ et $b = 4p'$, nous obtenons :

$$3.a(b - a) = k_2^2 \quad (3.54)$$

ce qui implique que :

$$3|a \quad \text{ou} \quad 3|(b - a)$$

** D-3-2-1- $3|a$: Si $3|a \Rightarrow 3|A^{2m} \Rightarrow 3|A$, comme $p = (A^m - B^n)^2 + 3A^mB^n$ et que $3|p \implies 3|(A^m - B^n)^2 \implies 3|(A^m - B^n)$. Or $3|A$ d'où $3|B^n \implies 3|B$, il s'ensuit $9|p \implies 3|p' \implies 3|(4p' = b)$. D'où la contradiction avec a, b copremiers.

** D-3-2-2- $3|(b - a)$: Si $3|(b - a)$. Comme $k_2 = A^m(A^m + 2B^n)$ d'après l'équation (3.51) et que $3|k_2 \implies 3|A^m(A^m + 2B^n) \implies 3|A^m$ ou $3|(A^m + 2B^n)$.

** D-3-2-2-1- $3|A^m$: Si $3|A^m \implies 3|A^{2m} \implies 3|a$, mais $3|(b - a) \implies 3|b$ d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** D-3-2-2-2- $3|(A^m + 2B^n)$:

$$3|(A^m + 2B^n) \implies 3|(A^m - B^n) \quad (3.55)$$

mais $p = A^{2m} + B^{2n} + A^m B^n = (A^m - B^n)^2 + 3A^m B^n$ alors $p - 3A^m B^n = (A^m - B^n)^2 \implies 9|(p - 3A^m B^n)$ ou $9|(3p' - 3A^m B^n)$, d'où $3|(p' - A^m B^n) \implies 3|4(p' - 4A^m B^n) \implies 3|(b - 4A^m B^n)$ mais $3|(b - a) \implies 3|(a - A^m B^n)$. Comme $3|(A^{2m} - 4A^m B^n) \implies 3|A^m(A^m - 4B^n)$.

** D-3-2-2-2-1- $3|A^m$: Si $3|A^m \implies 3|A^{2m} \implies 3|a$, mais $3|(b - a) \implies 3|b$ d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** D-3-2-2-2-2- $3|(A^m - 4B^n)$: Maintenant si $3|(A^m - 4B^n) \implies 3|(A^m - B^n)$, nous retrouvons l'hypothèse de départ (3.55) ci-dessus.

** D-4- Nous supposons $k_1 \neq 3$ et $3|k_1 \implies k_1 = 3k'_1$ avec $k'_1 \neq 1$, alors $4p = 12p' = k_1 b = 3k'_1 b \implies 4p' = k'_1 b$. A^{2m} s'écrit $A^{2m} = \frac{4p}{3} \cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{3k'_1 b a}{3} = k'_1 a$ et $B^n C^l = \frac{p}{3} \left(3 - 4\cos^2 \frac{\theta}{3} \right) = \frac{k'_1}{4} (3b - 4a)$. Comme $B^n C^l$ est un entier, on doit avoir $4|(3b - 4a)$ ou $4|k'_1$ ou $[2|k'_1$ et $2|(3b - 4a)]$.

** D-4-1- $4|(3b - 4a)$

** D-4-1-1- On suppose que $3b - 4a = 4 \implies 4|b \implies 2|b$. Nous avons alors :

$$\begin{aligned} A^{2m} &= k'_1 a \\ B^n C^l &= k'_1 \end{aligned}$$

** D-4-1-1-1- Si k'_1 est premier, de $B^n C^l = k'_1$, c'est impossible.

** D-4-1-1-2- Nous supposons que $k'_1 > 1$ est non premier. Soit ω un nombre premier tel que $\omega|k'_1$.

** D-4-1-1-2-1- Nous supposons que $k'_1 = \omega^s$, avec $s \geq 6$. Nous avons donc :

$$A^{2m} = \omega^s . a \quad (3.56)$$

$$B^n C^l = \omega^s \quad (3.57)$$

** D-4-1-1-2-1-1- Supposons $\omega = 2$, si a, k'_1 sont non copremiers alors $2|a$, comme $2|b$, c'est la contradiction avec a, b copremiers.

** D-4-1-1-2-1-2- Supposons $\omega = 2$ et a, k'_1 sont copremiers donc $2 \nmid a$. De (3.57), nous en déduisons que $B = C = 2$ et $n+l = s$, et $A^{2m} = 2^s . a$, mais $A^m = 2^l - 2^n \implies A^{2m} = (2^l - 2^n)^2 = 2^{2l} + 2^{2n} - 2(2^{l+n}) = 2^{2l} + 2^{2n} - 2 \times 2^s = 2^s . a \implies 2^{2l} + 2^{2n} = 2^s (a + 2)$. Si $l = n$, nous obtenons $a = 0$ d'où la contradiction. Si $l \neq n$, comme $A^m = 2^l - 2^n > 0 \implies n < l \implies 2n < s$, d'où $2^{2n}(1 + 2^{2l-2n} - 2^{s+1-2n}) = 2^n 2^l . a$. Posons $l = n + n_1 \implies 1 + 2^{2l-2n} - 2^{s+1-2n} = 2^{n_1} . a$, or le terme à gauche est impair et le membre à droite est pair d'où la contradiction. Donc le cas $\omega = 2$ est impossible.

** D-4-1-1-2-1-3- Supposons maintenant que $k'_1 = \omega^s$ avec $\omega \neq 2$:

** D-4-1-1-2-1-3-1- Supposons que a, k'_1 sont non copremiers, alors $\omega|a \implies a = \omega^t.a_1$ et $t \nmid a_1$. Nous avons donc :

$$A^{2m} = \omega^{s+t}.a_1 \quad (3.58)$$

$$B^n C^l = \omega^s \quad (3.59)$$

De (3.67), nous déduisons que $B^n = \omega^n$, $C^l = \omega^l$ et $s = n + l$. Et $A^m = \omega^l - \omega^n > 0 \implies l > n$. De plus, $A^{2m} = \omega^{s+t}.a_1 = (\omega^l - \omega^n)^2 = \omega^{2l} + \omega^{2n} - 2 \times \omega^s$. Comme $\omega \neq 2 \implies \omega$ est impair, par suite $A^{2m} = \omega^{s+t}.a_1 = (\omega^l - \omega^n)^2$ est pair, donc $2|a_1 \implies 2|a$ ce qui est en contradiction avec a, b copremiers, alors ce cas est impossible.

** D-4-1-1-2-1-3-2- Supposons que a, k'_1 sont copremiers, avec :

$$A^{2m} = \omega^s.a \quad (3.60)$$

$$B^n C^l = \omega^s \quad (3.61)$$

De (3.69), nous déduisons que $B^n = \omega^n$ et $C^l = \omega^l$ et $s = n + l$. Comme $\omega \neq 2 \implies \omega$ est impair et $A^{2m} = \omega^s.a = (\omega^l - \omega^n)^2$ est pair, d'où $2|a$. Par suite la contradiction avec a, b copremiers, donc ce cas est impossible.

** D-4-1-1-2-2- Nous supposons que $k'_1 = \omega^s.k_2$, avec $s \geq 6$, $\omega \nmid k_2$. Nous avons donc :

$$A^{2m} = \omega^s.k_2.a \quad (3.62)$$

$$B^n C^l = \omega^s.k_2 \quad (3.63)$$

** D-4-1-1-2-2-1- Si k_2 est premier, de la dernière équation ci-dessus, $\omega = k_2$, c'est en contradiction avec $\omega \nmid k_2$. Donc ce cas est impossible.

** D-4-1-1-2-2-2- Nous supposons que $k'_1 = \omega^s.k_2$, avec $s \geq 6$, $\omega \nmid k_2$ et k_2 non premier. Nous avons donc :

$$A^{2m} = \omega^s.k_2.a \quad (3.64)$$

$$B^n C^l = \omega^s.k_2 \quad (3.65)$$

** D-4-1-1-2-2-2-1- Nous supposons ω, a copremiers

** D-4-1-1-2-2-2-1-1- Supposons $\omega = 2$, si a, k_2 sont non copremiers alors $2|a$, comme $2|b$, c'est la contradiction avec a, b copremiers. Si a, k_2 sont copremiers donc $2 \nmid a$. De (3.57), nous en déduisons que $B = C = 2$ et $n + l = s$, et $A^{2m} = 2^s.a$, mais $A^m = 2^l - 2^n \implies A^{2m} = (2^l - 2^n)^2 = 2^{2l} + 2^{2n} - 2(2^{l+n}) = 2^{2l} + 2^{2n} - 2 \times 2^s = 2^s.a \implies 2^{2l} + 2^{2n} = 2^s(a + 2)$. Si $l = n$, nous obtenons $a = 0$ d'où la contradiction. Si $l \neq n$, comme $A^m = 2^l - 2^n > 0 \implies n < l \implies 2n < s$, d'où $2^{2n}(1 + 2^{2l-2n} - 2^{s+1-2n}) = 2^n 2^l.a$. Posons $l = n + n_1 \implies 1 + 2^{2l-2n} - 2^{s+1-2n} = 2^{n_1}.a$, or le terme à gauche est impair et le membre à droite est pair d'où la contradiction. Donc le cas $\omega = 2$ est impossible.

** D-4-1-1-2-2-2-1-2- Supposons maintenant que $\omega \neq 2$.

** D-4-1-1-2-2-2-1-2-1- Supposons que a, k'_1 sont non copremiers, alors $\omega|a \implies a = \omega^t.a_1$ et $t \nmid a_1$. Nous avons donc :

$$A^{2m} = \omega^{s+t}.a_1 \quad (3.66)$$

$$B^n C^l = \omega^s \quad (3.67)$$

De (3.67), nous déduisons que $B^n = \omega^n$, $C^l = \omega^l$ et $s = n + l$. Et $A^m = \omega^l - \omega^n > 0 \implies l > n$. De plus, $A^{2m} = \omega^{s+t}.a_1 = (\omega^l - \omega^n)^2 = \omega^{2l} + \omega^{2n} - 2 \times \omega^s$. Comme $\omega \neq 2 \implies \omega$ est impair, par suite $A^{2m} = \omega^{s+t}.a_1 = (\omega^l - \omega^n)^2$ est pair, donc $2|a_1 \implies 2|a$ ce qui est en contradiction avec a, b copremiers, ce cas est impossible.

** D-4-1-1-2-2-2-1-2-2- Supposons que a, k'_1 non copremiers, avec :

$$A^{2m} = \omega^s.a \quad (3.68)$$

$$B^n C^l = \omega^s \quad (3.69)$$

De (3.69), nous déduisons que $B^n = \omega^n$ et $C^l = \omega^l$ et $s = n + l$. Comme $\omega \neq 2 \implies \omega$ est impair et $A^{2m} = \omega^s.a = (\omega^l - \omega^n)^2$ est pair, d'où $2|a$. Par suite la contradiction avec a, b copremiers, donc ce cas est impossible.

** D-4-1-2- $3b - 4a \neq 4$ et $4|(3b - 4a) \implies 3b - 4a = 4^s \Omega$ avec $s \geq 1$ et $4 \nmid \Omega$. Nous avons :

$$A^{2m} = k'_1 a \quad (3.70)$$

$$B^n C^l = 4^{s-1} k'_1 \Omega \quad (3.71)$$

** D-4-1-2-1- Supposons $k'_1 = 2$, de (3.70) nous déduisons que $2|a$. Comme $4|(3b - 4a) \implies 2|b$, d'où la contradiction avec a, b copremiers. Donc ce cas est impossible.

** D-4-1-2-2- Supposons que $k'_1 = 3$, de (3.70) nous déduisons que $3^3|A^{2m}$. De (3.71), nous déduisons que $3^3|B^n$ ou $3^3|C^l$. Dans les deux cas précédents, nous aurons $3^3|p$. Mais $4p = 3k'_1 b = 9b$, or $27|p$ ce qui donne $3|b$, d'où la contradiction avec a, b copremiers. Donc ce cas est impossible.

** D-4-1-2-3- Supposons que k'_1 est un nombre premier ≥ 5 :

** D-4-1-2-3-1- Supposons k'_1 et a copremiers. L'équation (3.70) donne $(A^m)^2 = k'_1.a$ ce qui est impossible avec $k'_1 \nmid a$. Donc ce cas est impossible.

** D-4-1-2-3-2- Supposons k'_1 et a sont non copremiers, soit $k'_1|a \implies a = k_1'^{\alpha} a_1$ avec $\alpha \geq 1$ et $k'_1 \nmid a_1$. L'équation (3.70) s'écrit :

$$A^{2m} = k_1'^{\alpha} a = k_1'^{\alpha+1} a_1 \quad (3.72)$$

La dernière équation donne $k_1'|A^{2m} \implies k_1'|A \implies A = k_1'^i.A_1$, avec $k_1' \nmid A_1$. Si $2i.m \neq (\alpha + 1)$ c'est impossible. Nous supposons que $2i.m = \alpha + 1$, par suite $k_1'|A^m$. Revenons à l'équation (3.71). Si k_1' et Ω sont copremiers, c'est impossible. Nous supposons donc que k_1' et Ω ne sont pas copremiers c'est-à-dire que $k_1'|\Omega$ et que l'exposant de k_1' dans Ω est tel que l'équation (3.71) soit satisfaite. Nous déduisons facilement que $k_1'|B^n$. Par suite $k_1'^2|(p = A^{2m} + B^{2n} + A^m B^n)$, mais

$4p = 3k'_1 b \implies k'_1 | b$, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** D-4-1-2-4- Supposons que $k'_1 \geq 4$ non premier.

** D-4-1-2-4-1- Supposons que $k'_1 = 4$. Nous avons alors : $A^{2m} = 4a$ et $B^n C^l = 3b - 4a = 3p' - 4a$. Ce cas a été traité dans le paragraphe **3.2.1.8.** cas ** C-2-.

** D-4-1-2-4-2- Nous supposons que $k'_1 > 4$ non premier.

** D-4-1-2-4-2-1- Nous supposons que a, k'_1 sont copremiers. De l'expression $A^{2m} = k'_1 . a$ nous déduisons que $a = a_1^2$ et $k'_1 = k''_1$. Ce qui donne :

$$A^m = a_1 . k''_1 \quad (3.73)$$

$$B^n C^l = 4^{s-1} k''_1^2 . \Omega \quad (3.74)$$

Soit ω un nombre premier tel que $\omega | k''_1$, soit $k''_1 = \omega^t . k''_2$ avec $\omega \nmid k''_2$. Les deux équations précédentes deviennent :

$$A^m = a_1 . \omega^t . k''_2 \quad (3.75)$$

$$B^n C^l = 4^{s-1} \omega^{2t} . k''_2^2 . \Omega \quad (3.76)$$

De (3.75) $\omega | A^m \implies \omega | A \implies A = \omega^i . A_1$ avec $\omega \nmid A_1$ et $im = t$. De (3.76), nous avons $\omega | B^n C^l \implies \omega | B^n$ ou $\omega | C^l$.

** D-4-1-2-4-2-1-1 $\omega | B^n \implies \omega | B \implies B = \omega^j . B_1$, avec $\omega \nmid B_1$. De (3.75), nous avons $B_1^n C^l = \omega^{2t-j.n} 4^{s-1} . k''_2^2 . \Omega$. Si $\omega = 2$ et $2 \nmid \Omega$, nous avons $B_1^n C^l = 2^{2t+2s-j.n-2} k''_2^2$:

- Si $2t + 2s - jn - 2 \leq 0$ alors $2 \nmid C^l$ ce qui est en contradiction avec $C^l = \omega^{im} A_1^m + \omega^{jn} B_1^n$.

- Si $2t + 2s - jn - 2 \geq 1 \implies 2 | C^l \implies 2 | C$ et la conjecture (1.1) est vérifiée.

(Mêmes résultats si $2 | \Omega \implies \Omega = 2^\mu . \Omega_1$, on remplace $2t + 2s - jn - 2$ par $2t + 2s + \mu - jn - 2$). Si $\omega \neq 2$, nous avons $B_1^n C^l = \omega^{2t-jn} 4^{s-1} k''_2^2 . \Omega$.

Là aussi, si $\omega \nmid \Omega$:

- Si $2t - jn \leq 0 \implies \omega \nmid C^l$ ce qui est en contradiction avec $C^l = \omega^{im} A_1^m + \omega^{jn} B_1^n$.

- Si $2t - jn \geq 1 \implies \omega | C^l$ et la conjecture (1.1) est vérifiée.

Mêmes résultats si $2 | \Omega \implies \Omega = 2^\mu . \Omega_1$, on remplace $2t - jn$ par $2t + \mu - jn$.

** D-4-1-2-4-2-1-2 $\omega | C^l \implies \omega | C \implies C = \omega^h . C_1$, avec $\omega \nmid C_1$. En utilisant les mêmes méthodes en D-4-1-2-4-2-1-1 ci-dessus, nous obtenons les mêmes résultats suivants les cas.

** D-4-1-2-4-2-2- Nous supposons que a, k'_1 sont non copremiers. Soit ω un nombre premier tel que $\omega | a$ et $\omega | k'_1$. Nous écrivons :

$$a = \omega^\alpha . a_1 \quad (3.77)$$

$$k'_1 = \omega^\mu . k''_1 \quad (3.78)$$

avec a_1, k''_1 copremiers. L'expression de A^{2m} devient $A^{2m} = \omega^{\alpha+\mu} . a_1 . k''_1$. Le terme $B^n C^l$ devient :

$$B^n C^l = 4^{s-1} . \omega^\mu . k''_1 . \Omega \quad (3.79)$$

** D-4-1-2-4-2-2-1- Si $\omega = 2 \implies 2|a$, mais $2 \nmid b$, d'où la contradiction avec a, b copremiers. Ce cas est donc impossible.

** D-4-1-2-4-2-2-2- Si $\omega \geq 3$. Nous avons $\omega|a$. Si $\omega|b$ c'est la contradiction avec a, b copremiers. Nous supposons que $\omega \nmid b$. De l'expression de A^{2m} , nous obtenons $\omega|A^{2m} \implies \omega|A \implies A = \omega^i.A_1$ avec $\omega \nmid A_1$, $i \geq 1$ et $2i.m = \alpha + \mu$. De (3.79), nous déduisons que $\omega|B^n$ ou $\omega|C^l$.

** D-4-1-2-4-2-2-2-1- Nous supposons que $\omega|B^n \implies \omega|B \implies B = \omega^j B_1$ avec $\omega \nmid B_1$ et $j \geq 1$. Par suite, $B_1^n C^l = 4^{s-1} \omega^{\mu-jn} .k''_1 .\Omega$:

* $\omega \nmid \Omega$:

- Si $\mu - jn \geq 1$ nous avons $\omega|C^l \implies \omega|C$, pas de contradiction avec $C^l = \omega^{im} A_1^m + \omega^{jn} B_1^n$ et la conjecture (1.1) est vérifiée.

- Si $\mu - jn \leq 0$ avec $\omega \nmid \Omega$, alors $\omega \nmid C^l$ et c'est la contradiction avec $C^l = \omega^{im} A_1^m + \omega^{jn} B_1^n$. Donc ce cas est impossible.

* $\omega|\Omega$: soit $\Omega = \omega^\beta .\Omega_1$ avec $\beta \geq 1$ et $\omega \nmid \Omega_1$. Comme $3b - 4a = 4^s .\Omega = 4^s .\omega^\beta .\Omega_1 \implies 3b = 4a + 4^s .\omega^\beta .\Omega_1 = 4\omega^\alpha .a_1 + 4^s .\omega^\beta .\Omega_1 \implies 3b = 4\omega(\omega^{\alpha-1} .a_1 + 4^{s-1} .\omega^{\beta-1} .\Omega_1)$. Si $\omega = 3$ et $\beta = 1$, nous obtenons $b = 4(3^{\alpha-1} a_1 + 4^{s-1} \Omega_1)$ et $B_1^n C^l = 4^{s-1} 3^{\mu+1-jn} .k''_1 .\Omega_1$.

- Si $\mu - jn + 1 \geq 1$, alors $3|C^l$ et la conjecture (1.1) est vérifiée.

- Si $\mu - jn + 1 \leq 0$, alors $3 \nmid C^l$ et c'est la contradiction avec $C^l = 3^{im} A_1^m + 3^{jn} B_1^n$.

Maintenant, si $\beta \geq 2$ et $\alpha = im \geq 3$, nous aurons $3b = 4\omega^2(\omega^{\alpha-2} a_1 + 4^{s-1} \omega^{\beta-2} \Omega_1)$. Si $\omega = 3$ ou non, alors $\omega|b$, mais $\omega \nmid a$, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** D-4-1-2-4-2-2-2-2- Nous supposons que $\omega|C^l \implies \omega|C \implies C = \omega^h C_1$ avec $\omega \nmid C_1$ et $h \geq 1$. Par suite, $B^n C_1^l = 4^{s-1} \omega^{\mu-hl} .k''_1 .\Omega$. En utilisant la méthodologie ci-dessus, nous obtenons les résultats analogues.

** D-4-2- 4|k'_1

** D-4-2-1- $k'_1 = 4 \implies 4p = 3k'_1 b = 12b \implies p = 3b = 3p'$, c'est le cas déjà étudié **3.2.1.8.**, C2.

** D-4-2-2- $k'_1 > 4$ avec $4|k'_1 \implies k'_1 = 4^s k''_1$ et $s \geq 1$ $4 \nmid k''_1$. Nous avons donc :

$$A^{2m} = 4^s k''_1 a = 2^{2s} k''_1 a \quad (3.80)$$

$$B^n C^l = 4^{s-1} k''_1 (3b - 4a) = 2^{2s-2} k''_1 (3b - 4a) \quad (3.81)$$

** D-4-2-2-1- Nous supposons $s = 1$ et $k'_1 = 4k''_1$ avec $k''_1 > 1$, soit $p = 3p'$ et $p' = k''_1 b$ c'est le cas **3.2.1.3.** déjà étudié.

** D-4-2-2-2- Nous supposons $s > 1$, par suite $k'_1 = 4^s k''_1 \implies 4p = 3 \times 4^s k''_1 b$ et

nous avons :

$$A^{2m} = 4^s k^n a \quad (3.82)$$

$$B^n C^l = 4^{s-1} k^n (3b - 4a) \quad (3.83)$$

** D-4-2-2-2-1- Nous supposons que $2 \nmid (k^n a) \implies 2 \nmid k^n$ et $2 \nmid a$. Comme $(A^m)^2 = (2^s)^2 (k^n a)$, posons $d^2 = k^n a$, par suite $A^m = 2^s d \implies 2 \mid A^m \implies 2 \mid A \implies A = 2^i A_1$ avec $2 \nmid A_1$ et $i \geq 1$. D'où : $2^{im} A_1^m = 2^s d \implies s = im$. De l'équation (3.83), nous avons $2 \mid (B^n C^l) \implies 2 \mid B^n$ ou $2 \mid C^l$.

** D-4-2-2-2-1-1- Nous supposons que $2 \mid B^n \implies 2 \mid B \implies B = 2^j B_1$, avec $j \geq 1$ et $2 \nmid B_1$. L'équation (3.83) devient :

$$B_1^n C^l = 2^{2s-jn-2} k^n (3b - 4a) = 2^{2im-jn-2} k^n (3b - 4a) \quad (3.84)$$

* Nous supposons que $2 \nmid (3b - 4a)$:

- Si $2im - jn - 2 \geq 1$, alors $2 \mid C^l$, pas de contradiction avec $C^l = 2^{im} A_1^m + 2^{jn} B_1^n$ et la conjecture (1.1) est vérifiée.

- Si $2im - jn - 2 \leq 0$, alors $2 \nmid C^l$, d'où la contradiction avec $C^l = 2^{im} A_1^m + 2^{jn} B_1^n$.

* Nous supposons que $2^\mu \mid (3b - 4a)$, $\mu \geq 1$ et que a, b restent copremiers :

- Si $2im + \mu - jn - 2 \geq 1$, alors $2 \mid C^l$, pas de contradiction avec $C^l = 2^{im} A_1^m + 2^{jn} B_1^n$ et la conjecture (1.1) est vérifiée.

- Si $2im + \mu - jn - 2 \leq 0$, alors $2 \nmid C^l$, d'où la contradiction avec $C^l = 2^{im} A_1^m + 2^{jn} B_1^n$.

** D-4-2-2-2-1-2- Nous supposons que $2 \mid C^l \implies 2 \mid C \implies C = 2^h C_1$, avec $h \geq 1$ et $2 \nmid C_1$. De la même manière traitée ci-dessus, nous obtenons les mêmes résultats.

** D-4-2-2-2-2- Nous supposons que $2 \mid (k^n a)$:

** D-4-2-2-2-2-1- Nous supposons que k^n et a sont copremiers :

** D-4-2-2-2-2-1-1- Nous supposons que $2 \nmid a$ et $2 \mid k^n \implies k^n = 2^{2\mu} k^n_2$ et $a = a_1^2$. Alors les équations (3.82-3.83) deviennent :

$$A^{2m} = 4^s 2^{2\mu} k^n_2 a_1^2 \implies A^m = 2^{s+\mu} k^n_2 a_1 \quad (3.85)$$

$$B^n C^l = 4^{s-1} 2^{2\mu} k^n_2 (3b - 4a) = 2^{2s+2\mu-2} k^n_2 (3b - 4a) \quad (3.86)$$

L'équation (3.85) donne $2 \mid A^m \implies 2 \mid A \implies A = 2^i A_1$ avec $2 \nmid A_1$, $i \geq 1$ et $im = s + \mu$. De l'équation (3.86), nous avons $2 \mid (B^n C^l) \implies 2 \mid B^n$ ou $2 \mid C^l$.

** D-4-2-2-2-2-1-1-1- Nous supposons que $2 \mid B^n \implies 2 \mid B \implies B = 2^j B_1$, $2 \nmid B_1$ et $j \geq 1$. Par suite $B_1^n C^l = 2^{2s+2\mu-jn-2} k^n_2 (3b - 4a)$:

* Nous supposons que $2 \nmid (3b - 4a)$:

- Si $2im + 2\mu - jn - 2 \geq 1$, alors $2 \mid C^l$, pas de contradiction avec $C^l = 2^{im} A_1^m + 2^{jn} B_1^n$ et la conjecture (1.1) est vérifiée.

- Si $2im + 2\mu - jn - 2 \leq 0$, alors $2 \nmid C^l$, d'où la contradiction avec $C^l = 2^{im} A_1^m + 2^{jn} B_1^n$.

* Nous supposons que $2^\alpha | (3b - 4a)$, $\alpha \geq 1$ et que a, b restent copremiers :
 - Si $2im + 2\mu + \alpha - jn - 2 \geq 1$, alors $2|C^l$, pas de contradiction avec $C^l = 2^{im}A_1^m + 2^{jn}B_1^n$ et la conjecture (1.1) est vérifiée.
 - Si $2im + 2\mu + \alpha - jn - 2 \leq 0$, alors $2 \nmid C^l$, d'où la contradiction avec $C^l = 2^{im}A_1^m + 2^{jn}B_1^n$.

** D-4-2-2-2-2-1-1-2- Nous supposons que $2|C^l \implies 2|C \implies C = 2^h.C_1$, avec $h \geq 1$ et $2 \nmid C_1$. De la même manière traitée ci-dessus, nous obtenons les mêmes résultats.

** D-4-2-2-2-2-1-2- Nous supposons que $2 \nmid k''_1$ et $2|a \implies a = 2^{2\mu}.a_1^2$ et $k''_1 = k''_2$. Alors les équations (3.82-3.83) deviennent :

$$A^{2m} = 4^s.2^{2\mu}.a_1^2.k''_2 \implies A^m = 2^{s+\mu}.a_1.k''_2. \quad (3.87)$$

$$B^n.C^l = 4^{s-1}.k''_2(3b - 4a) = 2^{2s-2}.k''_2(3b - 4a) \quad (3.88)$$

L'équation (3.87) donne $2|A^m \implies 2|A \implies A = 2^i.A_1$ avec $2 \nmid A_1$, $i \geq 1$ et $im = s + \mu$. De l'équation (3.88), nous avons $2|(B^n.C^l) \implies 2|B^n$ ou $2|C^l$.

** D-4-2-2-2-2-1-2-1- Nous supposons que $2|B^n \implies 2|B \implies B = 2^j.B_1$, $2 \nmid B_1$ et $j \geq 1$. Par suite $B_1^n.C^l = 2^{2s-jn-2}.k''_2(3b - 4a)$:

* Nous supposons que $2 \nmid (3b - 4a) \implies 2 \nmid b$:
 - Si $2im - jn - 2 \geq 1$, alors $2|C^l$, pas de contradiction avec $C^l = 2^{im}A_1^m + 2^{jn}B_1^n$.
 - Si $2im - jn - 2 \leq 0$, alors $2 \nmid C^l$, d'où la contradiction avec $C^l = 2^{im}A_1^m + 2^{jn}B_1^n$.

* Nous supposons que $2^\alpha | (3b - 4a)$, $\alpha \geq 1$, dans ce cas a, b sont non copremiers, c'est la contradiction.

** D-4-2-2-2-2-1-2-2- Nous supposons que $2|C^l \implies 2|C \implies C = 2^h.C_1$, avec $h \geq 1$ et $2 \nmid C_1$. De la même manière traitée ci-dessus, nous obtenons les mêmes résultats.

** D-4-2-2-2-2-2- Nous supposons k''_1 et a sont non copremiers avec $2|a$ et $2|k''_1$. Soit $a = 2^t.a_1$ et $k''_1 = 2^\mu.k''_2$ et $2 \nmid a_1$ et $2 \nmid k''_2$. De (3.82), nous avons $\mu + t = 2\lambda$ et $a_1.k''_2 = \omega^2$. Les équations (3.82-3.83) deviennent :

$$A^{2m} = 4^s.k''_1.a = 2^{2s}.2^\mu.k''_2.2^t.a_1 = 2^{2s+2\lambda}.\omega^2 \implies A^m = 2^{s+\lambda}.\omega \quad (3.89)$$

$$B^n.C^l = 4^{s-1}.2^\mu.k''_2(3b - 4a) = 2^{2s+\mu-2}.k''_2(3b - 4a) \quad (3.90)$$

De (3.89) nous avons $2|A^m \implies 2|A \implies A = 2^i.A_1, i \geq 1$ et $2 \nmid A_1$. De (3.90), $2s + \mu - 2 \geq 1$, nous déduisons $2|(B^n.C^l) \implies 2|B^n$ ou $2|C^l$.

** D-4-2-2-2-2-2-1- Nous supposons $2|B^n \implies 2|B \implies B = 2^j.B_1$, $2 \nmid B_1$ et $j \geq 1$. Par suite $B_1^n.C^l = 2^{2s+\mu-jn-2}.k''_2(3b - 4a)$:

* Nous supposons que $2 \nmid (3b - 4a)$:
 - Si $2s + \mu - jn - 2 \geq 1$, alors $2|C^l$, pas de contradiction avec $C^l = 2^{im}A_1^m + 2^{jn}B_1^n$ et la conjecture (1.1) est vérifiée.
 - Si $2s + \mu - jn - 2 \leq 0$, alors $2 \nmid C^l$, d'où la contradiction avec $C^l = 2^{im}A_1^m + 2^{jn}B_1^n$.

* Nous supposons que $2^\alpha | (3b - 4a)$, pour une valeur $\alpha \geq 1$. Comme $2|a$, alors $2^\alpha | (3b - 4a) \implies 2 | (3b - 4a) \implies 2 | (3b) \implies 2|b$, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** D-4-2-2-2-2-2- Nous supposons que $2|C^l \implies 2|C \implies C = 2^h.C_1$, avec $h \geq 1$ et $2 \nmid C_1$. De la même manière traitée ci-dessus, nous obtenons les mêmes résultats.

** D-4-3- $2|k'_1$ et $2|(3b - 4a)$: Alors nous obtenons $2|k'_1 \implies k'_1 = 2^t.k''_1$ avec $t \geq 1$ et $2 \nmid k''_1$. $2|(3b - 4a) \implies 3b - 4a = 2^\mu.d$ avec $\mu \geq 1$ et $2 \nmid d$. Nous avons aussi $2|b$. Si $2|a$, c'est la contradiction avec a, b copremiers. Nous supposons dans la suite de cette section que $2 \nmid a$. Les équations (3.82-3.83) deviennent :

$$A^{2m} = 2^t.k''_1.a = (A^m)^2 \quad (3.91)$$

$$B^n.C^l = 2^{t-1}.k''_1.2^{\mu-1}.d = 2^{t+\mu-2}.k''_1.d \quad (3.92)$$

De (3.91), nous déduisons que t est un exposant pair, soit $t = 2\lambda$. Par suite, nous posons $\omega^2 = k''_1.a$ ce qui donne $A^m = 2^\lambda.\omega \implies 2|A^m \implies 2|A \implies A = 2^i.A_1$ avec $i \geq 1$ et $2 \nmid A_1$. De (3.92), nous avons $2\lambda + \mu - 2 \geq 1$, par suite $2|(B^n.C^l) \implies 2|B^n$ ou $2|C^l$:

** D-4-3-1- Nous supposons que $2|B^n \implies 2|B \implies B = 2^j.B_1$, avec $j \geq 1$ et $2 \nmid B_1$. Il s'ensuit que $B_1^n.C^l = 2^{2\lambda+\mu-jn-2}.k''_1.d$.

- Si $2\lambda + \mu - jn - 2 \geq 1$, nous avons $2|C^l \implies 2|C$, il n'y a pas de contradiction avec $C^l = 2^{im}.A_1^m + 2^{jn}.B_1^n$ et la conjecture (1.1) est vérifiée.

- Si $2s + t + \mu - jn - 2 \leq 0$, il s'ensuit que $2 \nmid C$, d'où la contradiction avec $C^l = 2^{im}.A_1^m + 2^{jn}.B_1^n$.

** D-4-3-2- Nous supposons que $2|C^l \implies 2|C$. En utilisant la même méthode ci-dessus, nous obtenons les mêmes résultats.

3.2.2 Hypothèse : $\{3|a \text{ et } b|4p\}$

Nous avons donc :

$$3|a \implies \exists a' \in \mathbb{N}^* / a = 3a' \quad (3.93)$$

3.2.2.1. Cas $b = 2$ et $3|a$: A^{2m} s'écrit :

$$A^{2m} = \frac{4p}{3}.\cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{4p}{3}.\frac{a}{b} = \frac{4p}{3}.\frac{a}{2} = \frac{2.p.a}{3} \quad (3.94)$$

En utilisant l'équation (3.93), A^{2m} devient :

$$A^{2m} = \frac{2.p.3a'}{3} = 2.p.a' \quad (3.95)$$

mais $\cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{a}{b} = \frac{3a'}{2} > 1$ ce qui est impossible, d'où $b \neq 2$.

3.2.2.2. Cas $b = 4$ et $3|a$: A^{2m} s'écrit :

$$A^{2m} = \frac{4.p}{3}\cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{4.p}{3}.\frac{a}{b} = \frac{4.p}{3}.\frac{a}{4} = \frac{p.a}{3} = \frac{p.3a'}{3} = p.a' \quad (3.96)$$

$$\text{et } \cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{a}{b} = \frac{3.a'}{4} < \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \implies a' < 1 \quad (3.97)$$

ce qui est impossible. Alors le cas $b = 4$ est impossible.

3.2.2.3. Cas $b = p$ et $3|a$: Nous avons :

$$\cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{a}{b} = \frac{3a'}{p} \quad (3.98)$$

et :

$$A^{2m} = \frac{4p}{3} \cdot \cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{4p}{3} \cdot \frac{3a'}{p} = 4a' = (A^m)^2 \quad (3.99)$$

$$\exists a^n / a' = a^{n^2} \quad (3.100)$$

Le calcul $A^m B^n$ donne :

$$\begin{aligned} A^m B^n &= p \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \frac{2\theta}{3} - 2a' \\ \text{ou } A^m B^n + 2a' &= p \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \frac{2\theta}{3} \end{aligned} \quad (3.101)$$

Le membre à gauche de (3.101) est un entier et p aussi, alors $2 \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \frac{2\theta}{3}$ s'écrit sous la forme :

$$2 \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \frac{2\theta}{3} = \frac{k_1}{k_2} \quad (3.102)$$

où k_1, k_2 sont deux entiers copremiers et $k_2|p \implies p = b = k_2 \cdot k_3, k_3 \in \mathbb{N}^*$.

** E-1- Nous supposons que $k_3 \neq 1$, nous obtenons :

$$A^m (A^m + 2B^n) = k_1 \cdot k_3 \quad (3.103)$$

Soit μ un entier premier avec $\mu|k_3$, alors $\mu|b$ et $\mu|A^m(A^m + 2B^n) \implies \mu|A^m$ ou $\mu|(A^m + 2B^n)$.

** E-1-1- Si $\mu|A^m \implies \mu|A$ et $\mu|A^{2m}$, mais $A^{2m} = 4a' \implies \mu|4a' \implies (\mu = 2 \text{ mais } 2|a')$ ou $(\mu|a')$. Alors $\mu|a$ d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** E-1-2- Si $\mu|(A^m + 2B^n) \implies \mu \nmid A^m$ et $\mu \nmid 2B^n$ alors $\mu \neq 2$ et $\mu \nmid B^n$. Nous écrivons $\mu|(A^m + 2B^n)$ comme :

$$A^m + 2B^n = \mu \cdot t' \quad (3.104)$$

Il s'ensuit :

$$A^m + B^n = \mu t' - B^n \implies A^{2m} + B^{2n} + 2A^m B^n = \mu^2 t'^2 - 2t' \mu B^n + B^{2n}$$

En utilisant l'expression de p :

$$p = t'^2 \mu^2 - 2t' B^n \mu + B^n (B^n - A^m) \quad (3.105)$$

Comme $p = b = k_2 \cdot k_3$ et $\mu|k_3$ alors $\mu|b \implies \exists \mu'$ et $b = \mu \mu'$, ainsi nous pouvons écrire :

$$\mu' \mu = \mu (\mu t'^2 - 2t' B^n) + B^n (B^n - A^m) \quad (3.106)$$

De la dernière équation, nous obtenons $\mu|B^n(B^n - A^m) \implies \mu|B^n$ ou $\mu|(B^n - A^m)$.

** E-1-2-1- Si $\mu|B^n$ ce qui en contradiction avec $\mu \nmid B^n$.

** E-1-2-2- Si $\mu|(B^n - A^m)$ et utilisant $\mu|(A^m + 2B^n)$, nous arrivons à :

$$\mu|3B^n \begin{cases} \mu|B^n \\ \text{ou} \\ \mu = 3 \end{cases} \quad (3.107)$$

** E-1-2-2-1- Si $\mu|B^n \implies \mu|B$ c'est la contradiction avec $\mu \nmid B$ citée ci-dessus.

** E-1-2-2-2- Si $\mu = 3$, alors $3|b$, mais $3|a$ alors la contradiction avec a, b copremiers.

** E-2- Nous assumons maintenant $k_3 = 1$, alors :

$$A^{2m} + 2A^m B^n = k_1 \quad (3.108)$$

$$b = k_2 \quad (3.109)$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} \sin \frac{2\theta}{3} = \frac{k_1}{b} \quad (3.110)$$

Prenons le carré de la dernière équation, nous obtenons :

$$\frac{4}{3} \sin^2 \frac{2\theta}{3} = \frac{k_1^2}{b^2}$$

$$\frac{16}{3} \sin^2 \frac{\theta}{3} \cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{k_1^2}{b^2}$$

$$\frac{16}{3} \sin^2 \frac{\theta}{3} \cdot \frac{3a'}{b} = \frac{k_1^2}{b^2}$$

Finalement :

$$4^2 a' (p - a) = k_1^2 \quad (3.111)$$

mais $a' = a'^2$ alors $p - a$ est un carré. Soit :

$$\lambda^2 = p - a \quad (3.112)$$

L'équation (3.111) devient :

$$4^2 a'^2 \lambda^2 = k_1^2 \implies k_1 = 4a' \lambda \quad (3.113)$$

en prenant la racine carrée positive, mais $k_1 = A^m(A^m + 2B^n) = 2a'(A^m + 2B^n)$, par suite :

$$A^m + 2B^n = 2\lambda \quad (3.114)$$

** E-2-1- Soit $\lambda_1 = 2$ tel que $\lambda_1|\lambda \implies 2|\lambda^2 \implies 2|(p - a)$ mais a est pair, alors $2|p \implies 2|b$ ce qui en contradiction avec a, b copremiers).

** E-2-2- Nous considérons $\lambda_1 \neq 2$ et :

$$\lambda_1|\lambda \implies \lambda_1|\lambda^2 \quad \text{et} \quad \lambda_1|(A^m + 2B^n) \quad (3.115)$$

** E-2-2-1- Supposons $\lambda_1|A^m \implies \lambda_1|(2B^n)$, mais $\lambda_1 \neq 2$ alors $\lambda_1|B^n \implies \lambda_1|B$, il s'ensuit :

$$\lambda_1|(p=b) \quad \text{et} \quad \lambda_1|A^m \implies \lambda_1|2a'' \implies \lambda_1|a \quad (3.116)$$

d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** E-2-2-2- Nous assumons maintenant $\lambda_1 \nmid A^m$. $\lambda_1|(A^m+2B^n) \implies \lambda_1|(A^m+2B^n)^2$ c'est-à-dire $\lambda_1|(A^{2m} + 4A^mB^n + 4B^{2n})$ que nous écrivons comme $\lambda_1|(p + 3A^mB^n + 3B^{2n}) \implies \lambda_1|(p + 3B^n(A^m + 2B^n) - 3B^{2n})$. Mais $\lambda_1|(A^m + 2B^n) \implies \lambda_1|(p - 3B^{2n})$, comme $\lambda_1|(p - a)$ d'où par différence, nous obtenons $\lambda_1|(a - 3B^{2n})$ ou $\lambda_1|(3a' - 3B^{2n}) \implies \lambda_1|3(a' - B^{2n}) \implies \lambda_1 = 3$ ou $\lambda_1|(a' - B^{2n})$.

** E-2-2-2-1- Si $\lambda_1 = 3$ mais $3|a \implies 3|(p=b)$ d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** E-2-2-2-2- Si $\lambda_1|(a' - B^{2n}) \implies \lambda_1|(a''^2 - B^{2n}) \implies \lambda_1|(a'' - B^n)(a'' + B^n) \implies \lambda_1|(a'' + B^n)$ ou $\lambda_1|(a'' - B^n)$, car $(a'' - B^n) \neq 1$ si non nous obtenons $a''^2 - B^{2n} = a'' + B^n \implies a''^2 - a'' = B^n - B^{2n}$. Le membre à gauche est positif et celui à droite est négatif, d'où la contradiction.

** E-2-2-2-2-1- Si $\lambda_1|(a'' - B^n) \implies \lambda_1|2(a'' - B^n) \implies \lambda_1|(A^m - 2B^n)$ mais $\lambda_1|(A^m + 2B^n)$ d'où $\lambda_1|2A^m \implies \lambda_1|A^m$, $\lambda_1 \neq 2$, il s'ensuit $\lambda_1|A^m$, par suite la contradiction avec (E-3.2.2).

** E-2-2-2-2-2- Si $\lambda_1|(a'' + B^n) \implies \lambda_1|2(a'' + B^n) \iff \lambda_1|(A^m + 2B^n)$. Nous retrouvons la condition (3.115). Alors le cas $k_3 = 1$ est impossible.

3.2.2.4. Cas $b|p \implies p = b.p', p' > 1, b \neq 2, b \neq 4$ et $3|a$:

$$A^{2m} = \frac{4.p}{3} \cdot \frac{a}{b} = \frac{4.b.p'.3.a'}{3.b} = 4.p'a' \quad (3.117)$$

Calculons $B^n C^l$:

$$B^n C^l = \sqrt[3]{\rho^2} \left(3 \sin^2 \frac{\theta}{3} - \cos^2 \frac{\theta}{3} \right) = \sqrt[3]{\rho^2} \left(3 - 4 \cos^2 \frac{\theta}{3} \right) \quad (3.118)$$

mais $\sqrt[3]{\rho^2} = \frac{p}{3}$ d'où en utilisant $\cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{3.a'}{b}$:

$$B^n C^l = \sqrt[3]{\rho^2} \left(3 - 4 \cos^2 \frac{\theta}{3} \right) = \frac{p}{3} \left(3 - 4 \frac{3.a'}{b} \right) = p \cdot \left(1 - \frac{4.a'}{b} \right) = p'(b - 4a') \quad (3.119)$$

Comme $p = b.p'$, et $p' > 1$, nous avons alors :

$$B^n C^l = p'(b - 4a') \quad (3.120)$$

$$\text{et} \quad A^{2m} = 4.p'.a' \quad (3.121)$$

** F-1- Supposons que p' est premier, d'où $A^{2m} = 4ap' = (A^m)^2 \implies p'|a$. Or $B^n C^l = p'(b - 4a') \implies p'|B^n$ ou $p''|C^l$.

** F-1-1- Si $p'|B^n \implies p'|B \implies B = p'B_1$ with $B_1 \in \mathbb{N}^*$. Par suite : $p'^{n-1}B_1^n C^l = b - 4a'$. Or $n > 2$ alors $(n-1) > 1$ et $p'|a'$, d'où $p'|b \implies a$ et b non copremiers, d'où la contradiction.

** F-1-2- Si $p'|C^l \implies p'|C$. La même méthode utilisée ci-dessus, nous obtenons le même résultat.

** F-2- Nous considérons que p' n'est pas un nombre premier.

** F-2-1- p', a sont supposés copremiers : $A^{2m} = 4ap' \implies A^m = 2a'.p_1$ avec $a = a'^2$ et $p' = p_1^2$, donc a', p_1 sont aussi copremiers. Comme $A^m = 2a'.p_1$ alors $2|a'$ ou $2|p_1$.

** F-2-1-1- $2|a'$, alors $2|a' \implies 2 \nmid p_1$. Mais $p' = p_1^2$.

** F-2-1-1-1- Si p_1 est premier, c'est impossible avec $A^m = 2a'.p_1$.

** F-2-1-1-2- Supposons que p_1 est non premier, il s'écrit sous la forme $p_1 = \omega^m \implies p' = \omega^{2m}$. Par suite $B^n C^l = \omega^{2m}(b - 4a')$.

** F-2-1-1-2-1- Si ω est premier, il est différent de 2, alors $\omega|(B^n C^l) \implies \omega|B^n$ ou $\omega|C^l$.

** F-2-1-1-2-1-1- Si $\omega|B^n \implies \omega|B \implies B = \omega^j B_1$ avec $\omega \nmid B_1$, d'où $B_1^n C^l = \omega^{2m-nj}(b - 4a')$.

** F-2-1-1-2-1-1-1 Si $2m - n.j = 0$, nous obtenons $B_1^n C^l = b - 4a'$ Comme $C^l = A^m + B^n \implies \omega|C^l \implies \omega|C$, et $\omega|(b - 4a')$. Or $\omega \neq 2$ et ω est premier avec a' donc premier avec a , par suite $\omega \nmid b$. La conjecture (1.1) est vérifiée.

** F-2-1-1-2-1-1-2 Si $2m - n.j \geq 1$, là aussi, avec le même raisonnement, nous avons $\omega|C^l \implies \omega|C$ et $\omega|(b - 4a')$ et $\omega \nmid a$ et $\omega \nmid b$. La conjecture (1.1) est vérifiée.

** F-2-1-1-2-1-1-3 Si $2m - n.j < 0 \implies \omega^{n.j-2m} B_1^n C^l = b - 4a'$. Comme $\omega|C$ utilisant $C^l = A^m + B^n$ d'où $C = \omega^h C_1 \implies \omega^{n.j-2m+h.l} B_1^n C_1^l = b - 4a'$. Si $n.j - 2m + h.l < 0 \implies \omega|B_1^n C_1^l$ par suite la contradiction avec $\omega \nmid B_1$ ou $\omega \nmid C_1$. Donc si $n.j - 2m + h.l > 0$ et $\omega|(b - 4a')$ avec ω, a, b copremiers et la conjecture (1.1) est vérifiée.

** F-2-1-1-2-1-2- Nous obtenons les mêmes résultats si $\omega|C^l$.

** F-2-1-1-2-2- Maintenant, $p' = \omega^{2m}$ et ω non premier, nous écrivons $\omega = \omega_1^f \cdot \Omega$ avec ω_1 premier $\nmid \Omega$ et $f \geq 1$ un entier, et $\omega_1|A$. D'où $B^n C^l = \omega_1^{2f.m} \Omega^{2m}(b - 4a') \implies \omega_1|(B^n C^l) \implies \omega_1|B^n$ ou $\omega_1|C^l$.

** F-2-1-1-2-2-1- Si $\omega_1|B^n \implies \omega_1|B \implies B = \omega_1^j B_1$ avec $\omega_1 \nmid B_1$, d'où $B_1^n C^l = \omega_1^{2mf-nj} \Omega^{2m}(b - 4a')$:

** F-2-1-1-2-2-1-1- Si $2f.m - n.j = 0$, nous obtenons $B_1^n C^l = \Omega^{2m}(b - 4a')$. Comme $C^l = A^m + B^n \implies \omega_1|C^l \implies \omega_1|C$, et $\omega_1|(b - 4a')$. Or $\omega_1 \neq 2$ et ω_1 est premier

avec a' donc premier avec a , par suite $\omega_1 \nmid b$, donc $\omega_1 \nmid b$. La conjecture (1.1) est vérifiée.

** F-2-1-1-2-2-1-2 Si $2f.m - n.j \geq 1$, là aussi, avec le même raisonnement, nous avons $\omega_1 | C^l \implies \omega_1 | C$ et $\omega_1 | (b - 4a')$ et $\omega_1 \nmid a$ et $\omega_1 \nmid b$. La conjecture (1.1) est vérifiée.

** F-2-1-1-2-2-1-3 Si $2f.m - n.j < 0 \implies \omega_1^{n.j-2m.f} B_1^n . C^l = \Omega^{2m}(b - 4a')$. Comme $\omega_1 | C$ utilisant $C^l = A^m + B^n$ d'où $C = \omega_1^h . C_1 \implies \omega_1^{n.j-2m.f+h.l} B_1^n . C_1^l = \Omega^{2m}(b - 4a')$. Si $n.j - 2m.f + h.l < 0 \implies \omega_1 | B_1^n C_1^l$ par suite la contradiction avec $\omega_1 \nmid B_1$ et $\omega_1 \nmid C_1$. Donc si $n.j - 2m.f + h.l > 0$ et $\omega_1 | (b - 4a')$ avec ω_1, a, b copremiers et la conjecture (1.1) est vérifiée.

** F-2-1-1-2-2-2- Nous obtenons les mêmes résultats si $\omega_1 | C^l$.

** F-2-1-2- Si $2|p_1$: alors $2|p_1 \implies 2 \nmid a' \implies 2 \nmid a$. Or $p' = p_1^2$.

** F-2-1-2-1- Si p_1 est premier égal à 2, nous obtenons $A^m = 4a' \implies 2|a'$, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** F-2-1-2-2- Donc p_1 est non premier et $2|p_1$, Comme $A^m = 2a'p_1$, p_1 s'écrit sous la forme $p_1 = 2^{m-1}\omega^m \implies p' = 2^{2m-2}\omega^{2m}$. Par suite $B^n C^l = 2^{2m-2}\omega^{2m}(b - 4a') \implies 2|B^n$ ou $2|C^l$.

** F-2-1-2-2-1- Si $2|B^n \implies 2|B$, comme $2|A$, par suite $2|C$. De $B^n C^l = 2^{2m-2}\omega^{2m}(b - 4a')$ s'ensuit que si $2|(b - 4a') \implies 2|b$ mais comme $2 \nmid a$, il n'y aura pas de contradiction avec a, b copremiers et la conjecture (1.1) est vérifiée.

** F-2-1-2-2-2- Si $2|C^l$, de la même manière ci-dessus, nous obtenons les mêmes résultats.

** F-2-2- p', a sont supposés non copremiers : Soit ω un nombre premier tel que $\omega|a$ et $\omega|p'$.

** F-2-2-1- Supposons que $\omega = 3$. Comme $A^{2m} = 4ap' \implies 3|A$, or $3|p' \implies 3|p$, comme $p = A^{2m} + B^{2n} + A^m B^n \implies 3|B^{2n} \implies 3|B$, par suite $3|C^l \implies 3|C$. Nous écrivons $A = 3^i A_1$, $B = 3^j B_1$, $C = 3^h C_1$ avec 3 est copremier avec A_1, B_1 et C_1 et $p = 3^{2im} A_1^{2m} + 3^{2nj} B_1^{2n} + 3^{im+jn} A_1^m B_1^n = 3^k . g$ avec $k = \min(2im, 2jn, im + jn)$ et $3 \nmid g$. Nous avons aussi $(\omega = 3)|a$ et $(\omega = 3)|p'$ ce qui donne $a = 3^\alpha a_1 = 3a' \implies a' = 3^{\alpha-1} a_1$, $3 \nmid a_1$ et $p' = 3^\mu p_1$, $3 \nmid p_1$ avec $A^{2m} = 4a'p' = 3^{2im} A_1^{2m} = 4 \times 3^{\alpha-1+\mu} . a_1 . p_1 \implies \alpha + \mu - 1 = 2im$. Comme $p = bp' = b . 3^\mu p_1 = 3^\mu . b . p_1$. L'exposant du facteur 3 de p est k , l'exposant du facteur 3 du membre à gauche de l'équation précédente est μ . Si $3|b$ c'est la contradiction avec a, b copremiers. Donc, nous supposons que $3 \nmid b$, et nous avons l'égalité des exposants : $\min(2im, 2jn, im + jn) = \mu$ en rappelant que $\alpha + \mu - 1 = 2im$. Mais $B^n C^l = p'(b - 4a')$ ce qui donne $3^{(nj+hl)} B_1^n C_1^l = 3^\mu p_1 (b - 4 \times 3^{(\alpha-1)} a_1)$. Nous avons aussi $A^m + B^n = C^l$ donne $3^{im} A_1^m + 3^{jn} B_1^n = 3^{hl} C_1^l$. Posons $\epsilon = \min(im, jn)$, nous avons $\epsilon = hl =$

$\min(im, jn)$. Nous avons les conditions :

$$k = \min(2im, 2jn, im + jn) = \mu \quad (3.122)$$

$$\alpha + \mu - 1 = 2im \quad (3.123)$$

$$\epsilon = hl = \min(im, jn) \quad (3.124)$$

$$3^{(nj+hl)} B_1^n C_1^l = 3^\mu p_1 (b - 4 \times 3^{(\alpha-1)} a_1) \quad (3.125)$$

** F-2-2-1-1- $\alpha = 1 \implies a = 3a_1 = 3a'$ et $3 \nmid a_1$, l'équation (3.123) devient :

$$\mu = 2im \quad (3.126)$$

et la première équation (3.122) s'écrit :

$$k = \min(2im, 2jn, im + jn) = 2im \quad (3.127)$$

- Si $k = 2im$, par suite $2im \leq 2jn \leq im \leq jn \implies hl = im$, et $\mu = 2im = nj + hl = im + nj \implies im = jn = hl$. Par suite $3|A, 3|B$ et $3|C$ et la conjecture (1.1) est vérifiée.

- Si $k = 2jn \implies 2jn = 2im - 1$ c'est impossible, un nombre pair ne peut être impair.

- Si $k = im + jn \leq 2im \implies jn \leq im$ et $k = im + jn \leq 2jn \implies im \leq jn \implies im = jn \implies k = 2im = 2jn$ qui a donné des contradictions.

Il s'ensuit que le cas $\alpha = 1$ est impossible.

** F-2-2-1-2- $\alpha > 1 \implies \alpha \geq 2$ et $a' = 3^{\alpha-1} a_1$.

- Si $k = 2im \implies 2im = \mu$, or $\mu = 2im - \alpha$ ce qui impossible.

- Si $k = 2jn = \mu \implies 2jn = 2im - \alpha$. Nous obtenons $2jn < 2im \implies jn < im \implies 2jn < im + jn$, $k = 2jn$ est bien le minimum de $(2im, 2jn, im + jn)$. Nous obtenons $jn = hl < im$ et l'équation (3.125) devient :

$$B_1^n C_1^l = p_1 (b - 4 \times 3^{(\alpha-1)} a_1) \quad (3.128)$$

La conjecture (1.1) est vérifiée.

- Si $k = im + jn \leq 2im \implies jn \leq im$ et $k = im + jn \leq 2jn \implies im \leq jn \implies im = jn \implies k = 2im$ ou $k = 2jn$ cas déjà étudiés ci-dessus.

** F-2-2-2- Nous supposons que $\omega \neq 3$. Nous écrivons $a = \omega^\alpha a_1$ avec $\omega \nmid a_1$ et $p' = \omega^\mu p_1$ avec $\omega \nmid p_1$. Comme $A^{2m} = 4ap' = 4\omega^{\alpha+\mu} a_1 p_1 \implies \omega|A \implies A = \omega^i A_1$, $\omega \nmid A_1$. Or $B^n C^l = p'(b - 4a') = \omega^\mu p_1 (b - 4a') \implies \omega|B^n C^l \implies \omega|B^n$ ou $\omega|C^l$.

** F-2-2-2-1- $\omega|B^n \implies \omega|B \implies B = \omega^j B_1$ et $\omega \nmid B_1$. De $A^m + B^n = C^l \implies \omega|C^l \implies \omega|C$. Comme $p = bp' = \omega^\mu bp_1 = \omega^k (\omega^{2im-k} A_1^{2m} + \omega^{2jn-k} B_1^{2n} + \omega^{im+jn-k} A_1^m B_1^n)$ avec $k = \min(2im, 2jn, im + jn)$. Par suite :

- Si $\mu = k$, alors $\omega \nmid b$ et la conjecture (1.1) est vraie.

- Si $k > \mu$, alors $\omega|b$, or $\omega|a$ d'où la contradiction avec a, b copremiers.

- Si $k < \mu$, il s'ensuit de :

$$\omega^\mu bp_1 = \omega^k (\omega^{2im-k} A_1^{2m} + \omega^{2jn-k} B_1^{2n} + \omega^{im+jn-k} A_1^m B_1^n)$$

que $\omega|A_1$ ou $\omega|B_1$ ce qui en contradiction avec les hypothèses.

** F-2-2-2-2- Si $\omega|C^l \implies \omega|C \implies C = \omega^h C_1$ avec $\omega \nmid C_1$. De $A^m + B^n = C^l \implies \omega|(C^l - A^m) \implies \omega|B$. Par suite, nous obtenons les mêmes résultats de F-2-2-2-1- ci-dessus.

3.2.2.5. Cas $b = 2p$ et $3|a$: nous avons :

$$\cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{a}{b} = \frac{3a'}{2p} \implies A^{2m} = \frac{4p \cdot a}{3b} = \frac{4p}{3} \cdot \frac{3a'}{2p} = 2a' = (A^m)^2 \implies 2|a' \implies 2|a$$

Alors $2|a$ et $2|b$ ce qui est en contradiction avec a, b copremiers.

3.2.2.6. Cas $b = 4p$ et $3|a$: nous avons :

$$\cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{a}{b} = \frac{3a'}{4p} \implies A^{2m} = \frac{4p \cdot a}{3b} = \frac{4p}{3} \cdot \frac{3a'}{4p} = a'$$

Calculons $A^m B^n$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} A^m B^n &= \frac{p\sqrt{3}}{3} \cdot \sin \frac{2\theta}{3} - \frac{2p}{3} \cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{p\sqrt{3}}{3} \cdot \sin \frac{2\theta}{3} - \frac{a'}{2} \implies \\ A^m B^n + \frac{A^{2m}}{2} &= \frac{p\sqrt{3}}{3} \cdot \sin \frac{2\theta}{3} \end{aligned} \quad (3.129)$$

soit :

$$A^{2m} + 2A^m B^n = \frac{2p\sqrt{3}}{3} \sin \frac{2\theta}{3} \quad (3.130)$$

Le membre à gauche de (3.130) est un entier et p est un entier, alors $\frac{2\sqrt{3}}{3} \sin \frac{2\theta}{3}$ sera écrit :

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} \sin \frac{2\theta}{3} = \frac{k_1}{k_2} \quad (3.131)$$

où k_1, k_2 sont deux entiers copremiers et $k_2|p \implies p = k_2 \cdot k_3$.

** G-1- Premièrement, nous supposons que $k_3 \neq 1$. D'où :

$$A^{2m} + 2A^m B^n = k_3 \cdot k_1 \quad (3.132)$$

Soit μ un entier premier et $\mu|k_3$, alors $\mu|A^m(A^m + 2B^n) \implies \mu|A^m$ ou $\mu|(A^m + 2B^n)$.

** G-1-1- Si $\mu|A^m \implies \mu|A$. Comme $\mu|k_3 \implies \mu|p$ et que $p = A^{2m} + B^{2n} + A^m B^n \implies \mu|B^{2n}$, alors $\mu|B$, il s'ensuit $\mu|C^l$, par suite la conjecture (1.1) est vraie.

** G-1-2- Si $\mu|(A^m + 2B^n) \implies \mu \nmid A^m$ et $\mu \nmid 2B^n$ alors :

$$\mu \neq 2 \quad \text{et} \quad \mu \nmid B^n \quad (3.133)$$

$\mu|(A^m + 2B^n)$, nous écrivons :

$$A^m + 2B^n = \mu \cdot t' \quad (3.134)$$

Alors :

$$\begin{aligned} A^m + B^n &= \mu t' - B^n \implies A^{2m} + B^{2n} + 2A^m B^n = \mu^2 t'^2 - 2t' \mu B^n + B^{2n} \\ \implies p &= t'^2 \mu^2 - 2t' B^n \mu + B^n (B^n - A^m) \end{aligned} \quad (3.135)$$

Comme $b = 4p = 4k_2.k_3$ et $\mu|k_3$ alors $\mu|b \implies \exists \mu'$ tel que $b = \mu.\mu'$, nous obtenons :

$$\mu'.\mu = \mu(4\mu t'^2 - 8t'B^n) + 4B^n(B^n - A^m) \quad (3.136)$$

La dernière équation implique $\mu|4B^n(B^n - A^m)$, mais $\mu \neq 2$ alors $\mu|B^n$ ou $\mu|(B^n - A^m)$.

** G-1-1-1- Si $\mu|B^n \implies$ c'est la contradiction avec (3.133).

** G-1-1-2- Si $\mu|(B^n - A^m)$ et en utilisant $\mu|(A^m + 2B^n)$, nous avons :

$$\mu|3B^n \implies \begin{cases} \mu|B^n \\ \text{ou} \\ \mu = 3 \end{cases} \quad (3.137)$$

** G-1-1-2-1- Si $\mu|B^n$ c'est contradictoire avec 3.133.

** G-1-1-2-2- Si $\mu = 3$, alors $3|b$, mais $3|a$ ce qui en contradiction avec a, b copremiers.

** G-2- Nous assumons maintenant que $k_3 = 1$, d'où :

$$A^{2m} + 2A^m B^n = k_1 \quad (3.138)$$

$$p = k_2 \quad (3.139)$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} \sin \frac{2\theta}{3} = \frac{k_1}{p} \quad (3.140)$$

Prenons le carré de la dernière équation, nous obtenons :

$$\frac{4}{3} \sin^2 \frac{2\theta}{3} = \frac{k_1^2}{p^2}$$

$$\frac{16}{3} \sin^2 \frac{\theta}{3} \cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{k_1^2}{p^2}$$

$$\frac{16}{3} \sin^2 \frac{\theta}{3} \cdot \frac{3a'}{b} = \frac{k_1^2}{p^2}$$

Finalement :

$$a'(4p - 3a') = k_1^2 \quad (3.141)$$

mais $a' = a'^2$ alors $4p - 3a'$ est un carré. Soit :

$$\lambda^2 = 4p - 3a' = 4p - a = b - a \quad (3.142)$$

L'équation (3.141) devient :

$$a'^2 \lambda^2 = k_1^2 \implies k_1 = a'' \lambda \quad (3.143)$$

en prenant la racine carrée positive. Utilisant (3.138), nous obtenons :

$$k_1 = a'' \lambda \quad (3.144)$$

mais $k_1 = A^m(A^m + 2B^n) = a''(A^m + 2B^n)$, par suite :

$$(A^m + 2B^n) = \lambda \quad (3.145)$$

** G-2-1- Supposons $\lambda_1 = 2$ un diviseur de λ . Soit $2|\lambda \implies 2|(\lambda^2 = b - a)$. Comme $2|(b = 4p) \implies 2|a$ ce qui en contradiction avec a, b copremiers.

** G-2-2- Supposons λ_1 un entier premier $\neq 2$ un diviseur de λ , et :

$$\lambda_1|\lambda \implies \lambda_1|(A^m + 2B^n) \quad (3.146)$$

$$\implies \lambda_1 \nmid A^m \quad \text{si non} \quad \lambda_1|2B^n \quad (3.147)$$

mais $\lambda_1 \neq 2$ d'où $\lambda_1|B^n \implies \lambda_1|B$, par suite :

$$\lambda_1|(b = 4p) \quad \text{et} \quad \lambda_1|A^m \implies \lambda_1|2a'' \implies \lambda_1|a \quad (3.148)$$

d'où la contradiction avec a, b copremiers. Nous assumons maintenant que $\lambda_1 \nmid A^m$. $\lambda_1|(A^m + 2B^n) \implies \lambda_1|(A^m + 2B^n)^2$ c'est-à-dire $\lambda_1|(A^{2m} + 4A^mB^n + 4B^{2n})$, nous écrivons cela comme $\lambda_1|(p + 3A^mB^n + 3B^{2n}) \implies \lambda_1|(p + 3B^n(A^m + 2B^n) - 3B^{2n})$. Mais $\lambda_1|(A^m + 2B^n) \implies \lambda_1|(p - 3B^{2n})$, comme $\lambda_1|(4p - a)$ d'où par différence, nous obtenons $\lambda_1|(a - 3(B^{2n} + p))$ ou $\lambda_1|(3a' - 3(B^{2n} + p)) \implies \lambda_1|3(a' - B^{2n} - p) \implies \lambda_1 = 3$ ou $\lambda_1|(a' - (B^{2n} + p))$.

** G-2-2-1- Si $\lambda_1 = 3|\lambda \implies 3|\lambda^2 \implies 3|(b - a)$ mais $3|a \implies 3|b$ par suite la contradiction avec a, b copremiers.

** G-2-2-2- Si $\lambda_1 \neq 3$ et $\lambda_1|(a' - B^{2n} - p) \implies \lambda_1|(A^mB^n + B^{2n}) \implies \lambda_1|B^n(A^m + 2B^n) \implies \lambda_1|B^n$ ou $\lambda_1|(A^m + 2B^n)$.

** G-2-2-2-1- Si $\lambda_1|B^n$. Ce cas a été étudié ci-dessus.

** G-2-2-2-2- Si $\lambda_1|(A^m + 2B^n)$, nous retrouvons la condition (3.146).

Alors le cas $k_3 = 1$ est impossible.

3.2.2.7. Cas $3|a$ et $b = 2p'$ $b \neq 2$ avec $p'|p$: $3|a \implies a = 3a'$, $b = 2p'$ avec $p = k.p'$, d'où :

$$A^{2m} = \frac{4.p}{3} \cdot \frac{a}{b} = \frac{4.k.p'.3.a'}{6p'} = 2.k.a' \quad (3.149)$$

Calculons $B^n C^l$:

$$B^n C^l = \sqrt[3]{\rho^2} \left(3 \sin^2 \frac{\theta}{3} - \cos^2 \frac{\theta}{3} \right) = \sqrt[3]{\rho^2} \left(3 - 4 \cos^2 \frac{\theta}{3} \right) \quad (3.150)$$

mais $\sqrt[3]{\rho^2} = \frac{p}{3}$ d'où en utilisant $\cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{3.a'}{b}$:

$$B^n C^l = \sqrt[3]{\rho^2} \left(3 - 4 \cos^2 \frac{\theta}{3} \right) = \frac{p}{3} \left(3 - 4 \frac{3.a'}{b} \right) = p \cdot \left(1 - \frac{4.a'}{b} \right) = k(p' - 2a') \quad (3.151)$$

Comme $p = b.p'$, et $p' > 1$, nous avons alors :

$$B^n C^l = k(p' - 2a') \quad (3.152)$$

$$\text{et } A^{2m} = 2k.a' \quad (3.153)$$

** H-1- Nous supposons que k est premier.

** H-1-1- Si $k = 2$, nous avons donc $p = 2p' = b$, nous retrouvons le cas **3.2.3.3**.

** H-1-2- Nous supposons $k \neq 2$. De $A^{2m} = 2k.a' = (A^m)^2 \implies k|a'$ et $2|a'$, d'où $a' = 2.k.a''^2 \implies A^m = 2.k.a''$. Par suite $k|A^m \implies k|A \implies A = k^i.A_1$ avec $i \geq 1$ et $k \nmid A_1$. $k^{im}A_1^m = 2ka'' \implies 2a'' = k^{im-1}A_1^m$. De $B^n C^l = k(p' - 2a') \implies k|(B^n C^l) \implies k|B^n$ ou $k|C^l$.

** H-1-2-1- Supposons que $k|B^n \implies k|B \implies B = k^j.B_1$ avec $j \geq 1$ et $k \nmid B_1$. Par suite $k^{nj-1}B_1^n C^l = p' - 2a' = p' - 4ka''^2$. Comme $n \geq 3 \implies nj - 1 \geq 2$, d'où $k|p'$ mais $k \neq 2 \implies k|(2p' = b)$, or $k|a' \implies k|(3a' = a)$. Il s'ensuit la contradiction avec a, b copremiers.

** H-1-2-2- Si $k|C^l$ Nous obtenons le même résultat.

** H-2- Nous supposons k est non premier. Soit ω un nombre premier tel que $k = \omega^s.k_1$, avec $s \geq 1$, $\omega \nmid k_1$. Les équations (3.152-3.153) deviennent :

$$B^n C^l = \omega^s.k_1(p' - 2a') \quad (3.154)$$

$$\text{et } A^{2m} = 2\omega^s.k_1.a' \quad (3.155)$$

** H-2-1- Supposons que $\omega = 2$, nous avons alors les équations :

$$A^{2m} = 2^{s+1}.k_1.a' \quad (3.156)$$

$$B^n C^l = 2^s.k_1(p' - 2a') \quad (3.157)$$

** H-2-1-1- Cas : $2|a' \implies 2|a$, mais $2|b$, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** H-2-1-2- Cas : $2 \nmid a'$. Comme $2 \nmid k_1$, l'équation (3.156) donne $2|A^{2m} \implies A = 2^i.A_1$, avec $i \geq 1$ et $2 \nmid A_1$. Nous déduisons que $2im = s + 1$.

** H-2-1-2-1- Nous supposons que $2 \nmid (p' - 2a') \implies 2 \nmid p'$. De l'équation (3.157), nous obtenons que $2|B^n C^l \implies 2|B^n$ ou $2|C^l$:

** H-2-1-2-1-1- Nous supposons que $2|B^n \implies 2|B \implies B = 2^j.B_1$ avec $2 \nmid B_1$ et $j \geq 1$, par suite $B_1^n C^l = 2^{s-jn}k_1(p' - 2a')$:

- Si $s - jn \geq 1$, alors $2|C^l \implies 2|C$, pas de contradiction avec $C^l = 2^{im}A_1^m + 2^{jn}B_1^n$, et la conjecture (1.1) est vérifiée.

- Si $s - jn \leq 0$, de $B_1^n C^l = 2^{s-jn}k_1(p' - 2a') \implies 2 \nmid C^l$, d'où la contradiction avec $C^l = 2^{im}A_1^m + 2^{jn}B_1^n \implies 2|C^l$.

** H-2-1-2-1-2- Nous obtenons les mêmes résultats si $2|C^l$.

** H-2-1-2-2- Nous supposons maintenant que $2|(p' - 2a') \implies p' - 2a' = 2^\mu . \Omega$, avec $\mu \geq 1$ et $2 \nmid \Omega$. Nous rappelons que $2 \nmid a'$. L'équation (3.157) s'écrit :

$$B^n C^l = 2^{s+\mu} . k_1 . \Omega \quad (3.158)$$

Cette dernière équation implique que $2|(B^n C^l) \implies 2|B^n$ ou $2|C^l$.

** H-2-1-2-2-1- Supposons que $2|B^n \implies 2|B \implies B = 2^j B_1$ avec $j \geq 1$ et $2 \nmid B_1$. Par suite : $B_1^n C^l = 2^{s+\mu-jn} . k_1 . \Omega$:

- Si $s + \mu - jn \geq 1$, alors $2|C^l \implies 2|C$, pas de contradiction avec $C^l = 2^{im} A_1^m + 2^{jn} B_1^n$, et la conjecture (1.1) est vérifiée.

- Si $s + \mu - jn \leq 0$, de $B_1^n C^l = 2^{s+\mu-jn} k_1 . \Omega \implies 2 \nmid C^l$, d'où la contradiction avec $C^l = 2^{im} A_1^m + 2^{jn} B_1^n \implies 2|C^l$.

** H-2-1-2-2-2- Nous obtenons les mêmes résultats si $2|C^l$.

** H-2-2- Nous supposons que $\omega \neq 2$. Nous avons alors les équations :

$$A^{2m} = 2\omega^s . k_1 . a' \quad (3.159)$$

$$B^n C^l = \omega^s . k_1 . (p' - 2a') \quad (3.160)$$

Comme $\omega \neq 2$, de l'équation (3.159), nous avons $2|(k_1 . a')$. Si $2|a' \implies 2|a$, mais $2|b$ par suite la contradiction avec a, b copremiers.

** H-2-2-1- $2 \nmid a'$ et $2|k_1 \implies k_1 = 2^\mu . \Omega$ avec $\mu \geq 1$ et $2 \nmid \Omega$. De l'équation (3.159), nous avons $2|A^{2m} \implies 2|A \implies A = 2^i A_1$ avec $i \geq 1$ et $2 \nmid A_1$, par suite $2im = 1 + \mu$. L'équation (3.160) devient :

$$B^n C^l = \omega^s . 2^\mu . \Omega . (p' - 2a') \quad (3.161)$$

De l'équation (3.161), nous obtenons $2|(B^n C^l) \implies 2|B^n$ ou $2|C^l$.

** H-2-2-1-1- Supposons $2|B^n \implies 2|B \implies B = 2^j B_1$, avec $j \in \mathbb{N}^*$ et $2 \nmid B_1$.

** H-2-2-1-1-1- Nous supposons que $2 \nmid (p' - 2a')$, alors nous avons $B_1^n C^l = \omega^s 2^{\mu-jn} \Omega (p' - 2a')$:

- Si $\mu - jn \geq 1 \implies 2|C^l \implies 2|C$, pas de contradiction avec $C^l = 2^{im} A_1^m + 2^{jn} B_1^n$ et la conjecture (1.1) est vérifiée.

- Si $\mu - jn \leq 0 \implies 2 \nmid C^l$ d'où la contradiction avec $C^l = 2^{im} A_1^m + 2^{jn} B_1^n$.

** H-2-2-1-1-2- Nous supposons que $2|(p' - 2a') \implies p' - 2a' = 2^\alpha . P$, avec $\alpha \in \mathbb{N}^*$ et $2 \nmid P$. Il s'ensuit que $B_1^n C^l = \omega^s 2^{\mu+\alpha-jn} \Omega . P$:

- Si $\mu + \alpha - jn \geq 1 \implies 2|C^l \implies 2|C$, pas de contradiction avec $C^l = 2^{im} A_1^m + 2^{jn} B_1^n$ et la conjecture (1.1) est vérifiée.

- Si $\mu + \alpha - jn \leq 0 \implies 2 \nmid C^l$ d'où la contradiction avec $C^l = 2^{im} A_1^m + 2^{jn} B_1^n$.

** H-2-2-1-2- Nous supposons maintenant que $2|C^n \implies 2|C$. En utilisant la même méthode décrite ci-dessus, nous obtenons les mêmes résultats.

3.2.2.8. Cas $3|a$ et $b = 4p' b \neq 2$ avec $p'|p$: $3|a \implies a = 3a'$, $b = 4p'$ avec $p = k.p'$, $k \neq 1$ si non $b = 4p$ ce cas a été étudié (voir paragraphe **3.2.2.6**), alors nous avons :

$$A^{2m} = \frac{4.p}{3} \cdot \frac{a}{b} = \frac{4.k.p'.3.a'}{12p'} = k.a' \quad (3.162)$$

Calculons $B^n C^l$:

$$B^n C^l = \sqrt[3]{\rho^2} \left(3 \sin^2 \frac{\theta}{3} - \cos^2 \frac{\theta}{3} \right) = \sqrt[3]{\rho^2} \left(3 - 4 \cos^2 \frac{\theta}{3} \right) \quad (3.163)$$

mais $\sqrt[3]{\rho^2} = \frac{p}{3}$, d'où en utilisant $\cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{3.a'}{b}$:

$$B^n C^l = \sqrt[3]{\rho^2} \left(3 - 4 \cos^2 \frac{\theta}{3} \right) = \frac{p}{3} \left(3 - 4 \frac{3.a'}{b} \right) = p \cdot \left(1 - \frac{4.a'}{b} \right) = k(p' - a') \quad (3.164)$$

Comme $p = b.p'$, et $p' > 1$, nous avons :

$$B^n C^l = k(p' - a') \quad (3.165)$$

$$\text{et } A^{2m} = k.a' \quad (3.166)$$

** I-1- Nous supposons que k est premier. De $A^{2m} = k.a' = (A^m)^2 \implies k|a'$ et $a' = k.a''^2 \implies A^m = k.a''$. Par suite $k|A^m \implies k|A \implies A = k^i.A_1$ avec $i \geq 1$ et $k \nmid A_1$. $k^{mi} A_1^m = k.a'' \implies a'' = k^{mi-1} A_1^m$. De $B^n C^l = k(p' - a') \implies k|(B^n C^l) \implies k|B^n$ ou $k|C^l$.

** I-1-1- Supposons que $k|B^n \implies k|B \implies B = k^j.B_1$ avec $j \geq 1$ et $k \nmid B_1$. Par suite $k^{n.j-1} B_1^n C^l = p' - a'$. Comme $n.j - 1 \geq 2 \implies k|(p' - a')$. Or $k|a' \implies k|a$, d'où $k|p' \implies k|(4p' = b)$ et on arrive à la contradiction que a, b sont copremiers.

** I-1-2- Supposons que $k|C^l$, nous obtenons le même résultat que si $k|B^n$.

** I-2- Nous supposons k est non premier.

** I-2-1- Supposons que $k = 4 \implies p = 4p' = b$, c'est le cas **3.2.2.3**. déjà étudié ci-dessus.

** I-2-2- Nous supposons que $k \geq 6$ non premier. Soit ω un nombre premier tel que $k = \omega^s.k_1$, avec $s \geq 1$, $\omega \nmid k_1$. Les équations (3.165-3.166) deviennent :

$$B^n C^l = \omega^s.k_1(p' - a') \quad (3.167)$$

$$\text{et } A^{2m} = \omega^s.k_1.a' \quad (3.168)$$

** I-2-2-1- Nous supposons que $\omega = 2$.

** I-2-2-1-1- Si $2|a' \implies 2|(3a' = a)$, mais $2|(4p' = b)$, par suite la contradiction avec a, b copremiers.

** I-2-2-1-2- Nous avons $2 \nmid a'$. De l'équation (3.168), il s'ensuit que $2|A^{2m} \implies 2|A \implies A = 2^i A_1$ avec $2 \nmid A_1$ et :

$$B^n C^l = 2^s k_1(p' - a')$$

** I-2-2-1-2-1- Supposons que $2 \nmid (p' - a')$, de l'expression ci-dessus, nous avons $2 \mid (B^n C^l) \implies 2 \mid B^n$ ou $2 \mid C^l$.

** I-2-2-1-2-1-1- Si $2 \mid B^n \implies 2 \mid B \implies B = 2^j B_1$ avec $2 \nmid B_1$. Par suite $B_1^n C^l = 2^{2im-jn} k_1 (p' - a')$:

- Si $2im - jn \geq 1 \implies 2 \mid C^l \implies 2 \mid C$, il n'a pas de contradiction avec $C^l = 2^{im} A_1^m + 2^{jn} B_1^n$ et la conjecture (1.1) est vérifiée.

- Si $2im - jn \leq 0 \implies 2 \nmid C^l$, d'où la contradiction avec $C^l = 2^{im} A_1^m + 2^{jn} B_1^n \implies 2 \mid C^l$.

** I-2-2-1-2-1-2- Si $2 \mid C^l \implies 2 \mid C$, en utilisant la même méthode décrite ci-dessus, nous obtenons les mêmes résultats.

** I-2-2-1-2-2- Supposons que $2 \mid (p' - a')$. Comme $2 \nmid a' \implies 2 \nmid p'$. $2 \mid (p' - a') \implies p' - a' = 2^\alpha . P$ avec $\alpha \geq 1$ et $2 \nmid P$. L'équation (3.167) s'écrit :

$$B^n C^l = 2^{s+\alpha} k_1 . P = 2^{2im+\alpha} k_1 . P \quad (3.169)$$

d'où $2 \mid (B^n C^l) \implies 2 \mid B^n$ ou $2 \mid C^l$.

** I-2-2-1-2-2-1- Nous supposons que $2 \mid B^n \implies 2 \mid B \implies B = 2^j B_1$, avec $2 \nmid B_1$. L'équation (3.169) s'écrit $B_1^n C^l = 2^{2im+\alpha-jn} k_1 P$:

- Si $2im + \alpha - jn \geq 1 \implies 2 \mid C^l \implies 2 \mid C$, il n'a pas de contradiction avec $C^l = 2^{im} A_1^m + 2^{jn} B_1^n$ et la conjecture (1.1) est vérifiée.

- Si $2im + \alpha - jn \leq 0 \implies 2 \nmid C^l$, d'où la contradiction avec $C^l = 2^{im} A_1^m + 2^{jn} B_1^n \implies 2 \mid C^l$.

** I-2-2-1-2-2-2- Nous supposons que $2 \mid C^l \implies 2 \mid C$. Utilisant la même méthode décrite ci-dessus, nous obtenons les mêmes résultats.

** I-2-2-2- Nous supposons que $\omega \neq 2$. Rappelons les équations :

$$A^{2m} = \omega^s . k_1 . a' \quad (3.170)$$

$$B^n C^l = \omega^s . k_1 (p' - a') \quad (3.171)$$

** I-2-2-2-1- Nous supposons que ω, a' sont copremiers, donc $\omega \nmid a'$. De l'équation (3.170), nous avons $\omega \mid A^{2m} \implies \omega \mid A \implies A = \omega^i A_1$ avec $\omega \nmid A_1$ et $s = 2im$.

** I-2-2-2-1-1- Supposons que $\omega \nmid (p' - a')$. De l'équation (3.171) ci-dessus, nous avons $\omega \mid (B^n C^l) \implies \omega \mid B^n$ ou $\omega \mid C^l$.

** I-2-2-2-1-1-1- Si $\omega \mid B^n \implies \omega \mid B \implies B = \omega^j B_1$ avec $\omega \nmid B_1$. Par suite $B_1^n C^l = 2^{2im-jn} k_1 (p' - a')$:

- Si $2im - jn \geq 1 \implies \omega \mid C^l \implies \omega \mid C$, il n'a pas de contradiction avec $C^l = \omega^{im} A_1^m + \omega^{jn} B_1^n$ et la conjecture (1.1) est vérifiée.

- Si $2im - jn \leq 0 \implies \omega \nmid C^l$, d'où la contradiction avec $C^l = \omega^{im} A_1^m + \omega^{jn} B_1^n \implies \omega \mid C^l$.

** I-2-2-2-1-1-2- Si $\omega \mid C^l \implies \omega \mid C$, en utilisant la même méthode décrite ci-dessus, nous obtenons les mêmes résultats.

** I-2-2-2-1-2- Supposons que $\omega|(p' - a') \implies \omega \nmid p'$ sinon $\omega|a'$. $\omega|(p' - a') \implies p' - a' = \omega^\alpha.P$ avec $\alpha \geq 1$ et $\omega \nmid P$. L'équation (3.171) s'écrit :

$$B^n C^l = \omega^{s+\alpha} k_1.P = \omega^{2im+\alpha} k_1.P \quad (3.172)$$

d'où $\omega|(B^n C^l) \implies \omega|B^n$ ou $\omega|C^l$.

** I-2-2-2-1-2-1- Nous supposons que $\omega|B^n \implies \omega|B \implies B = \omega^j B_1$, avec $\omega \nmid B_1$. L'équation (3.172) s'écrit $B_1^n C^l = 2^{2im+\alpha-jn} k_1 P$:

- Si $2im + \alpha - jn \geq 1 \implies \omega|C^l \implies \omega|C$, il n'a pas de contradiction avec $C^l = \omega^{im} A_1^m + \omega^{jn} B_1^n$ et la conjecture (1.1) est vérifiée.

- Si $2im + \alpha - jn \leq 0 \implies \omega \nmid C^l$, d'où la contradiction avec $C^l = \omega^{im} A_1^m + \omega^{jn} B_1^n \implies \omega|C^l$.

** I-2-2-2-1-2-2- Nous supposons que $\omega|C^l \implies \omega|C$. Utilisant la même méthode décrite ci-dessus, nous obtenons les mêmes résultats.

** I-2-2-2-2- Nous supposons que ω, a' ne sont pas copremiers, donc $a' = \omega^\beta .a''$ avec $\omega \nmid a''$. L'équation (3.170) devient :

$$A^{2m} = \omega^s k_1 a' = \omega^{s+\beta} k_1 .a'' \quad (3.173)$$

Nous avons $\omega|A^{2m} \implies \omega|A \implies A = \omega^i A_1$ avec $\omega \nmid A_1$ et $s + \beta = 2im$.

** I-2-2-2-2-1- Supposons que $\omega \nmid (p' - a') \implies \omega \nmid p' \implies \omega \nmid (b = 4p')$. De l'équation (3.171), nous avons $\omega|(B^n C^l) \implies \omega|B^n$ ou $\omega|C^l$.

** I-2-2-2-2-1-1- Si $\omega|B^n \implies \omega|B \implies B = \omega^j B_1$ avec $\omega \nmid B_1$. Par suite $B_1^n C^l = 2^{s-jn} k_1 (p' - a')$:

- Si $s - jn \geq 1 \implies \omega|C^l \implies \omega|C$, il n'a pas de contradiction avec $C^l = \omega^{im} A_1^m + \omega^{jn} B_1^n$ et la conjecture (1.1) est vérifiée.

- Si $s - jn \leq 0 \implies \omega \nmid C^l$, d'où la contradiction avec $C^l = \omega^{im} A_1^m + \omega^{jn} B_1^n \implies \omega|C^l$.

** I-2-2-2-2-1-2- Si $\omega|C^l \implies \omega|C$, en utilisant la même méthode décrite ci-dessus, nous obtenons les mêmes résultats.

** I-2-2-2-2-2- Supposons que $\omega|(p' - a' = p' - \omega^\beta .a'') \implies \omega|p' \implies \omega|(4p' = b)$, mais $\omega|a' \implies \omega|a$. D'où la contradiction avec a, b copremiers.

L'étude des cas du **3.2.2.9.** est achevée.

3.2.2.9. Cas $3|a$ et $b|4p$: $a = 3a'$ et $4p = k_1 b$. Comme $A^{2m} = \frac{4p}{3} \cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{4p}{3} \frac{3a'}{b} = k_1 a'$ et $B^n C^l$:

$$B^n C^l = \sqrt[3]{\rho^2} \left(3 \sin^2 \frac{\theta}{3} - \cos^2 \frac{\theta}{3} \right) = \frac{p}{3} \left(3 - 4 \cos^2 \frac{\theta}{3} \right) = \frac{p}{3} \left(3 - 4 \frac{3a'}{b} \right) = \frac{k_1}{4} (b - 4a') \quad (3.174)$$

Comme $B^n C^l$ est un entier, on doit avoir $4|k_1$, ou $4|(b - 4a')$ ou $(2|k_1$ et $2|(b - 4a'))$.

** J-1- Si $k_1 = 1 \Rightarrow b = 4p$: c'est le cas **3.2.2.6**.

** J-2- Si $k_1 = 4 \Rightarrow p = b$: c'est le cas **3.2.2.3**.

** J-3- Si $k_1 = 2$ et $2|(b - 4a')$: Dans ce cas, nous avons $A^{2m} = 2a' \Rightarrow 2|a' \Rightarrow 2|a$. $2|(b - 4a') \Rightarrow 2|b$ d'où la contradiction avec a, b copremiers. Donc ce cas est impossible.

** J-4- Si $2|k_1$ et $2|(b - 4a')$: $2|(b - 4a') \Rightarrow 2|b \Rightarrow b = 2b'$ et $2|k_1 \Rightarrow k_1 = 2k'_1$ avec $k'_1 > 2$ et nous avons $A^{2m} = 2k'_1 a'$, $B^n C^l = k'_1(b' - 2a')$:

** J-4-1- Si k'_1 est premier > 2 , alors $A^{2m} = 2k'_1 a' \Rightarrow 2|a' \Rightarrow 2|a$, or $2|b$ d'où la contradiction avec a, b copremiers, ce cas est impossible.

** J-4-2- Si k'_1 est non premier. De $A^{2m} = 2k'_1 a' \Rightarrow 2|(k'_1 \cdot a')$. Si $2|a' \Rightarrow 2|a$ d'où la contradiction avec a, b copremiers, ce cas est impossible. Nous supposons que $2|k'_1$ et $2 \nmid a'$, de $B^n C^l = k'_1(b' - 2a') \Rightarrow 2|(B^n C^l) \Rightarrow 2|B^n$ ou $2|C^l$.

** J-4-2-1- Supposons que $2|B^n \Rightarrow 2|B$, comme $2|A$ par suite $2|C^l \Rightarrow 2|C$. Alors la conjecture (1.1) est vérifiée.

** J-4-2-2- De même, si $2|C^l$, nous arrivons à $2|B^n \Rightarrow 2|B$ et nous obtenons que la conjecture (1.1) est vérifiée.

** J-5- Nous supposons que $4|k_1$ avec $k_1 > 4 \Rightarrow k_1 = 4k'_2$, on a donc :

$$A^{2m} = 4k'_2 a' \quad (3.175)$$

$$B^n C^l = k'_2(b - 4a') \quad (3.176)$$

** J-5-1- Nous supposons k'_2 est premier, de (3.175), nous avons $k'_2|a'$. De (3.176), $k'_2|(B^n C^l) \Rightarrow k'_2|B^n$ ou $k'_2|C^l$.

** J-5-1-1- Supposons $k'_2|B^n \Rightarrow k'_2|B \Rightarrow B = k'_2{}^\beta \cdot B_1$ avec $\beta \geq 1$ et $k'_2 \nmid B_1$. Par suite, nous avons $k'_2{}^{n\beta-1} B_1^n = b - 4a' \Rightarrow k'_2|b$ d'où la contradiction avec a, b copremiers. Donc ce cas est impossible.

** J-5-1-2- Même résultat si nous supposons que $k'_2|C^l$.

** J-5-2- Nous supposons que k'_2 est non premier.

** J-5-2-1- Nous supposons que k'_2 et a' sont copremiers. De (3.175), k'_2 s'écrit sous la forme $k'_2 = q_1^{2j} \cdot q_2^2$ et $q_1 \nmid q_2$ et q_1 premier. $B^n C^l = q_1^{2j} \cdot q_2^2(b - 4a') \Rightarrow q_1|B^n$ ou $q_1|C^l$.

** J-5-2-1-1- Supposons que $q_1|B^n \Rightarrow q_1|B \Rightarrow B = q_1^f \cdot B_1$ avec $q_1 \nmid B_1$. Nous obtenons $B_1^n C^l = q_1^{2j-fn} q_2^2(b - 4a')$:

- Si $2j - f \cdot n \geq 1 \Rightarrow q_1|C^l \Rightarrow q_1|C$ mais $C^l = A^m + B^n$ donne aussi $q_1|C$.

- Si $2j - f \cdot n = 0$, nous avons $B_1^n C^l = q_2^2(b - 4a')$, mais $C^l = A^m + B^n$ donne $q_1|C$ par suite $q_1|(b - 4a')$. Comme q_1 et a' sont premiers alors $q_1 \nmid b$.

- Si $2j - f.n < 0 \implies q_1 | (b - 4a') \implies q_1 \nmid b$ et $C^l = A^m + B^n$ donne $q_1 | C$.
 Dans les 3 cas précédents, la conjecture (1.1) est vérifiée.

** J-5-2-1-2- Nous obtenons les mêmes résultats si $q_1 | C^l$.

** J-5-2-2- Nous supposons que k'_2 et a' non copremiers. Soit q_1 premier tel que $q_1 | k'_2$ et $q_1 | a'$. Ecrivons k'_2 sous la forme $q_1^j . q_2$ avec $q_1 \nmid q_2$. De $A^{2m} = 2k'_2 a' \implies q_1 | A^{2m} \implies q_1 | A$. Par suite de $B^n C^l = q_1^j q_2 (b - 4a')$ il s'ensuit que $q_1 | (B^n C^l) \implies q_1 | B^n$ ou $q_1 | C^l$.

** J-5-2-2-1- Supposons que $q_1 | B^n \implies q_1 | B \implies B = q_1^\beta . B_1$ avec $\beta \geq 1$ et $q_1 \nmid B_1$. Par suite, nous avons $q_1^{n\beta} B_1^n C^l = q_1^j q_2 (b - 4a') \implies B_1^n C^l = q_1^{j-n\beta} q_2 (b - 4a')$.
 - Si $j - n\beta \geq 1$, alors $q_1 | C^l \implies q_1 | C$, mais $C^l = A^m + B^n$ donne $q_1 | C$, donc la conjecture (1.1) est vérifiée.

- Si $j - n\beta = 0$, nous obtenons $B_1^n C^l = q_2 (b - 4a')$, et $q_1 | (b - 4a') \implies q_1 | b$ car $q_1 | a' \implies q_1 | a$ d'où la contradiction avec a, b copremiers.

- Si $j - n\beta < 0 \implies q_2 | (b - 4a') \implies q_2 | b$, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** J-5-2-2-2- Nous obtenons les mêmes résultats si nous supposons que $q_1 | C^l$.

** J-6- Si $4 \nmid (b - 4a')$ et $4 \nmid k_1$ c'est impossible. Nous supposons maintenant que $4 | (b - 4a') \implies 4 | b$, et $b - 4a' = 4^t . g$ avec $4 \nmid g$, alors nous avons :

$$\begin{aligned} A^{2m} &= k_1 a' \\ B^n C^l &= k_1 . 4^{t-1} . g \end{aligned}$$

**-6-1- Nous supposons que k_1 est premier. De $A^{2m} = k_1 a'$ il s'ensuit facilement que $k_1 | a'$. De $B^n C^l = k_1 . 4^{t-1} . g$ nous obtenons que $k_1 | (B^n C^l) \implies k_1 | B^n$ ou $k_1 | C^l$.

** J-6-1-1- Supposons que $k_1 | B^n \implies k_1 | B \implies B = k_1^j . B_1$ avec $j > 0$ et $k_1 \nmid B_1$. D'où $k_1^{n.j} B_1^n C^l = k_1 . 4^{t-1} . g \implies k_1^{n.j-1} B_1^n C^l = 4^{t-1} . g$. Or $n \geq 3$ et $j \geq 1$ donc $n.j - 1 \geq 2$. Par suite comme $k_1 \neq 2$ alors $k_1 | g \implies k_1 | (b - 4a')$ mais $k_1 - a' \implies k_1 | b$ d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** J-6-1-2- Nous obtenons le même résultat si $k_1 | C^l$.

** J-6-2- Nous supposons que k_1 est non premier, différent de 4 (cas déjà vu), avec $4 \nmid k_1$.

** J-6-2-1- Si $k_1 = 2k'$ avec k' impair > 1 . D'où $A^{2m} = 2k' a' \implies 2 | a' \implies 2 | a$ mais $4 | b$ par suite la contradiction avec a, b copremiers.

** J-6-2-2- Nous supposons que k_1 est impair avec k_1 et a' copremiers. Ecrivons k_1 s'écrit sous la forme $k_1 = q_1^j . q_2$ avec $q_1 \nmid q_2$ et q_1 premier et $j \geq 1$. $B^n C^l = q_1^j . q_2 4^{t-1} g \implies q_1 | B^n$ ou $q_1 | C^l$.

** J-6-2-2-1- Supposons que $q_1 | B^n \implies q_1 | B \implies B = q_1^f . B_1$ avec $q_1 \nmid B_1$. Nous obtenons $B_1^n C^l = q_1^{j-f.n} q_2 4^{t-1} g$.

- Si $j - f.n \geq 1 \implies q_1 | C^l \implies q_1 | C$ mais $C^l = A^m + B^n$ donne aussi $q_1 | C$.

- Si $j - f.n = 0$, nous avons $B_1^n C^l = q_2 4^{t-1} g$, mais $C^l = A^m + B^n$ donne $q_1 | C$ par suite $q_1 | (b - 4a')$. Comme q_1 et a' sont copremiers alors $q_1 \nmid b$.

- Si $j - f.n < 0 \implies q_1 | (b - 4a') \implies q_1 \nmid b$ et $C^l = A^m + B^n$ donne $q_1 | C$.

Dans les 3 cas précédents, la conjecture (1.1) est vérifiée.

** J-6-2-2-2- Nous obtenons le même résultat si $q_1 | C^l$.

** J-6-2-3- Nous supposons que k_1 et a' non copremiers. Soit q_1 premier tel que $q_1 | k_1$ et $q_1 | a'$. Ecrivons k_1 sous la forme $q_1^j . q_2$ avec $q_1 \nmid q_2$. De $A^{2m} = k_1 a' \implies q_1 | A^{2m} \implies q_1 | A$. Par suite de $B^n C^l = q_1^j q_2 (b - 4a')$ il s'ensuit que $q_1 | (B^n C^l) \implies q_1 | B^n$ ou $q_1 | C^l$.

** J-6-2-3-1- Supposons que $q_1 | B^n \implies q_1 | B \implies B = q_1^\beta . B_1$ avec $\beta \geq 1$ et $q_1 \nmid B_1$. Par suite, nous avons $q_1^{n\beta} B_1^n C^l = q_1^j q_2 (b - 4a') \implies B_1^n C^l = q_1^{j-n\beta} q_2 (b - 4a')$:

- Si $j - n\beta \geq 1$, alors $q_1 | C^l \implies q_1 | C$, mais $C^l = A^m + B^n$ donne $q_1 | C$, donc la conjecture (1.1) est vérifiée.

- Si $j - n\beta = 0$, nous obtenons $B_1^n C^l = q_2 (b - 4a')$, or $q_1 | A$ et $q_1 | B$ donc $q_1 | C$ et par suite $q_1 | (b - 4a') \implies q_1 | b$ car $q_1 | a' \implies q_1 | a$ d'où la contradiction avec a, b copremiers.

- Si $j - n\beta < 0 \implies q_1 | (b - 4a') \implies q_1 | b$, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** J-6-2-3-2- Nous obtenons les mêmes résultats si nous supposons que $q_1 | C^l$. \square

Le Principal Théorème est démontré.

4 Exemples Numériques

4.1 Exemple 1 :

Soit l'exemple : $6^3 + 3^3 = 3^5$ avec $A^m = 6^3$, $B^n = 3^3$ et $C^l = 3^5$. Avec les notations utilisées dans le papier, nous obtenons :

$$p = 3^6 \times 73, \quad q = 8 \times 3^{11}, \quad \bar{\Delta} = 4 \times 3^{18} (3^7 \times 4^2 - 73^3) < 0 \quad (4.1)$$

$$\rho = \frac{3^8 \times 73 \sqrt{73}}{\sqrt{3}}, \quad \cos \theta = -\frac{4 \times 3^3 \times \sqrt{3}}{73 \sqrt{73}} \quad (4.2)$$

Comme $A^{2m} = \frac{4p}{3} . \cos^2 \frac{\theta}{3} \implies \cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{3A^{2m}}{4p} = \frac{3 \times 2^4}{73} = \frac{a}{b} \implies a = 3 \times 2^4$, $b = 73$; alors :

$$\cos \frac{\theta}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{73}}, \quad p = 3^6 . b \quad (4.3)$$

On vérifie facilement l'équation (4.2) utilisant (4.3). Pour cet exemple, nous pouvons utiliser les deux conditions de (3.9) comme $3|p, b|4p$ et $3|a$. Les cas **3.2.1.3** et **3.2.2.4** sont respectivement utilisés. Concernant le cas **3.2.1.3** c'est le sous cas A-2-2-1- qui a été appliqué et la conjecture (1.1) est vérifiée. Pour le cas **3.2.2.4**, c'est le sous-cas F-2-2-1- qui est a été utilisé et la conjecture (1.1) est vérifiée. Nous trouvons pour les deux cas que A^m, B^n et C^l de l'exemple 1 ont un facteur commun ce qui est vrai.

4.2 Exemple 2 :

Soit le deuxième exemple : $7^4 + 7^3 = 14^3$. Nous prenons $A^m = 7^4, B^n = 7^3$ et $C^l = 14^3$. Nous obtenons $p = 57 \times 7^6 = 3 \times 19 \times 7^6$, $q = 8 \times 7^{10}$, $\bar{\Delta} = 27q^2 - 4p^3 = 27 \times 4 \times 7^{18}(16 \times 49 - 19^3) = -27 \times 4 \times 7^{18} \times 6075 < 0$, $\rho = 19 \times 7^9 \times \sqrt{19}$, $\cos\theta = -\frac{4 \times 7}{19\sqrt{19}}$. Comme $A^{2m} = \frac{4p}{3} \cdot \cos^2 \frac{\theta}{3} \implies \cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{3A^{2m}}{4p} = \frac{7^2}{4 \times 19} = \frac{a}{b} \implies a = 7^2, b = 4 \times 19$, alors $\cos \frac{\theta}{3} = \frac{7}{2\sqrt{19}}$ et nous avons le cas $3|p$ et $b|(4p)$. Le calcul de $\cos\theta$ à partir de l'expression de $\cos \frac{\theta}{3}$ confirme la valeur ci-dessous :

$$\cos\theta = \cos 3(\theta/3) = 4\cos^3 \frac{\theta}{3} - 3\cos \frac{\theta}{3} = 4 \left(\frac{7}{2\sqrt{19}} \right)^3 - 3 \frac{7}{2\sqrt{19}} = -\frac{4 \times 7}{19\sqrt{19}}$$

Nous obtenons donc $3|p \Rightarrow p = 3p', b|(4p)$ avec $b \neq 2, 4$ alors $12p' = k_1 b = 3 \times 7^6 b$. Ceci concerne le paragraphe **3.2.1.9.** de la première hypothèse. Comme $k_1 = 3 \times 7^6 = 3k'_1$ avec $k'_1 = 7^6 \neq 1$. C'est le sous-cas D-4-1-2-4-2-2- avec la condition $4|(3b - 4a)$. Vérifions alors :

$$3b - 4a = 3 \times 4 \times 19 - 4 \times 7^2 = 32 \implies 4|(3b - 4a) \quad (4.4)$$

avec $A^{2m} = 7^8 = 7^6 \times 7^2 = k'_1 a$ et k'_1 non premier, avec a et k'_1 non copremiers avec $\omega = 7 \nmid \Omega (= 2)$. Nous retrouvons bien que la conjecture (1.1) est vérifiée avec un facteur commun à savoir le nombre premier 7 un diviseur de $k'_1 = 7^6$.

4.3 Exemple 3 :

Soit le troisième exemple : $19^4 + 38^3 = 57^3$. Nous prenons $A^m = 19^4, B^n = 38^3$ et $C^l = 57^3$. Nous obtenons $p = 19^6 \times 577$, $q = 8 \times 27 \times 19^{10}$, $\bar{\Delta} = 27q^2 - 4p^3 = 4 \times 19^{18}(27^3 \times 16 \times 19^2 - 577^3) < 0$, $\rho = \frac{19^9 \times 577\sqrt{577}}{3\sqrt{3}}$, $\cos\theta = -\frac{4 \times 3^4 \times 19\sqrt{3}}{577\sqrt{577}}$. Comme $A^{2m} = \frac{4p}{3} \cdot \cos^2 \frac{\theta}{3} \implies \cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{3A^{2m}}{4p} = \frac{3 \times 19^2}{4 \times 577} = \frac{a}{b} \implies a = 3 \times 19^2, b = 4 \times 577$, alors $\cos \frac{\theta}{3} = \frac{19\sqrt{3}}{2\sqrt{577}}$ et nous avons le cas $3|a$ et $b|(4p)$. Le calcul de $\cos\theta$ à partir de l'expression de $\cos \frac{\theta}{3}$ confirme la valeur ci-dessus :

$$\cos\theta = \cos 3(\theta/3) = 4\cos^3 \frac{\theta}{3} - 3\cos \frac{\theta}{3} = 4 \left(\frac{19\sqrt{3}}{2\sqrt{577}} \right)^3 - 3 \frac{19\sqrt{3}}{2\sqrt{577}} = -\frac{4 \times 3^4 \times 19\sqrt{3}}{577\sqrt{577}}$$

Nous obtenons donc $3|a \Rightarrow a = 3a' = 3 \times 19^2, b|(4p)$ avec $b \neq 2, 4$ et $b = 4p'$ avec $p = kp'$ soit $p' = 577$ et $k = 19^6$. Ceci concerne le paragraphe **3.2.2.8.** de la deuxième hypothèse. C'est le sous-cas I-2-2-2-2-1- avec $\omega = 19, a', \omega$ non copremiers et $\omega = 19 \nmid (p' - a') = (577 - 19^2)$ avec $s - jn = 6 - 1 \times 3 = 3 \geq 1$, et la conjecture (1.1) est vérifiée.

4.4 Exemple 4 :

Enfin soit l'exemple $7^2 + 2^5 = 3^4$, avec $A^m = 7^2; B^n = 2^5; C^l = 3^4$. Nous obtenons $p = 4999$ un nombre premier, $q = 2^5 \times 7^2 \times 3^4 = 127008 \gg p$. Par

suite, nous trouvons que $\bar{\Delta} = 27q^2 - 4p^3 > 0$. Alors, nous ne pouvons appliquer les conditions du papier à cet exemple, car nous avons un exposant égal à 2. Alors la condition que $m, n, l > 2$ est importante dans l'énoncé de la conjecture de Beal.

5 Conclusion

La méthode utilisée pour prouver que la conjecture de Beal est vraie est celle du niveau du premier cycle scientifique universitaire, a demandé l'étude de plusieurs cas possibles. Nous avons confirmé la méthode par les quatre exemples numériques présentés. En conclusion, nous annoncerions le théorème :

Theorem 5.1. (*A. Ben Hadj Salem, A. Beal, 2016*) : Soient A, B, C, m, n , et l des entiers positifs avec $m, n, l > 2$. Si :

$$A^m + B^n = C^l \tag{5.1}$$

alors A, B , et C ont un facteur en commun.

Références

- [1] R. DANIEL MAULDIN. *A Generalization of Fermat's Last Theorem : The Beal Conjecture et Prize Problem*. Notice of AMS, Vol 44, n°11, 1997, pp 1436-1437.