

OFFICE DE LA TOPOGRAPHIE ET DE LA CARTOGRAPHIE

**MEMOIRE DE CARTOGRAPHIE
MATHEMATIQUE**

Par

Abdelmajid BEN HADJ SALEM

INGÉNIEUR GÉNÉRAL À L'OFFICE DE LA TOPOGRAPHIE ET DE LA
CARTOGRAPHIE

JANVIER 2009

VERSION 2.
abenhadsalem@gmail.com

OFFICE DE LA TOPOGRAPHIE ET DE LA CARTOGRAPHIE

Table des matières

1	Rappels des Propriétés des Fonctions Analytiques	3
1.1	Logarithme Complexe	5
2	Introduction	5
2.1	Résumé	5
2.2	Introduction	6
3	Représentation Conforme d'un ellipsoïde	7
4	Détermination des coefficients pour obtenir une altération linéaire minimale	12
5	Autres Propriétés de la Représentation	16
6	Une Altération Linéaire Minimale pour La Nouvelle Zélande	22
7	Conclusions	23
8	Remarques et Critique de l'Article	23
	Références	30
	Table des Figures	30

PREFACE

Ce mémoire de cartographie mathématique concerne la traduction de l'article " A Conformal Mapping Projection With Minimum Scale Error" de W.I. Reilly, publié dans la revue *Survey Review*, Volume XXII, n° 168 d'avril 1973.

Dans la première partie, un rappel sur les propriétés des fonctions analytiques et la définition du logarithme d'un nombre complexe.

La deuxième partie comporte la traduction de l'article cité ci-dessus avec le développement de certaines formules en les mentionnant entre deux étoiles *...*.

La troisième partie est réservée aux remarques sur cet article.

Ce mémoire a été rédigé par l'auteur durant la troisième année d'études (1980-1981) à l'Ecole Nationale des Sciences Géographiques de l'Institut Géographique National Français pour l'obtention du diplôme d'ingénieur des travaux de l'Etat.

**MEMOIRE DE CARTOGRAPHIE
MATHEMATIQUE**
Traduction de l'Article
**A Conformal Mapping Projection With Minimum
Scale Error**
W.I. Reilly
Survey Review, Volume XXII, n° 168 - Avril 1973

1 Rappels des Propriétés des Fonctions Analytiques

On considère le plan complexe tel que à un point de coordonnées (X, Y) , on associe le nombre complexe $Z = X + iY$ et on peut écrire :

$$Z = |Z| e^{i \arg(Z)} \quad (1)$$

où $|Z|$ est le module et $\arg(Z)$ est défini à $2k\pi$.

Soit $Z = f(z)$ une fonction analytique dans D un ouvert de C , avec :

$$z = x + iy \quad (2)$$

$$Z = X + iY \quad (3)$$

$$Z = f(z) = F(x, y) = X(x, y) + iY(x, y) \quad (4)$$

La dérivée $f'(z)$ est telle que :

$$\frac{dZ}{dz} = f'(z) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = -i \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \quad (5)$$

$$f'(z) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial X(x, y)}{\partial x} + i \frac{\partial Y(x, y)}{\partial x} \quad (6)$$

$$f'(z) = -i \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = -i \frac{\partial X(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial Y(x, y)}{\partial y} \quad (7)$$

En tenant compte des conditions de Cauchy :

$$\frac{\partial X(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial Y(x, y)}{\partial y} \quad (8)$$

$$\frac{\partial X(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial Y(x, y)}{\partial x} \quad (9)$$

On obtient :

$$f'(z) = \frac{\partial X(x, y)}{\partial x} - i \frac{\partial X(x, y)}{\partial y} = \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) X(x, y) \quad (10)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \operatorname{Re}(f(z)) \quad (11)$$

Et :

$$f'(z) = \frac{\partial Y(x, y)}{\partial y} - i \frac{\partial X(x, y)}{\partial y} = \left(i \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) Y(x, y) \quad (12)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y} + i \frac{\partial}{\partial x} \right) \operatorname{Im}(f(z)) \quad (13)$$

Soit $F(x, y)$ une fonction complexe donc une application de $R \times R \mapsto C$.
On suppose que F soit différentiable entraîne que :

$$dF(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial Y(x, y)}{\partial y} dy \quad (14)$$

On pose :

$$z = x + iy \quad (15)$$

$$\bar{z} = x - iy \quad (16)$$

qui sont 2 fonctions différentiables en x et y d'où :

$$dz = dx + idy \quad (17)$$

$$d\bar{z} = dx - idy \quad (18)$$

Par suite :

$$dx = \frac{1}{2}(dz + d\bar{z}) \quad (19)$$

$$dy = \frac{1}{2i}(dz - d\bar{z}) \quad (20)$$

On les remplace dans l'équation (14), on obtient :

$$dF(x, y) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} - i \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \right) dz + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} + i \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \right) d\bar{z} \quad (21)$$

En remplaçant x par $(z + \bar{z})/2$ et y par $(z - \bar{z})/2i$, $F(x, y)$ devient une

fonction $G(z, \bar{z})$, ce qui donne en posant :

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (22)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (23)$$

$$dF(x, y) = dG(z, \bar{z}) = \frac{\partial G(z, \bar{z})}{\partial z} dz + \frac{\partial G(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \quad (24)$$

1.1 Logarithme Complexe

Soit t un nombre complexe donné, on cherche tous les nombres complexes z tels que $e^z = t$. Il n'en existe que si $t \neq 0$. Supposons $t \neq 0$ et :

$$z = x + iy \implies e^x e^{iy} = |t| e^{i \arg(t)} \Rightarrow x = \text{Log } |t| \quad y = \arg(t) \text{ à } 2k\pi \text{ pr } s$$

On a donc :

$$z = x + iy = \text{Log } |t| + i \arg(t) \quad (25)$$

Par définition, on pose :

$$z = \text{Log } t = \text{Log } |t| + i \arg(t) \quad (26)$$

Définition On appelle détermination de $\text{Log } t$ dans un ouvert connexe D du plan complexe toute fonction f continue de t définie dans D et telle que :

$$\forall t \in D, e^{f(t)} = t \quad (27)$$

2 Introduction

2.1 Résumé

On peut construire une représentation plane conforme d'un ellipsoïde ayant une altération linéaire minimale sur une zone arbitraire donnée et dans ce sens, elle a l'avantage sur d'autres représentations conformes régulières telles que la Mercator Transverse ou la représentation conique conforme de Lambert.

Les coordonnées géographiques sur l'ellipsoïde sont au début transformées en coordonnées symétriques puis ces dernières sont transformées dans le système des coordonnées rectangulaires au moyen d'un polynôme complexe.

La *distorsion* totale de la représentation est exprimée par une intégrale double du carré de l'altération linéaire, prise sur la surface étudiée à représenter. Après avoir choisi les valeurs des coordonnées rectangulaires et du gisement du méridien à l'origine, les coefficients du polynôme complexe sont calculés pour minimiser la *distorsion* totale.

Cet ensemble de coefficients peut être utilisé directement pour donner les transformations directe et inverse entre les coordonnées sur l'ellipsoïde et les coordonnées planes et pour calculer le module linéaire et les gisements des méridiens et les transformées des géodésiques ainsi que les parallèles et les méridiens en tout point.

Comme exemple, des coefficients ont été calculés pour une représentation donnant une *distorsion* minimale pour la surface de la Nouvelle Zélande en utilisant un polynôme complexe à l'ordre 6. L'écart de l'altération linéaire de cette représentation est environ 4×10^{-4} , inférieur à ce qu'on peut obtenir avec n'importe quelle représentation régulière.

2.2 Introduction

Une représentation cartographique se définit par une transformation mathématique par laquelle les coordonnées géographiques φ (latitude) et λ (longitude) d'un ensemble de points d'un ellipsoïde sont transformées bijectivement en un ensemble de coordonnées rectangulaires X (Est) et Y (Nord) de la carte plane.

Dans ce rapport, nous serons concernés par une classe de représentations conformes qui sont convenables pour les cartes topographiques à moyenne et à grandes échelles (1/250000 ou plus grand) pour lesquelles d'après leurs propriétés de *distorsion* minimale, sont convenables aussi pour la réduction des observations pour les levés de petites zones, directement à partir des coordonnées rectangulaires (X, Y) avec des petites corrections et souvent négligeables des distances et des gisements.

Les représentations conformes sont largement utilisées, particulièrement celles de Mercator Transverse (Gauss-Krüger) et les représentations coniques de Lambert. Une étude des représentations conformes régulières d'un ellipsoïde a été faite par Hotine[4].

En Nouvelle Zélande, la représentation Transverse de Mercator (Lee,[6]) est utilisée pour les cartes topographiques avec une représentation différente pour le nord et le sud du pays (Fig.1) et les coordonnées rectangulaires en Yard (0.914 m) sont imprimées sur les cartes et utilisées largement comme un système de coordonnées. Cependant, les calculs des levés sont donnés en

coordonnées Mercator Transverse pour les 28 différentes régions cadastrales.

Le changement prochain en unités métriques des levés et de la cartographie a poussé la recherche d'une nouvelle représentation et un système de coordonnées qui pourra remplacer les 28 systèmes existants.

Une convenable représentation aurait besoin d'avoir d'une façon marquée l'ordre de l'altération linéaire moins que la valeur de 20×10^{-4} atteinte par la représentation Mercator Transverse au sud du pays. Pour obtenir cette représentation conforme avec une petite altération linéaire, M.L.P. Lee Chef du département des levés a suggéré qu'elle soit spécifiée par la forme régulière des courbes de maximum d'altération linéaire, couvrant la surface à cartographier, comme il a été fait par Miller[7] pour une représentation conforme pour l'Europe et l'Afrique.

L'histoire des représentations de déformations minimales (Lee[5], Hendrickz[3]) apparaît revenir au Sir George Airy[1] dont le concept pour minimiser la *distosion* totale du module linéaire d'une carte, quoique à l'origine appliquée pour trouver un compromis entre les représentations conformes et équivalentes, peut être appliquée pour une seule représentation conforme.

Pour réaliser la grande minimisation de l'altération linéaire, il est nécessaire d'abandonner le concept de cartographier sur une surface régulière développable dont le cas général est le cône. Une représentation conforme oblique conique, par exemple, a au plus seulement quatre paramètres à satisfaire les conditions du module, alors qu'il est possible de développer les transformations des représentations en séries, comme l'a suggéré Miller[7] dans laquelle il y a théoriquement un nombre illimité de paramètres qui peuvent être ajustés pour réaliser une altération linéaire minimale sur une surface arbitraire.

En pratique, bien sûr, seulement un nombre limité de coefficients est requis pour atteindre une altération linéaire acceptable et ensemble le calcul des coefficients des représentations et les transformations des coordonnées géodésiques en coordonnées rectangulaires et vice-versa, peuvent se faire facilement par le calculateur électronique.

3 Représentation Conforme d'un ellipsoïde

Pour n'importe quelle représentation cartographique d'un ellipsoïde, la longueur élémentaire ds sur l'ellipsoïde est liée à dS l'élément d'arc corres-

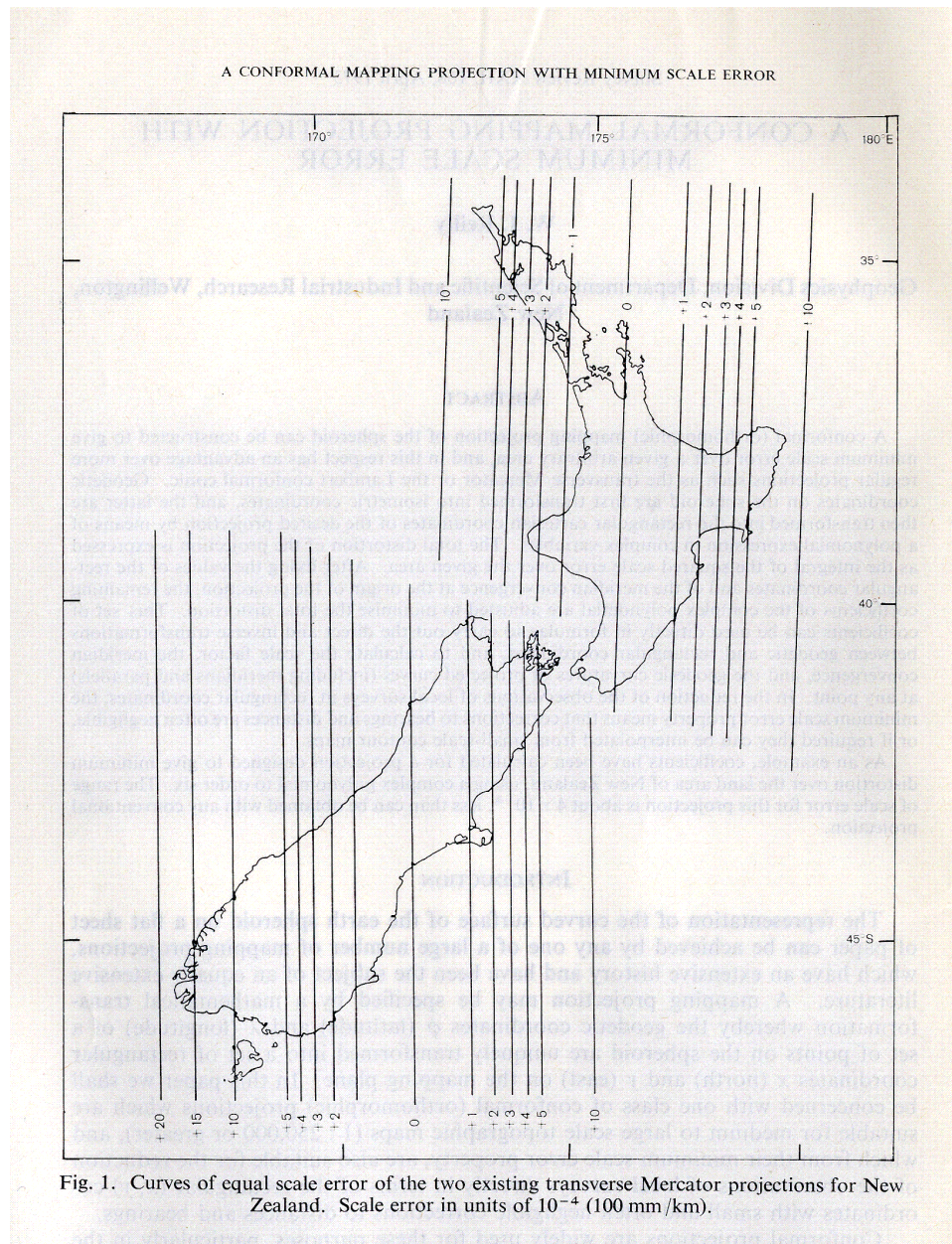


Fig. 1: Les courbes d'altération linéaire égale des deux représentations UTM de la Nouvelle-Zélande. L'altération linéaire est exprimée en 100mm/km

pondant de la représentation plane par :

$$dS^2 = m^2 ds^2 \quad (28)$$

où m est le module linéaire. Pour une représentation conforme, m est une fonction continue de la position et dérivable :

$$m = m(\varphi, \lambda) = m(X, Y)$$

avec φ et λ sont respectivement la latitude géodésique et la longitude du point sur l'ellipsoïde et (X, Y) est le couple des coordonnées rectangulaires Est et Nord de la représentation plane. L'altération linéaire de la représentation conforme est définie par :

$$\epsilon = m - 1 \quad (29)$$

En général, si (u, v) est couple de coordonnées symétriques orthogonales sur une première surface telle que :

$$ds^2 = \mu_1^2 (du^2 + dv^2) \quad (30)$$

et (U, V) le couple correspondant des coordonnées sur une deuxième surface, alors on démontre (Voir Nabauer,[8]) qu'une représentation conforme peut être exprimée par :

$$W = f(w) \quad (31)$$

où $W = U + iV$ et $w = u + iv$ sont des quantités complexes et f une fonction analytique. Le module linéaire m est donné par :

$$m = \frac{\mu_2}{\mu_1} \left| \frac{dW}{dw} \right| \quad (32)$$

Si la première surface est un ellipsoïde, alors :

$$ds^2 = \rho^2 d\varphi^2 + r^2 d\lambda^2 \quad (33)$$

$$\text{avec } \rho = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} \quad (34)$$

$$\text{et } r = N \cos \varphi = \frac{a \cos \varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}} \quad (35)$$

ρ et N sont respectivement les rayons de courbure de la méridienne et de la grande normale. r le rayon du parallèle de latitude φ . a est le grand demi-axe

et b le petit demi-axe et e la première excentricité donnée par :

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \quad (36)$$

Les coordonnées symétriques orthogonales sur l'ellipsoïde sont la latitude isométrique L et la longitude ω mesurées à partir d'une origine à savoir φ_0 et λ_0 :

$$L = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\rho d\varphi}{r} \quad (37)$$

$$\omega = \lambda - \lambda_0 \quad (38)$$

Donc :

$$dL = \frac{\rho d\varphi}{r} \quad (39)$$

Nous obtenons :

$$\mu_1 = r, ds^2 = r^2(dL^2 + d\omega^2) \quad (40)$$

$$\mu_2 = 1, dS^2 = (dX^2 + dY^2) \quad (41)$$

Définissons les variables complexes :

$$Z = (X, Y) = X + iY \quad (42)$$

$$\text{et } \zeta = (\omega, L) = \omega + iL \quad (43)$$

Une expression générale d'une représentation conforme de l'ellipsoïde sur le plan, de la forme (31) est :

$$Z = r_0 f(\zeta) \quad (44)$$

où r_0 est le rayon du parallèle $\varphi = \varphi_0$.

* En effet on peut écrire $Z = g(\zeta) = r_0 \frac{g(\zeta)}{r_0}$, en appelant $f(\zeta)$ la fonction $\frac{g(\zeta)}{r_0}$, on obtient $Z = r_0 f(\zeta)$ *

De (32), on a le module linéaire :

$$m = \frac{1}{r} \left| \frac{\partial Z}{\partial \zeta} \right| = \frac{r_0}{r} \left| \frac{\partial f}{\partial \zeta} \right| = \frac{r_0}{r} |\sigma| \quad (45)$$

avec :

$$\sigma = \frac{\partial f}{\partial \zeta} \quad (46)$$

* On a utilisé la notation de dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial \zeta}$ au lieu de $\frac{d}{d\zeta}$ car la fonction va dépendre de paramètres qu'on va chercher sous certaines conditions *

Si γ est le gisement du méridien passant par le point $\zeta = (\omega, L)$, alors :

$$\arg(\sigma) = \frac{\pi}{2} - \gamma \quad (47)$$

La fonction $f(\zeta)$ peut être exprimée dans le cas général par une série entière :

$$f(\zeta) = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n \zeta^n \quad (48)$$

où les coefficients B_n seront déterminés pour satisfaire les conditions à l'origine, de l'orientation et de l'échelle. En pratique, on garde seulement les termes jusqu'au rang N , on aura :

$$Z = r_0 \sum_{n=0}^N B_n \zeta^n \quad (49)$$

avec le module linéaire :

$$m = \frac{r_0}{r} |\sigma|$$

$$\text{et } \sigma = \frac{\partial f}{\partial \zeta} = \sum_{n=1}^N n B_n \zeta^{n-1} = \sum_{n=1}^N B_n Z_n$$

$$\text{où } Z_n = n \zeta^{n-1}$$

L'équation (49) exprime une transformation directe des coordonnées symétriques $\zeta = (\omega, L)$ sur l'ellipsoïde en coordonnées rectangulaires $Z = (X, Y)$ du plan, mais ce processus peut être interprété en deux étapes comme suit : a - la transformation des coordonnées symétriques ζ de l'ellipsoïde en coordonnées rectangulaires ξ de la représentation plane directe de Mercator par $\xi = r_0 \zeta$ avec le module linéaire correspondant m_1 tel que :

$$m_1 = \frac{1}{r} \left| \frac{\partial \xi}{\partial \zeta} \right| = \frac{r_0}{r} \quad (50)$$

* La représentation $\xi = r_0 \zeta$ est bien cylindrique directe conforme puisque $X_1 = r_0 \omega = r_0(\lambda - \lambda_0)$ et $Y_1 = r_0(L - L_0) = r_0 L$ car $L_0 = 0$ *

suivi par :

b - la transformation des coordonnées ξ de la représentation de Mercator

en coordonnées rectangulaires $Z = (X, Y)$ par :

$$Z = r_0 \sum_{n=0}^N B_n \left(\frac{\xi}{r_0} \right)^n = \sum_{n=0}^N C_n \xi^n \quad (51)$$

$$C_n = r_0^{1-n} B_n \quad (52)$$

Et le module linéaire correspondant est m_2 :

$$m_2 = \frac{1}{1} \left| \frac{\partial Z}{\partial \xi} \right| = \left| \sum_{n=1}^N n C_n \xi^{n-1} \right| = \left| \sum_{n=1}^N n B_n \xi^{n-1} \right| \quad (53)$$

D'où le module linéaire de la transformée exprimé par (49) est :

$$m = m_1 m_2 = \frac{r_0}{r} |\sigma| \quad (54)$$

4 Détermination des coefficients pour obtenir une altération linéaire minimale

En général, l'expression (49) $Z = r_0 \sum_{n=0}^N B_n \xi^n$ transforme les coordonnées $\zeta = (\omega, L)$ en coordonnées rectangulaires $Z = (X, Y)$ nécessite la détermination des $N+1$ coefficients B_n (soit au total $2N+2$ paramètres).

Premièrement, à l'origine pour $\zeta = 0$, on a $Z_0 = (X_0, Y_0)$ donné d'où $Z_0 = r_0 f(0) = r_0 B_0$ ce qui donne $B_0 = Z_0/r_0$ (2 paramètres choisis).

Deuxièmement, le gisement du méridien à l'origine peut être choisi à une valeur γ_0 ce qui donne $\arg(B_1) = \pi/2 - \gamma_0 = \arg(\sigma)$. Si à l'origine, l'axe des Y (nord) et l'image du méridien central se coincident alors on a $\gamma_0 = 0$ implique $\arg(B_1) = \pi/2$ soit $\text{Re}(B_1) = 0$. Considérant ce dernier cas, il ne reste maintenant que $2N-1$ paramètres qui doivent satisfaire la condition d'altération linéaire minimale.

Par analogie avec la représentation de la "balance of errors" d'Airy [1], nous permettons de définir la *distorsion totale* T^2 de la représentation d'une surface arbitraire S de l'ellipsoïde par :

$$T^2 = \frac{1}{A} \int \int_S \epsilon^2 dA = \frac{1}{A} \int \int_S (m-1)^2 dA \quad (55)$$

où A est l'aire totale de la surface, donnée par $A = \int \int_S dA$. Une surface irrégulière (par exemple le cas de la Nouvelle Zélande) peut être partagée en M éléments de surface régulière d'amplitudes $\Delta\lambda$ en λ et $\Delta\varphi$ en φ et en utilisant une approximation sphérique, l'intégrale (55) peut être exprimée en

somme finie :

$$T^2 = \frac{\sum_{i=1}^M \cos\varphi_i (m(\varphi_i, \lambda_i) - 1)^2}{\sum_{i=1}^M \cos\varphi_i} \quad (56)$$

où (φ_i, λ_i) sont les coordonnées du centre d'un élément de surface.

* En effet, l'élément de surface pour la sphère est $dA = \cos\varphi d\varphi d\lambda$ et on a :

$$S = \sum_{i=1}^M S_i \text{ où plutôt } S = \bigcup_{i=1}^M S_i$$

D'où sur S_i , on a $\cos\varphi = \cos\varphi_i$ et $\epsilon(\varphi, \lambda) = \epsilon(\varphi_i, \lambda_i)$ et

$$A = \int \int_S dA = \sum_{i=1}^M \int \int_{S_i} dA \approx \left(\sum_{i=1}^M \cos\varphi_i \right) \Delta\varphi \Delta\lambda$$

d'où

$$T^2 = \frac{1}{A} \int \int_S \epsilon^2 dA = \frac{\sum_{i=1}^M \epsilon^2(\varphi_i, \lambda_i) \cos\varphi_i \int \int_{S_i} d\varphi d\lambda}{\left(\sum_{i=1}^M \cos\varphi_i \right) \Delta\varphi \Delta\lambda}$$

d'où :

$$T^2 = \frac{\sum_{i=1}^M \cos\varphi_i (m(\varphi_i, \lambda_i) - 1)^2}{\sum_{i=1}^M \cos\varphi_i} \quad *$$

Les $2N-1$ paramètres dans l'expression polynômiale (49) de la représentation conforme seront choisis de manière à minimiser la distorsion totale T^2 donnée par (56). Pour faire cela, il est nécessaire premièrement d'exprimer le module linéaire $m = \frac{r_0}{r} |\sigma|$ en fonction linéaire des inconnues car $|\sigma|$ n'est pas une fonction linéaire des inconnues B_n . La solution peut-être achevée par la méthode des approximations successives.

Soit :

$$B_n = B_n^* + \Delta B_n \quad (57)$$

Où B_n^* est une valeur estimée et ΔB_n une petite correction recherchée pour rendre l'estimation correcte. Si

$$\sigma^* = \sum_{i=1}^N B_n^* Z_n \quad (58)$$

est une valeur estimée de σ et

$$\Delta\sigma = \sum_{i=1}^N \Delta B_n Z_n \quad (59)$$

Alors $|\sigma|$ peut être exprimée, comme

$$|\sigma| = (\sigma\bar{\sigma})^{1/2} \quad (60)$$

avec $\bar{\sigma}$ est le conjugué de σ , par :

$$|\sigma| = [(\sigma^* + \Delta\sigma)(\bar{\sigma}^* + \Delta\bar{\sigma})]^{1/2} = (\sigma^*\bar{\sigma}^* + \sigma^*\Delta\bar{\sigma} + \bar{\sigma}^*\Delta\sigma + \Delta\sigma\Delta\bar{\sigma})^{1/2} \quad (61)$$

En négligeant $\Delta\sigma\Delta\bar{\sigma}$ par rapport aux autres termes et notons que :

$$\sigma^*\Delta\bar{\sigma} + \bar{\sigma}^*\Delta\sigma = 2Re(\sigma^*\Delta\bar{\sigma}) \quad (62)$$

On a alors :

$$|\sigma| = [\sigma^*\bar{\sigma}^* + 2Re(\sigma^*\Delta\bar{\sigma})]^{1/2} = (\sigma\bar{\sigma})^{1/2} \left(1 + \frac{2Re(\sigma^*\Delta\bar{\sigma})}{\sigma^*\bar{\sigma}^*}\right)^{1/2} \quad (63)$$

En s'arrêtant au premier terme du développement limité, on a :

$$|\sigma| = (\sigma\bar{\sigma})^{1/2} \left(1 + \frac{Re(\sigma^*\Delta\bar{\sigma})}{\sigma^*\bar{\sigma}^*}\right) \quad (64)$$

Comme $|\sigma^*| = (\sigma^*\bar{\sigma}^*)^{1/2}$, on obtient :

$$|\sigma| = |\sigma^*| + \frac{Re(\sigma^*\Delta\bar{\sigma})}{|\sigma^*|} \quad (65)$$

Comme $\Delta\sigma = \sum_{n=1}^N \Delta B_n Z_n \implies \Delta\bar{\sigma} = \sum_{n=1}^N \Delta \bar{B}_n \bar{Z}_n$. Soit $H = Re(\sigma^*\Delta\bar{\sigma})$
d'où :

$$H = \sum_{n=1}^N Re(\sigma^*\Delta\bar{B}_n\bar{Z}_n) = \sum_{n=1}^N Re[(Re(\Delta\bar{B}_n) + iIm(\Delta\bar{B}_n))][(Re(\sigma^*\bar{Z}_n) + iIm(\sigma^*\bar{Z}_n))]$$

d'où :

$$H = \sum_{n=1}^N Re(\sigma^*\bar{Z}_n)Re(\Delta B_n) + \sum_{n=1}^N Im(\sigma^*\bar{Z}_n)Im(\Delta B_n) \quad (66)$$

qui est une fonction linéaire des inconnues $Re(\Delta B_n)$ et $Im(\Delta B_n)$.

$$m = \frac{r_0}{r} |\sigma| = \frac{r_0}{r} (|\sigma^*| + \frac{H}{|\sigma^*|}) = \frac{r_0}{r} |\sigma^*| + \frac{r_0}{r} \frac{H}{|\sigma^*|} = m^* + \frac{r_0}{r} \frac{H}{|\sigma^*|}$$

D'où

$$m - 1 = m^* - 1 + \frac{r_0}{r} \frac{H}{|\sigma^*|} \quad (67)$$

En remplaçant cette expression dans l'équation (56), on obtient :

$$T^2 = \frac{\sum_{i=1}^M \cos\varphi_i \left[(m^* - 1) + \frac{r_0}{r} \frac{H}{|\sigma^*|} \right]^2}{\sum_{i=1}^M \cos\varphi_i} \quad (68)$$

En introduisant les notations b_k pour les inconnues $Re(\Delta B_k)$ et c_k pour les $Im(\Delta B_k)$, l'équation (66) s'écrit :

$$H = \sum_{n=1}^N b_n Re(\sigma^* \bar{Z}_n) + \sum_{n=2}^N c_n Im(\sigma^* \bar{Z}_n) \quad (69)$$

Pour minimiser la *distorsion* T^2 , on dérive T^2 par rapport à chaque b_k et c_k et on annule l'expression obtenue, ce qui donne :

$$\sum_{i=1}^M \cos\varphi_i \left[(m^* - 1) + \frac{r_0}{r} \frac{H}{|\sigma^*|} \right] \frac{r_0}{r(\varphi_i)} \frac{1}{|\sigma^*|} \frac{\partial H}{\partial b_k} = 0 \quad k=1,2,\dots,N \quad (70)$$

$$\sum_{i=1}^M \cos\varphi_i \left[(m^* - 1) + \frac{r_0}{r} \frac{H}{|\sigma^*|} \right] \frac{r_0}{r(\varphi_i)} \frac{1}{|\sigma^*|} \frac{\partial H}{\partial c_k} = 0 \quad k=2,\dots,N \quad (71)$$

où $\frac{\partial H}{\partial b_k}$ prend les valeurs $Re(\sigma^* \bar{Z}_k)$ et $\frac{\partial H}{\partial c_k}$ les valeurs $Im(\sigma^* \bar{Z}_k)$. En remplaçant H à partir de (69) dans (70) et (71) et en notant $\frac{\partial H}{\partial b_k}$ et $\frac{\partial H}{\partial c_k}$ par $\frac{\partial H}{\partial a_k}$, on obtient le système à $2N-1$ inconnues à $2N-1$ équations :

$$\sum_{n=1}^N \alpha_{nk} b_n + \sum_{n=1}^N \beta_{nk} c_n = \delta_k \quad (72)$$

où :

$$\alpha_{nk} = \sum_{i=1}^M \cos\varphi_i \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \frac{Re(\sigma^* \bar{Z}_n)}{|\sigma^*|^2} \frac{\partial H}{\partial a_k} \quad k=1,2,\dots,N \quad (73)$$

$$\beta_{nk} = \sum_{i=1}^M \cos\varphi_i \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \frac{Im(\sigma^* \bar{Z}_n)}{|\sigma^*|^2} \frac{\partial H}{\partial a_k} \quad k=2,\dots,N \quad (74)$$

$$\delta_k = \sum_{i=1}^M \cos\varphi_i \left(\frac{r_0}{r} \right) \frac{(1 - m^*)}{|\sigma^*|} \frac{\partial H}{\partial a_k} \quad k=1,2,\dots,N \quad (75)$$

où $\frac{\partial H}{\partial a_k}$ prennent successivement les valeurs $Re(\sigma^* \bar{Z}_k)$ pour $k = 1, 2, \dots, N$ et $Im(\sigma^* \bar{Z}_n)$ pour $k = 2, \dots, N$.

L'ensemble des $2N-1$ équations de la forme (72) peut être résolu pour donner les termes de correction cherchés ΔB_n . les termes corrects $B_n = B_n^* + \Delta B_n$ peuvent être utilisés comme des valeurs approchées pour autre

itération et le processus se repetera jusqu'à ce que les corrections deviennent suffisamment petites.

Dès que $m \approx 1$ sur l'aire à représenter, alors $|\sigma| \approx \frac{r(\varphi)}{r_0}$ est une fonction seulement de φ donc de L et on a :

$$\frac{\partial |\sigma|}{\partial L} \approx \frac{1}{r_0} \frac{dr}{dL} = \frac{-r \sin \varphi}{r_0} = \frac{r}{r_0} \frac{d(\text{Log} r)}{dL}$$

et $\frac{\partial |\sigma|}{\partial \omega} \approx 0$.

* En effet (voir cours de géodésie) $dr = -\rho \sin \varphi d\varphi$ et $dL = \frac{\rho d\varphi}{r}$ d'où $\frac{dr}{dL} = -r \sin \varphi$ *

Considérant les valeurs à l'origine $\varphi = \varphi_0$ on a $L = 0$ et $\omega = 0$ d'où $|\sigma| \approx 1$. Une première approximation des valeurs B_n^* donne les valeurs $Im(B_1) = 1$ et $Re(B_2) = -1/2 \sin \varphi_0$ avec le reste des terme nul.

* Comme $Re(B_1) = 0$ et en posant $B_2 = a + ib$ et $\zeta = \omega + iL$, au voisinage de l'origine on a :

$$|\sigma| \approx 1 + 2(aL + b\omega) + \dots$$

D'où :

$$\frac{\partial |\sigma|}{\partial L} \approx 2a \implies \left(\frac{\partial |\sigma|}{\partial L} \right)_0 = 2Re(B_2) = -\sin \varphi_0 \implies Re(B_2) = -1/2 \sin \varphi_0$$

$$\text{et } \frac{\partial |\sigma|}{\partial \omega} = +2b \approx 0 \implies b = 0 = Im(B_2) = 0$$

*

5 Autres Propriétés de la Représentation

A partir de (45) et de (46) $|\sigma| = m \frac{r}{r_0}$ et $arg(\sigma) = \pi/2 - \gamma$ on peut écrire :

$$\text{Log } \sigma = \text{Log } |\sigma| + i arg(\sigma) = (\text{Log } |\sigma|, \pi/2 - \gamma) \quad (76)$$

Dérivons $Log\sigma$ par rapport à $\zeta = \omega + iL = (\omega, L)$, on a :

$$\frac{\partial Log\sigma}{\partial \zeta} = \left(\frac{\partial}{\partial \omega} - i \frac{\partial}{\partial L} \right) Log|\sigma| = \left(\frac{\partial}{\partial \omega} - i \frac{\partial}{\partial L} \right) Logm + \left(\frac{\partial}{\partial \omega} - i \frac{\partial}{\partial L} \right) Logr = \quad (77)$$

$$\left(\frac{\partial Logm}{\partial \omega}, -\frac{\partial Logm}{\partial L} + \sin\varphi \right) = \left(\frac{\partial}{\partial L} + i \frac{\partial}{\partial \omega} \right) \left(\frac{\pi}{2} - \gamma \right) = - \left(\frac{\partial \gamma}{\partial L}, \frac{\partial \gamma}{\partial \omega} \right) = - \left(\frac{\partial \gamma}{\partial L} + i \frac{\partial \gamma}{\partial \omega} \right) \quad (78)$$

Ce-ci entraîne que les gradients du module linéaire et du gisement des méridiens rapportés aux coordonnées symétriques (ω, L) sont donnés par :

$$\mathbf{grad}Logm = \frac{1}{m} \mathbf{grad}m = \left| \begin{array}{l} \frac{\partial Logm}{\partial \omega} \\ \frac{\partial Logm}{\partial L} \end{array} \right. \text{ tel que } \frac{\partial Logm}{\partial \omega} - i \frac{\partial Logm}{\partial L} = \frac{\partial \sigma}{\partial \zeta} - i \sin\varphi \quad (79)$$

$$\text{et } \mathbf{grad}\gamma = \left| \begin{array}{l} \frac{\partial \gamma}{\partial \omega} \\ \frac{\partial \gamma}{\partial L} \end{array} \right. \text{ tel que } \frac{\partial \gamma}{\partial \omega} - i \frac{\partial \gamma}{\partial L} = i \frac{\partial Log\sigma}{\partial \zeta} \quad (80)$$

Comme $\frac{\partial Z}{\partial \zeta} = r_0\sigma$, on définit :

$$\frac{\partial}{\partial Z} = \frac{1}{r_0\sigma} \frac{\partial}{\partial \zeta} \quad (81)$$

D'où les composantes du gradient du module linéaire et du gisement des méridiens dans le plan X, Y :

$$\frac{\partial Log\sigma}{\partial Z} = \frac{1}{r_0\sigma} \frac{\partial Log\sigma}{\partial \zeta} = \left(\frac{\partial}{\partial X} - i \frac{\partial}{\partial Y} \right) Re(Log\sigma) = \left(\frac{\partial Logm}{\partial X} - i \frac{\partial Logm}{\partial Y} \right) \quad (82)$$

D'où :

$$\mathbf{grad}Logm = \frac{1}{m} \mathbf{grad}m = \left| \begin{array}{l} \frac{\partial Logm}{\partial X} \\ \frac{\partial Logm}{\partial Y} \end{array} \right. \text{ tel que } \frac{\partial Logm}{\partial X} - i \frac{\partial Logm}{\partial Y} = \frac{1}{r_0\sigma} \left(\frac{\partial Log\sigma}{\partial \zeta} - i \sin\varphi \right) \quad (83)$$

$$\text{et } \mathbf{grad}\gamma = \left| \begin{array}{l} \frac{\partial \gamma}{\partial X} \\ \frac{\partial \gamma}{\partial Y} \end{array} \right. \text{ tel que } \frac{\partial \gamma}{\partial X} - i \frac{\partial \gamma}{\partial Y} = i \frac{1}{r_0\sigma} \frac{\partial Log\sigma}{\partial \zeta} \quad (84)$$

La courbure des transformées des courbes de l'ellipsoïde dans le plan permet d'être examinée en utilisant la formule de Schols (Nabauer,[8])

$$G = \frac{1}{m}g - \frac{\partial \text{Log}m}{\partial \bar{n}} \quad (85)$$

où g est la courbure géodésique de la courbe sur l'ellipsoïde en un point P , G est la courbure de la courbe correspondante dans le plan passant par l'image de P et \bar{n} la direction normale à la courbe image au point correspondant (voir Fig.2).

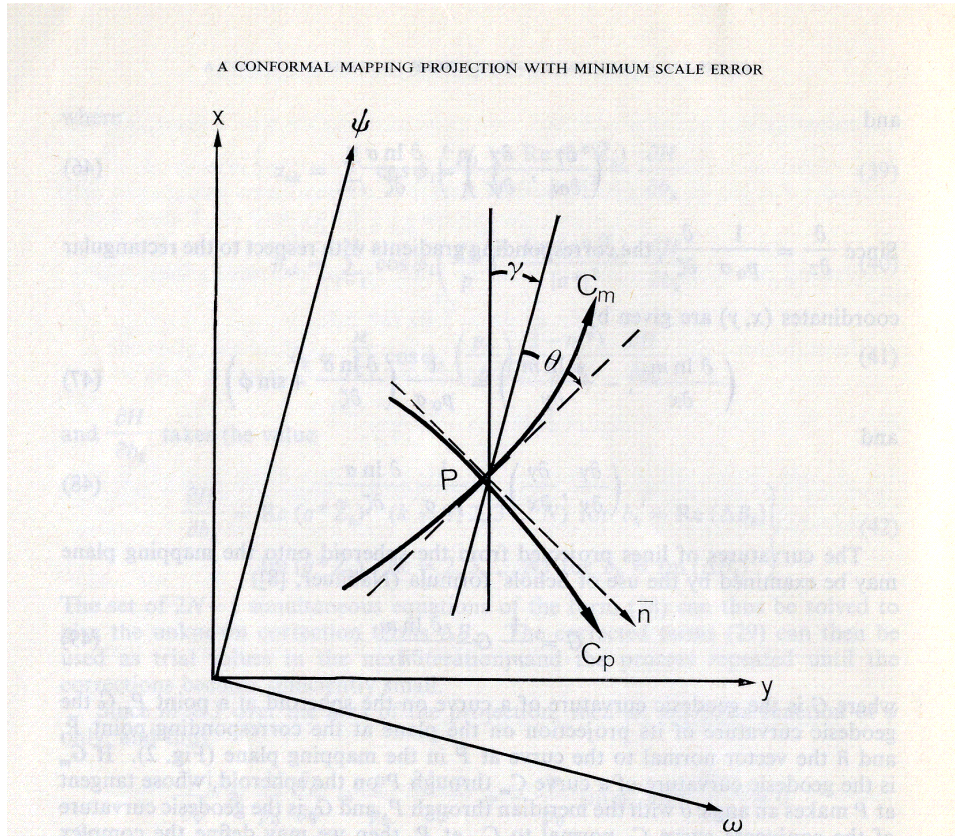


Fig. 2: (y, x) les coordonnées rectangulaires et (ω, ψ) les coordonnées symétriques de l'ellipsoïde. La convergence des méridiens en P est γ . La courbe C_m passant par P fait un angle θ avec le méridien ($\omega = \text{constante}$) et a une courbure géodésique G_m ; C_p est une courbe orthogonale à C_m en P et a une courbure géodésique G_p . La direction \bar{n} est normale à la courbe C_m en P .

En définissant la courbure complexe :

$$\Gamma = g_p + ig_m = (g_p, g_m) \quad (86)$$

et le vecteur Θ de composantes $(\sin\theta, \cos\theta) = \sin\theta + i\cos\theta = \Theta$. La courbure complexe des transformées du couple C_m et C_P est donnée par :

$$\hat{\Gamma} = \frac{\Gamma}{m} + \frac{\sigma}{|\sigma|} \cdot \Theta \cdot \frac{\partial \text{Log} \sigma / r}{\partial Z} = \frac{1}{m} \left[\Gamma + \frac{\Theta}{r} \left(\frac{\partial \text{Log} \sigma}{\partial \zeta} + i \sin \varphi \right) \right] \quad (87)$$

* En effet :

$$\hat{\Gamma} = \frac{1}{m} g_P + \frac{\partial \text{Log} m}{\partial \bar{n}_P} + i \left(\frac{1}{m} g_m + \frac{\partial \text{Log} m}{\partial \bar{n}_m} \right) = \frac{1}{m} (g_P + i g_m) + \left(\frac{\partial \text{Log} m}{\partial \bar{n}_P} + i \frac{\partial \text{Log} m}{\partial \bar{n}_m} \right)$$

$$\hat{\Gamma} = \frac{\Gamma}{m} + \left(\frac{\partial \text{Log} m}{\partial \bar{n}_P} + i \frac{\partial \text{Log} m}{\partial \bar{n}_m} \right)$$

Comme :

$$\frac{\partial \text{Log} m}{\partial n_P} = \frac{\partial \text{Log} m}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial n_P} + \frac{\partial \text{Log} m}{\partial L} \frac{\partial L}{\partial n_P}$$

et

$$\frac{\partial \text{Log} m}{\partial n_m} = \frac{\partial \text{Log} m}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial n_m} + \frac{\partial \text{Log} m}{\partial L} \frac{\partial L}{\partial n_m}$$

et

$$\frac{\partial L}{\partial n_P} = \frac{1}{rm} \cos \theta \quad (88)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial n_P} = \frac{1}{rm} \sin \theta \quad (89)$$

$$\frac{\partial L}{\partial n_m} = -\frac{1}{rm} \sin \theta \quad (90)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial n_m} = \frac{1}{rm} \cos \theta \quad (91)$$

$$D'où : \hat{\Gamma} = \frac{\Gamma}{m} + \frac{1}{rm} \left(\sin \theta \left(\frac{\partial \text{Log} m}{\partial \omega} - i \frac{\partial \text{Log} m}{\partial L} \right) + i \cos \theta \left(\frac{\partial \text{Log} m}{\partial \omega} - i \frac{\partial \text{Log} m}{\partial L} \right) \right) = \frac{\Gamma}{m} + \frac{1}{rm} (\sin \theta + i \cos \theta) \left(\frac{\partial \text{Log} m}{\partial \omega} - i \frac{\partial \text{Log} m}{\partial L} \right)$$

Or :

$$\frac{\partial \text{Log}(\sigma/r)}{\partial \zeta} = \left(\frac{\partial}{\partial \omega} - i \frac{\partial}{\partial L} \right) \text{Log} m \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial Z} = \frac{1}{r_0 \sigma} \cdot \frac{\partial}{\partial \zeta}$$

D'où :

$$\hat{\Gamma} = \frac{\Gamma}{m} + \frac{\Theta r_0 \sigma}{rm} \frac{\partial \text{Log}(\sigma/r)}{\partial Z}$$

Comme $m = \frac{r_0}{r} |\sigma|$ d'où :

$$\hat{\Gamma} = \frac{\Gamma}{m} + \frac{\Theta \sigma}{|\sigma|} \frac{\partial \text{Log}(\sigma/r)}{\partial Z} = \frac{\Gamma}{m} + \frac{\Theta \sigma}{|\sigma| r_0 \sigma} \left(\frac{\partial \text{Log} \sigma}{\partial \zeta} - \frac{\partial \text{Log} r}{\partial \zeta} \right)$$

Or :

$$\frac{\partial \text{Log} r}{\partial \zeta} = \frac{1}{i} \frac{\partial \text{Log} r}{\partial L} = -\frac{\sin \varphi}{i} = +i \sin \varphi$$

Donc :

$$\hat{\Gamma} = \frac{\Gamma}{m} + \frac{\Theta}{rm} \left(\frac{\partial \text{Log}(\sigma)}{\partial \zeta} + \sin \varphi \right) = \frac{1}{m} \left[\Gamma + \frac{\Theta}{r} \left(\frac{\partial \text{Log} \sigma}{\partial \zeta} + i \sin \varphi \right) \right]$$

*

Si les 2 courbes sont des géodésiques, leurs courbures géodésiques sont nulles et on a $\Gamma = 0$ dans (87). Pour voir les courbures des transformées des parallèles et des méridiens, on considère le cas où la courbe C_P , sur l'ellipsoïde, est un parallèle dont la courbure géodésique est $g_P = \sin \varphi / r$ une quantité réelle. L'angle θ vaut zéro et le nombre $\Theta = \sin \theta + i \cos \theta = i$.

* Si u et v sont deux coordonnées symétriques orthogonales / $ds^2 = Edu^2 + Gdv^2$ alors la courbure géodésique de la courbe $u = Cte$ est :

$$\rho_g = \frac{-1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}$$

Dans notre cas $u = \varphi$ et $ds^2 = \rho^2 d\varphi^2 + r^2 d\lambda^2$ d'où :

$$\rho_g = \frac{-1}{r\rho} \frac{\partial r}{\partial \varphi} = \frac{-1}{r\rho} \frac{dr}{d\varphi} = \frac{\sin \varphi}{r}$$

*

En remplaçant la valeur $\Gamma = \left(\frac{\sin \varphi}{r}, 0 \right)$ et $\Theta = i$ dans (87), nous avons les courbures des parallèles et des méridiens dans la représentation plane :

$$\hat{\Gamma} = \frac{i}{mr} \frac{\partial \text{Log} \sigma}{\partial \zeta} \quad (92)$$

* En effet :

$$\hat{\Gamma} = \frac{1}{m} \left[\Gamma + \frac{\Theta}{r} \left(\frac{\partial \text{Log} \sigma}{\partial \zeta} + i \sin \varphi \right) \right] = \frac{1}{m} \left[\frac{\sin \varphi}{r} + \frac{i}{r} \left(\frac{\partial \text{Log} \sigma}{\partial \zeta} + i \sin \varphi \right) \right] = \frac{i}{rm} \frac{\partial \text{Log} \sigma}{\partial \zeta}$$

*

Les expressions générales des courbures des images des géodésiques (87) par la représentation plane, peuvent être utilisées pour le calcul des corrections Dv ou réduction à la corde pour des mesures faites à partir des coordonnées rectangulaires $Z = (X, Y)$.

Une géodésique de a vers b sur l'ellipsoïde aura pour image une courbe plane AB . Si le gisement de la tangente à la courbe AB en A est α et le gisement de la corde AB est β , alors la correction $Dv = \delta$ est :

$$\delta = \alpha - \beta \quad (93)$$

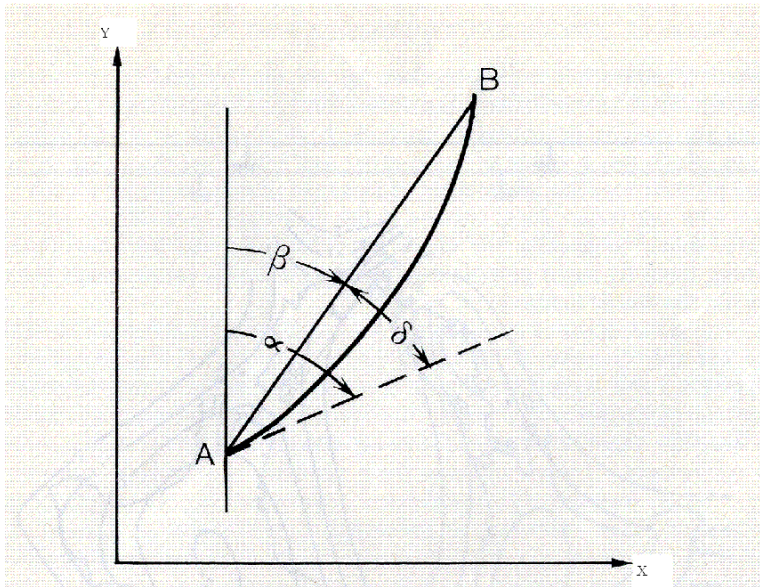


Fig. 3: La relation entre l'azimut et le gisement

En assimilant que l'image d'une géodésique peut être approximativement une parabole cubique (x^3), Hotine[4] a donné une valeur de δ comme :

$$\delta = \frac{1}{2} S \cdot G^* \quad (94)$$

où S est la longueur de la corde AB et G^* est la courbure de l'image de la géodésique au tiers de la distance AB de A vers B le long de la corde. La courbure G^* peut être calculée à partir de (87) comme $G^* = Im(\hat{\Gamma})$ en mettant $\Gamma = 0$ et $\theta = \beta - \alpha$. En définissant $\gamma = (\sin\beta, \cos\beta)$, on a alors :

* On a : $\Theta = \beta - \gamma + \delta \approx \beta - \gamma$, de l'équation (87), on obtient :

$$\hat{\Gamma} = \frac{\Theta}{rm} \left(\frac{\partial \text{Log}(\sigma)}{\partial \zeta} + \sin\varphi \right) = \frac{e^{i(\pi/2-\theta)}}{r_0 |\sigma|} \left(\frac{\partial \text{Log}(\sigma)}{\partial \zeta} + \sin\varphi \right)$$

Comme $\sigma = |\sigma| e^{i(\pi/2-\gamma)}$ d'où :

$$\hat{\Gamma} = \frac{e^{i(\pi/2-\theta+\pi/2-\gamma)}}{r_0 \sigma} \left(\frac{\partial \text{Log} \sigma}{\partial \zeta} + \sin\varphi \right) = \frac{ie^{i(\pi/2-\beta)}}{r_0 \sigma} \left(\frac{\partial \text{Log} \sigma}{\partial \zeta} + \sin\varphi \right)$$

d'où :

$$\hat{\Gamma} = \frac{i\gamma}{r_0 \sigma} \left(\frac{\partial \text{Log} \sigma}{\partial \zeta} + \sin\varphi \right)$$

*

6 Une Altération Linéaire Minimale pour La Nouvelle Zélande

Des tests ont été faits pour définir une représentation d'altération linéaire minimale pour cartographier la Nouvelle Zélande. La surface de ce pays était représentée par un total de 228 points choisis par demi-degré d'intervalle en latitude et en longitude. L'origine de la représentation est prise au point $\varphi_0 = 41^\circ$ Sud , $\lambda_0 = 173^\circ$ Est avec le gisement du méridien $\gamma_0 = 0$ à l'origine.

Les coefficients étaient calculés pour une transformation polynômiale d'ordre N variant de 4 à 12. Au delà de N=6, il y a une faible réduction de la distorsion totale T^2 et les courbes d'égal module linéaire deviennent très complexes, c'est pourquoi nous avons choisi le cas N=6 pour illustrer les propriétés de cette représentation.

La moyenne quadratique de l'altération linéaire pour cet ordre est de 1.2×10^{-4} et les courbes d'égale altération linéaire sont représentées par la Fig.4, en unités de 10^{-4} (100mm/km). Celles-ci peuvent être comparées avec celles de la représentation Mercator Transverse du pays(Fig.1).

Il est clair que pour la représentation Mercator Transverse, l'ordre de l'altération linéaire est environ 20×10^{-4} à l'île sud et d'ordre 8×10^{-4} pour l'île nord, alors que pour la représentation d'altération minimale, l'ordre de l'altération linéaire est 4×10^{-4} . Cette représentation doit aussi être comparée avec la représentation conique oblique (celle de la sphère et non l'ellipsoïde) adaptée par Craster[2] pour la Nouvelle Zélande pour laquelle l'ordre de l'altération linéaire est 12×10^{-4} .

La figure 5 montre les courbes des valeurs maximales possibles de la correction Dv en tout point en unités $0.1''/km$ utilisant l'expression (94) de

Hotine pour les corrections de Dv . Celles-ci atteignent leurs grandes valeurs pour la partie Nord du pays et c'est la plus difficile partie à s'adapter.

7 Conclusions

Cette étude cherchait à démontrer qu'en adoptant une forme mathématique générale des transformations conformes et en écartant la restriction des représentations pour des surfaces régulières développables, il est possible d'imaginer une représentation conforme qui a d'une façon marquée une altération linéaire plus faible que toute représentation conventionnelle.

Les avantages de ce type de représentation, surtout principalement pour le géomètre qui peut réduire les levés dans les systèmes des coordonnées rectangulaires de la représentation, ou bien pour négliger les petites corrections pour les gisements et les distances ou leurs déterminations par une interpolation graphique rapide à partir de la carte des courbes préparée à l'avance pour l'ensemble du pays.

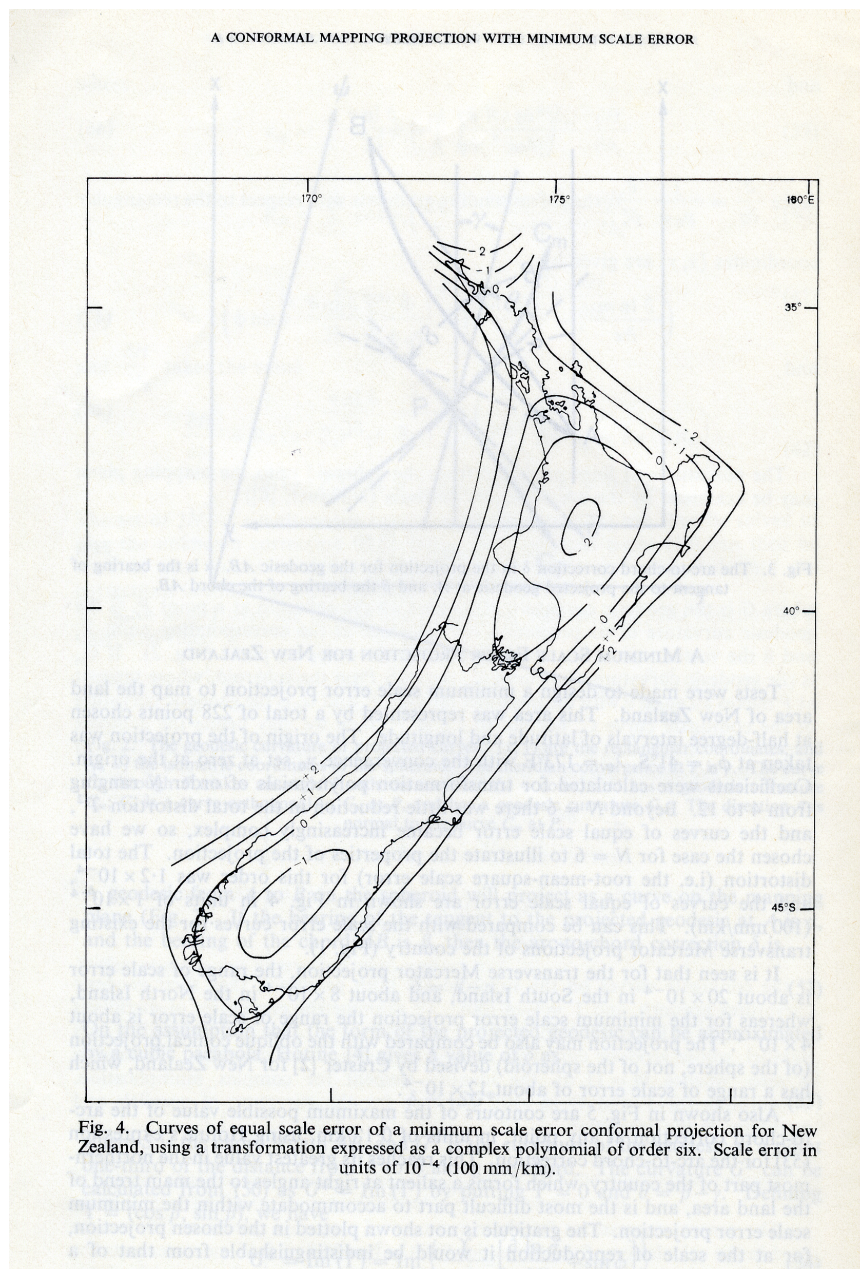
Les différents calculs exigés sont certainement pas plus compliqués que ceux exigés par la représentation de Mercator Transverse et la préparation des tables nécessaires et les cartes par le Centre des levés peut être promptement faite par les calculateurs électroniques. L'ensemble des $N+1$ nombres complexes B_n peut être utilisé directement dans toutes les formules exigées. La transformation de la latitude géodésique en latitude isométrique peut être faite par une formule en séries avec des coefficients appropriés en fonction de la latitude origine φ_0 .

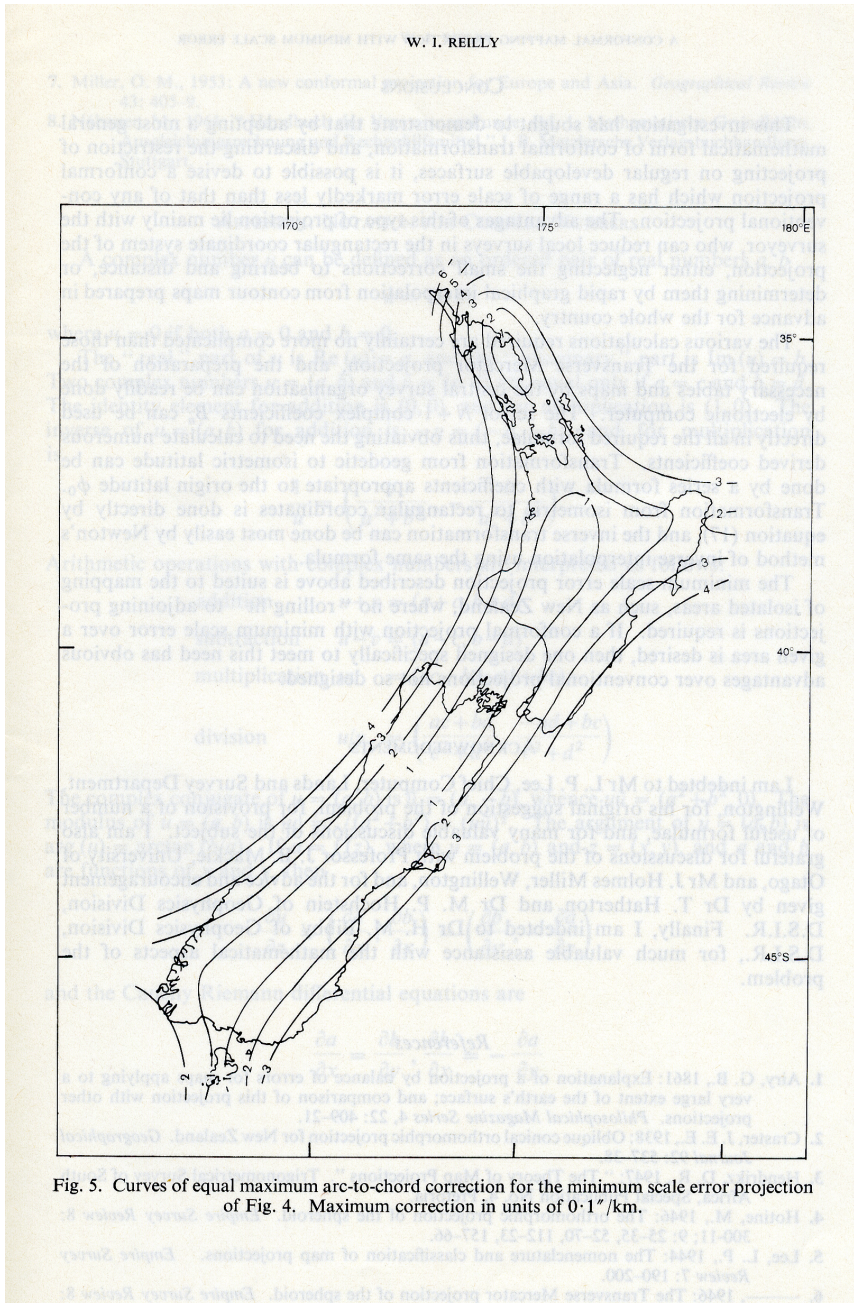
La transformation des coordonnées symétriques en coordonnées rectangulaires est faite directement par l'équation (49) et la transformation inverse peut se faire facilement par la méthode de Newton pour l'interpolation inverse utilisant la même formule.

La représentation d'altération minimale décrite ci-dessus est convenable pour cartographier des surfaces isolées comme le cas de la Nouvelle Zélande.

8 Remarques et Critique de l'Article

La Nouvelle Zélande se trouve dans l'hémisphère Sud où λ varie de 165° à 180° Est et φ de -47° à -34° . D'après la Fig.1, on ne peut pas représenter tout le pays dans une représentation de Mercator Transverse sans augmenter la valeur de l'altération linéaire. De plus, on obtient pour l'île Sud du pays une altération linéaire atteignant 20×10^{-4} .





Une représentation cylindrique conforme oblique, en choisissant l'isomètre central le grand cercle oblique passant au milieu de la Nouvelle Zélande, peut donner un résultat meilleur que la représentation Mercator Transverse.

Pour avoir une représentation de déformations linéaires minimales sur le pays, il faut qu'il ait un certain nombre de paramètres qui doivent satisfaire une certaine condition. Quant à la représentation conforme conique oblique, elle ne dépend que de trois paramètres n , C , R . Alors que la représentation conforme définie par un polynôme aura plus de paramètres avec lesquels la condition de minimiser les déformations peut aboutir à quelque chose.

L'auteur définit donc la représentation par l'équation (49) :

$$Z = (X, Y) = X + iY = r_0 \sum_{n=0}^N B_n \zeta^n \quad (95)$$

$$\text{avec } \zeta = (\omega, L) = \omega + iL \quad (96)$$

$$\text{et } m = \frac{r_0}{r} |\sigma| \quad (97)$$

$$\text{et } \sigma = \sum_{n=1}^N n B_n \zeta^{n-1} \quad (98)$$

L'auteur utilise par analogie *la balance of errors d'Airy*. C'est une méthode pour déterminer les représentations équivalentes ou quelconques de déformations minimales, si m_1 et m_2 les modules principaux en un point, Airy a cherché à rendre minimum l'intégrale $\int \int_S [(m_1 - 1)^2 + (m_2 - 1)^2] dS$ où dS est l'élément de surface. Dans notre cas, $m_1 = m_2$ et l'auteur considère $T^2 = \frac{1}{A} \int \int_S (m - 1)^2 dA$. Les éléments S_i de la surface S ont une amplitude de 1/un demi degré en latitude et de même pour la longitude.

Pour un élément S_i de la surface S du pays, l'auteur utilise une approximation sphérique et de plus sur S_i la fonction $\epsilon(\varphi, \lambda) = m(\varphi, \lambda) - 1$ prend la valeur du centre de S_i $\epsilon(\varphi_i, \lambda_i)$.

Soit un S_i avec $\Delta\varphi = \Delta\lambda = 0.5^\circ$. L'élément de surface $dA = r\rho d\varphi d\lambda =$

$\rho N \cos \varphi d\varphi d\lambda$ ce qui donne au premier terme en e^2 :

$$dA = a^2 \cos \varphi d\varphi d\lambda (1 - e^2 \cos 2\varphi) = \underbrace{a^2 \cos \varphi d\varphi d\lambda}_{\text{termes sphérique}} - \underbrace{a^2 e^2 \cos \varphi \cos 2\varphi d\varphi d\lambda}_{\partial A} \quad (99)$$

$$dA = dA_S - \partial A \quad (100)$$

$$\text{et } \cos \varphi = \cos \varphi_i - (\varphi - \varphi_i) \sin \varphi_i - 1/2 (\varphi - \varphi_i)^2 \cos \varphi_i + \dots \quad (101)$$

Voyons la variation de $\epsilon^2 = (m - 1)^2$:

$$(m(\varphi, \lambda) - 1)^2 = (m(\varphi_i, \lambda_i) - 1)^2 + (\varphi - \varphi_i) \frac{\partial \epsilon^2}{\partial \varphi}(\varphi_i, \lambda_i) + (\lambda - \lambda_i) \frac{\partial \epsilon^2}{\partial \lambda}(\varphi_i, \lambda_i) + \dots \quad (102)$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} \int \int_{S_i} \epsilon^2 dA &= \int \int_{S_i} \left[\epsilon^2(\varphi_i, \lambda_i) + (\varphi - \varphi_i) \frac{\partial \epsilon^2}{\partial \varphi}(\varphi_i, \lambda_i) + (\lambda - \lambda_i) \frac{\partial \epsilon^2}{\partial \lambda}(\varphi_i, \lambda_i) \right] \\ &[\cos \varphi_i - (\varphi - \varphi_i) \sin \varphi_i] a^2 d\varphi d\lambda - a^2 e^2 \int \int_{S_i} \epsilon^2(\varphi, \lambda) \cos \varphi \cos 2\varphi d\varphi d\lambda + \end{aligned} \quad (103)$$

Ou encore :

$$\begin{aligned} \int \int_{S_i} \epsilon^2 dA &= a^2 \int \int_{S_i} \epsilon^2(\varphi_i, \lambda_i) \cos \varphi_i d\varphi d\lambda + a^2 \cos \varphi_i \frac{\partial \epsilon^2}{\partial \varphi}(\varphi_i, \lambda_i) \int \int_{S_i} (\varphi - \varphi_i) d\varphi d\lambda + \\ &a^2 \cos \varphi_i \frac{\partial \epsilon^2}{\partial \lambda}(\varphi_i, \lambda_i) \int \int_{S_i} (\lambda - \lambda_i) d\varphi d\lambda - \\ &a^2 \epsilon^2(\varphi_i, \lambda_i) \sin \varphi_i \int \int_{S_i} (\varphi - \varphi_i) d\varphi d\lambda - a^2 e^2 \int \int_{S_i} \epsilon^2(\varphi, \lambda) \partial A \end{aligned} \quad (104)$$

Or :

$$\int \int_{S_i} (\varphi - \varphi_i) d\varphi d\lambda = \int_{\lambda_i - \Delta\lambda/2}^{\lambda_i + \Delta\lambda/2} d\lambda \int_{\varphi_i - \Delta\varphi/2}^{\varphi_i + \Delta\varphi/2} (\varphi - \varphi_i) d\varphi = \Delta\lambda \cdot 0 = 0 \quad (105)$$

De même on a :

$$\int \int_{S_i} (\lambda - \lambda_i) d\varphi d\lambda = 0 \quad (106)$$

D'où :

$$\int \int_{S_i} \epsilon^2 dA = a^2 \epsilon^2(\varphi_i, \lambda_i) \cos \varphi_i \Delta \varphi \Delta \lambda - \int \int_{S_i} \epsilon^2(\varphi, \lambda) \partial A \quad (107)$$

Examinons $\int \int_{S_i} \epsilon^2(\varphi, \lambda) \partial A$:

$$\int \int_{S_i} \epsilon^2(\varphi, \lambda) \partial A = a^2 e^2 \int \int_{S_i} \epsilon^2 \cos \varphi \cos 2\varphi d\varphi d\lambda \quad (108)$$

or $\cos \varphi \cos 2\varphi = 1/2(\cos \varphi + \cos 3\varphi)$, en utilisant le même calcul que pour $\int \int_{S_i} \epsilon^2 \cos \varphi d\varphi d\lambda$, on trouve :

$$\frac{1}{\Delta \varphi \Delta \lambda} \int \int_{S_i} \epsilon^2(\varphi, \lambda) \partial A = a^2 e^2 \cos \varphi_i \cos 2\varphi_i \epsilon^2(\varphi_i, \lambda_i) \quad (109)$$

d'où :

$$\int \int_{S_i} \epsilon^2 dA = a^2 \cos \varphi_i \epsilon^2(\varphi_i, \lambda_i) (1 - e^2 \cos 2\varphi_i) \Delta \varphi \Delta \lambda \quad (110)$$

Calculons numériquement $e^2 \cos 2\varphi_i$ au point origine $\varphi_0 = 41^\circ$:

$e^2 = \alpha(2 - \alpha)$ avec $\alpha = (a - b)/a$ et $a = 6378160.0\text{m}$ et $\alpha = 1/298.247$ valeurs adoptées par l'UGGI en 1967.

D'où $e^2 \cos 2\varphi_i = 9.32 \times 10^{-4} \approx 10^{-3}$ très négligeable devant 1. Donc l'approximation de l'auteur pour calculer T^2 est justifiée.

Pour le calcul des coefficients B_n , on utilise 228 points et on détermine un polynôme d'ordre 6 soit :

$$Z = r_0(B_0 + B_1\zeta + B_2\zeta^2 + B_3\zeta^3 + B_4\zeta^4 + B_5\zeta^5 + B_6\zeta^6) = r_0 f(\zeta) \quad (111)$$

$$\text{et } \sigma = \frac{\partial f}{\partial \zeta} = B_1 + 2B_2\zeta + 3B_3\zeta^2 + 4B_4\zeta^3 + 5B_5\zeta^4 + 6B_6\zeta^5 \quad (112)$$

Avec $Im(B_2) = 0$ et $Re(B_2) = -1/2 \sin \varphi_0$ et $Im(B_1) = 1$ et $Re(B_1) = 0$ et $B_0 = Z_0/r_0$ ce qui donne :

$$Z = r_0 \left(\frac{Z_0}{r_0} + i\zeta - \frac{\sin \varphi_0}{2} \zeta^2 + \sum_{n=3}^6 B_n \zeta^n \right) \quad (113)$$

Il reste donc 4 coefficients à déterminer et le système des équations définies par les équations (72) est d'ordre 7 à 7 inconnues.

L'auteur n'a pas fourni des détails sur le calcul numérique et les valeurs des coefficients trouvées. Avec la représentation définie par le polynôme du sixième degré en ζ , les courbes d'égaux altérations linéaires englobant tout le

pays et sont telles que $|m - 1| \leq 2 \times 10^{-4}$. Les corrections Dv prennent des valeurs jusqu'à $0.6''/\text{km}$ ($1.8 \text{ dmgr}/\text{km}$) dans la partie nord ouest de l'île Nord de la Nouvelle Zélande alors que dans le reste du pays on a $|Dv| \leq 0.4''/\text{km}$ ($1.2 \text{ dmgr}/\text{km}$). Du fait que le pays a une petite largeur inférieure à 250 km et les dispositions des courbes de $\epsilon = m - 1$ et de Dv , les corrections apportées aux distances et aux gisements pour des levés de petites zones sont souvent négligeables.

Une des propriétés de l'utilisation de cette représentation est qu'elle est convenable pour les zones isolées de forme en fuseaux.

En utilisant les fonctions complexes, l'auteur nous donne par les formules (97) les courbures des images des courbes du modèle par la représentation conforme. Si on connaît sur le modèle l'angle que fait une courbe avec des courbes coordonnées, on détermine facilement la courbure de la transformée de la courbe.

Références

1. Airy, G.B., 1861 :Explanation of a projection by balance of errors for maps applying to a very large extent of the earth's surface ; and comparison of this projection with other projections.*Philosophical Magazine Series* 4,22 :409-21.
2. Craster, J.E.E., 1938 : Oblique conical orthomorphic projection for New Zeland.*Geographical Journal* 92 :537-38.
3. Hendrikz, D.R., 1947 :” The Theory of Map Projections”. Trigonometrical Suvey of South Africa, Special Publication No. 4, Pretoria.
4. Hotine, M., 1946 : The orthometric projection of the spheroid. *Empire Survey Review* 8 :300-11 ;9 :25-35,52-70,112-123,157-166.
5. Lee, L.P., 1944 : The nomenclature and classification of map projections. *Empire Survey Review* 7 :190-220.
- 6.Lee, L.P.,1946 : The Transverse Mercator projection of the spheroid. *Empire Survey Review* 8 :142-152.
7. Miller, O.M., 1953 : A new conformal projection for Europe and Asia. *Geographical Review* 43 :405-409.
8. Nâbauer, M., 1961 : ”Handbuch der Vermessungskunde,Bd. 1, Mathe-

matische Grundlagen, Ausgleichsrechnung und Rechenhilfsmittel " J.B. Metzlersche Verlagsbuchhandlung, Stuttgart.

Table des figures

1	Les courbes d'altération linéaire égale des deux représentations UTM de la Nouvelle-Zélande. L'altération linéaire est exprimée en 100mm/km	8
2	(y, x) les coordonnées rectangulaires et (ω, ψ) les coordonnées symétriques de l'ellipsoïde. La convergence des méridiens en P est γ . La courbe C_m passant par P fait un angle θ avec le méridien ($\omega = \text{constante}$) et a une courbure géodésique G_m ; C_P est une courbe orthogonale à C_m en P et a une courbure géodésique G_P . La direction \bar{n} est normale à la courbe C_m en P	18
3	La relation entre l'azimut et le gisement	21