

REPUBLIQUE TUNISIENNE  
MINISTERE DU TRANSPORT ET DE L'EQUIPEMENT  
OFFICE DE LA TOPOGRAPHIE ET DU CADASTRE

**NOTE SUR LES REPRESENTATIONS  
QUASI-CONFORMES**

Par

**ABDELMAJID BEN HADJ SALEM**

INGÉNIEUR GÉNÉRAL À L'OFFICE DE LA TOPOGRAPHIE ET DU CADASTRE  
ABENHADJSALEM@GMAIL.COM

MARS 2011

VERSION 1.

OFFICE DE LA TOPOGRAPHIE ET DU CADASTRE  
WWW.OTC.NAT.TN

## Table des matières

1	Introduction . . . . .	1
2	Les Représentations ou Transformations Quasi-Conformes . . . . .	2
2.1	Développement d'une fonction en un point $z_0$ . . . . .	2
3	Etude de la Transformée d'un cercle . . . . .	3
4	Calcul d'un élément de longueur sur le Plan . . . . .	4
5	Exemple de Transformation Quasi-conforme . . . . .	5
6	Références . . . . .	6

# NOTE SUR LES REPRESENTATIONS QUASI-CONFORMES

**ABDELMAJID BEN HADJ SALEM**  
Office de la Topographie et du Cadastre  
BP 1056, 1080 Tunis Cedex

## 1 Introduction

En cartographie mathématique, on a étudié les représentations de la sphère avec les variables  $(L_M, \lambda)$  ou celles de l'ellipsoïde de révolution avec les coordonnées  $(L, \lambda)$  vers le plan  $(X, Y)$  avec :

$$\begin{cases} X = X(L_M, \lambda) \\ Y = Y(L_M, \lambda) \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{ou} \quad \begin{cases} X = X(L, \lambda) \\ Y = Y(L, \lambda) \end{cases} \quad (2)$$

avec :

$$L_M = \text{Logtg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \quad \text{latitude de Mercator} \quad (3)$$

$$L = \text{Logtg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) - \frac{e}{2} \text{Log} \frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi} \quad \text{latitude isométrique} \quad (4)$$

En posant :

$$z = L_M + i\lambda \quad (5)$$

$$\text{ou} \quad z = L + i\lambda \quad (6)$$

$$Z = X + iY \quad (7)$$

on a considéré les représentations conformes (c'est-à-dire qui conservent les angles) ou encore définie par :

$$Z = Z(z) \quad (8)$$

avec  $Z(z)$  une fonction dite holomorphe de  $z$  soit :

$$\frac{\partial Z}{\partial \bar{z}} = 0 \quad (9)$$

où  $\bar{z}$  est le conjugué de  $z$  soit  $\bar{z} = L - i\lambda$ .

## 2 Les Représentations ou Transformations Quasi-Conformes

**Définition :** Une fonction  $f(z) = Z = Z(z)$  définie et dérivable sur un domaine  $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$  (l'ensemble des nombres complexes) est dite quasi-conforme si elle vérifie :

$$\frac{\partial Z}{\partial \bar{z}} = \mu(z) \cdot \frac{\partial Z}{\partial z} \quad (10)$$

avec :

$$|\mu(z)| < 1 \quad (11)$$

$|z|$  désigne le module du nombre complexe  $z$ . Le coefficient  $\mu$  s'appelle *coefficient de Beltrami*.

### 2.1 Développement d'une fonction en un point $z_0$

Soit  $f$  une fonction quasi-conforme et un point  $z_0 \in \mathcal{D}$ . Ecrivons un développement de  $f$  au point  $z_0$ . On a alors :

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0) \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) + (\bar{z} - \bar{z}_0) \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\bar{z}_0) + \dots \quad (12)$$

Par un changement de variable, on peut prendre  $z_0 = 0$ , d'où :

$$f(z) = f(z_0) + z \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) + \bar{z} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\bar{z}_0) + \dots \quad (13)$$

Utilisant (10), l'équation précédente s'écrit en négligeant les termes du deuxième degré :

$$f(z) = f(z_0) + z \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) + \bar{z} \mu(z_0) \cdot \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) \quad (14)$$

Donc  $f(z)$  s'écrit localement :

$$f(z) = \alpha + \beta z + \gamma \bar{z} \quad (15)$$

$$\text{où } \alpha, \beta, \gamma \text{ des constantes complexes avec } \left| \frac{\gamma}{\beta} \right| < 1 \quad (16)$$

### 3 Etude de la Transformée d'un cercle

On sait que pour une transformation conforme, l'image d'un cercle autour d'un point est un cercle (ou encore l'indicatrice de Tissot est un cercle). Soit un point  $z_0$  qu'on peut prendre égal à 0. Par un changement de l'origine des axes, la fonction  $f$  s'écrit :

$$f(z) = \beta z + \mu \beta \bar{z} \quad (17)$$

Par abus, on garde la même notation. On considère autour de l'origine  $z_0 = 0$  un point  $M(x = a \cos \theta, y = a \sin \theta)$  qui décrit un cercle infiniment petit de rayon  $a$ . Etudions son image par  $f$ .

De l'équation précédente, on a :

$$z = a \cos \theta + i a \sin \theta = a e^{i\theta} \quad (18)$$

$$\mu = |\mu| e^{ik} \quad (19)$$

$$\beta = |\beta| e^{il} \quad (20)$$

$$f(z) = a |\beta| e^{il} (e^{i\theta} + |\mu| e^{i(k-\theta)}) \quad (21)$$

Si  $\theta_1 = \frac{k}{2} = \frac{\arg(\mu)}{2}$  on a :  $z_1 = a e^{ik/2}$  et :

$$f(z_1) = a |\beta| e^{il} e^{ik/2} (1 + |\mu|) \quad (22)$$

$$|f(z_1)| = a |\beta| (1 + |\mu|) \quad (23)$$

Maintenant prenons  $\theta_2 = \theta_1 + \frac{\pi}{2} = \frac{k}{2} + \frac{\pi}{2}$ , alors  $z_2 = a e^{i\theta_2} = a e^{ik/2} e^{i\pi/2} = i a e^{ik/2}$  et on obtient :

$$f(z_2) = i a |\beta| e^{il} e^{ik/2} (1 - |\mu|) \quad (24)$$

$$|f(z_2)| = a |\beta| (1 - |\mu|) \quad (25)$$

en tenant compte que  $|\mu| < 1$ .

Des équations (21),(23) et (25), on déduit que l'image de  $M$  décrit une ellipse de grand-demi axe et demi-petit axe respectivement (Fig. 1) :

$$a' = a |\beta| (1 + |\mu|) \quad (26)$$

$$b' = a |\beta| (1 - |\mu|) \quad (27)$$

On appelle :

$$K = \frac{1 + |\mu|}{1 - |\mu|} \quad (28)$$

coefficient de distortion ou de dilatation.

---

<sup>1</sup>  $z = x + iy = |z| e^{i\theta}$ ,  $\theta = \arg(z)$

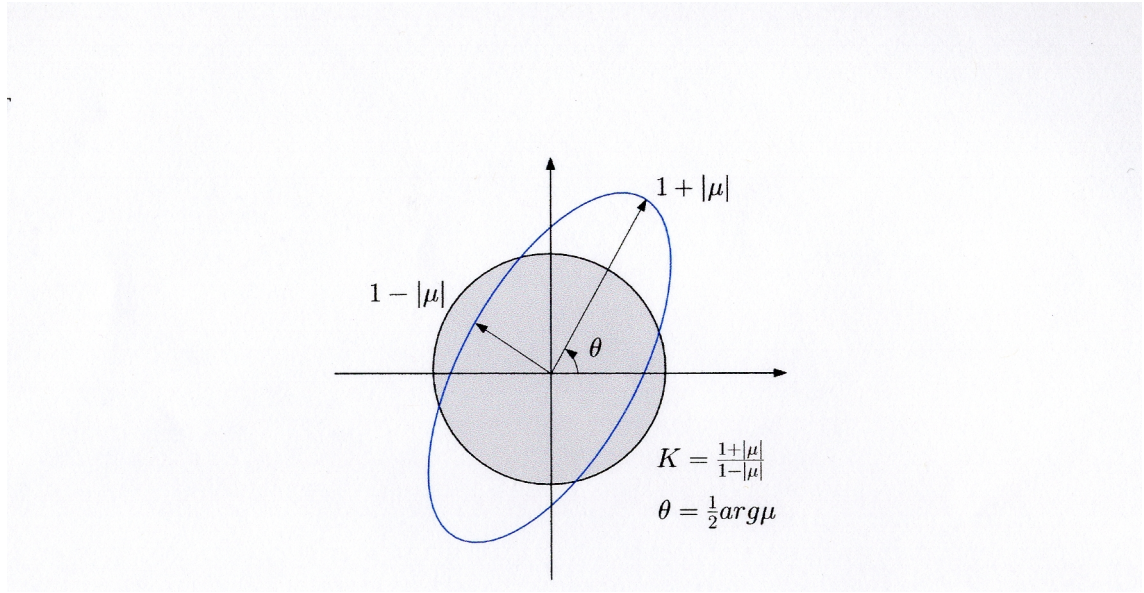


Fig. 1: L'Image d'un Cercle

#### 4 Calcul d'un élément de longueur sur le Plan

Un élément de longueur sur le plan est donné par :

$$dS^2 = dX^2 + dY^2 = |df|^2 = df \cdot \bar{d}f \quad (29)$$

Comme  $df = \beta dz + \gamma d\bar{z}$  et  $\bar{d}f = \bar{\beta} d\bar{z} + \bar{\gamma} dz$ , on alors :

$$\begin{aligned} dS^2 = dX^2 + dY^2 = |df|^2 = df \cdot \bar{d}f &= (\beta dz + \gamma d\bar{z})(\bar{\beta} d\bar{z} + \bar{\gamma} dz) \\ &= \beta\bar{\beta} dz d\bar{z} + \gamma\bar{\gamma} dz d\bar{z} + dz d\bar{z} \left( \beta\bar{\gamma} \frac{dz}{d\bar{z}} + \gamma\bar{\beta} \frac{d\bar{z}}{dz} \right) \end{aligned} \quad (30)$$

Posons :

$$ds^2 = dz \cdot d\bar{z} \quad (31)$$

Le carré du module linéaire de la transformation quasi-conforme s'écrit :

$$m^2 = \frac{dS^2}{ds^2} = |\beta|^2 + |\gamma|^2 + \left( \beta\bar{\gamma} \frac{dz}{d\bar{z}} + \gamma\bar{\beta} \frac{d\bar{z}}{dz} \right) \quad (32)$$

Dans l'équation (32), considérons  $z = ae^{i\theta}$  varie le long d'un cercle de rayon  $a$  infiniment petit et faisons tendre  $\theta \rightarrow 2\pi$ . Alors, on obtient :

$$\frac{dz}{d\bar{z}} = \frac{aie^{i\theta} d\theta}{-aie^{-i\theta} d\theta} = -e^{2i\theta} = -1 \quad (33)$$

$$\frac{d\bar{z}}{dz} = -e^{-2i\theta} = -1 \quad (34)$$

L'équation (32) devient :

$$m^2 = \frac{dS^2}{ds^2} = |\beta|^2 + |\gamma|^2 - (\beta\bar{\gamma} + \gamma\bar{\beta}) \quad (35)$$

Comme :

$$\gamma = \mu\beta$$

on obtient :

$$m^2 = \frac{dS^2}{ds^2} = |\beta|^2 + |\beta|^2|\mu|^2 - (\beta\bar{\beta}\bar{\mu} + \mu\beta\bar{\beta}) \quad (36)$$

or  $\mu + \bar{\mu} = 2|\mu|\cos\arg(\mu)$ , par suite l'équation (36) s'écrit :

$$m^2 = \frac{dS^2}{ds^2} = |\beta|^2(1 + |\mu|^2 - 2|\mu|\cos\arg(\mu)) \quad (37)$$

Remplaçant  $\beta$  par  $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$ , (37) devient :

$$m^2 = \frac{dS^2}{ds^2} = \left| \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) \right|^2 (1 + |\mu|^2 - 2|\mu|\cos\arg(\mu)) \quad (38)$$

## 5 Exemple de Transformation Quasi-conforme

Lors de passage de coordonnées planes  $(X, Y)_i$  d'un système géodésique  $S_1$  à des coordonnées planes  $(X', Y')_j$  dans un autre système géodésique  $S_2$ , on utilise souvent une transformation du type :

$$X' = X_0 + aX + bY \quad (39)$$

$$Y' = Y_0 + cX + dY \quad (40)$$

ou encore sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad (41)$$

En posant  $Z = X' + iY'$  et  $z = X + iY$ , on obtient :

$$Z = (X_0 + iY_0) + X(a + ic) + Y(b + id) \quad (42)$$

Posons :

$$Z_0 = X_0 + iY_0 \quad (43)$$

Comme  $X = (z + \bar{z})/2$  et  $Y = (z - \bar{z})/2i$ , alors l'équation (42) s'écrit :

$$Z = Z_0 + z \left( \frac{a+d}{2} + i\frac{c-b}{2} \right) + \bar{z} \left( \frac{a-d}{2} + i\frac{b+c}{2} \right) \quad (44)$$

Posons :

$$\beta = \frac{a+d}{2} + i\frac{c-b}{2} \quad (45)$$

$$\gamma = \frac{a-d}{2} + i\frac{b+c}{2} \quad (46)$$

Alors (44) s'écrit :

$$Z = Z_0 + \beta z + \gamma \bar{z} \quad (47)$$

Pour quelles valeurs de  $a, b, c, d$  la transformation (41) est quasi-conforme ? En comparant (44) avec (14), il faut que  $|\gamma| < |\beta|$  soit :

$$|\gamma| < |\beta| \Rightarrow |\gamma|^2 < |\beta|^2 \Rightarrow \frac{(a-d)^2 + (b+c)^2}{4} < \frac{(a+d)^2 + (c-b)^2}{4} \\ \Rightarrow ad - bc > 0 \quad (48)$$

C'est-à-dire que le déterminant de la matrice (41) soit positif.

## 6 Références

1. **W. Zeng, L.M. Lui, F. Luo, T.F. Chan, S.T. Yau, X.F. Gu** : Computing Quasiconformal Maps on Riemann surfaces using Discrete Curvature Flow. 23p. Mai 2010. ArXiv :1005.4648v1.

2. **L. Bers** : Quasiconformal mappings, with applications to differential equations, function theory and topology. American Mathematical Society Bulletin, vol 83 , no 6, pp 1083-1100,1977.