

REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EQUIPEMENT ET DE
L'ENVIRONNEMENT
OFFICE DE LA TOPOGRAPHIE ET DU CADASTRE

**SELECTED PAPERS
DE L'INGÉNIEUR GÉNÉRAL
ABDELMAJID BEN HADJ SALEM
Tome I**

Septembre 2013

version 5.d

OFFICE DE LA TOPOGRAPHIE ET DU CADASTRE
www.otc.nat.tn

A mes chers parents, à ma femme, à mes enfants, à mes professeurs et à tous ceux qui m'ont apporté leurs soutiens.

Avant-Propos

J'ai le grand plaisir de remettre le tome I de papiers sélectionnés parmi les documents et notes techniques que j'ai rédigés au cours de mes années de travail à l'OTC dont certains sont relatifs aux cours suivis lors de mes années d'études d'ingénieurs à l'Ecole Nationale des Sciences Géographiques de France.

Ces papiers touchent différents thèmes à savoir :

- la théorie des erreurs,
- la géométrie différentielle de l'ellipsoïde de révolution,
- la géodésie et en particulier les systèmes et les réseaux géodésiques,
- les représentations planes,
- la géophysique.

Leurs parutions dans ce document ne suivent pas l'ordre chronologique de leurs rédactions.

Tunis,
Septembre 2013

*Abdelmajid
Ben Hadj Salem, Dipl.-Ing.
Ingénieur Général Géographe
abenhadjalem@gmail.com*

Table des matières

Avant-Propos	iii
1 THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES MOINDRES CARRÉS	1
1.1 INTRODUCTION	1
1.2 MODÈLE FONCTIONNEL ET MODÈLE STOCHASTIQUE	2
1.2.1 Le Modèle Fonctionnel	2
1.2.2 La Méthode des Equations d'observations	3
1.3 LE MODÈLE STOCHASTIQUE	4
1.4 LA VARIANCE DES MESURES	5
1.5 LE MODÈLE FONCTIONNEL	7
1.6 LE MODÈLE STOCHASTIQUE	7
1.7 LA QUANTITÉ D'INFORMATION DE FISHER	7
1.7.1 L'Inégalité de Rao-Cramer	7
1.8 LA MATRICE D'INFORMATION DE FISHER	9
1.9 APPLICATION À LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS	10
1.10 LES INVERSES GÉNÉRALISÉES	12
1.10.1 Introduction	12
1.10.2 Propriétés des matrices	13
1.11 DÉFINITION	13

1.12	EXISTANCE	13
1.13	PROPRIÉTÉS	14
1.14	LES SYSTÈMES LINÉAIRES	14
	Littérature	14
2	ASPECTS DE LA THÉORIE DE L'ESTIMATION	15
2.1	ESTIMATION LINÉAIRE	15
2.1.1	Cas 1	16
2.1.2	Calcul de la Variance	16
	Littérature	17
3	NOTE SUR UNE TRANSFORMATION DES COORDONNÉES GÉOCENTRIQUES (X, Y, Z) AUX COORDONNÉES (φ, λ, he)	19
3.1	INTRODUCTION	19
3.2	RÉSOLUTION DU PROBLÈME	20
3.2.1	Calcul de la longitude	20
3.2.2	Calcul de la latitude géodésique	20
3.3	APPLICATION	23
3.3.1	Calcul de la longitude géodésique	23
3.3.2	Calcul de la latitude géodésique	23
	Littérature	27
4	NOTE SUR LA TRANSFORMATION DE HELMERT :ÉTUDES DES ECARTS-TYPES	29
4.1	INTRODUCTION	29
4.2	LA TRANSFORMATION DE HELMERT BIDIMENSIONNELLE	30
4.3	RÉSOLUTION PAR LES MOINDRES CARRÉS	31
4.4	LA SOLUTION PAR LES MOINDRES CARRÉS	33
	Littérature	35

5	RAPPELS MATHÉMATIQUES POUR LA THÉORIE DU POTENTIEL	37
5.1	FORMES DIFFÉRENTIELLES	37
5.2	PRODUIT EXTÉRIEUR	38
5.3	DÉRIVATION EXTÉRIEURE	38
5.4	OPÉRATEUR DE HODGE	39
5.5	CHANGEMENT DE VARIABLES	40
5.6	QUELQUES THÉORÈMES	42
5.6.1	Théorème de Stokes	42
5.6.2	Théorème de Green	42
5.7	LES DISTRIBUTIONS	43
5.7.1	Introduction	43
5.8	CONVOLUTION	45
6	NOTE SUR L'ANALYSE DE STRUCTURE D'UN RÉSEAU GÉODÉSIQUE DE BASE :ASPECT TRIDIMENSIONNEL	47
6.1	INTRODUCTION	47
6.2	FONCTION ECART	47
6.3	NOTION DE LA FONCTION ECART EN GÉODÉSIE TRIDIMENSIONNELLE ...	50
6.4	ANNEXE	52
6.4.1	Recherches des vecteurs et valeurs propres de la matrice A	52
	Littérature	54
7	L'ORTHODROMIE & LA LOXODROMIE DE LA SPHÈRE	55
7.1	DÉFINITIONS	55
7.2	L'EQUATION DE LA LOXODROMIE - CAS DE LA SPHÈRE	55
7.2.1	L'Elément ds de la Loxodromie sur la Sphère	56
7.3	L'EQUATION DE LA LOXODROMIE - CAS DE L'ELLIPSOÏDE	57
7.3.1	L'Elément ds de la Loxodromie sur l'ellipsoïde	57
7.4	LA CORRECTION DE GIVRY	58
	Littérature	58

8	NOTE SUR LES LIGNES GÉODÉSQUES DE LA SPHÈRE	59
8.1	DÉFINITION	59
8.2	PAR L'APPLICATION DE LA TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE	60
8.3	PAR L'APPLICATION DU CALCUL DES VARIATIONS	61
8.3.1	Calcul des coefficients de Christoffel	62
8.3.2	Les Equations des géodésiques de la sphère	62
	Littérature	65
9	NOTE SUR UNE PROPRIÉTÉ DES LIGNES GÉODÉSQUES DE L'ELLIPSOÏDE ..	67
9.1	QUELQUES RAPPELS SUR LA THÉORIE DES SURFACES	67
9.1.1	Rappel	67
9.1.2	Définitions	67
9.2	QUELQUES EXEMPLES DE COORDONNÉES SYMÉTRIQUES	68
9.2.1	Les Coordonnées Cartésiennes	68
9.2.2	Les Coordonnées Polaires	68
9.2.3	Les Coordonnées Géographiques sur la Sphère	69
9.2.4	Les Coordonnées Géodésiques de l'Ellipsoïde	69
9.3	UNE PROPRIÉTÉ DES LIGNES GÉODÉSQUES DE L'ELLIPSOÏDE	70
9.3.1	Calculs Préliminaires	70
9.3.2	Une propriété des lignes géodésiques de l'ellipsoïde	71
	Littérature	72
10	ATTRACTION DU SOLEIL ET DE LA LUNE	73
10.1	INTRODUCTION	73
10.2	LE POTENTIEL DE MARÉE LUNO-SOLAIRE	74
10.3	LES TERMES ZONAUX, SECTORIAUX ET TESSERAUX	77
	Littérature	78

11	NOTE DE GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE - LE REPÈRE LOCAL -	79
11.1	LE REPÈRE LOCAL	79
11.1.1	Introduction	79
11.2	L'EXPRESSION DIFFÉRENTIELLE DES VECTEURS DU REPÈRE LOCAL	80
	Littérature	82
12	LA GRAVIMÉTRIE ET LE CHAMP DE PESANTEUR	83
12.1	INTRODUCTION	83
12.2	LE CHAMP NORMAL	84
12.3	CHAMP PERTURBATEUR	84
12.4	APPLICATIONS	85
12.4.1	Réduction des distances	85
12.4.2	En Nivellement	85
12.5	LES TECHNIQUES DE LA GRAVIMÉTRIE	86
12.5.1	Principe de la mesure absolue de g	86
12.5.2	Principe des mesures relatives	86
	Littérature	87
13	LA COURBURE DES TRANSFORMÉES PLANES CONFORMES DES GÉODÉSQUES	89
13.1	NOTE SUR L'EMPLOI DES LATITUDES ISOMÉTRIQUES	89
13.2	NOTE SUR L'EXPRESSION GÉNÉRALE DE LA COURBURE DES TRANSFORMÉES PLANES CONFORMES DES GÉODÉSQUES	90
13.3	APPLICATION À LA REPRÉSENTATION UTM	91
	Littérature	91
14	L'ÉVOLUTION DES RÉSEAUX GÉODÉSQUES TUNISIENS	93
14.1	INTRODUCTION	93
14.2	HISTORIQUE	94
14.3	LES SYSTÈMES GÉODÉSQUES EN TUNISIE	95
14.3.1	Le Système Géodésique 'VOIROL'	95
14.3.2	Le Système Géodésique 'CARTHAGE 34'	95
14.4	LES REPRÉSENTATIONS PLANES	95

14.4.1	La Représentation de Bonne	96
14.4.2	La Représentation des Fuseaux ou Représentation de Guillaume Postel	96
14.4.3	La Représentation Lambert	96
14.4.4	La Représentation U.T.M.	96
14.5	LES TRAVAUX DE MODERNISATION DES RÉSEAUX GÉODÉSIQUES TUNISIENS.....	97
14.5.1	La Structure des Réseaux Géodésiques Tunisiens après 1978	97
14.5.2	La Compensation du Réseau Géodésique Primordial	98
	Littérature	98
15	RÉFLEXIONS SUR LA MISE EN PLACE D'UN NOUVEAU SYSTÈME GÉODÉSIQUE POUR UN PAYS NEUF PAR LA TECHNIQUE DOPPLER.....	99
15.1	PREMIÈRE MÉTHODE	99
15.2	DEUXIÈME MÉTHODE.....	102
16	ELÉMENTS DE LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS	103
16.1	INTRODUCTION	103
16.1.1	Définition du Problème	103
16.2	LES MESURES	104
16.3	POIDS - MATRICE DE POIDS - VARIANCE DE LA MESURE DE POIDS UNITAIRE.....	105
16.4	POSE DES EQUATIONS D'OBSERVATIONS	105
16.4.1	La Géodésie Bidimensionnelle	106
16.4.2	La Géodésie Tridimensionnelle	108
16.4.3	L'Ecriture Matricielle des Equations d'Observations	109
16.5	MÉTHODE DES EQUATIONS D'OBSERVATIONS AVEC EQUATIONS DE CONDITION	112
16.5.1	Cas où les r grandeurs à déterminer sont liés par p relations.....	112
	Littérature	113

17	MISE A NIVEAU DE LA GÉODÉSIE TUNISIENNE PAR L'UNIFICATION DE SES RÉSEAUX GÉODÉSIQUES TERRESTRES	115
17.1	EXPOSÉ DES MOTIFS	115
17.2	LES JUSTIFICATIFS	117
17.2.1	L'Aspect Territorial	117
17.2.2	L'Aspect Scientifique	118
17.3	LES OBJECTIFS DE LA MISE A NIVEAU DE LA GÉODÉSIE TUNISIENNE ...	120
17.4	ETAPES ET PROJETS DE CETTE MISE A NIVEAU	121
17.4.1	Etapes Et Projets	121
17.4.2	L'Unification du Nouveau Réseau Géodésique Terrestre	121
17.4.3	Mise en Place d'un Réseau de Référence Spatiale	124
17.4.4	Choix d'une Nouvelle Représentation Plane	125
17.4.5	La Détermination d'un Géoïde de Précision Centimétrique	126
17.5	CONCLUSIONS	128
	Littérature	128
18	THE OTC CONTRIBUTION TO THE NORTH AFRICAN REFERENCE PROJECT - NAFREF -	131
18.1	INTRODUCTION	131
18.2	THE STEPS OF REALIZATION	132
18.2.1	The Organizational Structure	132
18.2.2	Choice of the stations of the NAFREF Project	133
18.2.3	The Observations	134
18.2.4	The Strategy of Processing	134
18.2.5	The Data Processing Centers	135
18.3	THE MAINTENANCE OF THE REFERENTIAL	135
18.4	CONCLUSION	135
	Littérature	135

19	COORDONNÉES STT, OTC, UTM, ITRF : QUEL SYSTÈME DE COORDONNÉES FAUT-IL CHOISIR	137
19.1	INTRODUCTION	137
19.2	LES SYSTÈMES GÉODÉSQUES	137
19.3	LES SYSTÈMES GÉODÉSQUES EN TUNISIE	138
19.4	LES REPRÉSENTATIONS PLANES EN TUNISIE	138
19.4.1	La représentation plane Lambert	138
19.4.2	L'Universal Transverse Mercator (UTM)	139
19.4.3	La représentation Guillaume Postel ou Fuseau	139
19.4.4	La représentation plane de Bonne	139
19.5	QUELLES COORDONNÉES FAUT-IL CHOISIR ?	139
19.5.1	Les solutions proposées	140
19.6	LES ACTIONS MENÉES	140
19.6.1	Mise en place d'un Réseau Géodésique Tridimensionnel de Référence Spatiale	140
19.6.2	Définition du Nouveau Système Géodésique Terrestre Tunisien	140
19.6.3	Définition d'une nouvelle représentation plane	141
19.7	CONCLUSION	141
	Littérature	141
20	L'ARRÊTÉ DU 10 FÉVRIER 2009 DÉFINISSANT LA NOUVELLE TRIANGULATION TUNISIENNE - NTT-	143
20.1	INTRODUCTION	143
20.2	RAPPELS DE GÉODÉSIE	144
20.2.1	Définitions	144
20.3	LES DIFFÉRENTS SYSTÈMES GÉODÉSQUES EN TUNISIE	144
20.3.1	Le Système Voirol (1875) :	144
20.3.2	Le Système Carthage ³⁴ (1934)	144
20.4	POURQUOI UN NOUVEAU SYSTÈME GÉODÉSIQUE ?	145
20.4.1	Les Travaux de la Revalorisation de la Géodésie Tunisienne	146
20.4.2	Les Résultats des Travaux de la Revalorisation de la Géodésie Tunisienne	146

20.5	LA MISE À NIVEAU DE LA GÉODÉSIE TUNISIENNE	148
20.5.1	Comparaisons des coordonnées du système Carthage34 et du nouveau calcul	149
20.5.2	Les Conclusions de la Commission Technique	149
20.6	L'ARRÊTÉ DU 10 FÉVRIER 2009	150
20.6.1	Le système national de référence unifié de la géodésie	150
20.6.2	Le système national de référence de la projection cartographique	150
20.6.3	Le système national de référence du nivellement	152
20.7	APPLICATION DE L'ARRÊTÉ DU 10 FÉVRIER 2009	152
20.7.1	Le système national de référence terrestre unifié de géodésie	152
20.7.2	Le système national de référence de la projection cartographique	153
20.7.3	Le système national de référence du nivellement	153
20.8	CONCLUSIONS	153
	Littérature	154
21	- PROGRAMME GEODOPV - CORRECTIONS ATMOSPHÉRIQUES ET MODÈLES MATHÉMATIQUES	155
21.1	DÉFINITIONS	155
21.1.1	L'Ionosphère	155
21.1.2	La Troposphère	155
21.2	LES OBSERVATIONS	156
21.3	LA CORRECTION DE LA RÉFRACTION TROPOSPHÉRIQUE	156
21.4	LE MODÈLE MATHÉMATIQUE	157
	Littérature	158
22	LA RELATION ENTRE LES ROTATIONS GÉOCENTRIQUES ET LOCALES :APPLICATION AUX SYSTÈMES GÉODÉSIQUES TUNISIENS	161
22.1	INTRODUCTION	161
22.2	COMPARAISON DES COORDONNÉES 3D GÉODÉSIQUES ET DOPPLER	161
22.3	CONCLUSION	164
	Littérature	164

23	LES ANGLES D'EULER : CAS DU MOUVEMENT DE LA ROTATION DE LA TERRE	165
23.1	INTRODUCTION ET NOTATIONS	165
23.1.1	Les Angles d'Euler	166
23.1.2	Passage de (O, X, Y, Z) à (O, x, y, z) et inversement	167
23.2	EXPRESSION DU VECTEUR DE LA VITESSE ANGULAIRE	168
23.2.1	Expression du vecteur de la vitesse angulaire dans le repère fixe	168
23.2.2	Expression du vecteur de la vitesse angulaire dans le repère local	169
	Littérature	169
24	NOTE DE GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE - L'OPÉRATEUR DE PETERSON - ..	171
24.1	INTRODUCTION	171
24.2	L'OPÉRATEUR DE PETERSON	172
24.3	APPLICATIONS :CAS DE LA SPHÈRE	173
24.3.1	L'Expression des dérivées des vecteurs du repère local	174
24.3.2	Utilisation du Théorème de l'opérateur de Peterson	176
24.4	CALCUL DES COEFFICIENTS DE LA MATRICE DE L'OPÉRATEUR DE PETERSON	177
	Littérature	178
25	NOTE SUR LES REPRÉSENTATIONS QUASI-CONFORMES	179
25.1	INTRODUCTION	179
25.2	LES REPRÉSENTATIONS OU TRANSFORMATIONS QUASI-CONFORMES	180
25.2.1	Développement d'une fonction en un point z_0	180
25.3	ETUDE DE LA TRANSFORMÉE D'UN CERCLE	181
25.4	CALCUL D'UN ÉLÉMENT DE LONGUEUR SUR LE PLAN	182
25.5	EXEMPLE DE TRANSFORMATION QUASI-CONFORME	183
	Littérature	184

26	LA GÉOMÉTRIE DE COMPENSATION NON-LINÉAIRE - LE PROBLÈME SPATIAL D'INTERSECTION -	185
26.1	INTRODUCTION	185
26.2	LA GÉOMÉTRIE NON LINÉAIRE DU MODÈLE DE GAUSS-MARKOV	185
26.3	ETUDE D'UN CAS PRATIQUE	187
26.3.1	Ecriture des Equations de Lagrange-Euler	188
26.3.2	Réduction des Equations de Lagrange-Euler	190
26.4	CALCUL DE LA MATRICE COVARIANCE DES INCONNUES	190
	Littérature	191
27	- LA GÉOMÉTRIE DE COMPENSATION NON-LINÉAIRE - RÉOLUTION DU SYSTÈME DES EQUATIONS POLYNOMIALES	193
27.1	INTRODUCTION	193
27.2	RÉSOLUTION DU SYSTÈME	193
27.3	RÉSOLUTION DU SYSTÈME DES INCONNUES EN ρ ET θ	194
28	ELÉMENTS MATHÉMATIQUES POUR LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS	197
28.1	DÉFINITIONS	197
28.2	COMPOSITION DES DÉRIVÉES PREMIÈRES	198
28.3	CONDITION NÉCESSAIRE D'EXTREMUM LOCAL	198
28.4	FORMULATION DU PROBLÈME DES MOINDRES CARRÉS - LE CAS LINÉAIRE	199
28.4.1	Calcul des dérivées première et seconde de f	200
28.5	CONVEXITÉ	201
28.6	APPLICATION AU PROBLÈME DES MOINDRES CARRÉS	204
29	EQUILIBRIUM FIGURES IN GEODESY AND GEOPHYSICS	205
29.1	INTRODUCTION	205
29.2	L'EQUATION DE CLAIRAUT	206
29.3	LA MÉTHODE DES EQUATIONS INTÉGRALES	209
29.4	LA GÉOMÉTRIE DES SURFACES D'EQUILIBRE	213
29.4.1	Stratification des Equi-surfaces	213
29.4.2	Le Théorème de Wavre	215

29.4.3	la Stratification Sphérique Comme Exception	216
29.4.4	L'Impossibilité d'une Stratification Ellipsoïdale Pure	217
29.4.5	Une Autre Méthode de la Détermination de l'Equation de Clairaut	217
29.4.6	Les Remarques en Conclusion	218
29.5	ENERGIE DE POTENTIEL STATIONNAIRE	220
29.5.1	L'Energie de Potentiel	220
29.5.2	Les fonctions de Dirac et Heaviside	221
29.5.3	Une Remarquable Expression de la Densité	222
29.5.4	Variation de l'Energie de Potentiel	223
29.5.5	Une Equation Intégrale Générale	225
29.6	LA THÉORIE DU DEUXIÈME ORDRE	226
29.6.1	Le Potentiel Intérieur	226
29.6.2	Ellipsoïde et Sphéroïde	230
29.6.3	L'Equilibre Hydrostatique	231
29.7	LA TERRE RÉELLE ET L'ELLIPSOÏDE DE RÉFÉRENCE	233
	Littérature	236
30	LA REPRÉSENTATION PLANE UTM	241
30.1	DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS	241
30.2	DÉTERMINATION DES COORDONNÉES UTM	242
30.2.1	Calcul Direct	242
30.2.2	Calcul Inverse	245
30.2.3	Le Module linéaire	247
30.2.4	Convergence des méridiens	248
31	LE MODÈLE DE BURSA-WOLF	249
31.1	INTRODUCTION	249
31.2	LE MODÈLE DE BURSA - WOLF	249
31.3	MATRICES DE ROTATION	251
	Littérature	253

32	LES ASPECTS DIRECT, OBLIQUE ET TRANSVERSE DE LA REPRÉSENTATION PLANE MERCATOR	255
32.1	L'ASPECT DIRECT	255
32.2	L'ASPECT OBLIQUE	255
32.3	L'ASPECT TRANSVERSE	258
	Littérature	260
33	PRÉSENTATION DES ASPECTS DE LA GÉOMÉTRIE DE COMPENSATION NON-LINÉAIRE	261
33.1	INTRODUCTION	261
33.2	PRÉSENTATION DU PROBLÈME	262
	Littérature	264
34	INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DU PROBLÈME DE COMPENSATION NON-LINÉAIRE	265
34.1	INTRODUCTION	265
34.2	LA GÉOMÉTRIE NON LINÉAIRE DU MODÈLE DE GAUSS-MARKOV	265
34.3	INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE	267
34.3.1	Lemme de Pázman	269
	Littérature	274
	LISTE DES FIGURES	275
	LISTE DES TABLES	278

CHAPITRE 1

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES MOINDRES CARRÉS

Ce papier représente les notes rédigées à partir du cours de l'Analyse Numérique, suivi à l'Ecole Nationale des Sciences Géographiques pendant les études au Cycle d'Ingénieur Géographe (1984-1986).

1.1 INTRODUCTION

Le problème de compensation par les moindres carrés ou "least squares adjustment" ou "götterdammerung über" remonte à Gauss. Cependant, jusqu'à 1950, on n'a pas justifié la méthode des moindres carrés.

Dans le problème des compensations, on est amené à inverser des matrices.

Alors si A est une matrice carrée inversible, alors son inverse A^{-1} est unique et vérifie :

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I \quad (1.1)$$

où I est la matrice Unité.

Si A est une matrice rectangulaire :

$$A^{-1} \text{ est l'inverse de } A \text{ si } AA^{-1}A = A \quad (1.2)$$

A^{-1} est solution de :

$$AXA = A \quad (1.3)$$

Il y a une infinité de solutions.

1.2 MODÈLE FONCTIONNEL ET MODÈLE STOCHASTIQUE

Ces modèles décrivent les phénomènes physiques.

1.2.1 Le Modèle Fonctionnel

Le modèle fonctionnel décrit la relation entre les observables et les paramètres et les relations à utiliser. Qu'est-ce qu'il faut choisir comme modèle fonctionnel pour décrire un phénomène physique ?

Hypothèse : à une grandeur, on peut associer sa valeur maximale vraie. Soit :

$$l \implies \dot{l} \quad (1.4)$$

Soit ${}_n\dot{L}_1$ le vecteur des valeurs nominales des observables. S'il y a $n - r$ relations indépendantes données par l'expérience, alors r est appelé le nombre de degrés de liberté du modèle fonctionnel.

Exemple 1 : déterminer les angles A, B, C d'un triangle plan. On a :

$$\dot{A} + \dot{B} + \dot{C} = \pi$$

Donc $r = 2$.

Exemple 2 : déterminer un côté d'un triangle. On a 4 observations (3 angles et un côté) et une relation indépendante (la somme des angles d'un triangle plan vaut π) d'où $r = 3$.

Exemple 3 : déterminer les 3 angles et les 3 côtés d'un triangle plan. On a 3 relations indépendantes :

$$\dot{A} + \dot{B} + \dot{C} = \pi \quad (1.5)$$

$$\dot{a}^2 = \dot{b}^2 + \dot{c}^2 - 2\dot{b}\dot{c}\cos\dot{A} \quad (1.6)$$

$$\dot{b}^2 = \dot{a}^2 + \dot{c}^2 - 2\dot{a}\dot{c}\cos\dot{B} \quad (1.7)$$

Le vecteur des observables est :

$${}_6\dot{L}_1 = \begin{pmatrix} \dot{A} \\ \dot{B} \\ \dot{C} \\ \dot{a} \\ \dot{b} \\ \dot{c} \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

La détermination de l'équation (1.8) se fait par la méthode des équations de condition c'est-à-dire que le vecteur \dot{L} vérifie :

$$\Phi(\dot{L}) = 0 \quad (1.9)$$

avec $n - r$ relations indépendantes et Φ une certaine fonction.

1.2.2 La Méthode des Equations d'observations

Avec cette méthode, on décrit le modèle fonctionnel par des paramètres commodes. Soit ${}_p\dot{X}_1$ le vecteur des paramètres avec $p \geq r$ où r est le degré de liberté du modèle. On cherche alors à exprimer les observables \dot{L} en fonction des paramètres du modèle, soit :

$${}_n\dot{L}_1 = \Phi(\dot{X}) \iff \Phi(\dot{X}, \dot{L}) = 0 \quad (1.10)$$

Les équations d'observations sont si $p \geq r$:

$${}_n\dot{L}_1 = \Phi(\dot{X}) \quad (1.11)$$

$$\Psi(\dot{X}) = 0 \quad (1.12)$$

L'équation (1.12) représente les $(p - r)$ relations indépendantes dites **équations de condition**.

Exemple : Détermination des coordonnées des sommets d'un triangle plan $A_1A_2A_3$ à partir de l'observation de trois angles aux sommets A_1, A_2, A_3 . On choisit comme paramètres $\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{x}_2, \dot{y}_2, \dot{x}_3, \dot{y}_3$, donc $\dot{X} = {}_6\dot{X}_1$ s'écrit :

$$\dot{X} = {}_6\dot{X}_1 = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

Les observables sont les angles $\dot{A}_1, \dot{B}_1, \dot{C}_1$, on a alors :

$$\dot{A}_1 = \varphi_1(\dot{X}) \quad (1.14)$$

$$\dot{A}_2 = \varphi_2(\dot{X}) \quad (1.15)$$

$$\dot{A}_3 = \varphi_3(\dot{X}) \quad (1.16)$$

et :

$${}_3\dot{L}_1 = \dot{L} = \begin{pmatrix} \dot{A}_1 \\ \dot{A}_2 \\ \dot{A}_3 \end{pmatrix} = \Phi(\dot{X}) = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

Les équations de condition sont quatre à savoir :

$$\dot{x}_1 = 0 \quad (1.18)$$

$$\dot{y}_1 = 0 \quad (1.19)$$

$$\dot{y}_3 = 0 \quad (1.20)$$

$$\dot{x}_3 = 100m \quad (1.21)$$

Il reste à déterminer (\dot{x}_2, \dot{y}_2) . Comme $n = 6$, on a $6 - r = 4 \implies r = 2$ degrés de liberté. Alors :

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} \quad (1.22)$$

On laisse à titre d'exercice la détermination de la fonctionnelle Φ .

1.3 LE MODÈLE STOCHASTIQUE

C'est le modèle qui décrit les lois qui régissent les erreurs des mesures des observables.

On appelle erreur la quantité e :

$$e = l - \hat{l} = \text{"Observé"} - \text{"Vrai"} \quad (1.23)$$

et correction la quantité $-e$. Donc $\hat{l} = l + (-e)$. On corrige la valeur observée pour avoir la valeur réelle.

On utilise un modèle des erreurs centrées avec une variance. En répétant les mesures, les erreurs de ces mesures sont la réalisation d'une variable aléatoire centrée (e). Soient : $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$ observations (3 angles et un côté) et une relation indépendante (la somme des angles vaut π) d'où $r = 3$.

$$\dot{a} = \sqrt{\dot{b}^2 + \dot{c}^2 - 2\dot{b}\dot{c}\cos\dot{A}}$$

Un estimateur est défini en fonction d'un échantillon l_1, l_2, \dots, l_n aléatoire, soit :

$$\tilde{x} = \varphi(l_1, l_2, \dots, l_n) \quad (1.24)$$

\tilde{x} est proche de \hat{x} , exemple :

$$\tilde{a} = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bccosA}$$

On cherche les estimateurs sans biais, c'est-à-dire :

$$E(\tilde{x}) = \hat{x} \quad (1.25)$$

Exemple : soient une quantité \hat{x} et l_1, l_2, \dots, l_n les observables indépendantes d'une même variable aléatoire de x , alors un estimateur de \hat{x} est donné par :

$$\bar{m} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n l_i \quad (1.26)$$

Alors cet estimateur est symétrique, sans biais (les erreurs de mesures sont centrées), de précision maximale parmi les estimateurs linéaires et sans biais, estimateur des moindres carrés et asymptotiquement normal (si $n \rightarrow +\infty$), la fonction de répartition de m comme variable aléatoire converge uniformément vers une fonction de répartition de la loi normale.

1.4 LA VARIANCE DES MESURES

Par définition, la variance des mesures l_i est :

$$\tilde{\sigma}^2 = E[(l_i - E(l_i))^2] \quad (1.27)$$

or :

$$E(l_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n l_i = \bar{m} \quad (1.28)$$

Par suite :

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (l_i - E(l_i))^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (l_i^2 - 2l_i E(l_i) + E(l_i)^2) = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (l_i^2 - 2l_i \bar{m} + \bar{m}^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n l_i^2 - 2\bar{m} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n l_i + \bar{m}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n l_i^2 - \bar{m}^2 \end{aligned} \quad (1.29)$$

Pour une variable centrée, on a :

$$\sigma^2 = E(l^2) - E(l)^2 = E(l^2) - \hat{x}^2 \quad (1.30)$$

Comme :

$$\bar{m} = \frac{1}{n} \sum_i l_i \rightarrow \sigma_m = \frac{1}{\sqrt{n}} \sigma_l$$

et :

$$\sigma_m^2 = E(\bar{m}^2) - E(\bar{m})^2 = E(\bar{m}^2) - \hat{x}^2 \Rightarrow E(\bar{m}^2) = \hat{x}^2 + \sigma_m^2 = \hat{x}^2 + \frac{\sigma^2}{n}$$

Donc :

$$\begin{aligned} E(\tilde{\sigma}^2) &= E\left(\frac{1}{n}\sum_i^n l_i^2 - \bar{m}^2\right) = \frac{1}{n}\sum_i^n E(l_i^2) - E(\bar{m}^2) = E(l_i^2) - E(\bar{m}^2) \\ &= \sigma^2 + \bar{x}^2 - \left(\frac{\sigma^2}{n} + \bar{x}^2\right) = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \neq \sigma^2 \end{aligned} \quad (1.31)$$

Alors, l'estimateur $\tilde{\sigma}^2$ n'est pas biaisé. Si on adopte comme formule de l'estimateur de la variance :

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (l_i - \bar{m})^2 \quad (1.32)$$

on obtient

$$E(\tilde{\sigma}^2) = \sigma^2 \text{ l'estimateur est sans biais} \quad (1.33)$$

De même, pour

$$\tilde{\sigma}' = \sqrt{\tilde{\sigma}^2} \implies E(\tilde{\sigma}') \neq \sigma$$

Exemple : Soient les variables $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n$, avec respectivement les observations $(x_{11}, x_{12}), (x_{21}, x_{22}), \dots, (x_{n1}, x_{n2})$, alors on a en utilisant la formule (1.32) :

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_1^2 &= \left[\left(x_{11} - \frac{x_{11} + x_{12}}{2}\right)^2 + \left(x_{12} - \frac{x_{11} + x_{12}}{2}\right)^2 \right] = \left(\frac{x_{11} - x_{12}}{2}\right)^2 \\ &\implies \tilde{\sigma}_1 = \frac{|x_{11} - x_{12}|}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (1.34)$$

$$\tilde{\sigma}_2 = \frac{|x_{21} - x_{22}|}{\sqrt{2}} \quad (1.35)$$

⋮

$$\tilde{\sigma}_n = \frac{|x_{n1} - x_{n2}|}{\sqrt{2}} \quad (1.36)$$

Si on prend :

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{\sum_i^n \tilde{\sigma}_i^2}{n} \quad (1.37)$$

Alors, on a :

$$E(\tilde{\sigma}^2) = \sigma^2 \quad (1.38)$$

et l'estimateur de la variance est biaisé.

1.5 LE MODÈLE FONCTIONNEL

Le modèle fonctionnel définit la relation entre les paramètres inconnus du système à estimer et les observations, soit :

$$\varphi(\dot{x}) = \dot{l} \quad (1.39)$$

1.6 LE MODÈLE STOCHASTIQUE

Le modèle stochastique définit la densité de probabilité du vecteur aléatoire. Cette densité est donnée par :

$$\begin{aligned} p(l_1, l_2, \dots, l_n) &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \frac{1}{\det \sigma} e^{-\frac{1}{2}(l-i)^T \sigma^{-2}(l-i)} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \frac{1}{\det \sigma} e^{-\frac{1}{2}(l-\varphi(\dot{x}))^T \sigma^{-2}(l-\varphi(\dot{x}))} \end{aligned} \quad (1.40)$$

Les erreurs de mesures sont normales et centrées.

1.7 LA QUANTITÉ D'INFORMATION DE FISHER

On appelle la quantité d'information de Fisher la valeur :

$$E \left(- \frac{\partial^2 \text{Log} p}{\partial \dot{x}^2} \right) \quad (1.41)$$

Existe-t-il des estimateurs (sans biais) meilleurs que d'autres ? La réponse est donnée par l'inégalité de Rao-Cramer.

1.7.1 L'Inégalité de Rao-Cramer

Elle est donnée par :

$$\sigma_{\dot{x}}^2 \geq \frac{1}{E \left(- \frac{\partial^2 \text{Log} p(l_1, l_2, \dots, l_n, \dot{x})}{\partial \dot{x}^2} \right)} \quad (1.42)$$

Exemple : Soit le cas d'un seul paramètre inconnu \dot{x} , d'échantillon l_1, l_2, \dots, l_n de densité de probabilité :

$$p(l, \hat{x}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \frac{1}{\sigma^n} e^{-\frac{1}{2} \frac{\sum_i^n (l_i - \hat{x})^2}{\sigma^2}} \quad (1.43)$$

On a alors :

$$\text{Log}p = \text{Cte} - \frac{1}{2} \frac{\sum_i^n (l_i - \hat{x})^2}{\sigma^2} \quad (1.44)$$

$$\frac{\partial \text{Log}p}{\partial \hat{x}} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_i^n (l_i - \hat{x}) \Rightarrow \frac{\partial^2 \text{Log}p}{\partial \hat{x}^2} = -\frac{n}{\sigma^2} \quad (1.45)$$

Par suite :

$$E\left(-\frac{\partial^2 \text{Log}p}{\partial \hat{x}^2}\right) = E\left(\frac{n}{\sigma^2}\right) = nE\left(\frac{1}{\sigma^2}\right) = \frac{n}{\sigma^2} \quad (1.46)$$

On a alors :

$$\sigma_{\tilde{x}}^2 \geq \frac{\sigma^2}{n} \quad (1.47)$$

Soit un triangle plan où on mesure les deux côtés b, c et l'angle A et on veut estimer le côté a , on a :

$$\hat{a} = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A} \quad (1.48)$$

Un estimateur de a est :

$$\tilde{a} = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A} \quad (1.49)$$

Cet estimateur est biaisé.

Comme $\hat{x} = f(\hat{l})$ et $\tilde{x} = f(l)$, donc :

$$E(\tilde{x}) \stackrel{?}{=} \hat{x} \implies E(f(l)) \stackrel{?}{=} f(\hat{l}) \quad (1.50)$$

Or :

$$\tilde{x} = \hat{x} + \underbrace{(l - \hat{l})^T}_{e} f' + \text{termes 2ème ordre} \quad (1.51)$$

$$\implies E(\tilde{x}) = \hat{x} + E(\text{termes 2ème ordre}) \quad (1.52)$$

si e est petite par rapport aux valeurs. Donc \tilde{x} est quasiment sans biais.

Revenons à l'inégalité de Rao-Cramer. Soient $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \sigma_{\tilde{x}_1}^2, \sigma_{\tilde{x}_2}^2$. On dit que l'estimateur \tilde{x}_1 est plus précis que \tilde{x}_2 si :

$$u^T \sigma_{\tilde{x}_1}^2 u \leq u^T \sigma_{\tilde{x}_2}^2 u \quad \forall u \in \mathbb{R}^r \quad (1.53)$$

$$\text{Si } \tilde{y} = u^T \tilde{x} \Rightarrow \sigma_{\tilde{y}}^2 = u^T \sigma_{\tilde{x}}^2 u \quad (1.54)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sigma_{u^T \tilde{x}_1} &\leq \sigma_{u^T \tilde{x}_2} \\ \Rightarrow \sigma_{\tilde{x}_{11}} &\leq \sigma_{\tilde{x}_{21}} \end{aligned} \quad (1.55)$$

$$\begin{aligned} &\vdots \\ \Rightarrow \sigma_{\tilde{x}_{1r}} &\leq \sigma_{\tilde{x}_{2r}} \end{aligned} \quad (1.56)$$

Ce qui donne :

$$\sum_i^r \sigma_{\tilde{x}_{1i}}^2 \leq \sum_i^r \sigma_{\tilde{x}_{2i}}^2 \implies \text{Tr} \sigma_{\tilde{x}_1}^2 \leq \text{Tr} \sigma_{\tilde{x}_2}^2 \quad (1.57)$$

où on note ici $\sigma_{\tilde{x}_1}^2$ la matrice de variance correspondante, ce qui donne en utilisant la norme euclidienne d'une matrice ($\text{Tr}AA^T = \|A\|^2$) :

$$\|\sigma_{\tilde{x}_1}\| \leq \|\sigma_{\tilde{x}_2}\| \quad (1.58)$$

1.8 LA MATRICE D'INFORMATION DE FISHER

On appelle matrice d'information de Fisher relative à la fonction densité de probabilité $p(l_1, l_2, \dots, l_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_r) = p(l_1, l_2, \dots, l_n, \dot{x})$ la matrice :

$$F = (F_{ij}) = \left(E \left(-\frac{\partial^2 \text{Log} p}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_j} \right) \right) \quad (1.59)$$

Théorème 1. Si \tilde{x} est un estimateur sans biais de \dot{x} , alors :

$$\forall u \in \mathbb{R}^r \quad u^T \sigma_{\tilde{x}}^2 u \geq u^T F^{-1} u \quad (1.60)$$

Théorème 2. \tilde{x} est un estimateur efficace de \dot{x} , si :

$$\forall u \in \mathbb{R}^r \quad u^T \sigma_{\tilde{x}}^2 u = u^T F^{-1} u \quad (1.61)$$

Appliquons le principe de maximum de vraisemblance à la fonction de densité

$$p(l_1, l_2, \dots, l_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_r) = p(l_1, l_2, \dots, l_n, \dot{x})$$

$$\begin{aligned}
p(l_1, l_2, \dots, l_n, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_r) &= p(l_1, l_2, \dots, l_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_r) + \sum_i^r (\tilde{x}_i - \dot{x}_i) \frac{\partial p}{\partial \dot{x}_i} \\
+(\text{termes 2ème ordre}) &\implies \frac{\partial p}{\partial \dot{x}_i} = 0 \iff \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial \dot{x}_i} = 0 \\
&\implies \frac{\partial \text{Log} p}{\partial \dot{x}_i} = 0 \text{ pour } i = 1, 2, \dots, r \quad (1.62)
\end{aligned}$$

Alors $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_r$ sont dits asymptotiquement sans biais, asymptotiquement de précision maximale et asymptotiquement normaux et p est maximale.

1.9 APPLICATION À LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS

On a le modèle fonctionnel linéaire :

$$A\dot{x} = l - \dot{e} \quad (1.63)$$

$$B\dot{x} = k \quad (1.64)$$

avec :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \quad (1.65)$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_p \end{pmatrix}; \quad l = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}; \quad \dot{e} = \begin{pmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \vdots \\ \dot{e}_n \end{pmatrix} \text{ avec } n \geq p \quad (1.66)$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pp} \end{pmatrix} \quad (1.67)$$

$$k = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_p \end{pmatrix} \quad (1.68)$$

On suppose que les erreurs \dot{e} suivent la loi normale $\iff \dot{e} \in \mathcal{N}(0, \sqrt{P^{-1}}\sigma_0)$, P est le poids et $\sigma^2 = P^{-1}\sigma_0^2$. Ecrivons la fonction de densité de probabilité, soit :

$$p(l_1, l_2, \dots, l_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_r) = p = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \frac{1}{(\sigma_0^2)^{n/2} \det \sqrt{P^{-1}}} e^{-\frac{1}{2}(l-A\dot{x})^T \frac{P}{\sigma_0^2} (l-A\dot{x})} \quad (1.69)$$

Les inconnues sont \dot{x} et σ_0^2 . On considère la fonction scalaire :

$$U = \text{Log} p + \Lambda^T \cdot (B\dot{x} - k) \quad (1.70)$$

Avec Λ le vecteur des multiplicateurs de Lagrange :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} \quad (1.71)$$

Les inconnues sont obtenues en cherchant les extrémums de U . U s'écrit :

$$U = \text{Constante} - \frac{n}{2} \text{Log} \sigma_0^2 - \frac{1}{2} (l-A\dot{x})^T \frac{P}{\sigma_0^2} (l-A\dot{x}) + \Lambda^T \cdot (B\dot{x} - k) \quad (1.72)$$

Les extrémums de U sont obtenus par la solution de :

$$\frac{\partial U}{\partial \sigma_0^2} = -\frac{n}{2\sigma_0^2} + \frac{1}{2\sigma_0^4} (l-A\dot{x})^T P (l-A\dot{x}) = 0 \quad (1.73)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{x}} = -\frac{A^T P A}{\sigma_0^2} \dot{x} + \frac{A^T P l}{\sigma_0^2} + B^T \Lambda = 0 \quad (1.74)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \Lambda} = B\dot{x} - k = 0 \quad (1.75)$$

En notant que :

$$A\dot{x} - l = v = \text{le vecteur résidu} \quad (1.76)$$

L'équation (1.73) donne :

$$\tilde{\sigma}_0^2 = \frac{v^T P v}{n} \quad (1.77)$$

(1.74) et (1.75) donnent le système :

$$\begin{pmatrix} A^T P A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ -\Lambda \sigma_0^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^T P l \\ k \end{pmatrix} \quad (1.78)$$

La solution du système précédent donne la solution des moindres carrés. L'estimateur \tilde{x} est un estimateur sans biais, asymptotiquement normal, alors que l'estimateur :

$$\tilde{\sigma}_0^2 = \frac{v^T P v}{n} \quad (1.79)$$

est biaisé mais asymptotiquement sans biais. Par contre, si on prend :

$$\tilde{\sigma}_0'^2 = \frac{v^T P v}{n-r} \quad (1.80)$$

$\tilde{\sigma}_0'^2$ est sans biais.

Une question se pose : le choix des paramètres influence-t-il sur les solutions. Pour la méthode des moindres carrés, la solution est indépendante. En effet, soit le système :

$$Ax = l - \epsilon \implies \text{la solution } \tilde{x}$$

Soit le système avec d'autres paramètres :

$$y = Cx + k \implies \tilde{y} = C\tilde{x} + k \quad (1.81)$$

Soit $\tilde{y} = C\tilde{x}' + k$ une autre solution, on a alors :

$$\sigma_{\tilde{y}}^2 = C\sigma_{\tilde{x}'}^2 C^T \quad (1.82)$$

En utilisant l'inégalité de Rao-Cramer :

$$u^T \sigma_{\tilde{y}}^2 u = u^T C \sigma_{\tilde{x}'}^2 C^T u = (C^T u)^T \sigma_{\tilde{x}'}^2 (C^T u) \text{ minimum si } \sigma_{\tilde{x}'}^2 \text{ est minimum} \implies \tilde{x}' = \tilde{x} \quad (1.83)$$

1.10 LES INVERSES GÉNÉRALISÉES

1.10.1 Introduction

Les inverses généralisées servent à résoudre les équations linéaires impossibles. Par exemple :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= k_1 \\ x_1 + 2x_2 &= k_2 \\ x_1 + 3x_2 &= k_3 \\ 2x_1 + x_2 &= k_4 \end{aligned} \quad (1.84)$$

système qu'on écrit sous la forme :

$$Ax \cong k \implies x = A^{-1}k, \quad A^{-1} \text{ inverse généralisée de } A \implies \text{donne toutes les solutions correctes} \quad (1.85)$$

1.10.2 Propriétés des matrices

1. Soient deux matrices A et B , alors :

$$\text{rang}(AB) \leq \begin{cases} \text{rang}(A) \\ \text{rang}(B) \end{cases} \quad (1.86)$$

2. Théorème des pivots. Soit la matrice $A = {}_n A_p$, s'il existe une sous matrice d'ordre r , ${}_r A_r = A_{11}$ régulière de rang r , on peut écrire la matrice A sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad (1.87)$$

$$\text{avec } {}_r A_r = A_{11}; \quad {}_r A_{p-r} = A_{12}; \quad {}_{n-r} A_r = A_{21}, \quad {}_{n-r} A_{p-r} = A_{22} \quad (1.88)$$

$$\text{et } A_{11} \text{ inversible et } A_{22} = A_{21} A_{11}^{-1} A_{12} \quad (1.89)$$

Les r premières colonnes de A sont indépendantes \Rightarrow les colonnes de $r+1$ à p s'expriment en fonction des r premières colonnes. On a donc :

$$\begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{pmatrix} H \implies \begin{cases} A_{12} = A_{11} H \\ A_{22} = A_{21} H \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H = A_{11}^{-1} A_{12} \\ A_{22} = A_{21} A_{11}^{-1} A_{12} \end{cases} \quad (1.90)$$

1.11 DÉFINITION

Soit une matrice A quelconque, A^{-1} inverse généralisée de A si $AA^{-1}A = A$. (A. Bjerrhammer ; 1955, 1973).

1.12 EXISTANCE

Soit une matrice A de rang r , d'après le théorème des pivots, on peut écrire A sous la forme donnée par (1.87), alors une inverse généralisée de A est donnée par :

$$A_0^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.91)$$

Vérification. On a :

$$\begin{aligned}
AA_0^{-1}A &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{11}A_{11}^{-1}A_{12} \\ A_{21} & A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = A \quad (1.92)
\end{aligned}$$

1.13 PROPRIÉTÉS

P1. Si A_0^{-1} est une inverse généralisée, les autres matrices inverses généralisées s'expriment comme suit :

$$A^{-1} = A_0^{-1} + (I - A_0^{-1}A)M + N(I - AA_0^{-1}) \quad (1.93)$$

On vérifie aisément que $AA^{-1}A = A$.

P2. Les matrices AA^{-1} et $A^{-1}A$, $I - AA^{-1}$ et $I - A^{-1}A$ sont des matrices carrées et idempotentes c'est-à-dire $M.M = M$.

1.14 LES SYSTÈMES LINÉAIRES

Soit le système linéaire suivant :

$$AX = K \quad (1.94)$$

avec $A = {}_nA_p$, $X = {}_pX_q$ et $K = {}_nK_q$.

Une condition nécessaire et suffisante pour l'existence de solutions de (1.94) est :

$$AA^{-1}K = K \quad (1.95)$$

Les solutions de (1.94) sont données par :

$$X = A_0^{-1}K + (I - A_0^{-1}A)M \quad (1.96)$$

où A_0^{-1} est une inverse généralisée particulière et M une matrice arbitraire.

Littérature

1. A. Bjerhammer. 1958. *A New Matrix Algebra*. Trans. Royal Institute of Technology, Stockholm.
2. A. Bjerhammer. 1973. *Theory of errors and generalized matrix inverses*. Elsevier.

CHAPITRE 2

ASPECTS DE LA THÉORIE DE L'ESTIMATION

Ce papier représente les notes rédigées sur la théorie de l'estimation à partir d'un cours suivi à l'Ecole Nationale des Sciences Géographiques pendant les études au Cycle d'Ingénieur Géographe (1984-1986).

2.1 ESTIMATION LINÉAIRE

Soit le système linéaire :

$$\begin{cases} A\dot{x} = l - e \\ B\dot{x} = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

ou encore :

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \dot{x} = \begin{pmatrix} l \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

où la matrice du premier terme a les dimensions $(n+q) \times p$. Dans les "problèmes mal posés", on considère que le rang de la matrice $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \leq p$ (cas de la compensation libre).

Exemple : mesure d'un angle dans un triangle plan pour déterminer les coordonnées $(\hat{x}_i, \hat{y}_i)_{i=1,3}$.

La matrice variance σ est non inversible car il existe une relation linéaire entre les composantes du vecteur l (la somme des angles d'un triangle plan est égale à π).

2.1.1 Cas 1

On considère que le vecteur erreur e est centré et qu'il a une matrice variance σ (non normale : ne suit pas la loi normale) et que la matrice $A = {}_n A_p$ est telle que $\text{rang } A = p$ et que σ est une matrice régulière c'est-à-dire inversible, ce qui donne $\text{rang } \sigma^{-1}A = p$. Alors :

$$A^{-1} = (\sigma^{-1}A)_0^{-1} \sigma^{-1} \quad (2.3)$$

est une inverse généralisée de A (A. Bjerhammer, 1958, 1973).

Les estimateurs linéaires sans biais de (2.1) sont telques :

$$\tilde{x} = A^{-1}l = (\sigma^{-1}A)_0^{-1} \sigma^{-1}l \quad (2.4)$$

avec A^{-1} inverse généralisée de A . Et on a :

$$E(\tilde{x}) = E(A^{-1}l) = A^{-1}E(l) = A^{-1}\hat{l} = A^{-1}A\hat{x} = I.\hat{x} = \hat{x} \quad (2.5)$$

Un estimateur linéaire général de \hat{x} s'écrit sous la forme :

$$\tilde{x} = B\hat{l} + K \quad (2.6)$$

où B et K sont indépendants de \hat{x} . Or :

$$\hat{x} = B\hat{l} + K = BA\hat{x} + K \text{ vérifié } \forall x \Rightarrow K = 0 \text{ et } BA = I \quad (2.7)$$

$$\text{soit } ABA = A \Rightarrow B \text{ est une inverse généralisée de } A \quad (2.8)$$

2.1.2 Calcul de la Variance

La variance de \tilde{x} est donnée par 2.1.1 :

$$\begin{aligned} \sigma_{\tilde{x}}^2 &= A^{-1}\sigma^2.(A^{-1})^T = (\sigma^{-1}A)^{-1}\sigma^{-1}\sigma^2((\sigma^{-1}A)^{-1}\sigma^{-1})^T \\ &= (\sigma^{-1}A)^{-1}\sigma^{-1}\sigma^2.\sigma^{-1}((\sigma^{-1}A)^{-1})^T = (\sigma^{-1}A)^{-1}((\sigma^{-1}A)^{-1})^T \end{aligned} \quad (2.9)$$

On pose :

$$M = (\sigma^{-1}A)^{-1} \quad (2.10)$$

Comme :

$$Tr(\sigma_{\bar{x}}^2) = Tr(M.M^T) = \|M\|^2 = \|\sigma_{\bar{x}}\|^2 \Rightarrow \|\sigma_{\bar{x}}\| = \|M\| = \|(\sigma^{-1}A)^{-1}\| \quad (2.11)$$

Soit $\bar{x} = (\sigma^{-1}A)^{-} \sigma^{-1}l = (A^T \sigma^2 A)^{-1} A^T \sigma^{-1}l$, ici, on a considéré l'inverse intrinsèque. A-t-on :

$$\|\sigma_{\bar{x}}\| \leq \|\sigma_{\bar{x}}\|$$

Vérifions que $\forall u \in \mathbb{R}^n$ on a :

$$u^T \sigma_{\bar{x}}^2 u \leq u^T \sigma_{\bar{x}}^2 u \quad (2.12)$$

En effet :

$$\begin{aligned} u^T \sigma_{\bar{x}}^2 u &\stackrel{?}{\leq} u^T \sigma_{\bar{x}}^2 u \\ u^T (\sigma^{-1}A)^{-} (\sigma^{-1}A)^{-T} u &\stackrel{?}{\leq} u^T (\sigma^{-1}A)^{-1} ((\sigma^{-1}A)^{-1})^T u \\ \|(\sigma^{-1}A)^{-T} u\|^2 &\stackrel{?}{\leq} \|((\sigma^{-1}A)^{-1})^T u\|^2 \end{aligned}$$

soit : $\|(\sigma^{-1}A)^{-T} u\| \stackrel{?}{\leq} \|((\sigma^{-1}A)^{-1})^T u\|$

Comme :

$$(\sigma^{-1}A)^{-T} = ((\sigma^{-1}A)^T)^{-} \text{ et } ((\sigma^{-1}A)^{-1})^T = ((\sigma^{-1}A)^T)^{-1}$$

Donc :

$$\underbrace{\|((\sigma^{-1}A)^T)^{-} u\|}_{\text{Solution de } (\sigma^{-1}A)^T y = u} \stackrel{?}{\leq} \|((\sigma^{-1}A)^T)^{-1} u\| \quad (2.13)$$

Le premier membre de l'inégalité montre qu'il est solution de l'équation :

$$(\sigma^{-1}A)^T y = u$$

dont la solution est de norme minimale.

Littérature

1. **A. Bjerhammer.** 1958. *A New Matrix Algebra.* Trans. Royal Institute of Technology, Stockholm.
2. **A. Bjerhammer.** 1973. *Theory of errors and generalized matrix inverses.* Elsevier.

NOTE SUR UNE TRANSFORMATION DES COORDONNÉES GÉOCENTRIQUES (X, Y, Z) AUX COORDONNÉES (φ, λ, h_e)

Dans cette note, on présente une autre méthode de passage des coordonnées géocentriques (X, Y, Z) aux coordonnées géodésiques (φ, λ, h_e) par rapport à un ellipsoïde de révolution de paramètres (a, e) où a et e sont respectivement le demi grand-axe et la première excentricité.

Mots clés : coordonnées géocentriques - coordonnées géodésiques - résolution d'un polynôme du quatrième degré - résolution d'un polynôme du troisième degré.

3.1 INTRODUCTION

La méthode de passage des coordonnées géocentriques (X, Y, Z) par rapport à un système géodésique donné aux coordonnées géodésiques (φ, λ, h_e) traitée dans nos précédentes publications est la méthode itérative [1],[2]. Dans cette note, on présente une méthode directe de passage (X, Y, Z) aux coordonnées (φ, λ, h_e) .

L'expression des coordonnées géocentriques est :

$$X = (N + h_e) \cos \varphi \cos \lambda \quad (3.1)$$

$$Y = (N + h_e) \cos \varphi \sin \lambda \quad (3.2)$$

$$Z = (N(1 - e^2) + h_e) \sin \varphi \quad (3.3)$$

3.2 RÉSOLUTION DU PROBLÈME

3.2.1 Calcul de la longitude

Des équations (3.1)-(3.2), on obtient la longitude géodésique λ par :

$$\operatorname{tg}\lambda = \frac{Y}{X} \implies \text{d'où } \lambda \quad (3.4)$$

3.2.2 Calcul de la latitude géodésique

Posons :

$$p = \sqrt{X^2 + Y^2} = (N + h_e)\cos\varphi \quad (3.5)$$

Comme $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$, alors $\cos\varphi \geq 0$ donc $p \geq 0$.

De l'équation (3.5), on a :

$$h_e = \frac{p}{\cos\varphi} - N \quad (3.6)$$

En remplaçant h_e dans l'équation (3.3), on :

$$Z = (N - e^2N + \frac{p}{\cos\varphi} - N)\sin\varphi \quad (3.7)$$

soit :

$$-e^2N\sin\varphi = Z - p\operatorname{tg}\varphi \quad (3.8)$$

Comme

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}}$$

on élève au carré les deux membres de (3.8), et on obtient l'équation :

$$(Z - p\operatorname{tg}\varphi)^2 = \frac{e^4 a^2 \sin^2\varphi}{1 - e^2 \sin^2\varphi} \quad (3.9)$$

Posons :

$$t = \operatorname{tg}\varphi \quad (3.10)$$

Alors :

$$\sin^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi = 1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2} \quad (3.11)$$

L'équation (3.9) devient :

$$(Z - pt)^2 = \frac{a^2 e^4 t^2}{1 + k^2 t^2} \quad (3.12)$$

$$\text{avec } k^2 = 1 - e^2 \quad (3.13)$$

Pour déterminer t , l'équation (3.12) implique la résolution d'un polynôme du quatrième degré en t à savoir :

$$(Z - pt)^2(1 + k^2 t^2) = a^2 e^4 t^2 \quad (3.14)$$

$$\text{ou } p^2 k^2 t^4 - 2pZk^2 t^3 + (k^2 Z^2 + p^2 - a^2 e^4)t^2 - 2pZt + Z^2 = 0 \quad (3.15)$$

3.2.2.1 Résolution de l'Equation du Quatrième Degré

Pour résoudre l'équation (3.15), on applique la méthode de Ferrari [3]. On commence par éliminer le terme en t^3 . Pour cela posons :

$$t = T + \frac{Z}{2p} \quad (3.16)$$

Alors l'équation (3.15) s'écrit avec comme nouvelle variable T :

$$p^2 k^2 T^4 + \left(p^2 - a^2 e^4 - \frac{k^2 Z^2}{2}\right) T^2 - Z\left(p + \frac{a^2 e^4}{p}\right) T + \frac{Z^2(4p^2 - 4a^2 e^4 + k^2)}{16p^2} = 0 \quad (3.17)$$

On peut écrire l'équation (3.17) sous la forme :

$$T^4 + lT^2 + mT + n = 0 \quad (3.18)$$

où l, m et n sont des constantes. Pour résoudre (3.17), on utilise la méthode de Cardan [3] qui consiste à écrire (3.17) sous la forme :

$$T^4 + lT^2 + mT + n = (T^2 + aT + b)(T^2 + cT + d) = 0 \quad (3.19)$$

où a, b, c et d des constantes fonction de l, m, n . On trouve que a est solution d'un polynôme de 3ème degré. On a alors :

$$(T^2 + aT + b)(T^2 + cT + d) = T^4 + (a+c)T^3 + (ac+d+b)T^2 + (ad+bc)T + bd \quad (3.20)$$

D'où :

$$a + c = 0 \quad (3.21)$$

$$ac + d + b = l \quad (3.22)$$

$$ad + bc = m \quad (3.23)$$

$$bd = n \quad (3.24)$$

De (3.21), on a :

$$c = -a \quad (3.25)$$

de (3.22) et (3.23), on a :

$$d + b = l + a^2d - b = \frac{m}{a}$$

ce qui donne :

$$d = \frac{al + a^3 + m}{2a} \quad (3.26)$$

$$b = \frac{al + a^3 - m}{2a} \quad (3.27)$$

On utilise l'équation (3.24) pour déterminer a ce qui donne :

$$\frac{al + a^3 + m}{2a} \cdot \frac{al + a^3 - m}{2a} = n$$

soit :

$$a^2(l + a^2)^2 - m^2 = 4a^2n \quad (3.28)$$

Et en posant :

$$u = a^2 \quad (3.29)$$

u vérifie alors :

$$u^3 + 2lu^2 + (l^2 - 4n)u - m^2 = 0 \quad (3.30)$$

3.2.2.2 Résolution de $x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \delta = 0$

On pose :

$$x = X - \frac{\alpha}{3} \quad (3.31)$$

L'équation $x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \delta = 0$ devient :

$$X^3 + AX + B = 0 \quad (3.32)$$

Pour résoudre (3.32), on pose :

$$X = v + w \quad (3.33)$$

Et (3.32) devient :

$$v^3 + w^3 + (v + w)(3vw + A) + B = 0 \quad (3.34)$$

On choisit v et w telque :

$$3vw + A = 0 \quad (3.35)$$

Donc v^3 et w^3 sont solutions de l'équation du second degré :

$$\zeta^2 + B\zeta - \frac{A^3}{27} = 0 \quad (3.36)$$

3.3 APPLICATION

On considère un point A de coordonnées géodésiques dans le système NTT :

$$\varphi = 41.2534 \text{ gr}$$

$$\lambda = 11.6587 \text{ gr}$$

$$h_e = 754.25 \text{ m}$$

On donne $a = 6378249.20 \text{ m}$ et $e^2 = 0.0068034877$ les paramètres de l'ellipsoïde de référence à savoir l'ellipsoïde de Clarke français 1880. En utilisant (3.1), (3.2) et (3.3), on obtient les coordonnées géocentriques :

$$X = 5007066.24 \text{ m} \quad (3.37)$$

$$Y = 927356.78 \text{ m} \quad (3.38)$$

$$Z = 3828912.09 \text{ m} \quad (3.39)$$

On suppose qu'on a (X, Y, Z) données par les valeurs (3.37), (3.38) et (3.39). On cherche à déterminer (φ, λ, h_e) .

3.3.1 Calcul de la longitude géodésique

Utilisant (3.1), on obtient :

$$\frac{927356.78}{5007066.24} = 0.185209609 \implies \lambda = 11.6586999 = 11.6587 \text{ gr} \quad (3.40)$$

3.3.2 Calcul de la latitude géodésique

On a :

$$p = \sqrt{X^2 + Y^2} = 5092219.843 \text{ m} \quad (3.41)$$

3.3.2.1 Calcul des coefficients l, m et n de (3.18)

On a posé $t = tg\varphi$. L'équation (3.12) devient numériquement :

$$(0.751914137 - t)^2 \cdot (1 + 0.993196513t^2) = 0.000057977t^2 \quad (3.42)$$

ou encore :

$$t^4 - 1.503828274t^3 + 1.572151845t^2 - 1.514129635t + 0.569247739 = 0 \quad (3.43)$$

Pour éliminer le coefficient de t^3 , on fait le changement de variables (3.16) ce qui donne numériquement :

$$t = T + 0.375957069 \quad (3.44)$$

Par suite, on obtient :

$$T^4 + 0.724089547T^2 - 0.757119795T + 0.162279647 = 0 \quad (3.45)$$

Ce qui donne les valeurs de l, m et n :

$$l = 0.724089541; \quad m = -0.757119795; \quad n = 0.162279647 \quad (3.46)$$

3.3.2.2 Calcul de a

On a posé $u = a^2$ et u vérifie l'équation (3.30) soit numériquement :

$$u^3 + 1.448179082u^2 - 0.124812925u - 0.573230384 = 0 \quad (3.47)$$

De la même façon, on élimine le coefficient de u^2 dans l'équation précédente en posant :

$$u = U - \frac{1.448179082}{3} = U - 0.482726361 \quad (3.48)$$

L'équation (3.47) devient :

$$U^3 - 0.823887143U - 0.288005526 = 0 \quad (3.49)$$

Résolution de l'équation du troisième degré (3.49)

On a obtenu l'équation précédente sous la forme de l'équation (3.32) soit :

$$U^3 + A.U + B = 0$$

avec :

$$A = -0.823887143; \quad B = -0.288005526 \quad (3.50)$$

On pose :

$$U = v + w$$

avec v^3 et w^3 vérifient l'équation :

$$\xi^2 + B\xi - \frac{A^3}{27} = 0$$

ou :

$$\xi^2 - 0.288005526\xi + 0.020712829 = 0$$

C'est une équation du second degré dont la solution est :

$$\xi_1 = \frac{-B + \sqrt{\Delta}}{2} \quad (3.51)$$

$$\xi_2 = \frac{-B - \sqrt{\Delta}}{2} \quad (3.52)$$

$$\text{avec } \Delta = B^2 + \frac{4A^3}{27} = 0.000095867 \quad (3.53)$$

Ce qui donne numériquement :

$$\xi_1 = \frac{0.288005526 + 0.009791170}{2} = 0.148898348 \quad (3.54)$$

$$\xi_2 = \frac{0.288005526 - 0.009791170}{2} = 0.139107178 \quad (3.55)$$

Détermination des inconnues v et w

On a alors le système :

$$v^3 = \xi_1 \quad (3.56)$$

$$w^3 = \xi_2 \quad (3.57)$$

Rappel : les solutions de $z^3 = 1$ sont :

$$- z_1 = 1$$

$$- z_2 = j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$- z_3 = j^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = \frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{avec : } 1 + j + j^2 = 0$$

Par suite, la résolution des équations (3.56)et (3.57) sont :

$$v_1 = \xi_1^{\frac{1}{3}} \quad (3.58)$$

$$v_2 = j \cdot \xi_1^{\frac{1}{3}} \quad (3.59)$$

$$v_3 = j^2 \cdot \xi_1^{\frac{1}{3}} \quad (3.60)$$

$$w_1 = \xi_2^{\frac{1}{3}} \quad (3.61)$$

$$w_2 = j \cdot \xi_2^{\frac{1}{3}} \quad (3.62)$$

$$w_3 = j^2 \cdot \xi_2^{\frac{1}{3}} \quad (3.63)$$

Comme $U = v + w > 0$ et que v, w vérifient la condition (3.35), on choisit :

$$v = v_1 = 0.530025332 \quad \text{et} \quad w = w_1 = 0.518143252 \quad (3.64)$$

Ce qui donne :

$$vw = v_1 \cdot w_1 = \xi_1^{\frac{1}{3}} \cdot \xi_2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{0.148898348 \times 0.139107178} = 0.274629049 > 0 \quad (3.65)$$

$$U = v + w = .530025332 + 0.518143252 = 1.048168584 \quad (3.66)$$

En revenant à u , on a :

$$u = U - 0.482726361 = 0.565442223 = a^2 \Rightarrow a = \pm 0.751958924$$

Prenant la valeur positive de a . On a alors :

$$a = +0.751958924 \quad (3.67)$$

$$b = 1.148197500 \quad (3.68)$$

$$c = -a = -0.751958924 \quad (3.69)$$

$$d = 0.141334265 \quad (3.70)$$

Contrôle $b \cdot d = 0.162279650 \cong 0.162279647$ la valeur de n (éq. (3.46)).

3.3.2.3 Calcul de la latitude géodésique φ

On revient à la résolution du polynôme du quatrième degré en T . On a alors :

$$T^2 + a \cdot T + b = 0 \Leftrightarrow T^2 + 0.751958924 \times T + 1.148197500 = 0 \quad (3.71)$$

$$T^2 + c \cdot T + d = 0 \Leftrightarrow T^2 - 0.751958924 \times T + 0.141334265 = 0 \quad (3.72)$$

La première équation a des racines complexes, quant à la deuxième, elle a deux racines réelles distinctes à savoir :

$$T_1 = 0.381106922 \Rightarrow t_1 = T_1 + \frac{Z}{2p} = 0.757063991 = \operatorname{tg} \varphi_1 \Rightarrow \varphi_1 = 41.2533919 \text{ gr} \quad (3.73)$$

$$T_2 = 0.370852002 \Rightarrow t_2 = T_2 + \frac{Z}{2p} = 0.746809071 = \operatorname{tg} \varphi_2 \Rightarrow \varphi_2 = 40.836343 \text{ gr} \quad (3.74)$$

Parmi φ_1, φ_2 que faut-il choisir ? Il faut que la latitude géodésique choisie vérifie l'équation (3.8) soit

$$p \operatorname{tg} \varphi - e^2 N \sin \varphi = Z$$

Or le calcul montre que φ_1 est la solution à choisir soit

$$\varphi = \varphi_1 = 41.2533919 \text{ gr} \quad (3.75)$$

3.3.2.4 Calcul de l'altitude ellipsoïdique h_e

Pour déterminer l'altitude ellipsoïdique h_e , on peut utiliser (3.1) ou (3.2). Prenant la première équation, on a :

$$h_e = \frac{X}{\cos \varphi \cdot \cos \lambda} - N(\varphi) = 753.635 \text{ m} \quad (3.76)$$

Finalement, les coordonnées du point M sont :

$$M \begin{cases} \varphi = 41.2533919 \text{ gr} \\ \lambda = 11.6586999 \text{ gr} \\ h_e = 753.63 \text{ m} \end{cases} \quad (3.77)$$

Littérature

1. **A. Ben Hadj Salem**. 2013. *Eléments de Géodésie*, v1. 335p. (En préparation). OTC.
2. **A. Ben Hadj Salem**. 2010. *Notions Fondamentales de Géodésie pour les Techniciens Topographes*. OTC. v1. 71p.
3. <http://www.emaths.fr/algebre/equation>. Résolution des équations du quatrième degré : méthode de Ferrari.

CHAPITRE 4

NOTE SUR LA TRANSFORMATION DE HELMERT :ÉTUDES DES ECARTS-TYPES

Dans cette note, on présente quelques propriétés de la transformation bidimensionnelle de Helmert.

Mots clés : écart-type - matrice normale - méthode des moindres carrés.

4.1 INTRODUCTION

Lors de la transformation des coordonnées d'un ensemble de points d'un système géodésiques vers un autre système géodésique utilisant la transformation de HELMERT en 2D, on pose souvent la question : quelle est la distance maximale entre les points pour avoir un écart-type σ donné des coordonnées des points transformés par l'application de la transformation de HELMERT bidimensionnelle ?

Dans cette note, on essayera de répondre à cette question.

4.2 LA TRANSFORMATION DE HELMERT BIDIMENSIONNELLE

Cette transformation s'écrit sous la forme vectorielle :

$$X_2 = T + s.R(\theta).X_1 \quad (4.1)$$

où :

- X_2 est le vecteur de composantes $(X_2, Y_2)^T$, (X_2, Y_2) désignent les coordonnées planimétriques du système 2,
- T est le vecteur translation de composantes $(T_x, T_y)^T$ entre les systèmes 1 et 2,
- s est le facteur d'échelle entre les 2 systèmes,
- $R(\theta)$ est la matrice de rotation (2,2) pour passer du système 1 au système 2,
- X_1 est le vecteur de composantes $(X_1, Y_1)^T$ où X_1, Y_1 désignent les coordonnées dans le système 1.

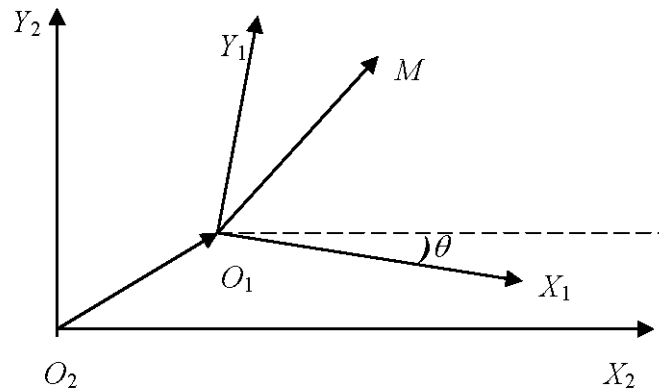


Fig. 4.1 Modèle de Helmert

En développant (4.1), on obtient :

$$X_2 = T_x + s.X_1.\cos\theta - s.Y_1.\sin\theta \quad (4.2)$$

$$Y_2 = T_y + s.X_1.\sin\theta + s.Y_1.\cos\theta \quad (4.3)$$

En prenant comme inconnues auxiliaires :

$$v = s \cdot \sin \theta \quad (4.4)$$

$$u = s \cdot \cos \theta \quad (4.5)$$

Le système (4.2)-(4.3) s'écrit :

$$X_2 = T_x + X_1 \cdot u - Y_1 \cdot v \quad (4.6)$$

$$Y_2 = T_y + X_1 \cdot v + Y_1 \cdot u \quad (4.7)$$

Les inconnues T_x, T_y, u et v seront déterminées par les moindres carrés en utilisant des points communs dans les deux systèmes.

Ayant u et v , on déduit :

$$s = \sqrt{u^2 + v^2} \quad (4.8)$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{v}{u} \quad (4.9)$$

4.3 RÉOLUTION PAR LES MOINDRES CARRÉS

Résolvons par la méthode des moindres carrés le système (4.6)-(4.7). On suppose donné n points communs entre le système S_1 et le système S_2 :

- $(X'_i, Y'_i)_{i=1,n}$ dans le système S_2 ,

- $(X_i, Y_i)_{i=1,n}$ dans le système S_1 .

Posons :

$$\bar{X} = \frac{\sum_1^n X_i}{n} \quad (4.10)$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum_1^n Y_i}{n} \quad (4.11)$$

$$\bar{X}' = \frac{\sum_1^n X'_i}{n} \quad (4.12)$$

$$\bar{Y}' = \frac{\sum_1^n Y'_i}{n} \quad (4.13)$$

les coordonnées respectives des centres de gravités des points dans S_1 et S_2 .

Posons de même :

$$x_i = X_i - \bar{X} \quad (4.14)$$

$$y_i = Y_i - \bar{Y} \quad (4.15)$$

$$x'_i = X'_i - \bar{X}' \quad (4.16)$$

$$y'_i = Y'_i - \bar{Y}' \quad (4.17)$$

Dans ce cas, le système (4.6)-(4.7) s'écrit :

$$x'_i = T_x + x_i \cdot u - y_i \cdot v \quad (4.18)$$

$$y'_i = T_y + x_i \cdot v + y_i \cdot u \quad (4.19)$$

Soient (T_x^0, T_y^0, u_0, v_0) une solution approchée du système. Posons alors :

$$T_x = T_x^0 + dt_x \quad (4.20)$$

$$T_y = T_y^0 + dt_y \quad (4.21)$$

$$u = u_0 + du \quad (4.22)$$

$$v = v_0 + dv \quad (4.23)$$

Alors les équations (4.18)-(4.19) deviennent :

$$x'_i = T_x^0 + dt_x + x_i \cdot (u_0 + du) - y_i \cdot (v_0 + dv) \quad (4.24)$$

$$y'_i = T_y^0 + dt_y + x_i \cdot (v_0 + dv) + y_i \cdot (u_0 + du) \quad (4.25)$$

En écrivant ces équations sous la forme de l'équation des moindres carrés :

$$A \cdot X = L + W \quad (4.26)$$

Avec X le vecteur des inconnues :

$$X = \begin{pmatrix} dt_x \\ dt_y \\ du \\ dv \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

L le vecteur des observables :

$$L = \begin{pmatrix} x'_1 - T_x^0 - x_1 u_0 + y_1 v_0 \\ y'_1 - T_y^0 - x_1 v_0 - y_1 u_0 \\ \vdots \\ x'_i - T_x^0 - x_i u_0 + y_i v_0 \\ y'_i - T_y^0 - x_i v_0 - y_i u_0 \\ \vdots \\ x'_n - T_x^0 - x_n u_0 + y_n v_0 \\ y'_n - T_y^0 - x_n v_0 - y_n u_0 \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

W le vecteur des résidus :

$$W = \begin{pmatrix} w_{x_1} \\ w_{y_1} \\ \vdots \\ w_{x_n} \\ w_{y_n} \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

et A la matrice des coefficients :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 & -y_1 \\ 0 & 1 & y_1 & x_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & x_i & -y_i \\ 0 & 1 & y_i & x_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & x_n & -y_n \\ 0 & 1 & y_n & x_n \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

4.4 LA SOLUTION PAR LES MOINDRES CARRÉS

La solution de (4.26) par les moindres carrés donne :

$$\bar{X} = (A^T A)^{-1} A^T L \quad (4.31)$$

Posons :

$$N = A^T A \quad (4.32)$$

qu'on appelle matrice normale du système (4.26). On obtient alors :

$$N = \begin{pmatrix} n & 0 & \sum x_i & -\sum y_i \\ 0 & n & \sum y_i & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum y_i & \sum (x_i^2 + y_i^2) & 0 \\ -\sum y_i & \sum x_i & 0 & \sum (x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

Comme on travaille par rapport aux centres de gravité des coordonnées de S_1 et S_2 , on a alors par définition :

$$\sum x_i = \sum y_i = \sum x'_i = \sum y'_i = 0 \quad (4.34)$$

De plus notons :

$$d_i^2 = x_i^2 + y_i^2 \quad (4.35)$$

Alors la matrice N s'écrit facilement :

$$N = \begin{pmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sum d_i^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sum d_i^2 \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

La matrice normale est diagonale, son inverse est donné par :

$$N^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sum d_i^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sum d_i^2} \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

Or on sait que :

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \sigma_0^2 \cdot N^{-1} \quad (4.38)$$

où σ_0^2 est le facteur de variance unitaire donné par :

$$\sigma_0^2 = \frac{W^T W}{n-4} = \frac{\sum_i^n w_i^2}{n-4} \quad (4.39)$$

De l'équation (4.38), on voit que :

$$\sigma_{d_{tx}}^2 = \sigma_{d_{ty}}^2 = \sigma_0^2 \frac{1}{n} \quad (4.40)$$

Soit :

Propriété 1 : Dans une transformation de Helmert bidimensionnelle, plus le nombre de points communs n entre les deux systèmes est grand, plus la détermination du vecteur translation $T = (T_x, T_y)^T$ est précise.

Quant aux deux autres inconnues (facteur d'échelle et la rotation), on a :

$$\sigma_u^2 = \sigma_v^2 = \sigma_0^2 \frac{1}{\sum d_i^2} \quad (4.41)$$

Soit $D = \max(d_i)$. Si on veut imposer σ_u^2 égal à $\tilde{\sigma}_u^2$ donné, quelles conditions vérifient les d_i . On a :

$$\tilde{\sigma}_u^2 = \sigma_0^2 \frac{1}{\sum d_i^2} \Rightarrow \sum d_i^2 = \frac{\sigma_0^2}{\tilde{\sigma}_u^2} \quad (4.42)$$

Or

$$d_i \leq D \Rightarrow \sum_{i=1}^{i=n} d_i^2 \leq nD^2$$

Par suite :

$$\frac{\sigma_0^2}{\tilde{\sigma}_u^2} \leq nD^2 \Rightarrow D^2 \geq \frac{\sigma_0^2}{n\tilde{\sigma}_u^2} \quad (4.43)$$

D'où :

Propriété 2 : Dans une transformation de Helmert bidimensionnelle, en imposant un écart-type donné de la rotation $\tilde{\sigma}_u$, la distance maximale D qu'on peut prendre vaut $\frac{\sigma_0}{\tilde{\sigma}_u \sqrt{n}}$.

Un exemple pratique de cette étude fera l'objet d'une prochaine note.

Littérature

1. **A. Ben Hadj Salem.** 1981. Point de Laplace, Exemple de Calcul Géodésique et Analyse des Résultats en Géodésie Tridimensionnelle. Rapport de stage IT3. ENSG. IGN. 120p.
2. **A. Ben Hadj Salem.** 2001. Les transformations polynomiales. Juin 2001. 6p. OTC.

RAPPELS MATHÉMATIQUES POUR LA THÉORIE DU POTENTIEL

Cette note représente des rappels mathématiques nécessaire au cours de la théorie du potentiel, rédigée par l'auteur à partir du cours suivi à l'École Nationale des Sciences Géographiques de l'Institut Géographique National Français pour l'obtention du diplôme d'ingénieur civil.

5.1 FORMES DIFFÉRENTIELLES

Soit un point M de coordonnées (X, Y, Z) . Le vecteur infinitésimal $d\mathbf{M}$ aura pour composantes :

$$d\mathbf{M} = \begin{vmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{vmatrix}$$

Soit f une fonction définie de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, la différentielle de f est donnée par :

$$df = \partial_x f dX + \partial_y f dY + \partial_z f dZ = (\nabla f, d\mathbf{M}) \quad (5.1)$$

où $(,)$ désigne le produit scalaire et ∇f est donnée par :

$$\nabla f = \begin{vmatrix} \partial_x f = \frac{\partial f}{\partial X} \\ \partial_y f = \frac{\partial f}{\partial Y} \\ \partial_z f = \frac{\partial f}{\partial Z} \end{vmatrix} \quad (5.2)$$

dX, dY et dZ sont dites des formes différentielles de degré un.

5.2 PRODUIT EXTÉRIEUR

Si on considère l'Algèbre des formes multilinéaires alternées. Soit le produit extérieur des formes linéaires qui vérifie :

$$a \wedge b = -b \wedge a \quad (5.3)$$

$$a \wedge a = 0 \quad (5.4)$$

Soient $dX \wedge dY, dY \wedge dZ$ et $dZ \wedge dX$.

5.3 DÉRIVATION EXTÉRIEURE

La dérivation extérieur d vérifie :

$$d(s+t) = ds + dt \quad (5.5)$$

$$d(s \wedge t) = ds \wedge t + (-1)^{(\text{degré de } s)} s \wedge dt \quad (5.6)$$

$$d(ds) = 0 \quad (5.7)$$

Exemple

Soit $\omega = PdX + QdY + RdZ$ où P, Q, R sont des fonctions de X, Y, Z . On a alors :

$$d\omega = dP \wedge dX + dQ \wedge dY + dR \wedge dZ \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} d\omega &= (\partial_X PdX + \partial_Y PdY + \partial_Z PdZ) \wedge dX + \\ &\quad (\partial_X QdX + \partial_Y QdY + \partial_Z QdZ) \wedge dY + \\ &\quad (\partial_X RdX + \partial_Y RdY + \partial_Z RdZ) \wedge dZ \\ d\omega &= (\partial_X Q - \partial_Y P)dX \wedge dY + (\partial_Y R - \partial_Z Q)dY \wedge dZ + (\partial_Z P - \partial_X R)dZ \wedge dX \end{aligned} \quad (5.9)$$

On obtient une forme de degré deux.

Soit le vecteur U , on a :

$$U = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

Posons :

$$\omega = U.d\mathbf{M} = PdX + QdY + RdZ$$

et la base :

$$\Sigma = (dY \wedge dZ, dZ \wedge dX, dX \wedge dY) \quad (5.11)$$

Alors $d\omega$ s'écrit dans cette base :

$$d\omega = \nabla \wedge U = \mathbf{Rot}U \quad (5.12)$$

Ici \wedge désigne le produit vectoriel dans \mathbb{R}^3 .

Soit maintenant :

$$\sigma = AdY \wedge dZ + BdZ \wedge dX + CdX \wedge dY \quad (5.13)$$

où σ est une forme différentielle de degré 2. Alors

$$\begin{aligned} d\sigma &= dA \wedge dY \wedge dZ + dB \wedge dZ \wedge dX + dC \wedge dX \wedge dY \\ &= (\partial_x A + \partial_y B + \partial_z C).dX \wedge dY \wedge dZ \end{aligned} \quad (5.14)$$

En appelant :

$$\mathbf{W} = \begin{vmatrix} A \\ B \\ C \end{vmatrix} \quad (5.15)$$

On a alors :

$$d\sigma = \mathit{div}\mathbf{W}.dX \wedge dY \wedge dZ \quad (5.16)$$

5.4 OPÉRATEUR DE HODGE

Définition : L'opérateur de Hodge associe à la forme de degré i la forme de degré $(i+1)$. On note l'opérateur par $*$. On a alors :

$$*dX = dY \wedge dZ \quad (5.17)$$

$$*dY = dZ \wedge dX \quad (5.18)$$

$$*dZ = dX \wedge dY \quad (5.19)$$

Et :

$$*dX \wedge dY = dZ \quad (5.20)$$

Calculons $d(*df)$, comme $df = \partial_x f dX + \partial_y f dY + \partial_z f dZ$ alors :

$$*df = \partial_x f dY \wedge dZ + \partial_y f dZ \wedge dX + \partial_z f dX \wedge dY \quad (5.21)$$

D'où :

$$d(*df) = \nabla \cdot \nabla f dX \wedge dY \wedge dZ = \Delta f .dX \wedge dY \wedge dZ \quad (5.22)$$

où Δ désigne le laplacien :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial Z^2}$$

En notant :

$$dv = dX \wedge dY \wedge dZ \quad (5.23)$$

la forme volume, alors :

$$d(*df) = \Delta f \cdot dv \quad (5.24)$$

Calculons :

$$dg \wedge (*df) = (\partial_X g \partial_X f + \partial_Y g \partial_Y f + \partial_Z g \partial_Z f) dX \wedge dY \wedge dZ \quad (5.25)$$

on peut écrire aussi :

$$dg \wedge (*df) = (\nabla g, \nabla f) \cdot dv = (\nabla f, \nabla g) \cdot dv \quad (5.26)$$

En résumé, on a :

$$\boxed{dg \wedge (*df) = df \wedge (*dg)} \quad (5.27)$$

$$\boxed{d(*df) = \Delta f \cdot dv} \quad (5.28)$$

$$\boxed{d(df) = 0} \quad (5.29)$$

5.5 CHANGEMENT DE VARIABLES

Soit le repère orthonormé $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, en un point M , on associe un repère orthonormé $(M, \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3)$ avec les variables y_i . Dans ce cas :

$$d\mathbf{M} = dX_i \cdot \mathbf{e}_i = \partial_{y_i} \mathbf{M} dy_i = s_i \mathbf{d}_i \quad (5.30)$$

Exemple : on utilise les coordonnées sphériques (r, λ, θ) , on a dans ce cas :

$$s_1 = dr \quad (5.31)$$

$$s_2 = r d\theta \quad (5.32)$$

$$s_3 = r \sin \theta d\lambda \quad (5.33)$$

Pour i fixé, on a :

$$s_i = \mu_i dy_i \implies dy_i = \frac{s_i}{\mu_i} \quad (5.34)$$

Dans notre exemple, on obtient :

$$\mu_1 = 1 \quad (5.35)$$

$$\mu_2 = r \quad (5.36)$$

$$\mu_3 = r \sin \theta \quad (5.37)$$

Exprimons df , $*df$, $d(*df)$:

$$df = (\nabla f, dM) = \sum_i \partial_{y_i} f \cdot dy_i = \sum_i \partial_{y_i} f \cdot \frac{s_i}{\mu_i} = \sum_i s_i \frac{\partial_{y_i} f}{\mu_i} = \sum_i a_i s_i \quad (5.38)$$

Avec :

$$a_i = \frac{\partial_{y_i} f}{\mu_i} \quad (5.39)$$

Alors :

$$*df = a_1 s_2 \wedge s_3 + a_2 s_3 \wedge s_1 + a_3 s_1 \wedge s_2 \quad (5.40)$$

Ou encore :

$$*df = a_1 \mu_2 \mu_3 dy_2 \wedge dy_3 + a_2 \mu_1 \mu_3 dy_3 \wedge dy_1 + a_3 \mu_1 \mu_2 dy_1 \wedge dy_2 \quad (5.41)$$

or :

$$da_i = \sum_j \partial_{y_j} a_i dy_j = \sum_j \partial_{y_j} a_i \frac{s_j}{\mu_j} \quad (5.42)$$

D'où l'expression de :

$$d(*df) = \partial_{y_1} (a_1 \mu_2 \mu_3) dy_1 \wedge dy_2 \wedge dy_3 + \partial_{y_2} (a_2 \mu_1 \mu_3) dy_2 \wedge dy_3 \wedge dy_1 + \partial_{y_3} (a_3 \mu_1 \mu_2) dy_3 \wedge dy_1 \wedge dy_2 \quad (5.43)$$

ou encore en utilisant (5.39) :

$$d(*df) = \sum \partial_{y_1} \left(\frac{\partial_{y_1} f}{\mu_1} \mu_2 \mu_3 \right) dy_1 \wedge dy_2 \wedge dy_3 + \text{termes permutés} \quad (5.44)$$

Soit :

$$d(*df) = \sum \partial_{y_1} \left(\partial_{y_1} f \frac{\mu_2 \mu_3}{\mu_1} \right) dy_1 \wedge dy_2 \wedge dy_3 + \text{termes permutés} \quad (5.45)$$

Et en utilisant (5.34), on obtient :

$$d(*df) = \frac{1}{\mu_1 \mu_2 \mu_3} \sum \partial_{y_1} \left(\partial_{y_1} f \frac{\mu_2 \mu_3}{\mu_1} \right) s_1 \wedge s_2 \wedge s_3 \quad (5.46)$$

Or d'après (5.29), on a :

$$d(*df) = \Delta f \cdot dv$$

D'où le résultat :

$$d(*df) = \Delta f \cdot s_1 \wedge s_2 \wedge s_3 = \frac{1}{\mu_1 \mu_2 \mu_3} \sum \partial_{y_1} \left(\partial_{y_1} f \frac{\mu_2 \mu_3}{\mu_1} \right) s_1 \wedge s_2 \wedge s_3 \quad (5.47)$$

De (5.47), on déduit pour le cas de notre exemple, l'expression de la forme du volume et du laplacien en coordonnées sphériques :

$$dv = r^2 \sin \theta dr d\theta d\lambda \quad (5.48)$$

et :

$$\Delta f = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\partial_r (r^2 \sin \theta \partial_r f) + \partial_\theta \left(\frac{r \sin \theta}{r} \partial_\theta f \right) + \partial_\lambda \left(\frac{r}{r \sin \theta} \partial_\lambda f \right) \right] \quad (5.49)$$

ou encore :

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r f) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta f) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\lambda \partial_\lambda f \quad (5.50)$$

5.6 QUELQUES THÉORÈMES

5.6.1 Théorème de Stokes

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^3 , $\partial\Omega$ sa frontière et s une forme différentielle, alors :

$$\int_{\Omega} ds = \int_{\partial\Omega} s \quad (5.51)$$

On suppose un domaine régulier soit une surface de Lyapunov.

5.6.2 Théorème de Green

On prend $s = U * dV$, d'où :

$$\int_{\partial\Omega} U * dV = \int_{\Omega} d(U * dV) = \int_{\Omega} dU \wedge (*dV) + U d(*dV) = \int_{\Omega} (\nabla U, \nabla V) dq + \int_{\Omega} U \Delta V dq$$

On a la formule :

$$\int_{\Omega} (U \Delta V - V \Delta U) dq = \int_{\partial\Omega} (U * dV - V * dU) \quad (5.52)$$

Applications

1. Soit V une fonction scalaire (un potentiel), on a :

$$dV = \partial_X V dX + \partial_Y V dY + \partial_Z V dZ$$

Posons :

$$a = \|\partial_X \mathbf{M}\|, b = \|\partial_Y \mathbf{M}\|, c = \|\partial_Z \mathbf{M}\|$$

D'après ce qui précède, on a :

$$*dV = \frac{bc}{a} \partial_X V dY \wedge dZ + \frac{ca}{b} \partial_Y V dZ \wedge dX + \frac{ab}{c} \partial_Z V dX \wedge dY$$

Comme sur $\partial\Omega$, $Z = \text{constante}$ implique que :

$$*dv = \frac{ab}{c} \partial_Z V dX \wedge dY = \frac{s_1 \wedge s_2}{c} \partial_Z V$$

avec $s_1 = adX$ et $s_2 = bdY$, d'où la formule :

$$*dV = \partial_n V s_1 \wedge s_2 = \partial_n V dS \quad (5.53)$$

Avec ∂_n la dérivée suivant la normale. Et plus généralement :

$$\int_{\Omega} (U\Delta V - V\Delta U) dq = \int_{\partial\Omega} (U\partial_n V - V\partial_n U) dS \quad (5.54)$$

Soit une fonction f de classe C^2 , finie dans Ω borné, $f \rightarrow 0$ si Ω est non borné. Exemple : prenons $f = \frac{1}{r}$, f est harmonique et on a :

$$df = d(1/r) = -dr/r^2$$

$$\begin{aligned} *d(1/r) &= -\frac{1}{r^2} r d\theta \wedge r \sin\theta d\lambda = -\sin\theta d\theta \wedge d\lambda \\ &= d\cos\theta \wedge d\lambda = d\Omega \Rightarrow d(*d(1/R)) = 0 \end{aligned} \quad (5.55)$$

5.7 LES DISTRIBUTIONS

5.7.1 Introduction

on peut avoir :

- des masses ponctuelles,
- des masses linéaires,
- des masses surfaciques,
- et des masses volumiques.

Donc la masse totale est sous la forme :

$$M = \sum m_i + \int l ds + \iint \sigma dS + \iiint \rho dV$$

Le potentiel créé en un point est de la forme :

$$U = \sum \frac{m_i}{R_i} + \int \frac{l ds}{R} + \iint \frac{\sigma dS}{R} + \iiint \frac{\rho dV}{R}$$

M, U, E (l'énergie) sont des fonctions réelles ou encore des fonctionnelles : à $f \in E$ associe un réel dans \mathbb{R} .

On appelle $D(\Omega)$ un domaine Ω ouvert dans \mathbb{R}^n où f est de C^∞ .

Le support de f : c'est l'ensemble des points où $f \neq 0$.

L'espace dual de D est $D'(\Omega) = \{T \in D'(\Omega) \text{ ensemble des formes linéaires}\}$: Soit :

$$f \in D \longrightarrow a = \langle T, f \rangle \in \mathbb{R}$$

D' est appelé l'ensemble des distributions.

Propriétés

1. Si $f_n \longrightarrow f \in D$ alors $a_n = \langle T, f_n \rangle \longrightarrow a = \langle T, f \rangle$
2. Si $T_n \longrightarrow T \in D'$ alors $\forall f \in D, b_n = \langle T_n, f \rangle \longrightarrow b = \langle T, f \rangle$
3. Appelons $\Omega = \{f \text{ de } C^\infty / f \in L_2(\Omega) : \int_\Omega \|f\|^2 d\Omega \leq +\infty\}$.
4. $D(\Omega)$ est dense dans $L_2(\Omega)$.
5. $f \in L_2(\Omega) \longrightarrow T_f \in D'(\Omega) / \langle T_f, g \rangle = \int_\Omega \langle f, g \rangle d\Omega$ avec $g \in D(\Omega)$.
6. L'application est injective : $T_f = T_g \longrightarrow f = g$ presque partout.
7. Translation : $\langle T_h, f(X) \rangle = \langle T_0, f(X+h) \rangle$.
8. Dérivation : à $T \in D' \longrightarrow T'$ telle que :

$$\forall f \in D : \langle T', f \rangle = - \langle T, f' \rangle \iff T \text{ est de } C^\infty$$

On a :

$$\begin{aligned} \langle T'', f \rangle &= \langle T, f'' \rangle \\ \langle T^{(m)}, f \rangle &= (-1)^m \langle T, f^m \rangle \end{aligned}$$

9. Soit f de C^1 :

$$\begin{aligned} \forall g \in D, \langle \partial T, g \rangle &= - \langle T_f, \partial g \rangle = - \int f g' d\Omega \\ \langle T_{f'}, g \rangle &= \int f' g d\Omega = (fg) - \int f g' d\Omega = 0 - \int f g' d\Omega = - \int f g' d\Omega \end{aligned} \quad (5.56)$$

D'où le résultat.

10. Si f présente des discontinuités :

$$\begin{aligned} \langle \partial T, g \rangle &= - \langle T_f, \partial g \rangle = - \int f g' d\Omega = -(fg) + \int g f' d\Omega \\ &= -f(X_{i+1})g(X_{i+1}) + f(X_i)g(X_i) + (T_{f'}, g) \\ &= \langle T_{f'}, g \rangle + g(X_i)S_i \end{aligned} \quad (5.57)$$

Ou encore :

$$\partial T_f = T_{f'} + \sum s_i \delta(X - X_i)$$

11. $g \rightarrow g(X_i)$ c'est la distribution de Dirac $\delta(X - X_i)$. Exemple : fonction de Heaviside $H(t)$, on a alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(t)g(t) = \int_{\text{Supportdeg} \cap \mathbb{R}^+} g(t)dt \quad (5.58)$$

Donc :

$$\langle \partial T_H, g \rangle = g(0) \cdot 1 = g(0) = \delta(X)$$

12. Les distributions régulières vérifient :

$$\langle T, f \rangle = \int g f d\Omega \quad \forall f \quad (5.59)$$

13. Les distributions singulières : On utilise le théorème de Schwartz : les distributions singulières sur un support compact, on a :

$$\langle T_f, g \rangle = \sum \frac{\partial g}{\partial X_i}$$

5.8 CONVOLUTION

Soient deux fonctions f et $g \in D$, on appelle convolution de f et g :

$$f * g(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(\tau - t)dt \quad (5.60)$$

Calculons :

$$\langle f * g, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi dX \int f(t)g(X - t)dt = \iint \varphi(X)f(t)g(X - t)dt dX$$

Pourque $\langle f * g, \varphi \rangle = \langle f, \langle g, \varphi \rangle \rangle$ il faut donc $\langle g, \varphi \rangle$ soit de support fermé.

- vraie si g est à support borné, ou si f et g sont bornées à droite et à gauche.

D'autre part $\langle f * g, \varphi \rangle = \langle g * f, \varphi \rangle$ si f et g ont les mêmes propriétés.

La distribution Dirac δ est l'élément neutre :

$$\begin{aligned}
& \delta * g(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(\varepsilon - t)dt = \\
& \int_{-\infty}^{-\varepsilon} f(t)\delta(\varepsilon - t)dt + \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f(t)\delta(\varepsilon - t)dt + \int_{+\varepsilon}^{+\infty} f(t)\delta(\varepsilon - t)dt = \\
& \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f(t)\delta(\varepsilon - t)dt = f(t) \quad (5.61)
\end{aligned}$$

NOTE SUR L'ANALYSE DE STRUCTURE D'UN RÉSEAU GÉODÉSIQUE DE BASE :ASPECT TRIDIMENSIONNEL

6.1 INTRODUCTION

A partir de " Exemple de calcul géodésique, analyse de structure des résultats " de H.M. Dufour (1975) concernant l'analyse de structure d'un réseau géodésique, on présente dans cette note une étude similaire mais dans l'option de la géodésie tridimensionnelle. Ceci a pour base l'utilisation en un point du repère géodésique local (M, λ, μ, ν) dans la compensation par les moindres carrés. Les relations d'observations sont celles de la géodésie tridimensionnelle.

Cette étude permettra d'analyser les fondements d'un réseau géodésique de base ou primordial et de comparer les déformations que subit le réseau en des points séparés par de longues distances.

Cette note est extraite du rapport du stage de fin d'études à l'ENSG (A. Ben Hadj Salem, 1981), effectué à l'IGN (www.ign.fr) en 1981, avec quelques développements.

6.2 FONCTION ECART

Le réseau réel (RR) inconnu est approché de façon aléatoire par un réseau calculé (RC). Le point M d'un point approché M_0 dans le repère (RC) ne coïncide pas avec sa position dans

(RR).

Soient (x, y) les coordonnées de M avec origine M_0 dans le repère (RC) et (dx_M, dy_M) les vraies coordonnées de compensation dans le réseau (RR) et (dx_0, dy_0) les inconnues de compensation dans le (RC) obtenues par les moindres carrés, on peut écrire :

$$dx_M = dx_0 + ax + by \quad (6.1)$$

$$dy_M = dy_0 + a'x + b'y \quad (6.2)$$

ou encore sous la forme :

$$dx_M = r_0 + x \frac{\partial r}{\partial x} + y \frac{\partial r}{\partial y} \quad (6.3)$$

$$dy_M = s_0 + x \frac{\partial s}{\partial x} + y \frac{\partial s}{\partial y} \quad (6.4)$$

Les fonctions $r(x, y)$ et $s(x, y)$ sont appelées **fonctions écarts**.

On définit les coefficients H,G,P et Q par :

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial y} \right) \quad (6.5)$$

$$G = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial r}{\partial y} - \frac{\partial s}{\partial x} \right) \quad (6.6)$$

$$P = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial r}{\partial x} - \frac{\partial s}{\partial y} \right) \quad (6.7)$$

$$Q = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial s}{\partial x} \right) \quad (6.8)$$

Ce qui donne :

$$dx_M = dx_0 + Hx + Gy + Px + Qy \quad (6.9)$$

$$dy_M = dy_0 - Gx + Hy + Qx - Py \quad (6.10)$$

ou encore :

$$\begin{pmatrix} dx_M - dx_0 \\ dy_M - dy_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H & G \\ -G & H \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P & Q \\ Q & -P \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (6.11)$$

Soit :

$$\Delta = A.X + B.X \quad (6.12)$$

avec :

$$A = \begin{pmatrix} H & G \\ -G & H \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} P & Q \\ Q & -P \end{pmatrix} \quad (6.13)$$

On note que les matrices A et B sont linéairement indépendantes si A et B ne sont pas nulles simultanément. Soit :

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

avec :

$$X' = A.X \quad (6.14)$$

En écrivant (6.14) en notation complexe avec $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, on obtient :

$$z' = (H - iG)z \quad (6.15)$$

En posant :

$$\alpha = H - iG \quad (6.16)$$

l'équation (6.15) s'écrit :

$$z' = \alpha z \quad (6.17)$$

La fonction $f : z \mapsto \alpha z$ est une fonction holomorphe donc analytique et par suite l'application à X associée AX est une transformation conforme c'est-à-dire conserve les angles.

Dans l'espace des vecteurs propres de A , on peut écrire la matrice A sous la forme (Voir Annexe) :

$$A = H.I + i \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & -G \end{pmatrix} \quad (6.18)$$

avec I la matrice unité d'ordre 2.

L'application $X \rightarrow X' = A.X$ donne :

$$X' = H.X + i \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & -G \end{pmatrix} .X \quad (6.19)$$

Si dans (6.19) $G = 0$, l'application se réduit à une homothétie vectorielle de rapport H . Le facteur H est appelé **erreur relative d'échelle** et G **erreur relative d'orientation**.

Revenons à la matrice B , le deuxième terme de (6.12) s'écrit en notation complexe :

$$z' = \beta \bar{z} \quad (6.20)$$

où $\bar{z} = x - iy$ le conjugué de z avec :

$$\beta = P + iQ \quad (6.21)$$

La fonction $z' = \beta \bar{z}$ n'est pas une fonction holomorphe (car $\frac{\partial z'}{\partial \bar{z}} = \beta \neq 0$) donc non analytique, et par suite elle ne représente pas une transformation conforme. Cette transformation donne une déformation appelée **ovalisation** (Dufour H.M, 1977).

La matrice B a une trace nulle, propriété invariante par rotation, il existe une base de vecteurs où B s'écrit :

$$B' = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & -v \end{pmatrix} \quad (6.22)$$

avec :

$$v^2 = P^2 + Q^2 \quad (6.23)$$

v est dit le **coefficient d'ovalisation**. P et Q définissent l'**erreur relative d'ovalisation**.

6.3 NOTION DE LA FONCTION ECART EN GÉODÉSIE TRIDIMENSIONNELLE

Nous allons essayer d'introduire la notion de fonctions écarts en géodésie tridimensionnelle. Partant de la même idée que celle pour définir le système d'équations (6.1) et (6.2), on peut écrire dans le repère orthonormé (O, X_1, Y_1, Z_1) :

$$dX_M = dX_0 + aX + bY + cZ \quad (6.24)$$

$$dY_M = dY_0 + a'X + b'Y + c'Z \quad (6.25)$$

$$dZ_M = dZ_0 + a''X + b''Y + c''Z \quad (6.26)$$

où dX_M, dY_M et dZ_M sont les inconnues de compensation dans le réseau réel (RR) et dX_0, dY_0 et dZ_0 les inconnues de compensation dans le réseau calculé (RC) et X, Y, Z les coordonnées de M dans le repère (M_0, X, Y, Z) parallèle à (O, X_1, Y_1, Z_1) et a, b, c, \dots, c'' sont des constantes.

Le système (6.24-6.25-6.26) s'écrit aussi :

$$dX_M = U_1(M_0) + X \frac{\partial U_1}{\partial X} + Y \frac{\partial U_1}{\partial Y} + Z \frac{\partial U_1}{\partial Z} \quad (6.27)$$

$$dY_M = U_2(M_0) + X \frac{\partial U_2}{\partial X} + Y \frac{\partial U_2}{\partial Y} + Z \frac{\partial U_2}{\partial Z} \quad (6.28)$$

$$dZ_M = U_3(M_0) + X \frac{\partial U_3}{\partial X} + Y \frac{\partial U_3}{\partial Y} + Z \frac{\partial U_3}{\partial Z} \quad (6.29)$$

Les fonctions U_1, U_2, U_3 sont appelées **Fonctions Ecarts**. On écrit le système précédent sous la forme matricielle comme suit :

$$\begin{pmatrix} dX_M \\ dY_M \\ dZ_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1(M_0) \\ U_2(M_0) \\ U_3(M_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial X} & \frac{\partial U_1}{\partial Y} & \frac{\partial U_1}{\partial Z} \\ \frac{\partial U_2}{\partial X} & \frac{\partial U_2}{\partial Y} & \frac{\partial U_2}{\partial Z} \\ \frac{\partial U_3}{\partial X} & \frac{\partial U_3}{\partial Y} & \frac{\partial U_3}{\partial Z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad (6.30)$$

Soit :

$$U = \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} \right) \quad (6.31)$$

la matrice de terme général $\frac{\partial U_i}{\partial X_j}$, on peut écrire :

$$U = S + A \quad (6.32)$$

$$\text{avec } S = \frac{1}{2}(U + U^T); \quad A = \frac{1}{2}(U - U^T) \quad (6.33)$$

T désigne la transposée. Alors les matrices S et A sont respectivement symétriques et antisymétriques.

Par analogie avec la théorie de l'élasticité (Landau L. et Lifchitz E.,1970, Sanso F.,1982), on appelle :

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \right) \quad (6.34)$$

le **tenseur de déformation** du réseau.

La matrice S étant symétrique, elle peut être réduite en chaque point à ses axes principaux directions des vecteurs propres. Cela signifie qu'on peut choisir en chaque point donné un système de vecteurs orthogonaux telque la matrice S soit diagonale :

$$S = \begin{pmatrix} U^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & U^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & U^{(3)} \end{pmatrix} \quad (6.35)$$

L'effet de S se traduit par :

$$d\mathcal{X} = U^{(1)} \mathcal{X} \quad (6.36)$$

$$d\mathcal{Y} = U^{(2)} \mathcal{Y} \quad (6.37)$$

$$d\mathcal{Z} = U^{(3)} \mathcal{Z} \quad (6.38)$$

Le système (6.36-6.37-6.38) nous donne un ensemble de trois déformations indépendantes dans trois directions orthogonales. Chacune de ces déformations est une homothétie de rapport $U^{(i)}$.

Etudions maintenant la matrice antisymétrique $A = (a_{ij})$. On sait qu'il existe un vecteur Ω telque :

$$A.X = \Omega \wedge X \quad (6.39)$$

Soit :

$$\Omega = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad (6.40)$$

Alors l'équation (6.30) s'écrit :

$$\begin{pmatrix} dX_M \\ dY_M \\ dZ_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1(M_0) \\ U_2(M_0) \\ U_3(M_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad (6.41)$$

Soit l'élément S_{12} , on a par définition :

$$S_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial X_2} + \frac{\partial U_2}{\partial X_1} \right)$$

or $X_1 = X, X_2 = Y$ donc :

$$S_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial Y} + \frac{\partial U_2}{\partial X} \right) = Q_{XY} \quad (6.42)$$

C'est-à-dire le coefficient défini par (6.8) dans le plan OXY . En utilisant les équations (6.3) à (6.8), on obtient alors :

$$\begin{pmatrix} dX_M \\ dY_M \\ dZ_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1(M_0) \\ U_2(M_0) \\ U_3(M_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial X} & Q_{XY} & Q_{ZX} \\ Q_{XX} & \frac{\partial U_2}{\partial Y} & Q_{ZX} \\ Q_{ZX} & Q_{YZ} & \frac{\partial U_3}{\partial Z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & G_{XY} & -G_{ZX} \\ -G_{XY} & 0 & G_{YZ} \\ G_{ZX} & -G_{YZ} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

Le résultat remarquable est la forme de la matrice antisymétrique A . En effet, on obtient :

$$\Omega = - \begin{pmatrix} G_{YZ} \\ G_{ZX} \\ G_{XY} \end{pmatrix} \quad (6.43)$$

La première composante de Ω représente la correction relative d'orientation de la projection de M sur le plan OY_1Z_1 . La matrice A représente la rotation infinitésimale du repère $MXYZ$ parallèle à $OX_1Y_1Z_1$. Ainsi, la définition du facteur G dans l'introduction est justifiée.

Dans (6.43), on peut introduire les termes H_{XY}, P_{XY}, \dots grâce aux éléments diagonaux de S . En effet, soit par exemple $\left(\frac{\partial U_1}{\partial X} \right)$, il peut s'écrire :

$$\left(\frac{\partial U_1}{\partial X} \right) = H_{XY} + P_{XY} \text{ ou } \left(\frac{\partial U_1}{\partial X} \right) = H_{ZX} - P_{ZX} \quad (6.44)$$

Notons que l'équation (6.43) nécessite pour déterminer les neuf inconnues au moins trois points.

6.4 ANNEXE

6.4.1 Recherches des vecteurs et valeurs propres de la matrice A

Soit A la matrice carré 2×2 définie par (6.13). Les vecteurs propres X' et valeurs propres λ de A vérifient :

$$A.X' = \lambda X' \quad (6.45)$$

Posons :

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

On peut écrire (6.45) :

$$(A - \lambda I)X' = 0$$

Les valeurs propres λ_1 et λ_2 sont solutions de :

$$\text{Dét}(A - \lambda I) = 0 \implies (H - \lambda)^2 + G^2 = 0 \implies \lambda_1 = H + iG; \lambda_2 = H - iG \quad (6.46)$$

Un vecteur propre X'_1 vérifie :

$$A.X'_1 = \lambda_1 X'_1 \quad (6.47)$$

En écrivant (6.47) en détail, on a :

$$Hx' + Gy' = \lambda_1 x' \implies (H - \lambda_1)x' + Gy' = 0 \implies -iGx' + Gy' = 0 \quad (6.48)$$

$$-Gx' + Hy' = \lambda_1 y' \implies -Gx'(H - \lambda_1)y' = 0 \implies -Gx' - iGy' = 0 \quad (6.49)$$

Les deux équations sont les mêmes au facteur i près soit :

$$-iGx' + Gy' = 0 \quad (6.50)$$

On peut choisir comme premier vecteur propre le vecteur X'_1 de composantes :

$$X'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad (6.51)$$

Comme $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$, en utilisant (6.47), on déduit que le deuxième vecteur propre est le conjugué de X'_1 , donc X'_2 est donné par :

$$X'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \quad (6.52)$$

Comment s'écrit la matrice A dans la nouvelle base (X'_1, X'_2) . On sait que les deux colonnes de la matrice A représentent l'image par A des vecteurs de la base (e_1, e_2) . On donc :

$$A.e_1 = He_1 - Ge_2 \quad (6.53)$$

$$A.e_2 = Ge_1 + He_2 \quad (6.54)$$

Si on prend maintenant (X'_1, X'_2) comme base, on a :

$$A.X'_1 = \lambda_1 X'_1 \quad (6.55)$$

$$A.X'_2 = \lambda_2 X'_2 \quad (6.56)$$

Donc dans la base des vecteurs propres (X'_1, X'_2) , la matrice A s'écrit :

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H+iG & 0 \\ 0 & H-iG \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} iG & 0 \\ 0 & -iG \end{pmatrix} \\ &= H.I + i \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & -G \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.57)$$

On retrouve bien l'équation (6.18).

Littérature

1. **L. Landau et E. Lifschitz.** 1970. *La Théorie de l'Elasticité*. Cours de Physique Théorique, tome VII. Edition Mir.
2. **H.M. Dufour.** 1975. Exemple de calcul géodésique et analyse des structures des résultats. IGN n°26771.
3. **H.M. Dufour.** 1977. Evolution des méthodes géodésiques. Bulletin d'Information de l'IGN n°34.
4. **A. Ben Hadj Salem.** 1981. Point de Laplace, Exemple de Calcul Géodésique et Analyse des Résultats en Géodésie Tridimensionnelle. Rapport de stage IT3. ENSG. IGN.
5. **F. Sanso.** 1982. Three Lectures on Mathematical Theory of Elasticity. *Geodesy and Global Geodynamics*. Editeurs H. Moritz et H. Sünkel. Publication n°41 de l'Institut de Géodésie de l'Université Technique de Graz, Autriche. pp461-530.

CHAPITRE 7

L'ORTHODROMIE & LA LOXODROMIE DE LA SPHÈRE

Cette note concerne les définitions et les équations de la loxodromie et de l'orthodromie de la sphère et de l'ellipsoïde.

7.1 DÉFINITIONS

Une loxodromie (γ) d'une surface (σ) est une courbe de (σ) telle qu'en tout point M de (γ) l'azimut est constant.

Si la surface (σ) est une sphère ou un ellipsoïde, la loxodromie coupe les méridiens sous un angle constant. Cette propriété de cette courbe lui donne une grande importance en navigation, puisqu'elle constitue une trajectoire à " cap constant " en utilisant le langage de navigation, et elle est la route la plus facile à suivre, mais elle n'est pas la plus courte. En effet, c'est la géodésique, et dans le cas de la sphère, c'est un grand cercle [1], qu'on appelle aussi **l'orthodromie**.

7.2 L'ÉQUATION DE LA LOXODROMIE - CAS DE LA SPHÈRE

La loxodromie est définie par $Az = \text{constant}$ ce qui donne $dAz = 0$. Sur la sphère, on a :

$$tgAz = \frac{rd\lambda}{Rd\varphi} = \frac{R\cos\varphi d\lambda}{Rd\varphi} = \frac{d\lambda}{\frac{d\varphi}{\cos\varphi}} = C \quad (7.1)$$

où C est une constante, or en posant :

$$dL = \frac{d\varphi}{\cos\varphi} \quad (7.2)$$

avec L la latitude de Mercator ou latitude croissante donnée par :

$$L = L(\varphi) = \text{Logtg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \quad (7.3)$$

ce qui donne :

$$C = \frac{d\lambda}{dL} \Rightarrow \lambda = C(L - L_0) \quad (7.4)$$

En prenant $\lambda = 0$ pour $\varphi = 0$, soit $L_0 = 0$.

Donc un point M de la loxodromie d'une sphère de rayon R a pour coordonnées (X, Y, Z) dans un repère orthonormé telque :

$$M \begin{cases} R\cos\varphi.\cos\lambda = R\cos\varphi.\cos CL(\varphi) \\ R\cos\varphi.\sin\lambda = R\cos\varphi.\sin CL(\varphi) \\ R\sin\varphi \end{cases} \quad (7.5)$$

7.2.1 L'Elément ds de la Loxodromie sur la Sphère

Sur la sphère, on a :

$$ds^2 = R^2 d\varphi^2 + R^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2 \quad (7.6)$$

En utilisant (7.1), on obtient :

$$ds^2 = R^2 d\varphi^2 + R^2 tg^2 Az d\varphi^2 = \frac{R^2 d\varphi^2}{\cos^2 Az} \quad (7.7)$$

D'où la longueur de la loxodromie entre deux points $M_1(\varphi_1)$ et $M_2(\varphi_2)$ avec $Az \in [0, \pi/2[$:

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{Rd\varphi}{\cos Az} = \frac{R(\varphi_2 - \varphi_1)}{\cos Az} \quad (7.8)$$

7.3 L'ÉQUATION DE LA LOXODROMIE - CAS DE L'ELLIPSOÏDE

La loxodromie est définie donc par $Az = \text{constant}$ ce qui donne $dAz = 0$. Sur l'ellipsoïde de révolution de paramètres (a, e) , on a :

$$tgAz = \frac{rd\lambda}{\rho d\varphi} = \frac{N \cos\varphi d\lambda}{\rho d\varphi} = \frac{d\lambda}{\frac{\rho d\varphi}{N \cos\varphi}} = C \quad (7.9)$$

où C est une constante, or en posant :

$$d\mathcal{L} = \frac{\rho d\varphi}{N \cos\varphi} \quad (7.10)$$

avec N la grande normale et \mathcal{L} la latitude isométrique donnée par :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi) = \text{Logtg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) - \frac{e}{2} \text{Log} \frac{1 + e \sin\varphi}{1 - e \sin\varphi} \quad (7.11)$$

ce qui donne :

$$C = \frac{d\lambda}{d\mathcal{L}} \Rightarrow \lambda = C(\mathcal{L} - \mathcal{L}_0) \quad (7.12)$$

En prenant $\lambda = 0$ pour $\varphi = 0$, soit $\mathcal{L}_0 = 0$.

Donc un point M de la loxodromie d'un ellipsoïde a pour coordonnées (X, Y, Z) dans un repère orthonormé telles que :

$$M \begin{cases} N \cos\varphi \cdot \cos\lambda = N \cos\varphi \cdot \cos C\mathcal{L}(\varphi) \\ N \cos\varphi \cdot \sin\lambda = N \cos\varphi \cdot \sin C\mathcal{L}(\varphi) \\ N(1 - e^2) \sin\varphi \end{cases} \quad (7.13)$$

7.3.1 L'Élément ds de la Loxodromie sur l'ellipsoïde

Sur l'ellipsoïde, on a :

$$ds^2 = \rho^2 d\varphi^2 + N^2 \cos^2\varphi d\lambda^2 \quad (7.14)$$

En utilisant (7.9), on obtient :

$$ds^2 = \rho^2 d\varphi^2 + \rho^2 tg^2 Az d\varphi^2 = \frac{\rho^2 d\varphi^2}{\cos^2 Az} \quad (7.15)$$

D'où la longueur de la loxodromie entre deux points $M_1(\varphi_1)$ et $M_2(\varphi_2)$ avec $Az \in [0, \pi/2[$:

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\rho d\varphi}{\cos Az} = \frac{\beta(\varphi_2) - \beta(\varphi_1)}{\cos Az} \quad (7.16)$$

avec $\beta(\varphi)$ la longueur d'une méridienne de l'ellipsoïde de l'équateur ($\varphi = 0$) à la latitude φ .

7.4 LA CORRECTION DE GIVRY

L'angle α entre la loxodromie et l'orthodromie est appelé par les navigateurs la correction de Givry, [2]. C'est la variation de l'azimut de l'orthodromie c'est-à-dire la géodésique ; soit :

$$\alpha = dAz \quad (7.17)$$

Or la géodésique vérifie l'équation de Clairaut :

$$r \sin Az = C' \quad (7.18)$$

avec C' une constante donnée. En différentiant (7.18), on obtient :

$$\sin Az dr + r \cos Az dAz = 0 \Rightarrow dAz = -tgAz \frac{dr}{r} \quad (7.19)$$

Comme $r = R \cos \varphi$ et $tgAz = \frac{rd\lambda}{Rd\varphi}$ sur la sphère, on obtient finalement :

$$\alpha = dAz = \sin \varphi d\lambda \quad (7.20)$$

Sur l'ellipsoïde, on a aussi :

$$\sin Az dr + r \cos Az dAz = 0 \Rightarrow dAz = -tgAz \frac{dr}{r} \quad (7.21)$$

Comme $r = N \cos \varphi$ et $tgAz = \frac{rd\lambda}{\rho d\varphi}$ et $dr = -\rho \sin \varphi d\varphi$, on arrive au même résultat soit :

$$\alpha = dAz = \sin \varphi d\lambda \quad (7.22)$$

Or (7.22) n'est autre que l'écriture différentielle de l'équation de Laplace.

Littérature

1. **A. Ben Hadj Salem.** 2010. Note sur les lignes géodésiques de la sphère. v2. 10p.
2. **J. Lemenestrel.** 1980. Cours de géodésie, ENSG, IGN France.

NOTE SUR LES LIGNES GÉODÉSIQUES DE LA SPHÈRE

Cette note concerne la définition et la détermination des lignes géodésiques de la sphère en utilisant d'une part la trigonométrie sphérique et le calcul des variations d'autre part.

8.1 DÉFINITION

Une géodésique (γ) d'une surface (σ) est une courbe de (σ) telle qu'en tout point M de (σ) le plan osculateur soit normal à (σ).

Comme le plan osculateur est défini par (T, N) , dire qu'il est normal à (σ) $\Rightarrow N$ et n le vecteur normal à (σ) sont colinéaires $\Rightarrow \theta = \angle(N, n) = 0$ ou π . Comme :

$$R = R_n \cos \theta \quad (8.1)$$

où R, R_n sont respectivement les rayons de courbure de (γ) et de courbure normale de (σ). On a alors :

$$|R_g| = |R_n| \quad (8.2)$$

D'où le théorème :

Théorème : *La courbure $1/R_g$ d'une ligne géodésique en un point d'une surface est égale à la courbure normale $1/R_n$ en ce point.*

On montre en calculs des variations que la ligne géodésique est la courbe de la surface de longueur minimale joignant deux points de la surface.

Calculons alors les lignes géodésiques ou les géodésiques de la sphère.

8.2 PAR L'APPLICATION DE LA TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE

Théorème : *Les géodésiques de la sphère sont les grands cercles.*

Démonstration : Un point M de la surface d'une sphère de rayon R a pour coordonnées (X, Y, Z) dans un repère orthonormé :

$$M \begin{cases} R \cos \varphi \cdot \cos \lambda \\ R \cos \varphi \cdot \sin \lambda \\ R \sin \varphi \end{cases} \quad (8.3)$$

Le vecteur normal à la surface est le vecteur n défini par :

$$n = \frac{OM}{\|OM\|} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cdot \cos \lambda \\ \cos \varphi \cdot \sin \lambda \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (8.4)$$

Soit (C) le grand cercle passant par le point $A(R, 0, 0)$ et d'azimut Az_E .

Le point M peut être décrit par son abscisse curviligne s mesurant l'arc AM . Or l'arc $AM = R \cdot \omega = s$ où ω représente l'angle au sommet. Le triangle APM est un triangle sphérique puisque ses côtés sont des arcs de grands cercles. Utilisant le triangle sphérique APM , la relation des sinus donne :

$$\frac{\sin \omega}{\sin \lambda} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \varphi)}{\sin Az_E} \quad (8.5)$$

d'où :

$$\frac{\sin \omega}{\sin \lambda} = \frac{\cos \varphi}{\sin Az_E}$$

par suite :

$$\cos \varphi \cdot \sin \lambda = \sin \omega \cdot \sin Az_E \quad (8.6)$$

Donc :

$$Y = R \cos \varphi \cdot \sin \lambda = R \sin \omega \cdot \sin Az_E = R \sin Az_E \cdot \sin(s/R) \quad (8.7)$$

En utilisant la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique ($\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$) dans le triangle APM , on a les deux relations :

$$\cos \omega = \cos \varphi \cdot \cos \lambda \quad (8.8)$$

$$\cos(\pi/2 - \varphi) = \sin \varphi = \sin \omega \cdot \cos Az_E \quad (8.9)$$

Par suite, les coordonnées du point M en fonction de l'abscisse curviligne s sont :

$$M \begin{cases} R \cos \varphi \cdot \cos \lambda = R \cos \omega = R \cdot \cos(s/R) \\ R \cos \varphi \cdot \sin \lambda = R \sin \omega \cdot \sin A z_E = R \sin A z_E \sin(s/R) \\ R \sin \varphi = R \sin \omega \cdot \cos A z_E = R \cos A z_E \sin(s/R) \end{cases} \quad (8.10)$$

Calculons le vecteur N . Pour cela, calculons T et $\frac{dT}{ds}$:

$$T = \frac{dM}{ds} = \begin{pmatrix} \frac{-R}{R} \sin(s/R) = -\sin \omega \\ \frac{R}{R} \sin A z_E \cos(s/R) = \sin A z_E \cos \omega \\ \frac{R}{R} \cos A z_E \cos(s/R) = \cos A z_E \cos \omega \end{pmatrix} \quad (8.11)$$

Le vecteur $\frac{dT}{ds}$ est donné par :

$$\frac{dT}{ds} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{R} \cos \omega \\ \frac{-1}{R} \sin A z_E \sin \omega \\ \frac{-1}{R} \cos A z_E \sin \omega \end{pmatrix} \implies \left\| \frac{dT}{ds} \right\| = \frac{1}{R} \quad (8.12)$$

Par suite :

$$N = \frac{\frac{dT}{ds}}{\left\| \frac{dT}{ds} \right\|} = \begin{pmatrix} -\cos \omega \\ -\sin A z_E \sin \omega \\ -\cos A z_E \sin \omega \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \lambda \\ \cos \varphi \sin \lambda \\ \sin \varphi \end{pmatrix} = -n \quad (8.13)$$

On a bien $N \parallel n \implies$ les grands cercles sont les géodésiques de la sphère.

8.3 PAR L'APPLICATION DU CALCUL DES VARIATIONS

On considère que la sphère est paramétrée par :

$$X = R \cos \varphi \cos \lambda \quad (8.14)$$

$$Y = R \cos \varphi \sin \lambda \quad (8.15)$$

$$Z = R \sin \varphi \quad (8.16)$$

Alors la première forme fondamentale est :

$$g = ds^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 = R^2 d\varphi^2 + R^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2 \quad (8.17)$$

où on note g la métrique de la sphère. Soit (g_{ij}) la matrice :

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \cos^2 \varphi \end{pmatrix} \quad (8.18)$$

et (g^{ij}) la matrice inverse :

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1/R^2 & 0 \\ 0 & 1/R^2 \cos^2 \varphi \end{pmatrix} \quad (8.19)$$

On définit les coefficients de Christoffel de deuxième espèce par :

$$\Gamma_{ik}^j = \frac{1}{2} g^{jl} \left(\frac{\partial g_{lk}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_l} \right) \quad (8.20)$$

8.3.1 Calcul des coefficients de Christoffel

En utilisant (8.17) et (8.19) et sachant que $x_1 = \varphi$ et $x_2 = \lambda$, on obtient :

$$\Gamma_{11}^1 = 0 \quad (8.21)$$

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = 0 \quad (8.22)$$

$$\Gamma_{22}^1 = \sin \varphi \cos \varphi \quad (8.23)$$

$$\Gamma_{11}^2 = 0 \quad (8.24)$$

$$\Gamma_{22}^2 = 0 \quad (8.25)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = -\tan \varphi \quad (8.26)$$

8.3.2 Les Equations des géodésiques de la sphère

On démontre que les équations des lignes géodésiques sont données par les équations :

$$\frac{d^2 x_i}{ds^2} + \sum_{j,k=1}^2 \Gamma_{jk}^i \frac{dx_k}{ds} \frac{dx_j}{ds} = 0 \text{ pour } i=1,2 \quad (8.27)$$

où s est l'abscisse curviligne. Soit :

$$\frac{d^2 \varphi}{ds^2} + \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{d\lambda}{ds} \right)^2 = 0 \quad (8.28)$$

$$\frac{d^2 \lambda}{ds^2} - 2 \tan \varphi \frac{d\varphi}{ds} \frac{d\lambda}{ds} = 0 \quad (8.29)$$

pour $\varphi \neq \pi/2$, On multiplie l'équation (8.29) par $\cos^2 \varphi$, elle s'écrit sous la forme :

$$\cos^2 \varphi \frac{d^2 \lambda}{ds^2} - 2 \sin \varphi \cos \varphi \frac{d\varphi}{ds} \frac{d\lambda}{ds} = 0$$

Soit :

$$\frac{d}{ds} \left(\cos^2 \varphi \frac{d\lambda}{ds} \right) = 0 \quad (8.30)$$

C'est-à-dire :

$$\cos^2 \varphi \frac{d\lambda}{ds} = \text{constante} = C \Rightarrow \frac{d\lambda}{ds} = \frac{C}{\cos^2 \varphi} \quad (8.31)$$

De l'équation (8.17), on a :

$$\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = \frac{1}{R^2} - \cos^2 \varphi \left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2 = \frac{1}{R^2} - \frac{C^2}{\cos^2 \varphi} \quad (8.32)$$

ou encore :

$$\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = \frac{\cos^2 \varphi - R^2 C^2}{R^2 \cos^2 \varphi} \quad (8.33)$$

on suppose que la géodésique est choisie telle que φ et s varient dans le même sens soit $d\varphi/ds > 0$, alors :

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\sqrt{\cos^2 \varphi - R^2 C^2}}{R \cos \varphi} \quad (8.34)$$

En séparant les variables, on a :

$$\begin{aligned} \frac{s-s_0}{R} &= \int \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sqrt{\cos^2 \varphi - R^2 C^2}} \\ &= \int \frac{d \sin \varphi}{\sqrt{1 - R^2 C^2 - \sin^2 \varphi}} \end{aligned} \quad (8.35)$$

posons :

$$\alpha^2 = 1 - R^2 C^2 \quad (8.36)$$

$$u = \sin \varphi \quad (8.37)$$

avec $\alpha > 0$, d'où :

$$\frac{s-s_0}{R} = \int \frac{du}{\sqrt{\alpha^2 - u^2}} \quad (8.38)$$

posons :

$$w = \frac{u}{\alpha} \quad (8.39)$$

(8.38) devient :

$$\frac{s-s_0}{R} = \int \frac{dw}{\sqrt{1-w^2}} = \text{Arcsin} w \quad (8.40)$$

Soit :

$$w = \frac{u}{\alpha} = \sin \left(\frac{s-s_0}{R} \right) \Rightarrow u = \sin \varphi = \alpha w = \alpha \sin \left(\frac{s-s_0}{R} \right) \quad (8.41)$$

Prenons $s_0 = 0$, on retrouve la troisième coordonnée de M donnée par (8.10) avec $\alpha = \cos A z_E$.

De l'équation (8.31), on a :

$$\frac{d\lambda}{ds} = \frac{C}{\cos^2 \varphi} = \frac{C}{1 - \sin^2 \varphi}$$

qu'on peut écrire sous la forme :

$$\frac{d\lambda}{ds} = \frac{C}{2(1 + \sin\varphi)} + \frac{C}{2(1 - \sin\varphi)} \quad (8.42)$$

Comme $\sin\varphi = \alpha \sin\left(\frac{s}{R}\right)$, on obtient alors :

$$d\lambda = \frac{Cds}{2(1 + \alpha \sin\left(\frac{s}{R}\right))} + \frac{Cds}{2(1 - \alpha \sin\left(\frac{s}{R}\right))} \quad (8.43)$$

Posons :

$$\xi = s/R \quad (8.44)$$

$$t = \operatorname{tg}(\xi/2) \quad (8.45)$$

Alors :

$$\sin\xi = \frac{2t}{1+t^2} \text{ et } ds = R d\xi = R \frac{2dt}{1+t^2} \quad (8.46)$$

l'équation (8.43) devient :

$$d\lambda = CR \left(\frac{dt}{1+2\alpha t+t^2} + \frac{dt}{1-2\alpha t+t^2} \right) \quad (8.47)$$

Posons :

$$I(\alpha) = \int \frac{dt}{1+2\alpha t+t^2} \quad (8.48)$$

(8.48) peut s'écrire sous la forme :

$$I(\alpha) = \int \frac{dt}{(t+\alpha)^2 + (1-\alpha^2)} \quad (8.49)$$

Comme $\alpha \leq 1$, posons :

$$a^2 = 1 - \alpha^2 = 1 - \cos^2 A z_E = \sin^2 A z_E \quad (8.50)$$

$$z = t + \alpha = t + \cos A z_E \quad (8.51)$$

$I(\alpha)$ devient :

$$I(\alpha) = \int \frac{dz}{z^2 + a^2} = \frac{1}{\sin A z_E} \operatorname{Arctg} \frac{z}{\sin A z_E} \quad (8.52)$$

Donc :

$$I(\alpha) = \frac{1}{\sin A z_E} \operatorname{Arctg} \frac{t + \cos A z_E}{\sin A z_E} \quad (8.53)$$

et (8.47) devient :

$$\lambda - \lambda_0 = \frac{CR}{\sin A z_E} \left(\operatorname{Arctg} \frac{\operatorname{tg}(s/2R) + \cos A z_E}{\sin A z_E} + \operatorname{Arctg} \frac{\operatorname{tg}(s/2R) - \cos A z_E}{\sin A z_E} \right) \quad (8.54)$$

De l'équation (8.36), on déduit que sachant $\alpha = \cos A z_E$:

$$\alpha^2 = 1 - R^2 C^2 \Rightarrow \sin A z_E = CR \quad (8.55)$$

Par suite et en prenant $\lambda_0 = 0$, on a :

$$\lambda = \text{Arctg} \frac{\text{tg}(s/2R) + \cos Az_E}{\sin Az_E} + \text{Arctg} \frac{\text{tg}(s/2R) - \cos Az_E}{\sin Az_E} \quad (8.56)$$

comme

$$\text{tg}(x+y) = \frac{\text{tg}x + \text{tg}y}{1 - \text{tg}x\text{tg}y}$$

en prenant :

$$x = \text{Arctg} \frac{\text{tg}(s/2R) + \cos Az_E}{\sin Az_E}$$

et

$$y = \text{Arctg} \frac{\text{tg}(s/2R) - \cos Az_E}{\sin Az_E}$$

on obtient :

$$\text{tg}\lambda = \text{tg}(x+y) = \sin Az_E \frac{2\text{tg}(s/2R)}{1 - \text{tg}^2(s/2R)} = \sin Az_E \text{tg}\left(\frac{s}{R}\right) \quad (8.57)$$

Résultat qu'on trouve en utilisant les deux premières coordonnées de (8.10).

Littérature

1. **A. Ben Hadj Salem.** 2010. Rappels Mathématiques de Base.
2. **A. Ben Hadj Salem.** 2013. Eléments de Géodésie. 335p. (En préparation).

NOTE SUR UNE PROPRIÉTÉ DES LIGNES GÉODÉSQUES DE L'ELLIPSOÏDE

Cette note présente une propriété des lignes géodésiques de l'ellipsoïde.

9.1 QUELQUES RAPPELS SUR LA THÉORIE DES SURFACES

9.1.1 Rappel

Un point d'une surface (σ) est défini par la donnée d'une application vectorielle $M(u, v)$ d'un ouvert \mathcal{D} de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

9.1.2 Définitions

La première forme fondamentale en un point $M(u, v)$ est :

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \quad (9.1)$$

avec :

$$E = \|\mathbf{M}'_u\|^2 \quad (9.2)$$

$$F = \mathbf{M}'_u \cdot \mathbf{M}'_v \quad (9.3)$$

$$G = \|\mathbf{M}'_v\|^2 \quad (9.4)$$

Le couple (u, v) forme un système de coordonnées symétriques sur la surface (σ) si (u, v) est un système de coordonnées orthogonales soit :

$$F = 0 \text{ et } E = G$$

ce qui permet d'écrire :

$$ds^2 = E(du^2 + dv^2) \quad (9.5)$$

9.2 QUELQUES EXEMPLES DE COORDONNÉES SYMÉTRIQUES

9.2.1 Les Coordonnées Cartésiennes

Dans le plan, les coordonnées cartésiennes (x, y) sont des coordonnées symétriques. En effet, l'élément linéaire infinitésimal s'écrit :

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \implies ds^2 = dx^2 + dy^2 \quad (9.6)$$

Donc :

$$E = G = 1 \text{ et } F = 0$$

9.2.2 Les Coordonnées Polaires

Dans le plan, on peut utiliser les coordonnées polaires (ρ, θ) . Elles sont liées aux coordonnées cartésiennes (x, y) par :

$$x = \rho \cos \theta \quad (9.7)$$

$$y = \rho \sin \theta \quad (9.8)$$

Les coordonnées polaires ne sont pas des coordonnées symétriques. En effet, l'élément linéaire infinitésimal s'écrit :

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \implies ds^2 = dx^2 + dy^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 \quad (9.9)$$

Donc :

$$E = 1 \quad G = \rho^2; \text{ et } F = 0$$

Mais, on peut écrire (9.9) sous la forme :

$$ds^2 = \rho^2 \left(\frac{d\rho^2}{\rho^2} + d\theta^2 \right) = \rho^2 (d\text{Log}\rho^2 + d\theta^2) \quad (9.10)$$

C'est-à-dire que $(\text{Log}\rho, \theta)$ forme un système de coordonnées symétriques orthogonales.

9.2.3 Les Coordonnées Géographiques sur la Sphère

Soit une sphère σ de rayon R . Un point M de σ est défini par ses coordonnées géographiques (φ, λ) . On a alors :

$$ds^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 = R^2 d\varphi^2 + R^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2 \quad (9.11)$$

De (9.11), (φ, λ) forme un système de coordonnées orthogonales non symétriques. Posons :

$$L_M = \text{Logtg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \quad (9.12)$$

L_M est appelée latitude croissante ou latitude de Mercator, dans ce cas, (9.11) s'écrit :

$$ds^2 = R^2 \cos^2 \varphi (dL_M^2 + d\lambda^2) \quad (9.13)$$

et (L_M, λ) est un système de coordonnées orthogonales symétriques.

9.2.4 Les Coordonnées Géodésiques de l'Ellipsoïde

Soit un ellipsoïde σ de paramètres (a, e) où a et e sont respectivement le demi grand axe et la première excentricité. Un point M de σ est défini par ses coordonnées géodésiques (φ, λ) . On a alors :

$$ds^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 = \rho^2 d\varphi^2 + N^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2 \quad (9.14)$$

avec :

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \quad (9.15)$$

La grande normale. De (9.14), (φ, λ) forme un système de coordonnées orthogonales non symétriques. Posons :

$$L = \text{Logtg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) - \frac{e}{2} \text{Log} \frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi} \quad (9.16)$$

L est appelée latitude isométrique, dans ce cas, (9.14) s'écrit :

$$ds^2 = N^2 \cos^2 \varphi (dL^2 + d\lambda^2) \quad (9.17)$$

et (L, λ) est un système de coordonnées orthogonales symétriques.

9.3 UNE PROPRIÉTÉ DES LIGNES GÉODÉSIQUES DE L'ELLIPSOÏDE

9.3.1 Calculs Préliminaires

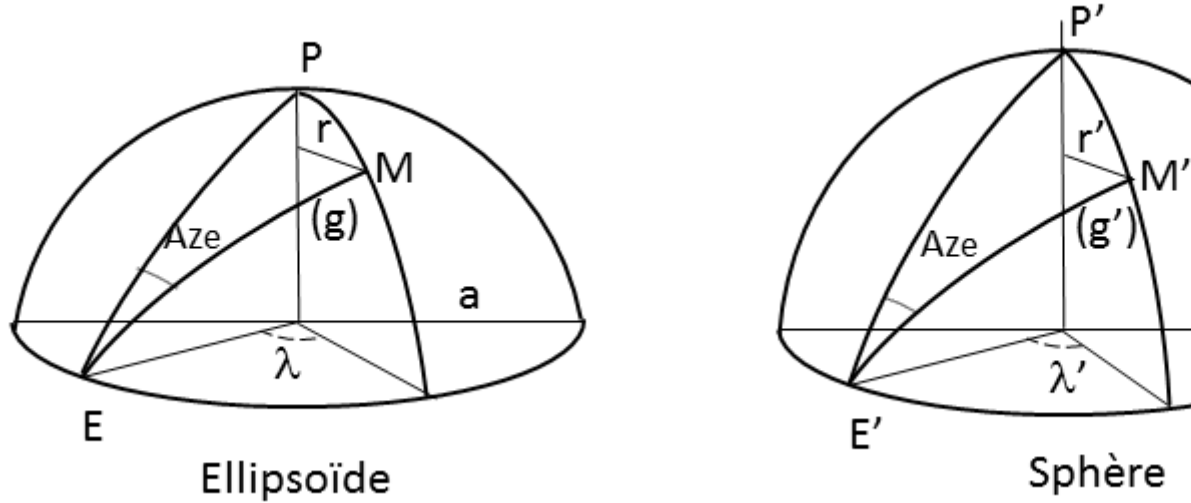


Fig. 9.1 La Correspondance de la sphère de Jacobi, [2]

Soit E un ellipsoïde de révolution de paramètres (a, e) et (g) une géodésique partant d'un point $E(\varphi = 0, \lambda_e)$ sur l'équateur et d'azimut Az_e . A cette géodésique, on lui fait correspondre une géodésique (g') sur la sphère de Jacobi de rayon a , ayant le même azimut Az_e au point $E'(\varphi' = 0, \lambda_e)$. De même au point $M(\varphi, \lambda)$ de la géodésique (g) de l'ellipsoïde, on lui fait correspondre le point $M'(\varphi', \lambda')$ de (g') de la sphère. Le point M de la géodésique (g) vérifie l'équation de Clairaut :

$$r \sin Az_g = a \sin Az_e = \text{constante} \quad (9.18)$$

avec $r = N \cos \varphi$. De même M' de la géodésique (g') vérifie :

$$r' \sin Az_{g'} = a \sin Az_e = \text{constante} \quad (9.19)$$

avec $r' = a \cos \varphi'$. Donc, on a :

$$r \sin Az_g = r' \sin Az_{g'} \Rightarrow \text{si } Az_g = Az_{g'} \text{ alors, } r = r' \quad (9.20)$$

soit :

$$N \cos \varphi = a \cos \varphi' \Rightarrow \varphi' = \text{la latitude paramétrique de M vérifiant } \operatorname{tg} \varphi' = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi \quad (9.21)$$

Sur la géodésique (g), on a :

$$\operatorname{tg} Az_g = \frac{rd\lambda}{\rho d\varphi} \quad (9.22)$$

De même sur la géodésique (g'), on a :

$$\operatorname{tg} Az_{g'} = \frac{r'd\lambda'}{ad\varphi'} \quad (9.23)$$

Comme $Az_g = Az_{g'}$, on déduit :

$$\frac{rd\lambda}{\rho d\varphi} = \frac{r'd\lambda'}{ad\varphi'} \Rightarrow d\lambda = \frac{\rho d\varphi}{ad\varphi'} d\lambda' \quad (9.24)$$

En utilisant (9.21), on obtient :

$$d\lambda = \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \varphi'} d\lambda' \quad (9.25)$$

9.3.2 Une propriété des lignes géodésiques de l'ellipsoïde

En intégrant l'équation (9.25), on obtient :

$$\lambda - \lambda_e = \int_{\lambda_e}^{\lambda' + \lambda_e} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \varphi'} d\lambda' \quad (9.26)$$

λ' est comptée à partir de λ_e .

Comme :

$$\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \varphi'} = 1 - \frac{e^2}{2} \cos^2 \varphi' + o(e^4)$$

où $o(e^4)$ est un infiniment petit d'ordre 4 en e dont on néglige l'intégrale entre λ_e et $\lambda_e + \lambda$.

Par suite, (9.26) s'écrit :

$$\lambda - \lambda_e = \int_{\lambda_e}^{\lambda' + \lambda_e} d\lambda' - \frac{e^2}{2} \int_{\lambda_e}^{\lambda' + \lambda_e} \cos^2 \varphi' d\lambda' \quad (9.27)$$

Comme (g') est une géodésique de la sphère, on a [1] :

$$\cos^2 \varphi' d\lambda' = \frac{\sin Az_e}{a} ds' \quad (9.28)$$

où ds' est l'élément différentiel de l'abscisse curviligne sur la géodésique (un grand cercle). Alors en posant $s' = 0$ au point E' , l'équation (9.27) s'écrit :

$$\lambda = \lambda_e + \lambda' - \frac{e^2 \sin Az_e}{2a} \int_0^{s'} ds' \quad (9.29)$$

Quand la géodésique (g') coupe la première fois le plan de l'équateur en un point F' , on a :

$$\lambda'_F = \pi \quad (9.30)$$

$$s' = \pi a \quad (9.31)$$

$$\lambda = \lambda_e + \pi - \frac{e^2 \pi \sin Az_e}{2} \quad (9.32)$$

La géodésique (g') partant de F' a pour azimuth $\pi - Az_e$, elle coupe une deuxième fois l'équateur au point E' , mais la géodésique (g) sur l'ellipsoïde coupe une deuxième fois le plan de l'équateur au point correspondant à H dont la longitude est :

$$\lambda_H = \lambda_e + 2\pi - \frac{e^2 \pi \sin Az_e}{2} - \frac{e^2 \pi \sin(\pi - Az_e)}{2} = \lambda_e + 2\pi - e^2 \pi \sin Az_e \quad (9.33)$$

D'où la propriété des lignes géodésiques de l'ellipsoïde de révolution :

Propriété : *Une ligne géodésique de l'ellipsoïde, différente de la méridienne, ne revient jamais à son point de départ.*

Littérature

1. **A. Ben Hadj Salem.** 2010. Note sur les lignes géodésiques de la sphère. v2. 10p.
2. **J. Lemenestrel.** 1980. Cours de géodésie, ENSG, IGN France.

CHAPITRE 10

ATTRACTION DU SOLEIL ET DE LA LUNE

A la mémoire de notre cher ami et collègue Nouredine YANGUI

10.1 INTRODUCTION

Cette note donne des éléments sur l'attraction du soleil et de la lune. Elle a été inspirée de la lecture de l'ouvrage de Helmut Moritz et Ivan I. Muller intitulé '*Earth Rotation : Theory and Observation*' [1] qui peut être un cours d'introduction sur les marées.

Elle comprend les paragraphes suivantes :

1. Le Potentiel de marée luno-solaire
2. Les Termes zonaux, sectoriaux et tesseraux

10.2 LE POTENTIEL DE MARÉE LUNO-SOLAIRE

La précession, la nutation, le mouvement du pôle et les marées terrestres ont tous une commune cause : c'est l'attraction gravitationnelle du soleil et de la lune. Ainsi le potentiel de cette attraction, le potentiel luno-solaire ou potentiel des marées joue un rôle fondamental dans tous ces phénomènes.

Pour la suite, nous considérons que la Terre est une sphère de rayon $R = 6371$ km (valeur moyenne de R). Soit l'attraction de la lune en un point P de la surface terrestre (le cas du soleil se traite de la même façon). Le potentiel de l'attraction au point P est :

$$v = \frac{mG}{l} \quad (10.1)$$

avec :

- m la masse de la lune,
- G constante de gravitation universelle,
- l distance PL=distance terre-lune.

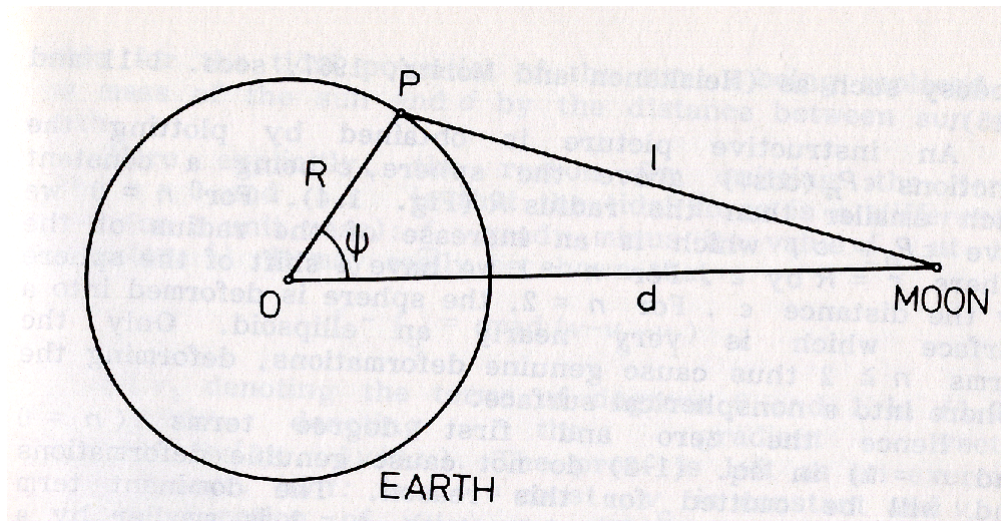


Fig. 10.1 Système Terre-Lune

Vu la distance terre-lune, la lune est considérée comme un point de masse m , or l vérifie :

$$l^2 = R^2 + d^2 - 2Rd\cos\psi \quad (10.2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{l} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + d^2 - 2Rd \cos \psi}} = \frac{1}{d} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{d}\right)^2 - 2\left(\frac{R}{d}\right) \cos \psi}} = \frac{1}{d} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{R}{d}\right)^n P_n(\cos \psi) \right) \quad (10.3)$$

où $P(\cos \psi)$ est le polynôme de Legendre de degré n en $\cos \psi$. Par suite (10.1) devient :

$$v = mG \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{R^n}{d^{n+1}} P_n(\cos \psi) \quad (10.4)$$

On a :

$$P_0(\cos \psi) = 1; P_1(\cos \psi) = \cos \psi; P_2(\cos \psi) = \frac{3}{2} \cos^2 \psi - \frac{1}{2} \quad (10.5)$$

$$P_3(\cos \psi) = \frac{5}{2} \cos^3 \psi - \frac{3}{2} \cos \psi \quad (10.6)$$

Soit ε une constante $< R$, construisons la fonction $\varepsilon P_n(\cos \psi)$ au dessus de la sphère de rayon R .

Pour $n=0$, on a $\varepsilon P_0(\cos \psi) = \varepsilon$ soit la figure avec $r = R + \varepsilon_0(\cos \psi)$.

Pour $n=1$, on a $\varepsilon P_1(\cos \psi) = \varepsilon \cos \psi \Rightarrow -\varepsilon \leq \varepsilon_1(\cos \psi) \leq \varepsilon$.

Pour $n=2$, on a $\varepsilon P_2(\cos \psi) = \varepsilon \left(\frac{3}{2} \cos^2 \psi - \frac{1}{2} \right)$.

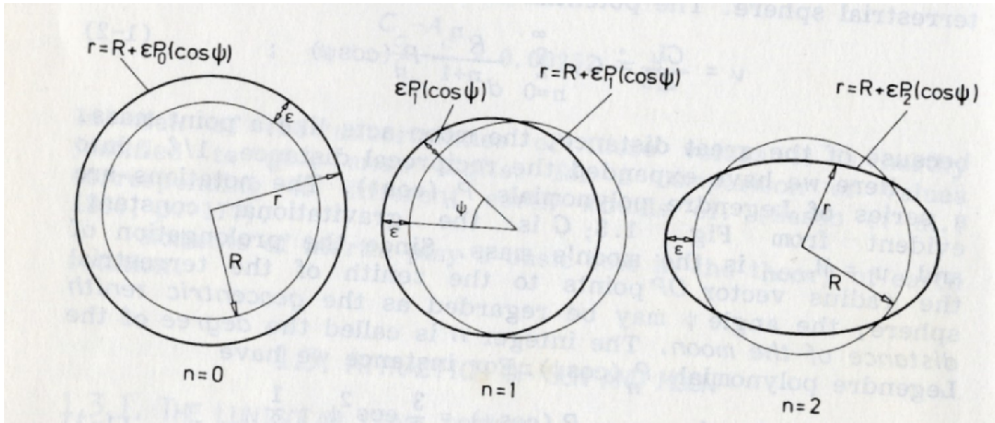


Fig. 10.2 Les Figures obtenues par $\varepsilon P_2(\cos \psi)$

On voit que pour $n \geq 2$, les déformations ne laissent pas invariante la sphère de rayon R .

$$v_0 = \frac{mGP_0(\cos\psi)}{d} = \frac{mG}{d} \quad (10.7)$$

$$v_1 = \frac{mGP_1(\cos\psi)}{d^2} = \frac{mGR\cos\psi}{d^2} \quad (10.8)$$

$$v_2 = \frac{mGP_2(\cos\psi)}{d^3} = \frac{mGR^2}{d^3} \left(\frac{3}{2}\cos^2\psi - \frac{1}{2} \right) \quad (10.9)$$

$$v_3 = \frac{mGP_3(\cos\psi)}{d^4} = \frac{mGR^3}{d^4} \left(\frac{5}{2}\cos^3\psi - \frac{3}{2}\cos\psi \right) \Rightarrow |v_3| \leq \frac{R}{d}|v_2| \approx 0.016v_2 \quad (10.10)$$

Donc, on peut négliger $v_3 \ll v_2$ et garder que v_2 . Le terme v_2 est considéré comme le potentiel de marée.

Plus explicitement, les raisons d'omettre les termes v_0 et v_1 est que la force des marées est une force différentielle (par unité de masse).

$$\mathbf{f} = \mathbf{grad}v - \mathbf{f}_0 \quad (10.11)$$

où \mathbf{f}_0 est la force au centre, en effet, $\mathbf{f} - \mathbf{f}_0 = \mathbf{grad}(v - v_0 - v_1)$. Comme :

$$v_0 = \frac{mG}{d} = \text{constante} \Rightarrow \mathbf{grad}v_0 = 0$$

et :

$$v_1 = \frac{mGR}{d^3}\cos\psi \text{ or } \cos\psi = \frac{\mathbf{OP} \cdot \mathbf{OL}}{\|\mathbf{OP}\| \cdot \|\mathbf{OL}\|} = \frac{\mathbf{OP} \cdot \mathbf{OL}}{R \cdot d}$$

Si $\mathbf{OP} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$ et $\mathbf{OL} = x_0\mathbf{e}_1 + y_0\mathbf{e}_2 + z_0\mathbf{e}_3$, on obtient :

$$\cos\psi = \frac{xx_0 + yy_0 + zz_0}{Rd}$$

D'où :

$$v_1 = \frac{mGR}{d^2} \frac{xx_0 + yy_0 + zz_0}{Rd} = \frac{mG(xx_0 + yy_0 + zz_0)}{d^3} \Rightarrow \mathbf{grad}v_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x} = \frac{mGx_0}{d^3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{mGy_0}{d^3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial z} = \frac{mGz_0}{d^3} \end{pmatrix} \quad (10.12)$$

On a :

$$\mathbf{grad}v_1 = \frac{mG \cdot \mathbf{OL}}{d^3} = \frac{mG}{d^2} \frac{\mathbf{OL}}{d} \Rightarrow \mathbf{f}_0 = \mathbf{grad}v_1 = \text{la force au point O} \quad (10.13)$$

Nous notons que en cas du soleil, le terme $f_0 = m'G/d'^3$ avec m' la masse du soleil et d' la distance terre-soleil, est responsable de la rotation de la terre autour du soleil.

10.3 LES TERMES ZONAUX, SECTORIAUX ET TESSERAUX

Exprimons maintenant $P_2(\cos\psi)$ en fonction des coordonnées géocentriques d'un point P et du centre de la lune. Dans un repère fixé à la terre, le point P a pour coordonnées (θ, λ) avec :

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi = 90^\circ - \varphi \quad (10.14)$$

où φ est la latitude géographique. De même, la lune a pour coordonnées (Θ, Λ) avec :

$$\Theta = \frac{\pi}{2} - \delta = 90^\circ - \delta \quad (10.15)$$

où δ et Λ sont respectivement la déclinaison et l'angle horaire de la lune.

En appliquant la relation fondamentale de la trigonométrie sphérique, on a dans le triangle $P - Pole - L$:

$$\cos\psi = \cos\theta\cos\Theta + \sin\theta\sin\Theta\cos(\Lambda - \lambda) \quad (10.16)$$

Pour développer $P(\cos\psi)$, nous utilisons la formule de décomposition (W.A. Heiskanen & H. Moritz, [2]) soit :

$$\begin{aligned} P_2(\cos\psi) &= P_2(\cos\theta\cos\Theta + \sin\theta\sin\Theta\cos(\Lambda - \lambda)) = P_2(\cos\theta)P_2(\cos\Theta) + \\ &+ \frac{1}{3} [R_{21}(\theta, \lambda)R_{21}(\Theta, \Lambda) + S_{21}(\theta, \lambda)S_{21}(\Theta, \Lambda)] + \\ &+ \frac{1}{12} [R_{22}(\theta, \lambda)R_{22}(\Theta, \Lambda) + S_{22}(\theta, \lambda)S_{22}(\Theta, \Lambda)] \quad (10.17) \end{aligned}$$

$$\text{où } R_{nm} = P_{nm}(\cos\theta)\cos m\lambda ; S_{nm} = P_{nm}(\cos\theta)\sin m\lambda \quad (10.18)$$

Soit :

$$R_{21}(\theta, \lambda) = P_{21}(\cos\theta)\cos\lambda$$

Or $P_{21}(\cos\theta) = 3\sin\theta\cos\theta$ d'où :

$$R_{21}(\theta, \lambda) = 3\sin\theta\cos\theta\cos\lambda \quad (10.19)$$

$$R_{21}(\Theta, \Lambda) = 3\sin\Theta\cos\Theta\cos\Lambda \quad (10.20)$$

$$S_{21}(\theta, \lambda) = P_{21}(\cos\theta)\sin\lambda = 3\sin\theta\cos\theta\sin\lambda \quad (10.21)$$

$$S_{21}(\Theta, \Lambda) = P_{21}(\cos\Theta)\sin\Lambda = 3\sin\Theta\cos\Theta\sin\Lambda \quad (10.22)$$

D'où :

$$\begin{aligned} P_2(\cos\psi) &= \frac{1}{3} [P_{21}(\cos\theta)\cos\lambda P_{21}(\cos\Theta)\cos\Lambda + P_{21}(\cos\theta)\sin\lambda P_{21}(\cos\Theta)\sin\Lambda] + \\ &+ \frac{1}{12} [P_{22}(\cos\theta)\cos 2\lambda P_{22}(\cos\Theta)\cos 2\Lambda + P_{22}(\cos\theta)\sin 2\lambda P_{22}(\cos\Theta)\sin 2\Lambda] \quad (10.23) \end{aligned}$$

ou encore :

$$P_2(\cos\psi) = \frac{1}{3} P_{21}(\cos\theta)P_{21}(\Theta)\cos(\Lambda - \lambda) + \frac{1}{12} P_{22}(\cos\theta)P_{22}(\cos\Theta)\cos 2(\Lambda - \lambda) \quad (10.24)$$

D'où :

$$v_2 = \frac{mGR^2}{d^3} \left(P_2(\cos\theta)P_2(\Theta) + \frac{1}{3}P_{21}(\cos\theta)P_{21}(\Theta)\cos(\Lambda - \lambda) \right) + \frac{mGR^2}{d^3} \left(\frac{1}{12}P_{22}(\cos\theta)P_{22}(\cos\Theta)\cos 2(\Lambda - \lambda) \right) \quad (10.25)$$

Soit :

$$v_2 = v_{20} + v_{21} + v_{22}$$

avec :

$$\begin{aligned} v_{20} &= \frac{mGR^2}{d^3} P_{20}(\cos\theta)P_{20}(\cos\Theta) \implies \text{Partie zonale} \\ v_{21} &= \frac{mGR^2}{3d^3} P_{21}(\cos\theta)P_{21}(\cos\Theta)\cos(\Lambda - \lambda) \implies \text{Partie Tesserales} \\ v_{22} &= \frac{mGR^2}{12d^3} P_{22}(\cos\theta)P_{22}(\cos\Theta)\cos 2(\Lambda - \lambda) \implies \text{Partie Sectorielle} \end{aligned} \quad (10.26)$$

λ est constante (position du point) et Λ variable (mouvement de la lune) a une période de 24 heures. D'où :

$$v_{20} = \frac{mGR^2}{d^3} P_{20}(\cos\theta)\cos\Theta = \frac{mGR^2}{d^3} \cos\theta\sin\delta \quad (10.27)$$

$\Theta = \frac{\pi}{2} - \delta$, δ déclinaison de la lune \implies période 1 mois \implies marée à long terme.

$v_{21} \rightarrow \Lambda \rightarrow$ période de 24 heures \implies responsable de la marée journalière.

Comme :

$$P_{21}(\cos\Theta) = 3\sin\Theta\cos\Theta = \frac{3}{2}\sin 2\Theta = \frac{3}{2}\sin 2\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) = \frac{3}{2}\sin(\pi - 2\delta) = -\frac{3}{2}\sin 2\delta \rightarrow \text{période un demi mois.}$$

$v_{22} \rightarrow 2\Lambda \rightarrow$ période une demi-journée \implies responsable de la marée demi-journalière.

Littérature

1. **H. Moritz, I.I. Mueller.** 1988. *Earth Rotation : Theory and Observation*. Ungar Publishing Company, New York.
2. **W.A. Heiskanen, H. Moritz.** 1967. *Physical Geodesy*. Freeman, San Francisco. Reprint, 1979. Institute of Theoretical Geodesy, Technical University, Graz, Austria.

NOTE DE GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE - LE REPÈRE LOCAL

11.1 LE REPÈRE LOCAL

11.1.1 Introduction

Soit un point $A(\varphi, \lambda)$ sur un ellipsoïde de révolution associé à un référentiel géocentrique donné \mathcal{R} .

On considère le repère orthonormé local en A $(e_\lambda, e_\varphi, e_n)$ défini dans la base orthonormée (i, j, k) de \mathcal{R} par :

$$e_\lambda = \begin{pmatrix} -\sin\lambda \\ \cos\lambda \\ 0 \end{pmatrix} ; e_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi\cos\lambda \\ -\sin\varphi\sin\lambda \\ \cos\varphi \end{pmatrix} ; e_n = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\lambda \\ \cos\varphi\sin\lambda \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \quad (11.1)$$

Matriciellement, on peut écrire (11.1) sous la forme :

$$\begin{pmatrix} e_\lambda \\ e_\varphi \\ e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ -\sin\varphi\cos\lambda & -\sin\varphi\sin\lambda & \cos\varphi \\ \cos\varphi\cos\lambda & \cos\varphi\sin\lambda & \sin\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix} \quad (11.2)$$

Avec M la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} -\sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ -\sin\varphi\cos\lambda & -\sin\varphi\sin\lambda & \cos\varphi \\ \cos\varphi\cos\lambda & \cos\varphi\sin\lambda & \sin\varphi \end{pmatrix} \quad (11.3)$$

M est une matrice de changement de bases orthonormées directes vérifie :

$$M^{-1} = M^T \quad (11.4)$$

où T désigne la transposée de matrice.

On peut écrire alors :

$$\begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix} = M^T \begin{pmatrix} e_\lambda \\ e_\varphi \\ e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\lambda & -\sin\varphi\cos\lambda & \cos\varphi\cos\lambda \\ \cos\lambda & -\sin\varphi\sin\lambda & \cos\varphi\sin\lambda \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_\lambda \\ e_\varphi \\ e_n \end{pmatrix} \quad (11.5)$$

11.2 L'EXPRESSION DIFFÉRENTIELLE DES VECTEURS DU REPÈRE LOCAL

Maintenant, on veut calculer de_α en fonction des vecteurs e_α du repère local au point A .

On a alors en utilisant (11.1) successivement :

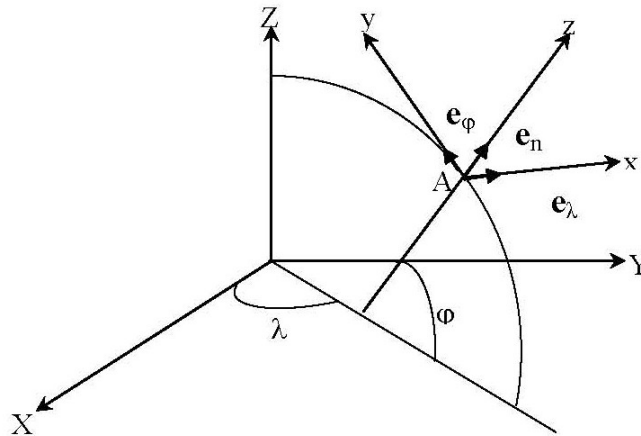


Fig. 11.1 Le Repère Local

$$\begin{aligned}
de_\lambda &= -(i\cos\lambda + j\sin\lambda)d\lambda \\
de_\varphi &= (-\cos\varphi\cos\lambda d\varphi + \sin\varphi\sin\lambda d\lambda)i + (-\cos\varphi\sin\lambda d\varphi - \sin\varphi\cos\lambda d\lambda)j - k\cos\varphi d\varphi \\
de_n &= (-\sin\varphi\cos\lambda d\varphi - \cos\varphi\sin\lambda d\lambda)i + (-\sin\varphi\sin\lambda d\varphi + \cos\varphi\cos\lambda d\lambda)j + k\cos\varphi d\varphi
\end{aligned} \tag{11.6}$$

En partant de (11.5), on obtient donc :

$$de_\lambda = \sin\varphi d\lambda e_\varphi - \cos\varphi d\lambda e_n \tag{11.7}$$

$$de_\varphi = -\sin\varphi d\lambda e_\lambda - d\varphi e_n \tag{11.8}$$

$$de_n = \cos\varphi d\lambda e_\lambda + d\varphi e_\varphi \tag{11.9}$$

Ou encore sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} de_\lambda \\ de_\varphi \\ de_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sin\varphi d\lambda & -\cos\varphi d\lambda \\ -\sin\varphi d\lambda & 0 & -d\varphi \\ \cos\varphi d\lambda & d\varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_\lambda \\ e_\varphi \\ e_n \end{pmatrix} = \Omega \begin{pmatrix} e_\lambda \\ e_\varphi \\ e_n \end{pmatrix} \tag{11.10}$$

Posons :

$$E = \begin{pmatrix} e_\lambda \\ e_\varphi \\ e_n \end{pmatrix} \tag{11.11}$$

avec :

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \sin\varphi d\lambda & -\cos\varphi d\lambda \\ -\sin\varphi d\lambda & 0 & -d\varphi \\ \cos\varphi d\lambda & d\varphi & 0 \end{pmatrix} \tag{11.12}$$

(11.10) devient :

$$dE = \Omega.E \tag{11.13}$$

Avec Ω une matrice dont les éléments sont des formes différentielles de degré 1 (voir § [5]). Par suite, la dérivée extérieure de la forme différentielle dE est :

$$d(dE) = d\Omega.E + (-1)^{-1}\Omega \wedge dE = d\Omega.E - \Omega \wedge (\Omega.E) = d\Omega.E - (\Omega \wedge \Omega).E = (d\Omega - \Omega \wedge \Omega).E \tag{11.14}$$

Or :

$$d(dE) = 0 \tag{11.15}$$

Comme E est un vecteur on nul, ce qui donne :

$$d\Omega = \Omega \wedge \Omega \tag{11.16}$$

Or :

$$d\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \cos\varphi d\varphi \wedge d\lambda & \sin\varphi d\varphi \wedge d\lambda \\ -\cos\varphi d\varphi \wedge d\lambda & 0 & 0 \\ -\sin\varphi d\varphi \wedge d\lambda & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{11.17}$$

Et :

$$\Omega \wedge \Omega = \begin{pmatrix} 0 & \cos\varphi d\varphi \wedge d\lambda & \sin\varphi d\varphi \wedge d\lambda \\ -\cos\varphi d\varphi \wedge d\lambda & 0 & 0 \\ -\sin\varphi d\varphi \wedge d\lambda & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (11.18)$$

On retrouve la formule (11.16), soit :

$$d\Omega = \Omega \wedge \Omega \quad (11.19)$$

Littérature

1. **W.A. Heiskanen, H. Moritz.** 1967. Physical Geodesy. Freeman, San Francisco. Reprint, 1979. Institute of Theoretical Geodesy, Technical University, Graz, Austria.
2. **E. W. Grafarend.** 1978. Marusseau Geodesy. Modern Trends in Geodesy. Bollettino Di Geodesia E Science Affini. Numero special in onore del Prof. Antonio Marussi. pp 209-248. Anno XXXVII 2-3, Aprile - Settembre 1978. Istituto Geografico Militare. Firenze.

CHAPITRE 12

LA GRAVIMÉTRIE ET LE CHAMP DE PESANTEUR

12.1 INTRODUCTION

La gravimétrie concerne la mesure de la pesanteur g (intensité du vecteur pesanteur \mathbf{g}).

La pesanteur est le résultat de la gravitation (ou l'attraction de la Terre) et de la force d'accélération centrifuge due à la rotation de la Terre autour de son axe.

$$g = g(G, \omega^2, \mathbf{r}, \rho(\mathbf{r}'), t) \quad (12.1)$$

où G et ω sont respectivement la constante de gravitation et la vitesse de rotation de la Terre :

$$G = (6.672 \pm 0.004) \cdot 10^{-11} m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2} \quad (12.2)$$

$$\omega = 7.292115 \cdot 10^{-5} rd \cdot s^{-1} \quad (12.3)$$

g dépend de la position de la station \mathbf{r} et de la fonction densité $\rho(\mathbf{r}')$ des masses.

Dans les problèmes géodésiques en général, on considère que g est indépendant du temps t .

Le vecteur champ de pesanteur \mathbf{g} dérive d'un potentiel, c'est-à-dire que :

$$\mathbf{g} = \text{grad}W \quad (12.4)$$

où W est appelé potentiel terrestre. Ce potentiel terrestre est la somme d'un potentiel gravitationnel V et d'un potentiel centrifuge Φ tel que :

$$W = V + \Phi \quad (12.5)$$

$$\text{avec } V = G \iiint_{\text{Terre}} \frac{\rho dy}{l} \quad (12.6)$$

$$\text{et } \Phi = \frac{\omega^2}{2}(X^2 + Y^2) \quad (12.7)$$

Les surfaces telles que $W = \text{constante}$ sont appelées surfaces de niveaux ou équipotentiellles.

Les surfaces équipotentiellles ne sont pas parallèles. Par suite, les verticales sont des courbes. La surface équipotentielle coïncidant avec le niveau moyen des océans est appelé *géoïde*. C'est pourquoi les altitudes au dessus du géoïde c'est-à-dire les altitudes orthométriques sont des altitudes au dessus du niveau moyen des mers.

12.2 LE CHAMP NORMAL

Comme en géodésie géométrique, on utilise un ellipsoïde de référence telle que sa surface est une certaine surface équipotentielle et de masse M (masse de la Terre). Le champ de pesanteur généré par cet ellipsoïde est dit le champ de pesanteur normal U . La gravité ou pesanteur normale est γ . γ est fonction de la latitude φ . On a la formule suivante¹ :

$$\gamma = 978.0318(1 + 0.0053024\sin^2\varphi - 0.0000059\sin^2 2\varphi)\text{gal} \quad (12.8)$$

Avec l'unité :

$$1 \text{ gal} = 10^{-2} \text{ m.s}^{-2} \quad (12.9)$$

$$1 \text{ mgal} = 10^{-5} \text{ m.s}^{-2}; \quad 1 \mu\text{gal} = 10^{-8} \text{ m.s}^{-2} \quad (12.10)$$

12.3 CHAMP PERTURBATEUR

Le champ perturbateur dérive du champ de la pesanteur :

$$T = W - U \quad (12.11)$$

On montre que :

1. Association Internationale de Géodésie 1971.

$$N = \frac{T}{\gamma} \quad (12.12)$$

formule de Bruns liant la hauteur du géoïde PQ au champ perturbateur T et à la pesanteur normale γ .

On appelle anomalie de pesanteur au point P :

$$\Delta g = g_P - \gamma_Q \quad (12.13)$$

g_P est donnée par la réduction de g sur la surface topographique au géoïde. On montre que $N = f(\Delta g)$. Donc, les mesures de $g \Rightarrow \Delta g \Rightarrow$ détermination de l'ondulation du géoïde N .

12.4 APPLICATIONS

12.4.1 Réduction des distances

On a vu que les mesures Δg permettent de connaître N . Or dans les réductions des distances à la surface de référence (l'ellipsoïde), il y a lieu de tenir compte du hauteur du géoïde.

$$D_0 = D_P \sqrt{\frac{1 - \frac{\Delta H^2}{D_P^2}}{\left(1 + \frac{H_1}{R}\right) \left(1 + \frac{H_2}{R}\right)}} \quad (12.14)$$

$$\text{avec } H_1 = h_1 + N_1; H_2 = h_2 + N_2; \Delta H = H_2 - H_1 \quad (12.15)$$

12.4.2 En Nivellement

On a la formule :

$$W_A - W_B = - \int_A^B g \cdot dh = - \sum g_i dh_i = \Delta(\text{côte potentielle}) \quad (12.16)$$

Pour définir les altitudes, on utilise plutôt :

$$H = \frac{1}{k} \int_0^A g \cdot dh \quad (12.17)$$

Le choix de k détermine le type d'altitudes :

- Si $k = \gamma_{0,45} = 980.629 \text{ gal}$ (altitude 0, latitude = $\varphi=45^\circ$), alors c'est l'altitude dynamique.

- Si $k = g_m$ valeur moyenne de g entre le point sur la surface topographique et le géoïde, c'est l'altitude orthométrique.

12.5 LES TECHNIQUES DE LA GRAVIMÉTRIE

Les mesures de g ont commencé au 17ème siècle avec la méthode du pendule.

Les mesures absolues concernent la mesure du temps et de la longueur, les mesures relatives seulement le temps ou la longueur.

12.5.1 Principe de la mesure absolue de g

Utilisant la chute libre d'une masse, l'intégration de l'équation de mouvement :

$$\ddot{x} = g \quad (12.18)$$

donne :

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \quad (12.19)$$

$$\text{avec } x(t=0) = x_0, v(t=0) = v_0 \quad (12.20)$$

avec 3 mesures, on obtient :

$$g = \frac{2(x_3 - x_1)(t_2 - t_1) - (x_2 - x_1)(t_3 - t_1)}{(t_3 - t_1)(t_2 - t_1)(t_3 - t_2)} \quad (12.21)$$

Si $x = 1/2gt^2$, on a alors :

$$\frac{dg}{g} = \frac{dx}{x} - 2 \frac{dt}{t} \quad (12.22)$$

avec $\Delta x = 0.2m$, $\Delta t = 0.2s$ $\Delta g = \mu gal \Rightarrow$ mesures de $x \approx 10^{-8}m$ et $t = 10^{-8}s \Rightarrow$ techniques d'interférométrie.

12.5.2 Principe des mesures relatives

A l'équilibre d'un ressort de coefficient k , on a :

$$m.g = k(l - l_0) \quad (12.23)$$

La période de ce ressort est :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l - l_0}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (12.24)$$

Littérature

1. **W.A. Heiskanen, H. Moritz.** 1967. Physical Geodesy. Freeman, San Francisco. Reprint, 1979. Institute of Physical Geodesy, Technical University, Graz, Austria.

CHAPITRE 13

LA COURBURE DES TRANSFORMÉES PLANES CONFORMES DES GÉODÉSIIQUES

13.1 NOTE SUR L'EMPLOI DES LATITUDES ISOMÉTRIQUES

L'établissement d'une représentation plane conforme consiste à assurer une correspondance bijective entre un système de coordonnées symétriques de l'ellipsoïde et un système de coordonnées sur le plan. Nous aurons ainsi décomposé les deux surfaces en carrés infinitésimaux qu'il suffira de faire correspondre pour obtenir une représentation conforme.

Les coordonnées rectangulaires planes (X, Y) sont des coordonnées symétriques mais les coordonnées géographiques ou géodésiques ne le sont pas. En effet, si nous comparons un élément ds d'une méridienne à un élément dl d'un parallèle, nous avons :

$$ds = \rho d\varphi \quad (13.1)$$

$$\text{et } dl = N \cos\varphi d\lambda \quad (13.2)$$

Et pour $d\varphi = d\lambda$, nous obtenons $ds \neq dl$.

Pour obtenir sur l'ellipsoïde un système de coordonnées symétriques, nous sommes tenus d'effectuer le changement de variables suivant :

$$\varphi \longrightarrow L$$

Et pour avoir $ds = dl$ quand $dL = d\lambda$, il faut écrire :

$$\rho d\varphi = N \cos\varphi dL \quad (13.3)$$

Soit :

$$dL = \frac{\rho d\varphi}{N \cos\varphi} \quad (13.4)$$

D'où L la latitude isométrique :

$$L = \int_0^\varphi \frac{\rho d\varphi}{N \cos\varphi} = \text{Logtg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) - \frac{e}{2} \text{Log} \frac{1 + e \sin\varphi}{1 - e \sin\varphi} \quad (13.5)$$

(L, λ) sont donc des coordonnées symétriques de l'ellipsoïde et pour obtenir une représentation plane conforme, il suffira d'établir une correspondance bijective entre (L, λ) et (X, Y) .

13.2 NOTE SUR L'EXPRESSION GÉNÉRALE DE LA COURBURE DES TRANSFORMÉES PLANES CONFORMES DES GÉODÉSQUES

Soit un élément ds de la transformée plane conforme d'une géodésique, la corde D joignant les extrémités A et B de cet élément G . Soient M_A et M_B les images des méridiens passant par A et B . Les tangentes T_A et T_B à la transformée forment un angle $d\theta$ et la courbure de l'élément G (inverse du rayon de courbure) a pour expression :

$$\Gamma = \frac{d\theta}{ds} \quad (13.6)$$

Or sur la figure ci-dessous, nous avons :

$$d\theta = C\hat{A}B + C\hat{B}A = Z_D - Z_G + Z'_G - Z'_D = (Z'_G - Z_G) - (Z'_D - Z_D) \quad (13.7)$$

Comme la représentation est conforme, la variation d'azimut du point A au point B est donnée par la relation de Laplace :

$$Z'_G - Z_G = d\lambda \sin\varphi \quad (13.8)$$

Quant à la variation de l'azimut de la corde D , elle est égale à la différence des convergences des méridiens γ entre A et B :

$$Z'_D - Z_D = d\gamma \quad (13.9)$$

Nous obtenons alors :

$$\Gamma = \frac{d\lambda \sin\varphi - d\gamma}{ds} \quad (13.10)$$

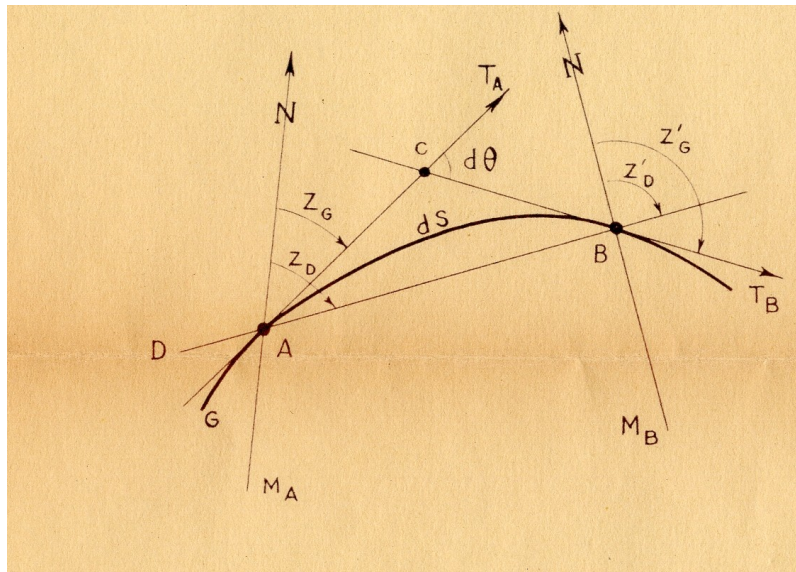


Fig. 13.1 Transformée de la géodésique

13.3 APPLICATION À LA REPRÉSENTATION UTM

Pour la représentation UTM, nous avons :

$$\gamma = (\lambda - \lambda_0) \sin \varphi \quad (13.11)$$

D'où :

$$d\gamma = d\lambda \sin \varphi + (\lambda - \lambda_0) \cos \varphi d\varphi \quad (13.12)$$

Par suite :

$$\Gamma = \frac{d\lambda \sin \varphi - d\gamma}{ds} = \frac{d\lambda \sin \varphi - d\lambda \sin \varphi - (\lambda - \lambda_0) \cos \varphi d\varphi}{ds} = \frac{(\lambda_0 - \lambda) \cos \varphi d\varphi}{ds}$$

Soit :

$$\Gamma = \frac{(\lambda_0 - \lambda) \cos \varphi d\varphi}{ds} \quad (13.13)$$

Littérature

1. W.A. Heiskanen, H. Moritz. 1967. Physical Geodesy. Freeman, San Francisco. Reprint, 1979. Institute of Theoretical Geodesy, Technical University, Graz, Austria.

2. **J. Lemenestrel**. 1980. Cours de géodésie. ENSG. IGN France.
3. **P. Vanicek, E. J. Krakiwsky**. 1986. Geodesy : the Concepts. North Holland. 2ème Edition.

CHAPITRE 14

L'ÉVOLUTION DES RÉSEAUX GÉODÉSQUES TUNISIENS

'Geodesists are amongst the men of science those that operate all over the World, regardless of boundaries, differences in race, religion, ideology '

Antonio Marussi, 1974

14.1 INTRODUCTION

L'un des éléments fondamentaux de l'infrastructure d'un pays est son réseau géodésique. Sur ce réseau vont être rattachés tous les travaux cartographiques et topographiques et particulièrement ceux de l'Immatriculation Foncière Facultative (IFF) et du Cadastre.

A ce sujet, la Tunisie a connu le début de la création de son premier réseau géodésique à partir des observations géodésiques de la liaison entre le Cap-Bon et l'île de Sicile en 1876 (C. Fezzani, 1979).

Cent ans après le début des observations du premier réseau géodésique en Tunisie, il s'était avéré la nécessité de revaloriser et moderniser ce réseau géodésique afin de satisfaire les besoins cartographiques et topographiques du pays avec le développement des appareils de mesures.

Ainsi, à partir de 1978, l'Office de la Topographie et de la Cartographie (OTC) a décidé de mener une campagne astro-géodésique qui va durer jusqu'à 1983.

Le nouveau réseau géodésique obtenu fait apparaître un décalage entre 0 à 10 mètres avec l'ancien réseau (CARTHAGE34). L'adoption du nouveau réseau géodésique n'a pas été faite.

Avec le développement du positionnement géodésique avec les satellites GPS dans le système de référence mondial WGS84 (World Geodetic System 84), un nouveau réseau de référence à vocation spatiale vient d'être observé. Les réseaux géodésiques classiques Tunisiens peuvent-ils répondre à la technologie GPS ? et de quelles manières ?

L'objet de ce papier est de décrire l'évolution des réseaux géodésiques tunisiens vers l'unification des systèmes de référence et des systèmes géodésiques ainsi que l'adoption d'une nouvelle représentation plane adéquate pour toute la Tunisie.

Dans la suite, nous nous intéressons aux réseaux géodésiques planimétriques.

14.2 HISTORIQUE

Les premiers points géodésiques ont été créés en 1876 par les géodésiens italiens lors de la liaison entre le Cap-Bon et l'île de Sicile. Le premier réseau géodésique tunisien a été défini à partir de l'extension du réseau Algérien, par l'observation du point astronomique Carthage en 1878 et la mesure de l'azimut Carthage - Bir Bou Regba pour l'orientation du réseau.

Avant 1978, la structure géodésique tunisienne était comme suit :

- un réseau géodésique dit du 1er ordre formé par le parallèle de Tunis au nord et le parallèle de Gabès au sud reliés par la méridienne dite de Gabès, les longueurs des côtés varient de 30 à 50 kms,
- un réseau géodésique du 1er ordre complémentaire,
- un réseau géodésique du 2ème ordre,
- un réseau géodésique du 2ème ordre complémentaire,
- les réseaux géodésiques de détail du 3ème et 4ème ordre,
- un canevas de points astronomiques au sud (Sahara).

A un réseau de points géodésiques est associé le système géodésique c'est-à-dire les éléments de référence à partir desquels sont calculées les coordonnées géographiques (latitude, longitude) ou les coordonnées planimétriques (X, Y). Nous donnons ci-dessous les 2 systèmes les plus utilisés en Tunisie.

14.3 LES SYSTÈMES GÉODÉSIQUES EN TUNISIE

14.3.1 Le Système Géodésique 'VOIROL'

C'était le premier système en Tunisie caractérisé par :

- le point fondamental (point de départ) : Voirol près d'Alger créé en 1875,
- la surface de référence c'est-à-dire le modèle choisi pour la Terre est l'ellipsoïde de Clarke Français 1880,
- l'orientation de départ est l'azimut de la direction Voirol-Meleb El Kora, mesuré en 1874,
- la mise à l'échelle ou la qualité métrique de réseau : la mesure d'une distance ou base à Blida en Algérie mesurée en 1854. Une grande partie du premier réseau géodésique Tunisien était calculé dans ce système.

14.3.2 Le Système Géodésique 'CARTHAGE 34'

A la suite de la détection d'une erreur dans la mise à l'échelle du système Voirol en 1910 et vu sa qualité, le Service Géographique de l'Armée Française (S.G.A.F) a établi un nouveau système géodésique indépendant du système Voirol. Les éléments de définition de ce système sont :

- le point fondamental : le point Carthage en Tunisie,
- l'ellipsoïde de référence : l'ellipsoïde de Clarke Français 1880,
- l'azimut de l'orientation : la direction Carthage - Bir Bou Regba ,
- la mise à l'échelle : les bases de Tunis et de Medenine.

Les calculs des points géodésiques de la partie nord ont été achevés en 1934.

14.4 LES REPRÉSENTATIONS PLANES

La représentation plane est la transformation mathématique du modèle de la Terre (sphère ou ellipsoïde) en une figure plane, c'est-à-dire représenter un point de la Terre sur un plan. A un système géodésique donné, on peut lui associer plusieurs types de représentations planes. Nous donnons ci-dessous les représentations planes en usage en Tunisie.

14.4.1 La Représentation de Bonne

C'est une représentation équivalente (conserve les surfaces). Elle n'est plus en usage mais elle était utilisée pour le découpage cartographique des cartes aux échelles 1/50000 (version ancienne), 1/100 000 et 1/200 000.

14.4.2 La Représentation des Fuseaux ou Représentation de Guillaume Postel

Elle a été utilisée dans le système géodésique Voirol pour le besoin de la triangulation et reste en usage dans les travaux de l'IFF pour traiter certains dossiers anciens.

Dans cette représentation, la Tunisie est partagée en six fuseaux, d'une étendue chacun de 0.5 grades (gr) en longitude, subdivisés chacun en onze quadrilatères curvilignes de 0.5 gr de côté en latitude. Cette représentation plane fût abandonnée en 1922 pour être remplacée par la représentation plane Lambert.

14.4.3 La Représentation Lambert

C'est une représentation conforme (conserve les angles) d'un modèle ellipsoïdique. Afin d'éviter les déformations trop importantes, la représentation Lambert Nord Tunisie a été adoptée pour la partie Nord du pays (latitude comprise entre 37.5 gr et 42.5 gr) et la représentation Lambert Sud Tunisie a été adoptée pour la partie sud (latitude comprise entre 34.5 gr et 39.5 gr). La représentation Lambert Tunisie est nommée à l'OTC sous l'appellation "Origine Unique".

14.4.4 La Représentation U.T.M.

C'est une représentation conforme. Le modèle terrestre est un ellipsoïde divisé en 60 fuseaux de 6° d'amplitude, chacun de 3° de longitude de part et d'autre du méridien central. Dans la représentation UTM, toute la Tunisie se trouve dans le fuseau 32 avec le méridien de longitude 9° comme méridien central.

Cette représentation a été utilisée dans le système géodésique Europe50 (usage militaire) et dans les nouvelles cartes aux échelles 1/200 000 et 1/50 000 éditées par l'OTC.

14.5 LES TRAVAUX DE MODERNISATION DES RÉSEAUX GÉODÉSIQUES TUNISIENS

Grâce à la prise de conscience à la Direction de la Topographie et de la Cartographie (DTC), de l'importance des Sciences Géographiques et en particulier de l'aspect géodésique, un protocole d'accord entre la DTC et l'Institut Géographique National de France (IGNF) a été conclu par la signature de la convention n°1933 du 18 septembre 1972.

Cette convention concerne l'étude et l'analyse des calculs de compensation des réseaux géodésiques Tunisiens du 1er et 2ème ordre. L'analyse de l'état de ces réseaux (C. Fezzani, 1979) a montré des insuffisances aux niveaux de la qualité de l'échelle (1/40000 à 1/30000) et de l'orientation (15 *dmgr* à 25 *dmgr*). De plus, de nombreux points géodésiques ont disparu et ont été détruits d'où la nécessité de reprendre des travaux géodésiques pour revaloriser les réseaux géodésiques tunisiens.

14.5.1 La Structure des Réseaux Géodésiques Tunisiens après 1978

A partir de 1978, l'OTC a décidé de moderniser les réseaux géodésiques tunisiens afin de satisfaire les besoins cartographiques et topographiques du pays en commençant par le réseau géodésique de base.

Les travaux de revalorisation de la géodésie Tunisienne (M. Charfi, 1983) comprenaient :

- la réfection des anciens points du 1er ordre, du 1er ordre complémentaire, du 2ème ordre et du 2ème ordre complémentaire,
- la construction de nouveaux points sur les sites des anciens points disparus,
- la densification de l'ancien réseau par de nouveaux points,
- les observations angulaires azimutales et zénithales,
- la détermination de 8 points de Laplace,
- la mesure des côtés de 8 triangles géodésiques,
- la détermination de 5 points par la méthode Doppler,
- la compensation des observations terrestres avec les données Doppler pour obtenir les nouvelles coordonnées du nouveau réseau.

Les observations des 8 points de Laplace et la mesure des côtés des 8 triangles géodésiques, les observations et le calcul des 5 stations Doppler ainsi que la compensation du réseau géodésique ont fait l'objet de la convention n° 2916 signée entre l'OTC et l'IGNF en 1982.

Le nouveau réseau géodésique appelé Réseau Géodésique Primordial (RGP) est composé de 312 points comme suit :

- * 143 points anciens,
- * 112 nouveaux points construits sur les sites des anciens points disparus,
- * 58 nouveaux points.

14.5.2 La Compensation du Réseau Géodésique Primordial

La compensation du RGP effectuée par l'IGNF dans le cadre de la convention 2916 comprenait les compensations planimétrique et altimétrique (Rapport sur les calculs de l'IGNF, 1985).

Appelons la compensation planimétrique de 1984 effectuée par l'IGNF par OTC84. En comparant les coordonnées OTC84 et celles de CARTHAGE34, on a trouvé que les coordonnées anciennes ont subi un déplacement sous la forme d'une rotation dans le sens des gisements dont le centre se trouve dans la région de J. Semmama et d'un angle de $20\text{ }dmgr$ ($2/1000$ de grade). Les déplacements planimétriques varient de 0 à $10.70\text{ }m$ en s'éloignant du centre de la rotation.

Ces déplacements ont été jugés inacceptables pour le patrimoine national en matière de cadastre (M. Charfi, 1988).

Littérature

1. **Convention DTC-IGNF n° 1913**. 1972.
2. **A. Marussi**. 1974. Africa and Modern Geodesy. Proceedings of the 1st Symposium in Geodesy in Africa, 14-19 January. Khartoum. Soudan.
3. **C. Fezzani**. 1979. Analyse de la structure des réseaux astro-géodésiques tunisiens, thèse de docteur ingénieur, ENSG, IGN France.
4. **Convention OTC-IGNF n°2916**. 1982.
5. **M. Charfi**. 1983. Modernisation du Réseau Géodésique Primordial de la Tunisie, OTC.
6. **Rapport IGNF sur les Calculs de compensation**. 1985. Convention n° 2916.
7. **J. Fontaine**. 1987-1988. Notes n°1,2,3 et 4 sur les compensations du RGP tunisien. OTC.
8. **M. Charfi**. 1988. Rapport de mission 8-15 juin 1988 à l'IGN France. OTC.

CHAPITRE 15

RÉFLEXIONS SUR LA MISE EN PLACE D'UN NOUVEAU SYSTÈME GÉODÉSIQUE POUR UN PAYS NEUF PAR LA TECHNIQUE DOPPLER

Lors d'une correspondance avec un collègue camerounais sur une méthodologie pour la mise en place d'un système géodésique pour un pays dépourvu de géodésie que j'ai écrit cette note.

La méthode proposée consiste à l'observation d'un certain nombre de points par la technique Doppler. En effet, le système géodésique défini par le Doppler est un système dont les axes sont parallèles au système astronomique, par suite l'orientation du système est acquise. La méthode Doppler donne les coordonnées dans un système géocentrique. Il y a deux choix à faire :

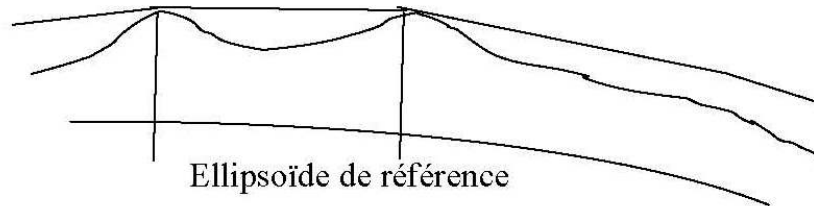
15.1 PREMIÈRE MÉTHODE

Adopter les coordonnées Doppler dans le système correspondant. On obtient les triplets $(X_D, Y_D, Z_D)_{i=1, n}$ et la transformation inverse donne $(\varphi_D, \lambda_D, H_D)_{i=1, n}$ avec :

$$H_{D_i} = h_i + N_i \quad i = 1, n \quad (15.1)$$

Si on connaît les altitudes orthométriques h_i , on détermine les hauteurs N_i du géoïde. A partir des n points Doppler, on densifie le réseau par des chaînes de triangles ou des lignes polygonales (ce cas a été utilisé en Libye par l'Institut Géographique National Français). Les points

sont déterminés en altitudes ellipsoïdiques ce qui permet de réduire convenablement les distances observées à l'ellipsoïde de référence.



La densification se fera de proche en proche suivant les zones de première priorité.

Choisir une translation tridimensionnelle arbitraire :

$$X_D = X_G + T \Rightarrow X_G = X_D - T \quad (15.2)$$

Le système géodésique obtenu est parallèle au système géocentrique Doppler donc l'orientation est satisfaisante.

Aux points $(X_G, Y_G, Z_G)_{i=1, n}$, on cherche un ellipsoïde de référence défini par les paramètres (a, e) tels que :

$$\begin{aligned} X &= (N + h_e) \cos \varphi \cos \lambda \\ Y &= (N + h_e) \cos \varphi \sin \lambda \\ Z &= (N(1 - e^2) + h_e) \sin \varphi \end{aligned} \quad (15.3)$$

avec N le 2ème rayon de courbure :

$$N = a(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2} \quad (15.4)$$

A un ellipsoïde (a, e) ça correspond (φ, λ, H) . Là aussi le choix de (a, e) est arbitraire. En un point Doppler où on connaît l'altitude orthométrique h , on détermine φ_a et λ_a par les observations astronomiques. On choisit alors en ce point :

$$\begin{aligned}
\varphi &= \varphi_a \\
\lambda &= \lambda_a \\
H &= h
\end{aligned}
\tag{15.5}$$

avec h altitude orthométrique. A partir des formules (15.3), on détermine a et e comme suit :

$$(N + H)^2 = (1 + tg^2 \varphi_a)(X_G^2 + Y_G^2) \Rightarrow N + H = \sqrt{\frac{X_G^2 + Y_G^2}{\cos^2 \varphi}}$$

Soit :

$$N = \frac{\sqrt{X_G^2 + Y_G^2}}{\cos \varphi} \tag{15.6}$$

De la troisième équation de (15.3), on obtient :

$$Z_G = (N(1 - e^2) + h_e) \sin \varphi_a \Rightarrow N(1 - e^2) = \frac{Z_G}{\sin \varphi_a} - H \tag{15.7}$$

(15.7) permet d'avoir e^2 en utilisant (15.6) soit :

$$1 - e^2 = \frac{\frac{Z}{\sin \varphi_a} - H}{\frac{\sqrt{X_G^2 + Y_G^2}}{\cos \varphi} - H} \tag{15.8}$$

Ayant e^2 et N par (15.6), on calcule a par :

$$a = N \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \tag{15.9}$$

A partir de a et e calculés, on détermine φ_G, λ_G et H_G pour les autres points. Une meilleure détermination est d'avoir :

$$\sum_i (H_G - h)^2 \quad \text{minimum} \tag{15.10}$$

C'est-à-dire l'ellipsoïde géodésique de référence représente localement le géoïde.

(15.6) et (15.9) donnent respectivement :

$$dN = -dH \tag{15.11}$$

$$dN = \alpha da + \beta de^2 \tag{15.12}$$

d'où :

$$dH = -\alpha da - \beta de^2 \tag{15.13}$$

L'équation des moindres carrés est :

$$dH_i + H_i - h_i = v_i \quad (15.14)$$

$$-\alpha_i da - \beta_i de^2 + H_i - h_i = v_i \quad (15.15)$$

H_i est calculé à partir de l'inversion de (15.3) et h_i supposés observés par le nivellement.

15.2 DEUXIÈME MÉTHODE

Le deuxième choix est plus délicat. Il suppose connues les altitudes orthométriques d'un certain nombre de points. Le procédé peut-être itératif. On recalcule le vecteur T_1 par :

$$T_1 = X_D - X_G \quad (15.16)$$

au point astronomique avec X_G calculé en utilisant les paramètres de l'ellipsoïde de référence déterminé par le système (15.14)-(15.15).

Dans les deux méthodes, il y'aura d'observer des azimuts pour orienter les chaînes de triangles ou les lignes polygonales.

ÉLÉMENTS DE LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS

16.1 INTRODUCTION

16.1.1 Définition du Problème

On veut déterminer r grandeurs scalaires inconnues G_1, G_2, \dots, G_r à l'aide de n grandeurs observées distinctes ou non des précédentes mais qui leur sont liées géométriquement. Les grandeurs G_i peuvent être des coordonnées de points, des altitudes ou des constantes d'orientation.

On dispose de n mesures ou observations : l_1, l_2, \dots, l_n . Le nombre des mesures est généralement surabondant par rapport au nombre r des inconnues à déterminer. Le but est de faire la compensation ou ajustement des mesures (en anglais : adjustment) et d'estimer au mieux les inconnues.

Les grandeurs G_i à déterminer peuvent être ou non liées entre elles ; s'il y'a p relations entre les grandeurs, on dit que le nombre de degrés de liberté de l'ensemble est $r - p$. Par suite, il y aura à déterminer $r - p$ inconnues G_k . Si le nombre des observations n est supérieur à $r - p$, c'est une condition nécessaire pour déterminer les $r - p$ inconnues, mais elle n'est pas suffisante. Il faut trouver parmi les n observations un groupe de mesures qui permet de calculer les inconnues.

16.2 LES MESURES

Les mesures l_1, l_2, \dots, l_n écrites sous forme matricielle :

$$l = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \dots \\ l_n \end{pmatrix} \quad (16.1)$$

- peuvent être directes, dans ce cas, indépendantes, outre leur valeur, nous connaissons leur exactitude donnée par leur moyenne quadratique σ_i dans ce cas, la matrice variance du vecteur l est alors diagonale.

$$\Gamma_l = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \quad (16.2)$$

et les $l_i \in N(E(l), \sigma) : N$ loi normale $l \in N(\bar{L}_i, \sqrt{\Gamma_l})$.

- peuvent être indirectes, alors en général corrélées donc la matrice Γ_l n'est pas diagonale :

$$\Gamma_l = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{n1} & \dots & 0 & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \quad (16.3)$$

Le vecteur l sera considéré comme normal et sa densité de probabilité sera la fonction :

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\text{Dét}(\Gamma_l)|}} e^{-\frac{1}{2}(L-\bar{L})^T \Gamma_l^{-1} (L-\bar{L})} \quad (16.4)$$

Le but que nous nous proposons est alors :

* d'estimer au mieux à partir de la donnée de n mesures la valeur des r grandeurs inconnues. Nous appellerons :

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \dots \\ \bar{X}_n \end{pmatrix} \quad (16.5)$$

le vecteur des estimateurs correspondants.

* de trouver le meilleur estimateur de la matrice variance $\Gamma_{\bar{X}}$ de \bar{X} qui chiffrera la précision de \bar{X} et d'évaluer l'exactitude de \bar{X} .

16.3 POIDS - MATRICE DE POIDS - VARIANCE DE LA MESURE DE POIDS UNITAIRE

Deux cas se posent :

- on connaît Γ_l : mesures directes et indépendantes,
- on connaît Γ_l à un facteur près que la théorie permettra de déterminer. Nous posons alors :

$$\Gamma_l = \sigma_0^2 P^{-1} \quad (16.6)$$

Avec : P matrice de poids (fixée avant les calculs),

σ_0^2 variance unitaire scalaire inconnue à déterminer.

La matrice des poids doit être choisie comme inversement proportionnelle à la matrice variance des erreurs de mesures.

En particulier, si les mesures sont indépendantes, les poids doivent être choisis comme inversement proportionnels aux carrés des erreurs moyennes quadratiques.

Généralement si Γ_l est connue, alors $P = \Gamma_l^{-1}$ donc on considère que $\sigma_0^2 = 1$. Dans le cas inverse de mesures directes :

$$p_i = \frac{1}{\sigma_i^2} \quad (16.7)$$

Une comparaison de la variance unitaire a priori σ_0^2 et la valeur estimée s_0^2 permettra de déceler des incohérences dans les données relatives à l'exactitude des mesures.

16.4 POSE DES EQUATIONS D'OBSERVATIONS

On a les éléments de base :

$$L = l + v \quad (16.8)$$

$$\sum v^2 = \text{minimum} \quad (16.9)$$

$$\Phi(X, L) = 0 \quad (16.10)$$

où L est l'observable, X les paramètres inconnues, Φ une fonction liant les inconnues et l'observable.

A partir de la relation :

$$dL + L_0 - l = v \quad (16.11)$$

soit : **Compensé + Calculé - Observé = Résidu**

On va écrire la relation (16.11) pour différents type d'observations.

16.4.1 La Géodésie Bidimensionnelle

16.4.1.1 Observation d'une distance

Soient deux points M_1 et M_2 de coordonnées approximatives (x_1, y_1) et (x_2, y_2) . La distance calculée est :

$$D_0 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad (16.12)$$

La fonction Φ est :

$$\Phi = \Phi(x_1, x_2, y_1, y_2) = D - \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = 0 \quad (16.13)$$

Soit :

$$D = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad (16.14)$$

D'où :

$$dD = \frac{x_1 - x_2}{D} (dx_1 - dx_2) + \frac{y_1 - y_2}{D} (dy_1 - dy_2) \quad (16.15)$$

En posant :

$$\Delta X = x_1 - x_2 \quad (16.16)$$

$$\Delta Y = y_1 - y_2 \quad (16.17)$$

On a alors la relation d'observation d'une distance entre les points 1 et 2 :

$$\frac{\Delta X}{D_0} dx_1 + \frac{\Delta Y}{D_0} dy_1 - \frac{\Delta X}{D_0} dx_2 - \frac{\Delta Y}{D_0} dy_2 + D_0 - D_{obs} = v_{12} \quad (16.18)$$

Si le point 1 est connu, on a alors :

$$-\frac{\Delta X}{D_0} dx_2 - \frac{\Delta Y}{D_0} dy_2 + D_0 - D_{obs} = v_{12} \quad (16.19)$$

16.4.1.2 Observation Angulaire

Ecrivons la relation (16.11) pour la direction M_1M_2 :

$$g = \lambda + \vartheta_A \quad (16.20)$$

$$\text{Gisement réel} = \text{Lecture réelle} + \text{Constante de désorientation du limbe} \quad (16.21)$$

Cette relation est remplacée par une relation d'estimation :

$$G = L + V_A \quad (16.22)$$

Comme $L = l + v = \text{lecture faite} + \text{correction de compensation}$, d'où :

$$G = L + V_A = l + v + V_1 \quad (16.23)$$

Introduisons un réseau géométrique approché $(x_1, y_1, x_2, y_2, G_0)$ et une valeur approchée du calage du limbe V_{01} au point M_1 d'où :

$$G_0 + dG = l + v + V_{01} + dV_1 \quad (16.24)$$

$$\text{ou encore } dG - dV_1 + G_0 - l - V_{01} = v \quad (16.25)$$

dG est la différentielle de G :

$$\text{tg}G = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} \quad (16.26)$$

$$(1 + \text{tg}^2G)dG = \frac{(y_2 - y_1)(dx_2 - dx_1) - (x_2 - x_1)(dy_2 - dy_1)}{(y_2 - y_1)^2} \quad (16.27)$$

dG est calculée à partir du réseau approché et on a :

$$x_2 - x_1 = D \sin G_0 \quad (16.28)$$

$$y_2 - y_1 = D \cos G_0 \quad (16.29)$$

Il vient :

$$dG = \frac{\cos G_0 (dx_2 - dx_1)}{D} - \frac{\sin G_0 (dy_2 - dy_1)}{D} \quad (16.30)$$

D'où la relation d'observation angulaire au point M_1 vers le point M_2 :

$$-\frac{\cos G_0}{D} dx_1 + \frac{\sin G_0}{D} dy_1 + \frac{\cos G_0}{D} dx_2 - \frac{\sin G_0}{D} dy_2 - dV_1 + G_0 - l - V_{01} = v_{12} \quad (16.31)$$

Si le point M_1 est connu et qu'il y'a une inconnue d'orientation, alors l'équation précédente devient :

$$-dV_1 + \frac{\cos G_0}{D} dx_2 - \frac{\sin G_0}{D} dy_2 + G_0 - l - V_{01} = v_{12} \quad (16.32)$$

Dans le cas d'un relèvement sur un point M_2 connu, alors on a $dx_2 = dy_2 = 0$ et :

$$-dV_1 - \frac{\cos G_0}{D} dx_1 + \frac{\sin G_0}{D} dy_1 + (G_0 - l - V_{01}) = v_{12} \quad (16.33)$$

Pour les équations (16.31), (16.32), et (16.33) les résidus v_{12} sont exprimés en radians. Pour avoir la même unité (c-a-d le m) que les résidus des équations (16.18) et (16.19), on multiplie les équations (16.31), (16.32) et (16.33) par la distance D. On aura pour l'équation (16.33), l'équation :

$$-DdV_1 - \cos G_0 dx_1 + \sin G_0 dy_1 + D(G_0 - l - V_{01}) = v'_{12} \quad (16.34)$$

16.4.2 La Géodésie Tridimensionnelle

16.4.2.1 Observation d'une distance

Soient (X_1, Y_1, Z_1) et (X_2, Y_2, Z_2) les coordonnées tridimensionnelles approchées des points M_1 et M_2 . La distance spatiale M_1M_2 est calculée par :

$$D^{cal} = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2} \quad (16.35)$$

D'où l'équation d'observation d'une distance spatiale en géodésie 3D :

$$dD + D^{cal} - D^{obs} = v \quad (16.36)$$

Avec :

$$dD = \frac{(X_2 - X_1)(dX_2 - dX_1) + (Y_2 - Y_1)(dY_2 - dY_1) + (Z_2 - Z_1)(dZ_2 - dZ_1)}{D^{cal}} \quad (16.37)$$

On pose :

$$\begin{aligned} \Delta X &= X_2 - X_1 \\ \Delta Y &= Y_2 - Y_1 \\ \Delta Z &= Z_2 - Z_1 \end{aligned} \quad (16.38)$$

La relation (16.36) devient :

$$-\frac{\Delta X}{D^{cal}} dX_1 - \frac{\Delta Y}{D^{cal}} dY_1 - \frac{\Delta Z}{D^{cal}} dZ_1 + \frac{\Delta X}{D^{cal}} dX_2 + \frac{\Delta Y}{D^{cal}} dY_2 + \frac{\Delta Z}{D^{cal}} dZ_2 + D^{cal} - D^{obs} = v_{12} \quad (16.39)$$

Si le point M_1 est connu, alors $dX_1 = dY_1 = dZ_1 = 0$ et :

$$\frac{\Delta X}{D^{cal}} dX_2 + \frac{\Delta Y}{D^{cal}} dY_2 + \frac{\Delta Z}{D^{cal}} dZ_2 + D^{cal} - D^{obs} = v_{12} \quad (16.40)$$

16.4.3 L'écriture Matricielle des Equations d'Observations

Les équations d'observations peuvent s'écrire matriciellement :

$$AX + K = V \quad (16.41)$$

où A est la matrice des coefficients, V le vecteur des résidus et K est le vecteur *Calculé - Observé*, X est le vecteur des inconnues (les corrections dx_i, dy_i, \dots aux valeurs approchées x_i^0, y_i^0, \dots). Pour n équations d'observations et r le nombre des inconnues, on a :

$${}_n A_{r \cdot r} X_1 + {}_n K_1 = {}_n V_1 \quad n > r \quad (16.42)$$

La solution de (16.42) par la méthode des moindres carrés est obtenue en minimisant la forme quadratique :

$$\sum_{i=1}^{i=n} V_i^2 = V^T V = (AX + K)^T (AX + K) \quad (16.43)$$

où V^T désigne la matrice transposée de V .

Sachant que :

$$(A + B)^T = A^T + B^T \quad (16.44)$$

$$(AB)^T = B^T A^T \quad (16.45)$$

L'équation (16.43) s'écrit :

$$V^T V = X^T (A^T A) X + X^T A^T K + K^T A X + K^T K \quad (16.46)$$

Comme $X^T A^T K$ et $K^T A X$ sont des scalaires alors :

$$X^T A^T K = K^T A X$$

Par suite :

$$V^T V = X^T (A^T A) X + 2X^T A^T K + K^T K \quad (16.47)$$

Posons :

$$N = A^T A \quad (16.48)$$

Alors la matrice N est symétrique ($N^T = N$) et inversible c'est-à-dire régulière et de rang r . En effet la matrice ${}_n A_r$ est de rang r c'est-à-dire on peut extraire une sous matrice ${}_r A'_r$ de A telle que

son déterminant est différent de zéro :

$$\det({}_r A'_r) \neq 0 \quad (16.49)$$

La matrice N est définie positive, on entend par là que :

$$\forall X \neq 0 \quad X^T N X > 0 \quad (16.50)$$

car :

$$X^T N X = X^T A^T A X = (A X)^T (A X) = \|A X\|^2 \geq 0 \quad (16.51)$$

La norme au carré du vecteur $A.X$ et pour $X \neq 0$ on a $A.X \neq 0$ sinon la matrice A serait de rang $< r$, par suite (16.50) est vérifiée.

La matrice N est dite *la matrice normale*.

Posons :

$$F(X) = X^T (A^T A) X + 2X^T A^T K + K^T K \quad (16.52)$$

$$\text{ou } F(X) = V^T V = X^T N X + 2X^T A^T K + K^T K \quad (16.53)$$

La fonction F est une fonction scalaire du vecteur X . La solution de (16.53) avec $F(X)$ minimum est telle que :

$$\frac{\partial F}{\partial X} = 0 \quad (16.54)$$

La dérivée de (16.53) par rapport au vecteur des inconnues est telle que :

$$\frac{\partial F}{\partial X} = 2N.X + 2A^T.K = 0 \Rightarrow N.X + A^T.K = 0 \quad (16.55)$$

Soit :

$$\bar{X} = -N^{-1} A^T K \quad (16.56)$$

où \bar{X} est le vecteur déterminé des inconnues. Si X_0 est le vecteur approché des inconnues, on a :

$$\tilde{X} = X_0 + \bar{X} \quad (16.57)$$

où \tilde{X} est le vecteur des valeurs définitives des inconnues.

Le vecteur \tilde{V} se détermine par :

$$\tilde{V} = A\tilde{X} + K = -AN^{-1}A^T K + K = (I - AN^{-1}A^T)K \quad (16.58)$$

Le vecteur des observations compensées est donné par :

$$\tilde{L} = l + \tilde{V} \quad (16.59)$$

Notons que :

$$A^T \tilde{V} = 0 \quad (16.60)$$

En effet, $A^T \tilde{V} = A^T (I - AN^{-1}A^T)K = A^T (K - AN^{-1}A^T K) = A^T K - A^T AN^{-1}A^T K$ soit $A^T \tilde{V} = 0$ en tenant compte que $N = A^T A$. La condition (16.60) est appelé renormalisation. Elle est importante car elle garantit que le résultat obtenu \bar{X} est bien celui des moindres carrés. Dans ce chapitre, on a considéré le système :

$$AX + K = V$$

sans parler de la matrice P . Si on considère la matrice de poids P et la matrice de variance des observations :

$$\Gamma_i = \sigma_0^2 P^{-1} \quad (16.61)$$

La solution de (16.41) des moindres carrés est obtenue à partir du système normal :

$$(A^T P A) \bar{X} + A^T P K = 0 \quad (16.62)$$

en minimisant $V^T P V$ ou encore si la matrice P est diagonale $P = (p_{ii} = p_i)$:

$$\sum_{i=1}^{i=n} p_i v_i^2 \text{ minimum} \quad (16.63)$$

On appelle encore $N = A^T P A$ la matrice normale. La solution de (16.63) est :

$$\bar{X} = -(A^T P A)^{-1} A^T P K = -N^{-1} A^T P K \quad (16.64)$$

La condition de la renormalisation devient :

$$A^T P \tilde{V} = 0 \quad (16.65)$$

Pour l'estimation du facteur de la variance unitaire, on admet que l'estimateur de σ_0^2 est donné par :

$$s^2 = \frac{\tilde{V}^T P \tilde{V}}{n - r} \quad (16.66)$$

Pour l'estimateur de la variance de \bar{X} , on va utiliser la propriété suivante :

$$\text{si } Y = AZ \Rightarrow \Gamma_Y = A \Gamma_Z A^T \quad (16.67)$$

avec Γ_Y la matrice variance de Y et Γ_Z celle de Z . En effet :

$$\Gamma_Y = E \{ (E(Y) - Y)(E(Y) - Y)^T \} \quad (16.68)$$

$$E(Y) = E(AZ) = AE(Z) \quad (16.69)$$

Avec E l'opérateur espérance mathématique. D'où :

$$\begin{aligned}
\Gamma_Y &= E \{ (AE(Z) - AZ)(AE(Z) - AZ)^T \} \\
&= E \{ A(E(Z) - Z)(A(E(Z) - Z))^T \} \\
&= AE \{ (E(Z) - Z)(E(Z) - Z)^T A^T \} \\
&= AE \{ (E(Z) - Z)(E(Z) - Z)^T \} A^T
\end{aligned} \tag{16.70}$$

Or

$$\Gamma_Z = E \{ (E(Z) - Z)(E(Z) - Z)^T \}$$

Par suite :

$$\Gamma_Y = A\Gamma_Z A^T \tag{16.71}$$

Comme $\bar{X} = -N^{-1}A^T P K$ d'où :

$$\text{Var}(\bar{X}) = -N^{-1}A^T P \text{Var}(K) \cdot (-N^{-1}A^T P)^T = N^{-1}A^T P \text{Var}(K) \cdot P A N^{-1} \tag{16.72}$$

Comme $K = L_0 - l \Rightarrow \text{Var}(K) = \text{Var}(l) = \Gamma_l = \sigma_0^2 P^{-1}$ d'où :

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\bar{X}} &= N^{-1}A^T P \cdot \sigma_0^2 \cdot P^{-1} P A N^{-1} = \sigma_0^2 \cdot N^{-1}A^T P A N^{-1} = \sigma_0^2 \cdot N^{-1} \\
\Gamma_{\bar{X}} &= \sigma_0^2 \cdot N^{-1}
\end{aligned} \tag{16.73}$$

D'où l'estimateur de la variance de \bar{X} :

$$\bar{\Gamma}_{\bar{X}} = s^2 \cdot N^{-1} \tag{16.74}$$

La matrice $\bar{\Gamma}_{\bar{X}}$ permet de déterminer la précision des inconnues déterminées par la méthode des moindres carrés.

16.5 MÉTHODE DES EQUATIONS D'OBSERVATIONS AVEC EQUATIONS DE CONDITION

16.5.1 Cas où les r grandeurs à déterminer sont liés par p relations

Nous supposons qu'il existe parmi les n grandeurs observées l_i un ensemble au moins de r grandeurs observées permettant de déterminer les r grandeurs inconnues, c'est-à-dire que la matrice A de $AX + K = V$ est de rang r .

Après linéarisation (si nécessaire), les liaisons entre les r grandeurs inconnues donneront bien à un système de p équations de condition :

$$BX = M \tag{16.75}$$

$$\text{ou } {}_p B_{r \cdot r} X_1 = {}_p M_1 \tag{16.76}$$

Avec rang $B = p$ et B et M ne dépendent que de X .

Pour estimer X , on a considéré l'ensemble des relations :

$$AX + K = V \quad (16.77)$$

$$BX = M \quad (16.78)$$

Avec rang $A = r$ et rang $B = p$. Après compensation, on aura le système :

$$A\bar{X} + K = \bar{V} \quad (16.79)$$

$$B\bar{X} = M \quad (16.80)$$

Remarquons qu'une équation de condition est équivalente à une équation d'observations dont le poids est infini : en effet M peut être considéré comme un vecteur d'observations fictives certaines dont les emq sont nulles et par suite les poids infinis.

Remarque utile : au lieu d'utiliser la méthode correcte de résolution on peut se borner à considérer qu'une équation de condition est une équation d'observation de poids très grand.

On se ramène au cas plus haut, à partir de $BX = M$ exprimer p inconnues en fonction des $r - p$ autres et les reporter dans $AX + K = V$

Littérature

1. **P. Hottier**. 1980. Théorie des erreurs. ENSG. IGN France. 81p.

MISE A NIVEAU DE LA GÉODÉSIE TUNISIENNE PAR L'UNIFICATION DE SES RÉSEAUX GÉODÉSQUES TERRESTRES

17.1 EXPOSÉ DES MOTIFS

Pour répondre aux besoins de la cartographie et de l'immatriculation foncière liée essentiellement à la colonisation des terres agricoles, la France a mis en place plusieurs réseaux géodésiques qui ont donné naissance à autant de systèmes géodésiques. La première tentative d'unicité a été entreprise après la deuxième guerre mondiale grâce à l'intégration du réseau composé du parallèle Nord et de la méridienne de Gabès au système Europe 50.

Ainsi, la Tunisie dispose de plusieurs systèmes de coordonnées ainsi que de différentes représentations planes ou " projections ". Outre le cumul de systèmes hétérogènes et disparates, les origines et les éléments de définition de ces systèmes étaient souvent non connus de la part des utilisateurs et ont entraîné d'importantes confusions.

Les premières tentatives visant l'assainissement des réseaux géodésiques datent de 1969 grâce aux initiatives des jeunes ingénieurs Géographes Tunisiens (H. Bortal, C. Fezzani, M.B.A Ben Mahmoud, N. Yangui) corroborées par l'expertise de l'Institut Géographique National (IGN) Français (A. Fontaine, 1969). Un protocole d'accord (convention n°1913) a été conclu en septembre 1972 avec l'IGN ; il concernait entre autres la compensation des réseaux géodésiques Tunisiens du 1er et 2ème ordre et l'analyse des résultats. Ce travail a révélé la disparition et la destruction de nombreux points géodésiques et donc la nécessité de reprendre certains travaux sur ces réseaux. Ainsi, les premiers travaux de réfection ont été entrepris au début de

l'année 1974 (cf. travaux H. Bortal et N. Yangui), parmi lesquels l'important travail réalisé par l'Ingénieur Géographe C. Fezzani avec son mémorial sur la Géodésie Primordiale Tunisienne suivi de sa thèse en 1979 "Analyse de la Structure des Réseaux Astro-Géodésiques Tunisiens".

C'est alors que l'OTC a poursuivi ses réflexions pour satisfaire certains besoins cartographiques et topographiques du pays en entreprenant une campagne de revalorisation de la Géodésie Tunisienne (M. Charfi, 1983).

Ces travaux de revalorisation comprenaient :

- la réfection des anciens points du 1er ordre, du 1er ordre complémentaire, du 2ème ordre et du 2ème ordre complémentaire,
- la construction de nouveaux points sur les sites des anciens points disparus,
- la densification de l'ancien réseau par de nouveaux points,
- les observations angulaires azimutales et zénithales,
- la détermination de 8 points de Laplace,
- la mesure des côtés de 8 triangles géodésiques,
- la détermination de 5 points par les mesures Doppler,
- Les calculs des observations terrestres par une compensation générale par les moindres carrés pour obtenir de nouvelles coordonnées du réseau compensé.

Notons que les observations des 8 points de Laplace et la mesure des côtés des 8 triangles géodésiques, les observations et les calculs des 5 stations Doppler ainsi que la compensation du réseau géodésique ont fait l'objet d'une deuxième convention (n°2916) signée entre l'OTC et l'IGN en 1982.

Ce réseau géodésique appelé RGP (Réseau Géodésique Primordial) se compose de 312 points identifiés comme suit :

- 142 points anciens,
- 112 nouveaux points construits sur les sites des anciens points disparus,
- 58 nouveaux points.

En comparant les coordonnées issues de la dernière compensation de 1985 avec celles de Carthage³⁴, la localisation des déplacements planimétriques trouvés a été jugée inacceptable pour le cadastre et l'immatriculation foncière facultative ; les nouvelles coordonnées de ce RGP n'ont pas été diffusées faute de prise de conscience scientifique et la situation est restée sans changement. L'OTC continue jusqu'à nos jours (1999) de travailler avec les mêmes systèmes et leurs disparités cumulatives.

Il se précise à présent et pour la 1ère fois à l'Office que ces déplacements sont dûs à la désorientation du système Carthage³⁴ par rapport aux référentiels géocentriques modernes (WGS84, ITRF). Cette affirmation a été vérifiée par une étude sur les comparaisons des azimuts géodésiques du Réseau Géodésique Primordial (A. Ben Hadj Salem, 1999) ; toutefois, il a été convenu que cette désorientation sera vérifiée et quantifiée à partir de l'observation par GPS (Global Positioning System) du côté Carthage - Bir Bou Regba.

Avec l'introduction des méthodes d'observation et de calculs GPS à l'OTC, les réseaux géodésiques tunisiens actuels ne répondent plus aux applications de ces nouvelles technologies de positionnement. Des applications telles que :

- la densification du réseau lui-même pour le cadastre et l'immatriculation foncière facultative,
- le nivellement de précision issu par le GPS,
- la cartographie numérique,
- les systèmes d'information géographique,
- le développement du GPS Différentiel doté de stations GPS permanentes à travers le pays pour le positionnement en temps réel...

seront nécessairement mis en oeuvre, grâce à la Mise à Niveau de la Géodésie Tunisienne et devant conduire à l'unification de tous ses réseaux .

17.2 LES JUSTIFICATIFS

Deux aspects guident et justifient cette unification. L'un d'ordre pratique et territorial relatif à la forme exacte et aux dimensions de tout le territoire ; l'autre à caractère scientifique et découlant de notre appartenance naturelle à l'espace géographique euro-méditerranéen auquel nous avons été rattachés géodésiquement depuis 1876, et avec toutes ses implications scientifiques d'aujourd'hui...

17.2.1 L'Aspect Territorial

Comme nous venons de le souligner, la Tunisie doit posséder un référentiel géographique unifié répondant aux exigences des nouvelles méthodes de positionnement tel que le GPS ; ce référentiel sera la passerelle incontournable pour réaliser des performances telles que :

- l'assainissement des régimes fonciers par un cadastre moderne et généralisé à tout le territoire...

- la mise en place de SIG ayant recours aux applications numériques de la cartographie automatique.

Notons que tous ces besoins ont été d'ailleurs balisés et répétés à travers plusieurs actions de l'OTC depuis trente ans et confortés par :

- la participation tunisienne au projet ADOS (Levé de l'Afrique par le Doppler, 1984),
- la signature de conventions de coopération entre l'OTC et l'IGN depuis 1985, puis actualisée depuis le 22 novembre 1993.
- l'organisation à Tunis du 21 au 25 Mai 1990 du 4^{ème} Symposium International sur la Géodésie en Afrique,
- l'introduction de la création d'une unité de géodésie spatiale par GPS au VIII^{ème} Plan de Développement de l'OTC d'un coût estimé à plus de 800 000 dinars,
- un projet de densification géodésique au sud du 34^{ème} parallèle par la technique GPS avec le concours de l'IGN (M.B.A Ben Mahmoud, 1992),
- la réalisation de 1996 à 1999 de travaux de densification des réseaux géodésiques primordial et secondaire par les moyens de l'OTC dans les régions de Tozeur (26 points du 1^{er} ordre et 171 points secondaires) et de Kebili (travaux en cours),
- la participation de l'OTC à l'observation d'un point géodésique au Sud Tunisien (site de Ghomrassen) par GPS dans le cadre du projet 'WHAT A CAT'(West Hellenic Arc Tectonic And Calabrian Arc Tectonic) avec l'IGN, l'Institut Français de Physique du Globe et l'IFAG (Munich) en septembre 1994 (A. Marsoni, 1995 ; M.B.A Ben Mahmoud et P. Bernasconi, 1993),
- l'observation en 1998 de 28 points GPS répartis sur tout le pays et devant constituer le Réseau de Référence Spatiale Tunisien, préalable à l'unification des réseaux.

17.2.2 L'Aspect Scientifique

Dans le même ordre d'idées que celles évoquées par l'action de Ghomrassen sur l'aspect territorial de notre géodésie unifiée, nous citerons l'existence des phénomènes tectoniques des plaques euro-asiatiques et africaines et leur jonction passant par la Méditerranée Orientale au voisinage de la ligne Ghomrassen /Dakar. Cette dernière est d'un intérêt scientifique international pour les trois continents, et l'OTC peut en être le partenaire privilégié de cette communauté pour fournir des prestations de mesures et l'édition de données très recherchées par les structures scientifiques concernées de ces trois continents ; la récente catastrophe tellurique sur la Turquie est une des manifestations tectoniques de ces plaques et une de leur jonction se trouve sur notre territoire avec tous les risques sismiques des régions traversées de part et d'autre de cette ligne géodésique.

A cet effet, des sites ont été choisis dans le cadre du projet **WEGENER** " Working Group of European Geoscientists for the Establishment of Networks for Earthquake Research" et la région de Medenine a été choisie pour l'emplacement d'un site parmi les points d'observation de ce projet scientifique continental, et leurs jonctions territoriales en vue d'en évaluer les mouvements.

D'autre part dès 1991, un accord a été signé entre l'OTC et le Centre de la Recherche Spatiale de l'Académie Polonaise des Sciences pour installer en Tunisie une station géodynamique qui participera à l'étude de ces mouvements tectoniques dans cette région méditerranéenne et dans le cadre du projet IDEAL (Investigation on the Dynamics of the European-Asian Lithosphere). Le coût de la réalisation de cette station a été estimé à 2 185 000 dinars en 1992, lors du VIIIème plan (OTC/M. Goucha/ M.B.A Ben Mahmoud, juillet 1992)...

Enfin, il nous appartient de citer toujours dans l'aspect scientifique de ce projet de mise à niveau de notre Géodésie, la résolution n°5 de la XXI ème assemblée générale de l'AIG (Association Internationale de Géodésie) tenue à Boulder, USA, en 1995(UGGI, 1995) en ces termes :

" L'AIG, Reconnaissant que

- (a) la géodynamique du continent africain offre un grand intérêt scientifique,
- (b) la région est dans un stade peu avancé de développement économique et notant que la mise en oeuvre d'accords bilatéraux, tels qu'il s'en est passé lors de la campagne ADOS coordonnée par l'AIG, s'est avérée un véhicule fructueux de coopération dans le passé ;
- (c) le Kenya a pris part à un projet de surveiller les mouvements actuels du segment kenyan du rift Est- africain ;
- (d) la Tunisie et la France coopèrent pour une étude géodynamique afin d'évaluer le risque sismique dans la région de Gafsa dans le Sud tunisien.

Recommande que :

- (a) des accords bilatéraux sur des projets géodynamiques soient encouragés et soutenues par la communauté des pays africains comme source de progrès scientifique pour le continent tout entier ;
- (b) ces projets soient soutenus par les institutions locales et par les organismes intervenant au titre de la coopération internationale ;
- (c) les techniques géodésiques spatiales et terrestres adaptées à ces projets soient mises en oeuvre ".

Les termes de référence de cette seule résolution permettront à l'OTC de demander et de négocier des crédits de financement disponibles dans de nombreux pays participant à ces recherches scientifiques et qui n'attendent que l'existence de projets dits " SERIEUX A LONG TERME " de cette nature.

A l'exemple de la décision de l'OTC de 1991 de participer aux activités de l'International GPS Geodynamics Service (IGS) de l'AIG, notre nouveau réseau géodésique unifié nous permettra dès lors de travailler avec des normes internationales de précision et de répondre à des prestations multi-sectorielles avec des organismes internationaux de renommée mondiale comme par exemple :

- le BGI (Bureau Gravimétrique International),
- les groupes de recherches de géodésie spatiale en Europe,
- les associations internationales de géodésie, de géophysique et d'astronomie,
- les instituts géographiques nationaux, et régionaux chargés de la formation et de la recherche,
- les observatoires des centres nationaux de recherches scientifiques et /ou les instituts nationaux des Sciences de l'Univers,...etc, pour ne citer que ces quelques aspects conventionnels de ses applications géodésiques à travers le monde...et dont notre territoire et pays en seront privés tant que nos réseaux actuels ne bénéficierons pas de cette décision politique de HAUT NIVEAU tendant à les unifier à l'échelle du globe c-à-d continentale et régionale.

17.3 LES OBJECTIFS DE LA MISE A NIVEAU DE LA GÉODÉSIE TUNISIENNE

Les objectifs de la mise à niveau de la Géodésie Tunisienne consistent à :

- équiper la Tunisie d'un réseau géodésique terrestre compensé, le réseau actuel n'étant qu'un morcellement de plusieurs observations et calculs sans compensation et ne peut pas être considéré comme le résultat d'une compensation (C. Fezzani, 1979). Les coordonnées des points sont issues de plusieurs calculs de blocs dont certains ne dépassant pas plus de huit points. L'une des contraintes essentielles aux compensations du futur réseau sera de minimiser les déformations dans les zones fortement immatriculées, et destinées à un cadastre orienté vers un " ASSAINISSEMENT INTELLIGENT DES REGIMES FONCIERS DE LA TUNISIE " (REALIX /OTC, 1994).
- mettre en place un réseau géodésique tridimensionnel de référence spatiale c'est-à-dire à l'échelle du globe, répondant aux exigences des nouvelles technologies de positionnement géodésique. L'emploi de la technologie GPS nécessite donc une meilleure détermination de l'altitude et des hauteurs ou ondulations du géoïde par rapport aux surfaces de référence topographiques, gravimétriques et océaniques du territoire tunisien,
- abolir définitivement l'utilisation des différents systèmes géodésiques de types " isolés depuis 123 ans ",
- connecter ce nouveau réseau aux réseaux géodésiques régionaux et continentaux tel que l'EU-REF et les différentes versions en amélioration continue dans les instituts de recherches et les observatoires des pays économiquement riches et militairement forts, par leurs maîtrises de ces métiers millénaires....

- créer un référentiel unique pour les applications de la cartographie automatique telles que les SIG et les bases de données cadastrales, géodésiques et cartographiques ; ces banques de données ne sont autres que des structures de recueil des données géographiques,..etc...,
- mettre en place la nouvelle représentation plane qui convient le mieux pour la Tunisie et qui sera l'U.T.M.

Tous ces aspects, longtemps négligés permettront à l'OTC d'apporter sa pleine contribution à une meilleure maîtrise de l'information pour une gestion durable de nos ressources naturelles mais aussi d'être le centre d'excellence national sur les multiples actions y afférentes(normes, standard, référentiel,...etc.).

17.4 ETAPES ET PROJETS DE CETTE MISE A NIVEAU

17.4.1 Etapes Et Projets

La réalisation des étapes suivantes constitue l'essentiel de la mise à niveau de la Géodésie Tunisienne :

- 1)- l'unification du nouveau réseau géodésique terrestre à partir d'un seuil de fiabilité des réseaux actuels (actions de recherches sélectives entre adoption ou rejet),
- 2)- l'observation d'un réseau géodésique de référence spatiale,
- 3)- le choix de la nouvelle représentation plane,
- 4)- l'observation et le calcul d'un géoïde de précision centimétrique, accédant aux altitudes orthométriques des systèmes géocentriques du GPS.

17.4.2 L'Unification du Nouveau Réseau Géodésique Terrestre

Nous proposons ci-dessous la méthodologie de réalisation de chaque étape du projet.

17.4.2.1 L'adoption du nouveau système de référence pour les 338 points du RGP

Je suggère d'appeler, en accord avec Chedli Fezzani et Mohamed Ben Mahmoud, **Carthage2000** le nouveau système de référence terrestre. Celui-ci sera défini à partir de la nouvelle compensation du Réseau Géodésique Primordial. Cette étape est fondamentale pour la suite ;

le calcul à adopter du Réseau Géodésique Primordial sera choisi à partir des nouvelles compensations. Les paramètres de la compensation définitive seront proposés, testés, puis arrêtés, après avoir répondu aux conditions suivantes :

- le contrôle de l'azimut de la direction de Carthage-Bir Bou Regba et ce par l'observation GPS de ces deux points,
- la déduction de la longitude de Carthage GPS pour le contrôle de la désorientation locale de Carthage (observations astronomiques du point fondamental, altitude orthométrique et altitude ellipsoïdique de Clarke), c'est cette déduction qui fera apparaître la plus grande partie de la désorientation du réseau actuel à réduire... et nous estimons entre 10 et 20 μrad les écarts à récupérer sur la désorientation actuelle de notre réseau,
- l'observation par GPS du côté Pilier Astro - Nef El Kelb,
- l'étude des écarts des fermetures laplaciennes des azimuts et des bases.

Ces 4 actions d'une durée de 6 à 9 mois environ seront menées par l'ingénieur Abdelmajid Ben Hadj Salem en qualité de Chef et Directeur du projet avec la participation des compétences disponibles de l'OTC et les moyens de calculs de l'IGN en la matière ; compte tenu des tentatives précédentes de revalorisation du réseau et de la connaissance des dossiers par nos partenaires français, un tel protocole permettra à l'OTC de bénéficier des meilleures prestations mathématiques et informatiques actuellement en usage en Europe.

Pour cela, il a été conseillé que cette compensation fera l'objet d'un atelier de deux jours regroupant outre Dr C. Fezzani, des ingénieurs des 2 organismes ainsi qu'un ou plusieurs experts internationaux en la matière ; ces journées de sensibilisation devront aboutir à des recommandations relatives aux moyens à mettre en oeuvre pour réduire la désorientation actuelle de notre réseau.

Devant la complexité et le volume des calculs de cette nouvelle compensation, nous recommandons donc la poursuite des coopérations existantes avec la France depuis 1973 (fortement établies depuis) pour le succès de ce projet, et dans le cadre de la nouvelle convention de 1993 avec l'IGN. La durée prévue pour ces calculs, leurs analyses et recherches sont estimées à 9 mois selon le cahier de charges de la direction de l'informatique de l'IGN et des moyens à prévoir par un protocole d'accord. De l'avis de Dr Fezzani, des moyens financiers additionnels à ceux de l'OTC peuvent être mobilisés auprès des partenaires de notre pays.

17.4.2.2 Le Calcul du Réseau Géodésique Secondaire (5770 points)

Une fois le calcul des coordonnées nouvelles du Réseau Géodésique Primordial dans le système Carthage2000 achevé, on calculera les coordonnées du Réseau Géodésique Secondaire (RGS). Le calcul se fera par fenêtre de $1^{\circ} \times 1^{\circ}$ (ou par un ensemble de feuilles 1/50 000). La priorité sera donnée aux zones fortement immatriculées et destinées à un cadastre. Le nombre

des points géodésiques secondaires nouveaux est de 5770 constitués par 5321 points en Lambert nord et 449 points en Lambert sud. Le RGS comprend à cette date environ 30 fenêtres de $1^{\circ} \times 1^{\circ}$. Les données relatives à chaque fenêtre carrée ont été saisies et archivées sur le mini-ordinateur de l'OTC. Pour chacune de ces fenêtres carrées, il suffit de modifier les coordonnées des points fixes et de relancer les calculs. La durée prévue pour cette phase de calculs est de 12 à 18 mois. De nouvelles fiches de désignation seront éditées et regroupées en répertoires pour chaque ensemble de feuille 1/50 000 calculé.

17.4.2.3 Etablissement des Formules de Passage

Cette étape consiste à établir les formules de passage appropriées du système Carthage34 au nouveau système Carthage2000. Nous adoptons comme unité de calcul des formules, la zone de $1^{\circ} \times 1^{\circ}$ pour le calcul des points secondaires et parmi les modèles mathématiques à mettre en oeuvre, les outils suivants seront tour à tour utilisés :

- les transformations de Helmert,
- les fonctions polynomiales (complexes de second degré ou plus, par morceaux ou globaux),
- les formules de Molodensky.

Des programmes informatiques de ces modèles choisis seront développés selon leurs modes et complexités sur micro-ordinateur PC et leurs paramètres de transformation pour chaque zone seront déterminés. Le démarrage de cette étape commencera dès le calcul des points géodésiques du RGS. Ces programmes pourront être remis aux Arrondissements Régionaux de l'OTC pour être utilisés dans les transformations des levés anciens. Le démarrage de ces calculs est estimé à 6 mois après les premiers calculs du RGP ou à 18 mois à partir de la 1ère édition du RGP compensé...

Le rattachement des dossiers anciens de l'immatriculation foncière au nouveau système géodésique se fera au fur et à mesure par les Arrondissement Régionaux avec le concours de ce projet.

17.4.2.4 Diffusion des Nouvelles Coordonnées et Formules de Passage

Dès qu'une zone a été calculée dans le nouveau système, les fiches de désignation des points géodésiques seront mises à jour et une copie sera transmise avec les formules de passage à l'Arrondissement Régional concerné, pour leur usage sur micro PC ; d'autres modes de diffusion pourraient être envisagées en fonction des configurations informatiques de l'OTC et de leur état d'évolution au moment du projet.

17.4.2.5 Campagne de Sensibilisation à Travers le Pays

Dès l'adoption des nouvelles coordonnées dans le nouveau système, des journées d'information seront organisées dans le pays auprès des services publics et des utilisateurs ; des modes d'édition et de diffusion du Nouveau Réseau unifié seront adoptées à travers tout le territoire et par Gouvernorat, en vue d'assurer l'homogénéité administrative et régionale de chaque application topographique ou foncière.

17.4.2.6 Durée et Besoins

La durée totale du projet de l'unification Carthage2000 du réseau géodésique est d'environ 42 mois. En plus du Chef et Directeur de projet, il est nécessaire de prévoir :

- un ingénieur et un ingénieur adjoint confirmé pour les calculs du réseau secondaire,
- deux adjoints techniques qualifiés pour la saisie des données et la mise à jour des fiches de désignation des points géodésiques,
- un informaticien pour la programmation de toutes les formules de transformation par fenêtre carrée $1^{\circ} \times 1^{\circ}$,
- trois micro-ordinateurs (dont un est prévu dans le IIIème plan informatique) et ses accessoires d'extension et d'impression,
- un compilateur Fortran sous Windows,
- une connexion Internet, pour l'établissement de relations et prestations de nature scientifique avec la communauté internationale de géodésie et de géophysique (UGGI, AIG,...).

17.4.3 Mise en Place d'un Réseau de Référence Spatiale

Ce projet consiste à observer par GPS un réseau géodésique tridimensionnel géocentrique sur l'ensemble du pays en vue d'utiliser ce mode de positionnement dans tous les travaux topographiques et cartographiques en tout lieu du pays avec la précision requise et de rattacher les mesures au seul système national Carthage2000.

Ce projet se compose des 3 structures :

- le RRST (Réseau de Référence Spatiale Tunisien),
- le RBT (Réseau de Base Tunisien),
- le RDT (Réseau de Densification Tunisien).

Le RRST est composé de 28 points géodésiques choisis sur tout le pays et distants de 80 à 160 km. Ces points ont été retenus en partie parmi les points du RGP et observé en 1998 en bi-fréquences ; ils sont en cours de calculs par un programme scientifique de l'Ecole Supérieure des Géomètres et Topographes ESGT du Mans/ France, utilisant les éphémérides précises de l'IGS dans le cadre de l'Association Internationale de Géodésie et des relations à trois IGN/OTC/ESGT établies depuis 1994.

Le RBT comportera environ un millier de points GPS à raison de 4 points au minimum par feuille de 1/50 000 dans les zones non désertiques et 2 points par feuille 1/50 000 dans les zones sahariennes au-dessous du parallèle 34°. Ces points seront déterminés à partir du Réseau de Référence Spatiale Tunisien précédemment observé et en cours de calcul et serviront comme stations fixes pour tous les levés par GPS ; ils permettront de déterminer les paramètres de passage du système WGS84 au nouveau système géodésique national Carthage2000. Sur les 1000 points du réseau il y aura environ 300 à 400 points nouveaux à construire, les autres étant choisis parmi les points du RGP et RGS facilement accessibles à partir d'une reconnaissance générale systématique de tous les points et leurs sites.

La durée des travaux (pour 4 récepteurs GPS) sera de 36 à 48 mois environ, et compte tenu de nos expériences actuelles pratiquées à l'OTC ; des renforts logistiques extérieurs peuvent être modulés et envisagés.

Le RDT quant à lui, représentera la densification du Réseau Géodésique Secondaire par la technique GPS là où les besoins en seront exprimés. Les points de ce réseau seront déterminés à partir des points du RRST et du RBT. Leurs coordonnées dans le système national seront déterminées à partir des paramètres de transformation. Les premiers besoins de ce réseau sont de l'ordre de 1000 points actuellement, et ce conformément aux estimations faites en 1992 par le Directeur de la Géodésie et des Levés Marins de l'OTC et relevées à partir d'une étude qui avait duré 4 mois, pour l'ensemble des sites retenus en avant projet 1/100 000 et 1/200 000. La réalisation de ces réseaux de Base et de Densification se fera dans le cadre du programme annuel des travaux de géodésie pour l'Etat(subventions annuelles, hors projet).

17.4.4 Choix d'une Nouvelle Représentation Plane

Parmi les représentations planes utilisées à l'OTC à l'heure actuelle, nous avons :

- la représentation conique conforme Lambert utilisé au Nord (Lambert Nord Tunisie) et utilisée au Sud (Lambert Sud Tunisie), avec le système Carthage34,
- la représentation UTM (Universel Transverse Mercator) étant seulement utilisée pour les cartes aux échelles 1/200 000 et 1/50 000, dites "type nouveau",
- la représentation équivalente de Bonne pour les échelles 1/200 000, 1/100 000 et 1/50 000 ayant été utilisée pour les cartes dites "type ancien",

- la représentation de Guillaume Postel (ou représentation des Fuseaux) continue d'être utilisée dans les levés isolés pour certains travaux de l'immatriculation foncière facultative dans le système Voirol.

Ainsi en plus de la multitude hétérogène des systèmes géodésiques, nous trouvons celles des représentations planes et la disparité de leurs figures géométriques utilisées du plus petit fuseau, aux cylindres, et cônes. Notons que la représentation plane officielle reste la représentation conique conforme Lambert avec ses deux composantes Nord et Sud. Cette représentation ne couvre pas l'extrême sud du pays et pour cette raison, parmi d'autres, le choix de la représentation UTM a déjà été proposé par A. Fontaine en 1969 et confirmé par C. Fezzani en 1979 et M. Charfi en 1988 ; les avantages de l'application de cette représentation étant conformes aux critères de choix sur les formes et les dimensions de notre pays, appliqués aux normes cartographiques internationales et enseignées par les grands organismes de formation, où l'on pourra noter pour la Tunisie que :

- tout le pays se trouve dans un même fuseau (n°32), éliminant d'un seul trait les zones de chevauchement actuelles...,

- qu'elle assure la continuité du programme de la cartographie aux différentes échelles, sans recourir à des artifices de recouvrement graphiques entre différentes échelles et différentes régions..., ainsi que l'UNICITE des coordonnées du nouveau système avec les anciennes valeurs qui n'ont pas fait l'objet d'un rejet.

La décision sur ce chapitre du projet sera prise dans le cadre des recommandations des deux journées de l'atelier de Géodésie précédemment conseillées.

17.4.5 La Détermination d'un Géoïde de Précision Centimétrique

Aujourd'hui dans plusieurs pays, une attention particulière est donnée à la détermination du géoïde avec précision. En effet, le système de positionnement par GPS a de grandes potentialités par la détermination des altitudes ellipsoïdiques (h_e) avec une grande précision. Toutefois, pour obtenir l'altitude orthométrique (H) d'un point à partir de cette altitude ellipsoïdique (h_e), obtenue par GPS, la connaissance de l'ondulation N du géoïde au-dessus ou en dessous du point est nécessaire ; la relation qui lie ces deux surfaces l'une topographique (GPS) l'autre équipotentielle (géoïde) s'exprime par la relation linéaire :

$$H = h_e - N \quad (17.1)$$

En Tunisie, le géoïde n'est pas connu et les données gravimétriques, nécessaires pour sa détermination, sont très dispersées. Leur homogénéité, densité et qualité sont inconnues. En 1975, une commission nationale regroupant des représentants de la Défense Nationale (D.S.G.H.A) et de l'Economie Nationale (ONM et ETAP) a été constituée pour superviser l'établissement de la première carte gravimétrique de la Tunisie. A notre connaissance et à ce jour, seule une carte gravimétrique des anomalies de Bouguer pour la Tunisie a été produite à l'échelle 1/1 000 000

sans doute à partir de données d'origines diverses et peut-être accidentelles du géoïde.

Pour combler cette insuffisance à la fois scientifique et technique pour notre présente étude, l'OTC doit prendre l'initiative de calculer un géoïde de haute précision pour tout le territoire tunisien. La réalisation de cette action (si elle est retenue) comprendrait :

- l'observation systématique d'un réseau gravimétrique d'une densité et de précision suffisantes,
- la définition des formules de calcul pour aboutir à une précision centimétrique, adoptée par nos voisins Italiens ou Français,
- l'observation d'un nivellement de précision sur un nombre de points GPS à fixer ultérieurement pour assurer la qualité requise, en vue de notre rattachement au géoïde Franco-Italien...

La réalisation de ce projet repose sur la coopération nationale avec les utilisateurs dans notre pays et internationale avec nos voisins du Nord ayant déjà leurs géoïdes respectifs comme la France et l'Italie. Les étapes seront :

- le recensement et l'analyse des données disponibles,
- l'observation des zones manquantes,
- le calcul d'un géoïde gravimétrique sur la Tunisie.

Un tel projet peut se concevoir avec un partenariat à trois (Italie, France, OTC) avec l'aide et le financement de ces 2 pays et du Bureau Gravimétrique International pour ses impacts scientifiques auprès des communautés scientifiques de la région et du monde.

La durée prévue est d'environ 5 années. Les besoins en hypothèse basse seront :

- un ingénieur, chef et directeur du projet, de profil IGN+DEA/ENS des Mines de Paris,
- deux brigades pour les levés gravimétriques,
- deux gravimètres,
- du matériel roulant,
- un logiciel de calcul approprié avec les formules de lissage appropriées à retenir pour la région en commun avec les partenaires voisins choisis.

Ce projet s'insère parfaitement dans le cadre du projet 'OACT' (Organisation Africaine de Cartographie et de Télédétection) relatif au Réseau Géodésique Intégré de l'Afrique (cf Travaux C. Fezzani/SG/OACT et les recommandations de l'OUA).

17.5 CONCLUSIONS

La réalisation de ce programme de mise à niveau de la Géodésie Tunisienne sera fondamentale et restera dans l'Histoire de l'Office SON PREMIER GRAND PROJET de ce 21ème siècle. Avec ces actions et par ce projet l'OTC s'enrichira entre autres prestations d'une Base de données Géodésiques, et de l'installation de stations GPS permanentes pour des applications multi-sectorielles performantes, et accèdera à des financements d'une très haute valeur ajoutée pour notre pays et pour nos pays voisins du Nord, du Sud, de l'Est et de l'Ouest.¹

Remerciements : La réalisation de cette étude a fait l'objet de discussions fructueuses avec Messieurs M. Ben Mahmoud et C. Fezzani ainsi que des recommandations de leur part pour l'amélioration de l'étude. Qu'ils trouvent ici l'expression de mes sincères remerciements et considérations.

Littérature

1. **A. Fontaine.** 1969. Rapport sur la Géodésie de la Tunisie. OTC.
2. **C. Fezzani.** 1971-1978. Mémorial sur la Géodésie Primordiale Tunisienne, Ministère de l'Equipement. OTC.
3. **M. Charfi.** 1977. Rapport sur la Géodésie en Tunisie. OTC.
4. **C. Fezzani.** 1979. Analyse de la Structure des Réseaux Astro-Géodésiques Tunisiens, thèse de docteur ingénieur, ENSG, IGN France.
5. **M. Charfi.** 1983. Modernisation du Réseau Géodésique Primordial de la Tunisie. OTC.
6. **Revalorisation du Réseau Géodésique Primordial de Tunisie.** 1983. Convention OTC-IGN n° 2916.
7. **Rapport sur les calculs.** 1985. Convention OTC-IGN n°2916. Lot n°4 Compensation Générale. OTC.
8. **C. Fezzani.** 1985. Réflexions sur le Réseau Géodésique Primordial. OTC.
9. **M. Charfi.** 1986. Sur l'exploitation du nouveau système géodésique. OTC.
10. **C. Fezzani, A. Ben Hadj Salem.** 1988. Note sur le Réseau Géodésique Primordial Tunisien. OTC.
11. **A. Fontaine.** 1987-1988. Notes n°1,2,3 et 4 sur les compensations du RGP Tunisien. IGN France.
12. **Rapport des Travaux du 4ème Symposium sur la Géodésie en Afrique.** 1990. OTC.
13. **IGS.** 1991. Call for Participation attachements.
14. **OTC.** 1991. Accord entre l'OTC et le Centre de la Recherche Spatiale de l'Académie Polonaise des Sciences relatif à la création d'une station géodynamique commune. OTC.
15. **M.B.A. Ben Mahmoud.** 1992. Rapport de Mission à l'IGN. OTC.
16. **M.B.A. Ben Mahmoud.** 1993. Rapport de mission en Pologne. OTC.
17. **REALIX/OTC.** 1994. Projet SIC - Horizon ; Système Moderne d'Information Cadastrale et Cartographique pour la Tunisie.
18. **A. Morsoni.** 1995. Campagne GPS "WHAT A CAT". Rapport sur les opérations de terrain, calculs et résultats.
19. **Union Géodésique et Géophysique Internationale.** 1995. Comptes Rendus de la XXIème Assemblée Générale de l'UGGI, 2-14 juillet 1995, Boulder, Colorado, USA.
20. **K. Naouali.** 1998. La mise en place d'un nouveau réseau géodésique tunisien par GPS. OTC.
21. **A. Ben Hadj Salem.** 1999. Note sur les comparaisons des azimuts géodésiques du Réseau Géodésique

1. * Plusieurs sources de financement et de nombreux fonds de budgets de la Communauté Européenne et organisations internationales et nationales sont disponibles depuis 1995 pour appuyer la consistance et le sérieux d'un tel projet. Nous restons à votre disposition, pour vous en assurer le montage et les termes d'un accord en partenariat avec toutes les actions évoquées dans notre étude et dans un cadre à définir par vos soins.

Primordial Tunisien. OTC.

CHAPITRE 18

THE OTC CONTRIBUTION TO THE NORTH AFRICAN REFERENCE PROJECT - NAFREF -

A paper presented at the Second North African Geodetic Workshop On the Unification of the Geodetic References, Algiers, 26 - 27 May 2001.

18.1 INTRODUCTION

The International Association of Geodesy (IAG) and the African Association of Cartography (actually African Organization of Cartography and Remote Sensing (AOCRS)) initiated the ADOS Project in 1981. 307 stations have been observed by Doppler satellites, covering 49 countries. The general accuracy was +1.5 m [1].

Actually, the Global Positioning System (GPS) gives the highest precision (subcentimetric) and is the best technology for African countries to realize the AFRICAN GEODETIC REFERENCE.

The objectives of such reference are :

- to define an unified geocentric reference for Africa for geodetic purposes and geodynamic projects on the African plate,

- to unify the geodetic references for positioning, mapping and navigation, which facilitates regional and economical projects and management of natural resources,
- to increase the number of permanent GPS stations,
- to prepare Africa to have international GPS data processing centers.

The OTC took the initiative to organize the First Maghrebien Geodetic Workshop in May 2000, on the theme "Definition and Realization of the Unified North Africa Geodetic Reference and Frame Network". The workshop was a success and the main recommendations are [2] :

- to start the project as soon as possible,
- to coordinate its realization with the AOCRS and the Commission X 'Regional and Global Networks ' of the IAG,
- to create a technical commission for the project.

By a letter received last month, on behalf of the IAG, the Chairman of the Commission X and the Director of the International GPS Service (IGS) Central Bureau invited the African professional community to participate with goal being the realization of the African Reference System 'AFREF'. The OTC agrees to participate in AFREF project by its participation in the NAFREF project.

The objectives of the Second North African Geodetic Workshop are to carry out the practical aspects of the realization of the Project. The aim of this paper is to present an essay for that realization.

18.2 THE STEPS OF REALIZATION

18.2.1 The Organizational Structure

As recommended in the resolutions of the First Workshop, the organizational structure consists of a Technical Commission representing the National Mapping Agencies which are participating in the Project. This commission is under the auspices of the OACRS. Concerning the IAG, a sub-commission for Africa is to be created under the Commission X, for the AFREF Project. The members of this sub-commission are the Technical Commission members and other people interested in the project.

The role of the Technical Commission is to :

- to do an inventory of the technical personnel, receivers and software available for use in the project execution, and the needs (human, material and financial) to start the project,

- establish the number of stations to be observed in the project and their positions,
- select the dates of the observations and fix their norms,
- decide on the strategy of processing the data and the choice of the processing centers.

18.2.2 Choice of the stations of the NAFREF Project

Following the IAG recommendations and using the EUREF guidelines, the stations of the NAFREF Project must fulfill the conditions :

- to be first order geodetic points or located on sites where orthometric high precision heights are easily obtainable,
- easily accessible,
- forced centering to remove related errors,
- easy to be leveled,
- clear horizon and no obstacles that could produce multipath effects,
- not to be disturbed by radios and transmitter frequencies,
- with a distance between 2 stations of 300 - 200 kms.

For Tunisia, the OTC proposes 7 geodetic points that are :

- Chott El Khanfous,
- Bou Rebeh,
- Gour,
- Lafaya,
- Ain Abdour,
- Mednine,
- Hagfat El Khalifa.

These stations belong to the Tunisian GPS Network of zero order observed in 1998.

18.2.3 The Observations

Dual-frequency GPS receivers will carry out the observations. The duration of the observations must be 5 days of 24 hours each, with a maximum elevation of 10° and the measurements of the meteorology parameters every 2 hours. For the ADOS project, the number of stations was 76 with 58 stations sited in of the countries of the UMA and 18 stations in Egypt. Following the number of the stations and the availability of the receivers, the observations could be done in 2 phases with a number of common stations.

For the Tunisian observations, the OTC has 4 GPS Ashtech XII receivers, three others receivers will be obtained from other Tunisian companies.

An appropriate date for the campaign of observations would be the month of October 2001.

18.2.4 The Strategy of Processing

The strategy of processing will be defined while we are together ; below is given the strategy applied for the Moldavia EUREF Campaign99 [3] :

1. The software used is the Bernese software version 4.2,
2. The standard procedures are :
 - 15° cutoff elevation,
 - no elevation dependant weighting,
 - troposphere zenith delay parameters with estimation every 2 hours,
 - cosz mapping function used for all processing runs,
 - resolution of ambiguities baseline by baseline,
 - resolution of the ambiguities using QIF(Quasi Ionosphere Free) strategy with the processing of each baseline,
 - global ionosphere maps from the Center for Orbit Determination in Europe(CODE) and the Saastamoinen model were used as a priori ionosphere and troposphere model,
 - IGS stations located around the project network included in the processing in order to connect the project to ITRF,
 - Orbits and pole information obtained from IGS,
 - Precise orbits in SP3 format in ITRF96 and a file containing Earth Rotation Parameters,

18.2.5 The Data Processing Centers

During the ADOS project, The African Consortium for Data Processing (CATD) was created which grouped together Algeria, Ivory Coast and Tunisia. The OTC proposes that CATD will be revived with the two North African centers : INCT(Algeria) and OTC (Tunisia) as the NAFREF Regional Data Processing Center (RDPC).

The OTC is disposed to be a regional data processing center of the Project. The contribution of the IAG is to :

- provide 1 license of the Bernese software,
- support the training of the OTC personnel on the Bernese software.

18.3 THE MAINTENANCE OF THE REFERENTIAL

In order to maintain the referential, permanent GPS stations should be installed in each country. The integration of some stations of the NAFREF referential to the IGS network is necessary. In the geodetic development program of the OTC, a permanent GPS station is planned to be installed at the OTC office.

18.4 CONCLUSION

Contrary to the ADOS Project, most countries have actual GPS receivers and have some experiences with the GPS positioning technology, so the realization of the NAFREF as a part of the AFREF Project can be done easily and with a minimum delay. The Project will be the first important realization in the Third Millennium for Africa. It opens the doors to others projects.

Littérature

1. **African Doppler Survey 1981-1986 Results**. 1987. International Union of Geodesy and Geophysics. International Association of Geodesy. Commission on International Coordination of Space Techniques for Geodesy and Geodynamics. Commission for Geodesy in Africa. African Association of Cartography. RCSSMRS. SGSS/Ohio State University. 1987.
2. **Les résolutions du 1er Atelier Maghrébin de Géodésie**. 2000. Tunis, 18-20 Mai 2000. Revue *Géo-Top*, n°3, Septembre 2000. OTC.
3. **Report on the Symposium of the IAG Sub-commission for Europe (EUREF)**. 2000. Tromso, 22 - 24 June 2000. Publication N°9, IAG. Section I Positioning, Commission X. Bayerische Kommission für

die Internationale Erdmessung, Astronomisch-Geodatische Arbeiten n°61. München 2000.

COORDONNÉES STT, OTC, UTM, ITRF : QUEL SYSTÈME DE COORDONNÉES FAUT-IL CHOISIR

19.1 INTRODUCTION

La géodésie constitue l'un des fondements de la géomatique. C'est à partir d'elle qu'on définit le référentiel de base pour les travaux cartographiques et topographiques. La Tunisie possède un patrimoine foncier important depuis 1886 date de la création du Service Topographique Tunisien (STT). Les plans de celui-ci sont exprimés dans différents systèmes de coordonnées. Avec le développement de l'utilisation des techniques spatiales de positionnement basées essentiellement sur les satellites GPS et bientôt GALILEO, il est impératif de savoir de quelles types de coordonnées a-t-on besoin.

19.2 LES SYSTÈMES GÉODÉSQUES

On définit généralement un système géodésique par un système de coordonnées où sont représentés les points géodésiques. A ce système on lui associe un modèle de la Terre. Celui-ci est un ellipsoïde. Les calculs sur une surface plane sont plus faciles que sur la surface de révolution. On introduit alors les représentations ou "projections" planes qui vont exprimer les positions des points par des coordonnées planimétriques (X, Y) .

19.3 LES SYSTÈMES GÉODÉSQUES EN TUNISIE

Les premiers travaux géodésiques en Tunisie dataient de la deuxième moitié du 19^{ème} siècle. Les systèmes géodésiques utilisés depuis, en Tunisie, sont :

- Le système Voirol (ellipsoïde de référence : Clarke Français 1880), premier système géodésique en Tunisie, utilisé surtout dans les travaux de l'immatriculation foncière facultative relatifs à des dossiers anciens.

- Le système Carthage34 (ellipsoïde de référence : Clarke Français 1880) c'est le système officiel de la Tunisie (octobre 2008).

- Le système Carthage86 (ellipsoïde de référence : Clarke Français 1880) système défini à partir des travaux de revalorisation de la géodésie tunisienne (1978-1984).

- Le système Europe 50 (ellipsoïde de référence : ellipsoïde International), d'utilisation plutôt pour les applications militaires.

- Le système Calcul84 défini par la compensation de l'Institut Géographique National Français (IGNF) de 1984 (ellipsoïde de référence : Clarke Français 1880), ce réseau est obtenu à partir des travaux de revalorisation de la géodésie tunisienne.

- Le système mondial ITRF (ellipsoïde de référence : ellipsoïde GRS80), c'est le référentiel spatial pour les observations GPS. Il a été utilisé dans la détermination des points GPS du Réseau GPS Tunisien de Référence Spatiale (RGTRS).

19.4 LES REPRÉSENTATIONS PLANES EN TUNISIE

A ces systèmes géodésiques, sont associées des coordonnées issues de représentations planes dont les plus utilisées sont :

19.4.1 La représentation plane Lambert

La représentation plane Lambert : c'est la représentation plane officielle, la Tunisie est couverte au Nord par la représentation Lambert Nord ($37.5 \text{ gr} < \text{latitude} < 42.5 \text{ gr}$) et au Sud par la représentation Lambert Sud ($34.5 \text{ gr} < \text{latitude} < 39.5 \text{ gr}$). Les plans des titres fonciers sont

généralement édités dans cette représentation par les coordonnées (x, y) dites STT avec l'axe des x dirigé vers le Nord et celui des y dirigé vers l'Ouest.

19.4.2 L'Universal Transverse Mercator (UTM)

L'Universal Transverse Mercator (UTM), utilisée dans l'habillage des nouvelles cartes aux échelles 1/25 000, 1/50 000 et le 1/200 000. L'avantage de cette représentation est que toute la Tunisie se trouve dans un même fuseau de l'UTM à savoir le fuseau $n32$ de méridien central de longitude égale à 9 Est de Greenwich.

19.4.3 La représentation Guillaume Postel ou Fuseau

La représentation Guillaume Postel ou Fuseau, utilisée dans les travaux dits à l'origine Fuseaux.

19.4.4 La représentation plane de Bonne

La représentation plane de Bonne a été utilisée pour le découpage des cartes anciennes aux 1/100 000 et 1/200 000.

Toutes ces représentations planes ont pour ellipsoïde de référence l'ellipsoïde de Clarke Français 1880.

19.5 QUELLES COORDONNÉES FAUT-IL CHOISIR ?

Vu la multitude des systèmes géodésiques et des représentations planes, des problèmes se posent souvent lors de l'utilisation des coordonnées issues d'une part de systèmes géodésiques différents et de représentations planes différentes d'autre part.

19.5.1 Les solutions proposées

Les solutions proposées sont issues de la modernisation et la mise à niveau de la géodésie tunisienne. Cette mise à niveau a été menée par l'Office de la Topographie et de la Cartographie (OTC). Les objectifs de cette mise à niveau consistent essentiellement à :

- redéfinir et adopter un système géodésique terrestre compensé homogène, unifiant les systèmes en usage,
- mettre en place un réseau géodésique tridimensionnel de référence spatiale, répondant aux exigences des nouvelles technologies de positionnement géodésique,
- mettre en place une nouvelle représentation plane qui convient le mieux pour la Tunisie à savoir la représentation UTM.

19.6 LES ACTIONS MENÉES

19.6.1 Mise en place d'un Réseau Géodésique Tridimensionnel de Référence Spatiale

28 Points GPS répartis sur tout le pays ont été observés et calculés et rattachés aux stations de l'International GPS Service et ils forment le Réseau GPS Tunisien de Référence Spatiale (RGTRS).

A partir de ce dernier, un Réseau GPS Tunisien de Base (RGTB) est en cours d'exécution ce qui permettra l'utilisation de la technique GPS dans tous les travaux de l'OTC et ce par la détermination des paramètres de passage du système WGS84 au système géodésique Tunisien unifié.

19.6.2 Définition du Nouveau Système Géodésique Terrestre Tunisien

Le nouveau système géodésique terrestre tunisien défini par l'OTC repose sur le Calcul84 appelé 'la Nouvelle Triangulation Tunisienne - NTT'. C'est un calcul global. Ce nouveau système sera le départ de l'assainissement de la géodésie tunisienne par l'unification des systèmes et des réseaux géodésiques ce qui permettra par la suite la mise en place des bases de données géodésiques et foncières.

19.6.3 Définition d'une nouvelle représentation plane

Avec la représentation actuelle, La Tunisie est partagée en deux zones. Avec l'adoption de la représentation UTM, tout le territoire tunisien est à l'intérieur d'un seul fuseau à savoir le fuseau $n32$ ayant pour méridien central le méridien de longitude 9° Est de Greenwich.

De plus, le changement de représentation, élimine toute confusion entre les anciennes coordonnées et celles issues du nouveau système géodésique. Ainsi un point est défini par ses coordonnées planes UTM (X, Y) où les axes X et Y sont dirigés respectivement vers l'Est et le Nord, et éventuellement par ses coordonnées GPS données par les coordonnées tridimensionnelles (X, Y, Z) dans le système mondial ITRF.

19.7 CONCLUSION

L'unification des systèmes géodésiques terrestres en un système homogène et précis avec l'utilisation de la représentation plane UTM comme représentation plane va résoudre les problèmes de multitudes des coordonnées. Ainsi, tout point aura :

- les coordonnées planes (X, Y) UTM exprimées dans le système NTT,
- les coordonnées spatiales (X, Y, Z) dans le système ITRF.

Littérature

1. **A. Ben Hadj Salem**. 2002. Sur l'Unification des Systèmes Géodésiques en Tunisie. OTC. 7p.

CHAPITRE 20

L'ARRÊTÉ DU 10 FÉVRIER 2009 DÉFINISSANT LA NOUVELLE TRIANGULATION TUNISIENNE - NTT-

20.1 INTRODUCTION

Parmi les missions de l'Office de la Topographie et de la Cartographie telles qu'elles sont définies par la loi de sa création n° 74-100 du 25 décembre 1974, il est chargé d'exécuter les travaux nécessaires pour assurer sur le territoire national, l'implantation et la conservation d'un réseau géodésique et d'un réseau de nivellement de précision,...etc.

Dans ce cadre, l'arrêté du 10 février 2009, définit le nouveau système géodésique tunisien avec les deux composantes planimétrique et altimétrique ainsi le changement de la représentation planimétrique connue sous l'appellation projection cartographique .

L'objet de cette note est d'apporter des éclaircissements sur le sujet.

20.2 RAPPELS DE GÉODÉSIE

20.2.1 Définitions

Le grand géodésien Allemand F.R. Helmert (1880) définissait la géodésie comme suit " la Géodésie est la science de la mesure et de la représentation de la surface terrestre". Une définition contemporaine de la géodésie est donnée par le Comité Associé Canadien de Géodésie et de Géophysique (1973) à savoir :

" la Géodésie est la discipline qui concerne la mesure des dimensions et la représentation de la Terre, incluant son champ de gravité, dans un espace tridimensionnel variant avec le temps."

La géodésie a donc deux aspects :

- l'un théorique : concernant la détermination des dimensions de la terre et la modélisation de son champ de gravité,
- l'aspect pratique : concerne l'établissement et la maintenance des réseaux géodésiques tri-dimensionnels nationaux et globaux, constitués de points matérialisés avec de coordonnées connues.

Les coordonnées des points géodésiques se réfèrent par rapport à un référentiel ou système géodésique donné.

20.3 LES DIFFÉRENTS SYSTÈMES GÉODÉSIQUES EN TUNISIE

20.3.1 Le Système Voirol (1875) :

- Le point fondamental : le point Voirol à Alger.
- L'ellipsoïde de référence : ellipsoïde de Clarke français 1880.

Certains dossiers anciens se réfèrent à ce système.

20.3.2 Le Système Carthage34 (1934)

- Le point fondamental : le point Carthage,

- L'ellipsoïde de référence : ellipsoïde de Clarke français 1880.

Le système Carthage34 présente les inconvénients suivants :

- Insuffisance d'azimuts.
- Insuffisance de bases.
- Calculs hétérogènes.

20.4 POURQUOI UN NOUVEAU SYSTÈME GÉODÉSIQUE ?

Suite à la publication du décret-loi relatif à l'immatriculation foncière obligatoire en 1964 et à la promulgation du Code des droits réels en 1965 d'une part, et le début de la mission cartographique du Service Topographique Tunisien d'autre part, il était impératif de mettre en place les infrastructures nécessaires pour réaliser les travaux de cartographie et de topographie dans un nouveau système géodésique national basé sur une nouvelle géodésie.

A cet effet, un premier diagnostic a été effectué en 1969 sur l'état de la géodésie tunisienne.

L'analyse de l'état de ces réseaux a montré des insuffisances aux niveaux de la qualité de l'échelle et de l'orientation.

Ainsi, le réseau géodésique existant n'était plus un support pour une cartographie précise à grande échelle et à fortiori pour les travaux du cadastre.

D'où la nécessité de reprendre des travaux géodésiques pour revaloriser les réseaux géodésiques tunisiens.

C'était à partir de 1978, que commençaient les travaux de revalorisation des réseaux géodésiques tunisiens pour :

- abolir définitivement l'utilisation des différents systèmes géodésiques de types " isolés et fuseaux " en usage depuis plus d'un siècle,
- créer un référentiel géodésique terrestre unique pour la Tunisie,
- mettre en place une nouvelle représentation plane qui convient le mieux pour la Tunisie à savoir l'UTM.

20.4.1 Les Travaux de la Revalorisation de la Géodésie Tunisienne

Ces travaux comprenaient essentiellement :

- * la construction de nouveaux points géodésiques sur les sites des points disparus,
- * la réfection des anciens points conservés,
- * la densification du réseau par de nouveaux points,
- * les mesures de 8 points de Laplace (latitude, longitude et azimut astronomiques) et de 24 distances,
- * un calcul d'ensemble des observations terrestres,
- * la détermination des coordonnées Doppler de cinq points géodésiques.

20.4.2 Les Résultats des Travaux de la Revalorisation de la Géodésie Tunisienne

A l'issue des travaux de calculs en 1984, on a obtenu un nouveau système géodésique - dit système géodésique Calcul84 - matérialisé par le nouveau réseau géodésique appelé le Réseau Primordial Terrestre Tunisien constitué de 312 points géodésiques.

20.4.2.1 Le Système Géodésique Calcul84

Les caractéristiques du système :

- Ellipsoïde de référence Clarke 1880 français.
- Les nouvelles observations angulaires + les anciennes observations angulaires pour les anciens points conservés (avant 1978).
- Mesures de 8 points de Laplace (latitude, longitude et azimut astronomiques) et de 24 distances dans 8 triangles.
- Fixation de 5 points anciens (observés par Doppler) avec un écart-type de 0.50 m.
- Compensation globale par la méthode des moindres carrés (312 points).

Le décalage entre Calcul84 et Cathage34 : Il est sous la forme d'une rotation dont le centre est situé dans la région de Kasserine, et d'un angle de 25 dmgr dans le sens des gisements.

Ce phénomène a été observé dans la plupart des pays qui ont changé de système géodésique. Voici ci-dessus un exemple de la Suisse où on montre les décalages entre le système ancien (LV03) et le nouveau (LV95) (Extrait du rapport de la Suisse présenté au Symposium de la Commission EUREF, Sofia, 4-7 juin 1997. Publication de l'Académie Bavaroise de Géodésie, n°58, pp 212-218, 1997)

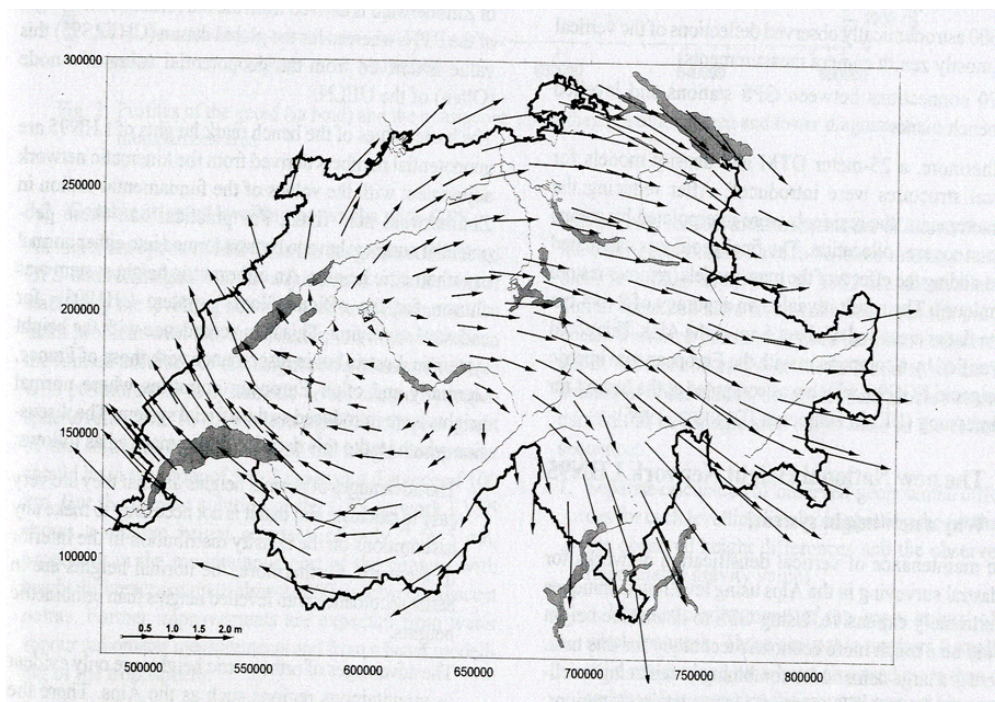


Fig. 20.1 les décalages entre le système ancien (LV03) et le nouveau (LV95)

Le décalage entre Calcul84 et Carthage34 a été jugé inacceptable pour le patrimoine national en matière de cadastre.

Résultat : Ce système n'a pas été appliqué.

D'où l'idée de la reprise des calculs des observations.

20.4.2.2 Le Système Géodésique Carthage86

En réexploitant les observations de Carthage84, un nouveau calcul a été effectué en 1986 créant ainsi un nouveau système dit Carthage86.

Les caractéristiques du système Carthage86 :

- Ellipsoïde de référence Clarke 1880 Français.
- Nouvelles observations angulaires + les anciennes observations angulaires pour les anciens points conservés (avant 1978).
- Calculs en 3 blocs en s'appuyant sur les points anciens conservés.

Les différences entre les coordonnées issues du système Carthage86 et celles de Carthage34 sont de l'ordre du mètre.

20.5 LA MISE À NIVEAU DE LA GÉODÉSIE TUNISIENNE

En 2001, l'OTC a entrepris un programme de mise à niveau de la géodésie Tunisienne.

Cette mise à niveau comprenait :

- 1. l'unification des systèmes géodésiques terrestres,
- 2. la création d'un réseau de base à référentielle spatiale,
- 3. la détermination d'un géoïde précis pour la Tunisie,
- 4. la mise en place d'une nouvelle représentation cartographique pour la Tunisie.

L'objectif de cette mise à niveau est :

* d'unifier les différents systèmes en un seul référentiel géodésique terrestre homogène et précis, qui permettra d'une part la densification du réseau et l'exploitation des nouvelles techniques spatiales de positionnement dans les meilleures conditions et d'autre part de lever et de rétablir les limites bornées sans se référer obligatoirement aux titres riverains.

Les impératifs de la mise à niveau étant :

- La non altération des formes et des surfaces des parcelles.
- La préservation des orientations des directions dans la limite des tolérances requises.

Une commission technique a été créée en décembre 2001 pour la mise en oeuvre de cette mise à niveau.

La réalisation de cette mise à niveau a commencé par l'établissement du Réseau Géodésique GPS Tunisien d'Ordre Zéro constitué de 28 points répartis sur tout le territoire.

A partir de ce réseau, la désorientation du système Carthage34 a été vérifiée.

Disposant d'un logiciel de calculs géodésiques, la commission a procédé à un nouveau calcul des observations.

20.5.1 Comparaisons des coordonnées du système Carthage34 et du nouveau calcul

La comparaison des coordonnées Lambert Nord Tunisie de 48 points dans les deux systèmes a permis de modéliser le décalage entre le système Carthage34 et le nouveau calcul par une transformation mathématique conforme du type :

$$Z - z_0 = (z - z_0) \cdot e^{it} \quad (20.1)$$

avec :

- " z_0 " le centre de la rotation : point fictif près du point géodésique Gassaat Ej Jahfa, situé dans la région de Kasserine,
- " t " l'angle de rotation = -27 dmgr.

20.5.2 Les Conclusions de la Commission Technique

Après études et tests des coordonnées issues du nouveau calcul, la Commission technique a abouti aux résultats suivants :

- Le système obtenu par le nouveau calcul laisse invariant les formes, les directions et les surfaces dans les tolérances requises.
- L'homogénéité de ce système géodésique offre :
 - * un meilleur passage au système spatial WGS84,
 - * une parfaite intégration des futurs travaux géodésiques et topométriques dans le référentiel spatial.

La Commission technique a proposé d'adopter ce nouveau calcul le nouveau système géodésique terrestre tunisien appelé NTT (Nouvelle Triangulation Tunisienne).

20.6 L'ARRÊTÉ DU 10 FÉVRIER 2009

L'arrêté du ministre de la Défense nationale du 10 février 2009, paru dans le Journal Officiel de la République Tunisienne n° 14 du 17 février 2009, fixe :

1. Le système national de référence unifié de la géodésie.
2. Le système national de référence de la projection cartographique.
3. Le système national de référence du nivellement.

20.6.1 Le système national de référence unifié de la géodésie

Il est défini par :

- le système national géodésique des coordonnées géographiques appelé - la Nouvelle Triangulation Tunisienne - (NTT).
- l'ellipsoïde associé : c'est l'ellipsoïde de Clarke 1880 français ($a = 6378249.20$ m, $b = 6356515.00$ m).

20.6.2 Le système national de référence de la projection cartographique

En pratique, on travaille sur le plan à l'aide des représentations planes ou projections :

$$M(\varphi, \lambda) \implies m \begin{pmatrix} X = X(\varphi, \lambda) \\ Y = Y(\varphi, \lambda) \end{pmatrix} \quad (20.2)$$

La représentation plane officielle de la Tunisie avant la parution de l'arrêté du 10 février 2009, était la représentation Lambert tangente.

Vu la forme du territoire tunisien et pour réduire les altérations des longueurs, il a été adopté deux représentations :

- le Lambert Nord Tunisie,

- le Lambert Sud Tunisie.

Le Lambert Nord Tunisie : - Ellipsoïde de Clarke Français 1880,

- Méridien origine : 11 gr à l'Est de Greenwich,
- Parallèle origine : 40 gr Nord,
- Facteur d'échelle : $k_N = 0.999625544$,
- Constante en X : 500000.00 m,
- Constante en Y : 300000.00 m.

Le Lambert Sud Tunisie :

- Ellipsoïde de Clarke Français 1880,
- Méridien origine : 11 gr à l'Est de Greenwich,
- Parallèle origine : 40 gr Nord,
- Facteur d'échelle : $k_S = 0.999625769$,
- Constante en X : 500000.00 m,
- Constante en Y : 300000.00 m.

Le système national actuel de référence de la projection cartographique est défini par la projection Universal Transverse Mercator (UTM), fuseau 32 Nord.

Les caractéristiques de la Représentation UTM :

Définition : C'est une représentation :

- conforme c'est-à-dire conserve les angles,
- cylindrique =====> on utilise les coordonnées rectangulaires (X, Y) ,
- transverse =====> $X = X(\varphi, \lambda)$ et $Y = Y(\varphi, \lambda)$

d'un modèle ellipsoïdique.

* Les éléments de définition sont :

- Ellipsoïde de Clarke Français 1880.
- Méridien origine : 9° à l'Est de Greenwich ou fuseau n°32.
- Facteur d'échelle : $k = 0.9996$.
- Constante en X : 500000.00 m.
- Constante en Y : 0.00 m.

20.6.3 Le système national de référence du nivellement

On utilise le système des altitudes orthométriques. Le point fondamental ou référence des altitudes est le repère scellé sur le monument Porte de France à Tunis avec une altitude de 7.000 m au dessus du niveau moyen de la mer (Nouvelle compensation du Réseau de Nivellement Général de la Tunisie - 1961).

20.7 APPLICATION DE L'ARRÊTÉ DU 10 FÉVRIER 2009

20.7.1 Le système national de référence terrestre unifié de géodésie

20.7.1.1 Utilisation des coordonnées géographiques des points géodésiques

L'OTC met à la disposition des utilisateurs les fiches signalétiques des points géodésiques des réseaux géodésiques Primordial et Secondaire avec leurs coordonnées exprimées dans le système NTT ((X, Y) en UTM et (φ, λ)).

20.7.1.2 Transformation des coordonnées Carthage34 ou Carthage86 dans le système NTT

1. L'OTC fournit les transformations des coordonnées à ses demandeurs à titre onéreux en application des tarifs en vigueur.
2. Acquérir les paramètres de transformations par feuille au 1/50000.

20.7.1.3 Transformation des coordonnées dans un système, autre que Carthage34 ou Carthage86, dans le système NTT

L'utilisateur fournit à l'OTC parmi les points à transformer un ensemble de points ayant des coordonnées dans Carthage34 ou Carthage86 ou coordonnées NTT. Ces points doivent couvrir uniformément la zone concernée par les points.

20.7.2 Le système national de référence de la projection cartographique

A - Pour l'application de la projection cartographique UTM, on doit se référer aux éléments de définition à savoir :

- Ellipsoïde de référence : ellipsoïde de Clarke 1880 Français,
- Méridien central 9° Est de Greenwich ou Fuseau n°32,
- facteur d'échelle : $k=0.9996$.

B - Pour les réductions des distances au plan de la projection, il faut tenir compte de l'altération linéaire qui dépend de la latitude et la longitude du point. L'OTC fournit le tableau des altérations linéaires pour l'ensemble du territoire .

C - concernant le découpage des cartes en Lambert, l'habillage des nouvelles cartes éditées par l'OTC en UTM porte les amorces des coordonnées Lambert.

D - Utilisant la projection cartographique UTM, il faut respecter le découpage et le numérotage des cartes. A ce sujet, L'OTC fournit les coordonnées géographiques des coins des feuilles des cartes de base aux différentes échelles.

20.7.3 Le système national de référence du nivellement

L'OTC fournit les fiches des repères du nivellement général de la Tunisie.

20.8 CONCLUSIONS

L'arrêté du 10 février 2009 a défini les fondements de la géomatique en Tunisie, car un pays sans les définitions précises de ses référentiels de géodésie, de nivellement et de cartographie ne peut avancer en la matière.

L'unification des systèmes géodésiques terrestres va permettre :

- d'abolir l'utilisation des systèmes isolés,
- le développement des bases de données et les systèmes d'informations géographiques sur l'ensemble du pays,
- d'assainir le système foncier tunisien sur des bases solides,

- de développer en harmonie l'application des technologies de positionnement spatial actuelles et celles du futur.

Littérature

1. **C. Fezzani.** 1979. La structure astro-géodésiques des réseaux géodésiques tunisiens. Thèse de Docteur Ingénieur. ENSG. IGN France.
2. **A. Ben Hadj Salem.** 1981. Point de Laplace, Exemple de Calcul Géodésique et Analyse des Résultats en Géodésie Tridimensionnelle. Rapport de stage IT3. ENSG. IGN France. 120p.
3. **Publications de l'Académie Bavaroise de Géodésie, n°58.** 1997. pp 212-218.
4. **Arrêté du ministre de la Défense nationale du 10 février 2009.** 2009. Journal Officiel de la République Tunisienne n°14 du 17 février 2009.

CHAPITRE 21

- PROGRAMME GEODOPV - CORRECTIONS ATMOSPHÉRIQUES ET MODÈLES MATHÉMATIQUES

Ce papier représente des notes sur le programme GEODOP (version V) de calculs des données des satellites Doppler, utilisé dans le projet ADOS (African Doppler Survey).

21.1 DÉFINITIONS

21.1.1 L'Ionosphère

L'ionosphère est la zone au dessus de 30 km de la surface terrestre. C'est un milieu ionisé par l'action des radiations solaires.

21.1.2 La Troposphère

La troposphère c'est la basse atmosphère (moins de 30 km d'altitude). C'est un mélange gazeux (air sec et vapeur d'eau).

21.2 LES OBSERVATIONS

Les observations de base consistent à un ensemble de comptage Doppler c'est-à-dire la mesure de la fréquence de battement accumulée résultante de deux oscillateurs de haute stabilité, l'un sur la terre et l'autre au bord du satellite.

Les comptages Doppler sont corrigés du premier ordre de l'effet de la réfraction ionosphérique par l'utilisation de deux fréquences cohérentes (150 et 400 MHz).

21.3 LA CORRECTION DE LA RÉFRACTION TROPOSPHÉRIQUE

Les données de comptage Doppler corrigées de la réfraction ionosphérique doivent être en plus corrigées des effets de la réfraction troposphérique sur le trajet du signal. Cette correction pour une solution de plusieurs passages peut être de l'ordre de 10 m et sa négligence produit une augmentation des paramètres du bruit.

Avec le programme, deux modèles simplifiés pour la réfraction troposphérique sont utilisés. Le modèle de Hopfield a la forme suivante :

$$\Delta r(\text{mètres}) = \frac{K_d}{\sin\sqrt{E^2 + 6.25^\circ}} + \frac{K_w}{\sin\sqrt{E^2 + 2.25^\circ}} \quad (21.1)$$

Avec :

$$K_d = 77.6 \frac{P}{T} [40136 + 148.72(T - 273.16)] \times 2 \times 10^{-7} \quad (21.2)$$

$$K_w = 77.6 \frac{4810}{T^2} e \times 2 \times 11000 \times 10^{-7} \quad (21.3)$$

où :

- E est l'angle de l'élévation (en degrés),
- P est la pression atmosphérique en millibars,
- e est la pression partielle de la vapeur d'eau en $mbar$,
- T est la température en $^\circ K$.

Le second modèle est dû à Saastamoinen (Saastamoinen, 1973) s'écrit :

$$\Delta r(\text{mètres}) = \frac{0.002277}{\cos z} \left[P + \left(\frac{1255}{T} + 0.05 \right) \cdot e - atg^2 z \right] \quad (21.4)$$

L'ordre de compensation a été choisi 7 après quelques essais initiaux avec l'ordre 6. On a observé une réduction significative du bruit (de 0.7 à 0.4 comptes) (J. Kouba, 1983).

21.4 LE MODÈLE MATHÉMATIQUE

Le modèle mathématique est représenté par l'équation suivante, pour chaque compte Doppler i :

$$f_i = (S_k - S_j) \frac{1}{\lambda} + \Delta t_{jk} \Delta f + s_i - (N_i + \varepsilon_i) = 0 \quad (21.5)$$

avec :

- s_i représente l'erreur systématique du modèle,
- N_i est le comptage Doppler corrigé des effets de la réfraction ionosphérique et troposphérique,
- ε_i représente les erreurs de mesures sur N_i ,
- S_j et S_k sont les distances station terrestre (X_g, Y_g, Z_g) - position satellite (X_s, Y_s, Z_s) aux instants t_j, t_k calculées comme suit

$$S_j = \left[\sum^3 (X_s(t_j) - \bar{X}_g)^2 \right]^{1/2}$$

où :

$$\begin{aligned} \bar{X}_g &= X_g - \omega_\lambda Y_g \\ \bar{Y}_g &= Y_g - \omega_\lambda X_g \\ \omega_\lambda &= \omega \left(\delta t + \frac{S_j}{c} \right) \end{aligned} \quad (21.6)$$

avec :

- ω est la vitesse de la rotation de la Terre,
- δt le retard du récepteur,
- $\lambda = c/f_g$ et $f_g = 400MHz$ la fréquence du récepteur,
- c la vitesse de la lumière,
- Δt_{jk} l'intervalle d'intégration,
- $\Delta f = f_{g_j} - f_s =$ l'écart de fréquence entre les oscillateurs du récepteur et du satellite ($\approx 32KHz$).

f_g doit être mise à jour de sa valeur initiale f_{g_0} à l'époque t_0 en utilisant l'approximation :

$$f_{g_j} = f_{g_0} + \dot{f}_g (t_j - t_0)$$

$$\text{où } \dot{f}_g = \frac{\Delta f_{g0}}{\Delta t}$$

Détaillons l'équation (21.5) : au passage i , entre les instants t_j et t_k d'émission, le récepteur a une fréquence f_g , il reçoit une fréquence f_r .

Par définition de N_i , on a :

$$N_i = \int_{\tau_j}^{\tau_k} (f_g - f_r) d\tau = \int_{\tau_j}^{\tau_k} f_g d\tau - \int_{\tau_j}^{\tau_k} f_r d\tau \quad (21.7)$$

f_g dépend du récepteur, est constante pendant l'intervalle de temps $\Delta \tau$. Soit :

$$N_j = f_g(\tau_k - \tau_j) - \int_{\tau_j}^{\tau_k} f_r d\tau$$

or

$$\int_{\tau_j}^{\tau_k} f_r d\tau = \int_{t_j}^{t_k} f_s dt$$

Comme f_s dépend de l'oscillateur du satellite, elle est constante entre les instants t_k et t_j . D'où :

$$N_i = f_g(\tau_k - \tau_j) - f_s(t_k - t_j) \quad (21.8)$$

Mais :

$$\tau_k = t_k + \frac{S_k}{c} \quad (21.9)$$

$$\tau_j = t_j + \frac{S_j}{c} \quad (21.10)$$

du fait de l'effet Doppler. On a donc

$$N_i = (S_k - S_j) \frac{f_g}{c} + (f_g - f_s)(t_k - t_j)$$

Soit finalement :

$$N_i = (S_k - S_j) \frac{1}{\lambda} + \Delta t_{jk} \Delta f \quad (21.11)$$

Aux erreurs de mesures ε_i sur N_i et s_i du modèle, on obtient l'équation (21.5).

Littérature

1. **J. Kouba**. 1983. *GEODOPV-Geodetic Doppler Positioning Programs (Version V)*. Gravity, Geothermics and Geodynamics Division. Earth Physics Branch. Ottawa. Canada.
2. **J. Saastamoinen**. 1973. Contribution to the theory of atmosphere correction. Bulletin Géodésique

n° 107, p.13-34.

CHAPITRE 22

LA RELATION ENTRE LES ROTATIONS GÉOCENTRIQUES ET LOCALES :APPLICATION AUX SYSTÈMES GÉODÉSQUES TUNISIENS

Cette note explique la désorientation planimétrique du système Carthage34 à partir de la comparaison des coordonnées issues respectivement des systèmes géodésiques terrestres Carthage34 et la compensation IGN de 1984.

22.1 INTRODUCTION

Lors de la comparaison entre les coordonnées planes anciennes du Réseau Géodésique Primordial Tunisien et celles issues de la compensation de l'Institut Géographique National de France de 1984, nous avons trouvé que les écarts sont dûs à une rotation de centre situé au voisinage du point J. Semmama et d'un angle de rotation θ de 20 dmgr environ dans le sens des gisements.

22.2 COMPARAISON DES COORDONNÉES 3D GÉODÉSQUES ET DOPPLER

Nous utilisons par la suite les notations suivantes :

- (X_1, Y_1, Z_1) les coordonnées géodésiques anciennes 3D dans le système local (système 1),
- (X_2, Y_2, Z_2) les coordonnées géodésiques cartésiennes 3D dans le système géocentrique Doppler (système 2),

La relation entre (X_1, Y_1, Z_1) et (X_2, Y_2, Z_2) s'écrit sous la forme vectorielle (modèle de Bursa-Wolf) :

$$X_2 = T + (1 + m) \cdot R(rx, ry, rz) \cdot X_1 \quad (22.1)$$

où :

- X_2 est le vecteur de composantes $(X_2, Y_2, Z_2)^t$, t désigne transposée ,
- T est le vecteur translation de composantes $(Tx, Ty, Tz)^t$ entre les systèmes 1 et 2,
- $1 + m$ est le facteur d'échelle entre les 2 systèmes,
- $R(rx, ry, rz)$ est la matrice de rotation (3,3) pour passer du système 1 au système 2,
- X_1 est le vecteur de composantes $(X_1, Y_1, Z_1)^t$.

En développant (22.1), on obtient (T. Soler, 1998) :

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Tx \\ Ty \\ Tz \end{pmatrix} + (1 + m) \begin{pmatrix} 1 & -rz & ry \\ rz & 1 & -rx \\ -ry & rx & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} \quad (22.2)$$

avec (rx, ry, rz) les rotations comptées positivement dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

En comparant les coordonnées tridimensionnelles dans le système 1 (système Carthage34) et le système 2 (système Doppler WGS72) des 5 points Doppler et en utilisant le modèle de comparaison le modèle donné par (22.1), nous avons déterminé les valeurs des rotations rx, ry et rz .

Soit un point $A(\varphi = \varphi_0, \lambda = \lambda_0, H)$ et de coordonnées tridimensionnelles (X_1, Y_1, Z_1) dans le référentiel géocentrique du système 1 (Carthage34). On considère le repère orthonormé local en A .

Entre $(rx, ry, rz)^t$ les composantes des rotations et ses composantes $(\alpha, \beta, \gamma)^t$ dans le repère local au point A , on a la relation :

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = R \cdot \begin{pmatrix} rx \\ ry \\ rz \end{pmatrix}$$

avec R la matrice de passage du repère géodésique géocentrique terrestre 3D du système 1 au repère local centré en A et donnée par :

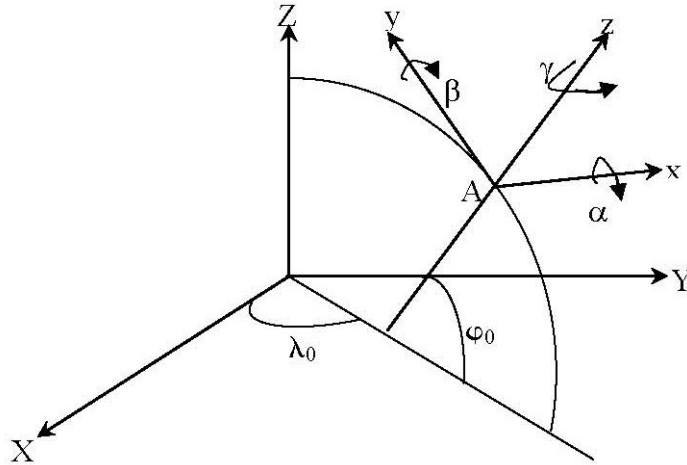


Fig. 22.1 Le Repère local en A

$$R = \begin{pmatrix} -\sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ -\sin\varphi\cos\lambda & -\sin\varphi\sin\lambda & \cos\varphi \\ \cos\lambda\cos\varphi & \sin\lambda\cos\varphi & \sin\varphi \end{pmatrix} \quad (22.3)$$

d'où :

$$\begin{aligned} \alpha &= -\sin\lambda \cdot rx + \cos\lambda \cdot ry \\ \beta &= -\cos\lambda \cdot \sin\varphi \cdot rx - \sin\varphi \cdot \sin\lambda \cdot ry + \cos\varphi \cdot rz \\ \gamma &= \cos\varphi \cdot \cos\lambda \cdot rx + \cos\varphi \cdot \sin\lambda \cdot ry + \sin\varphi \cdot rz \end{aligned} \quad (22.4)$$

Numériquement, on a obtenu :

$$\begin{aligned} rx &= -7''.3388 \\ ry &= -1''.3219 \\ rz &= -5''.3838 \end{aligned} \quad (22.5)$$

et $\varphi = 39.2600 \text{ gr}$, $\lambda = 10.18320 \text{ gr}$ un point virtuel au voisinage du point Fkirine (n°2100). D'où :

$$\begin{aligned} \alpha &= -0''.1363 \\ \beta &= -0''.0802 \\ \gamma &= -9''.1960 = -28.3789 \text{ dmgr} \end{aligned} \quad (22.6)$$

La rotation intéressante est γ autour de la normale au point $A(\varphi_0, \lambda_0)$. Le signe - explique que c'est une rotation dans le sens des gisements. Ce qu'on a obtenu est environ $\theta = 20 \text{ dmgr}$ mais comme le point A est approché ce qui explique la différence entre γ et θ .

22.3 CONCLUSION

Cette note a permis d'expliquer le lien entre la rotation en planimétrie issue de la compensation de l'IGN de 1984 et celle trouvée lors de la comparaison des coordonnées géodésiques terrestres CARTHAGE34 et Doppler.

Littérature

1. **IGN**. 1983. Revalorisation du réseau géodésique primordial de Tunisie. OTC.
2. **T. Soler**. 1998. A compendium of transformation formulas useful in GPS work. Journal of Geodesy, Volume 72, n°7/8, August 1998.
3. **A. Ben Hadj Salem**. 1987. Correspondance à M.Charfi. OTC. 5p.

CHAPITRE 23

LES ANGLES D'EULER : CAS DU MOUVEMENT DE LA ROTATION DE LA TERRE

On présente l'utilisation des angles d'Euler dans l'écriture du vecteur vitesse de la rotation angulaire du mouvement de la Terre autour de son axe de rotation.

23.1 INTRODUCTION ET NOTATIONS

On considère que la terre est un corps rigide, qui est en mouvement de rotation autour d'un axe passant par son centre de masse O . On associe à la terre un repère orthogonal direct (O, x, y, z) telque :

- Oz est l'axe de rotation,
- le plan Oxy est l'équateur.

Soient A, B et C les moments d'inertie de la terre respectivement par rapport aux axes Ox, Oy et Oz . Le repère (O, x, y, z) est donc lié à la terre. On définit un autre repère dit inertiel et fixe (O, X, Y, Z) désigné par repère écliptique à une date t_0 .

23.1.1 Les Angles d'Euler

Pour positionner le repère mobile (O, x, y, z) par rapport au repère fixe (O, X, Y, Z) , on utilise les angles d'Euler φ , θ et ψ . Ces angles sont définies comme suit :

- pour arriver au repère lié à la terre, on fait tourner le repère (O, X, Y, Z) autour de OZ d'un angle φ jusqu'à ce que l'axe OX coïncide avec la direction ON (voir figure ci-dessous), puis une rotation d'angle θ autour de ON jusqu'à ce que OZ coïncide avec Oz , et finalement une rotation autour de Oz d'un angle ψ de façon que ON coïncide avec Ox . On a alors :

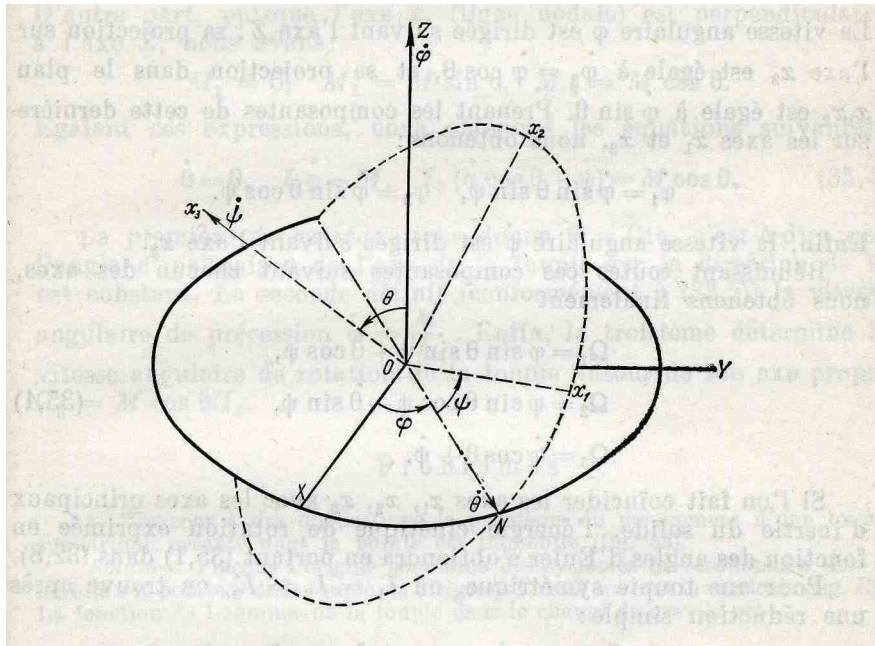


Fig. 23.1 Les Angles d'Euler

- φ : la longitude de l'axe nodal ON ,
- θ : l'angle d'obliquité de l'écliptique,
- ψ : l'angle de rotation de la terre puisque l'axe Oz représente l'axe de rotation instantané de la terre.

23.1.2 Passage de (O, X, Y, Z) à (O, x, y, z) et inversement

Appelons (E_1, E_2, E_3) la base orthonormée du repère (O, X, Y, Z) et (e_1, e_2, e_3) celle de (O, x, y, z) .
On a alors :

$$ON = E_1 \cos \varphi + E_2 \sin \varphi \quad (23.1)$$

$$E_3 = e_3 \cos \theta + (e_3 \wedge ON) \sin \theta \quad (23.2)$$

$$ON = e_1 \cos \psi - e_2 \sin \psi \quad (23.3)$$

Utilisant (23.3), calculons le produit vectoriel $e_3 \wedge ON$:

$$\begin{aligned} e_3 \wedge ON &= e_3 \wedge (e_1 \cos \psi - e_2 \sin \psi) = (e_3 \wedge e_1) \cos \psi + (e_2 \wedge e_3) \sin \psi = \\ &e_3 \wedge ON = e_1 \sin \psi + e_2 \cos \psi \end{aligned} \quad (23.4)$$

L'équation (23.2) s'écrit donc :

$$E_3 = e_1 \sin \psi \sin \theta + e_2 \cos \psi \sin \theta + e_3 \cos \theta \quad (23.5)$$

Comme on a :

$$E_1 \cos \varphi + E_2 \sin \varphi = e_1 \cos \psi - e_2 \sin \psi$$

On multiplie vectoriellement à gauche par E_3 , on obtient :

$$(E_1 \wedge E_3) \cos \varphi + (E_2 \wedge E_3) \sin \varphi = (e_1 \cos \psi - e_2 \sin \psi) \wedge (e_1 \sin \psi \sin \theta + e_2 \cos \psi \sin \theta + e_3 \cos \theta) \quad (23.6)$$

soit :

$$E_1 \sin \varphi - E_2 \cos \varphi = -e_1 \sin \psi \cos \theta - e_2 \cos \psi \cos \theta + e_3 \sin \theta \quad (23.7)$$

Les équations (23.1-23.3), (23.5) et (23.7) donnent le système :

$$E_1 \sin \varphi - E_2 \cos \varphi = -e_1 \sin \psi \cos \theta - e_2 \cos \psi \cos \theta + e_3 \sin \theta \quad (23.8)$$

$$E_1 \cos \varphi + E_2 \sin \varphi = e_1 \cos \psi - e_2 \sin \psi \quad (23.9)$$

$$E_3 = e_1 \sin \psi \sin \theta + e_2 \cos \psi \sin \theta + e_3 \cos \theta \quad (23.10)$$

La résolution du système (23.8-23.9-23.10) en (E_1, E_2, E_3) donne sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \quad (23.11)$$

avec R la matrice suivante :

$$R = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \theta & -\cos \varphi \sin \psi - \sin \varphi \cos \psi \cos \theta & \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi \cos \theta & -\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \cos \theta & -\cos \varphi \sin \theta \\ \sin \psi \sin \theta & \cos \psi \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (23.12)$$

On vérifie facilement que R est une matrice orthogonale donc :

$$R^{-1} = R^T \quad (23.13)$$

où T désigne transposée. On peut écrire que :

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = R^T \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \quad (23.14)$$

23.2 EXPRESSION DU VECTEUR DE LA VITESSE ANGULAIRE

Le vecteur de la vitesse angulaire Ω est donné par :

$$\Omega = \dot{\psi}e_3 + \dot{\theta}ON + \dot{\phi}E_3 \quad (23.15)$$

or :

$$ON = e_1 \cos \psi - e_2 \sin \psi$$

23.2.1 Expression du vecteur de la vitesse angulaire dans le repère fixe

Dans le repère fixe (E_1, E_2, E_3) , Ω s'écrit :

$$\begin{aligned} \Omega &= \dot{\psi}e_3 + \dot{\theta}ON + \dot{\phi}E_3 = \\ &\dot{\psi}(\sin \phi \sin \theta E_1 - \cos \phi \sin \theta E_2 + \cos \theta E_3) + \dot{\phi}E_3 + \dot{\theta} \cos \psi (\cos \phi \cos \psi - \sin \phi \sin \psi \cos \theta) E_1 + \\ &\quad \dot{\theta} \cos \psi (\sin \phi \cos \psi - \cos \phi \sin \psi \cos \theta) E_2 + \dot{\theta} \sin \theta \sin \psi \cos \psi E_3 + \\ &\quad - \dot{\theta} \sin \psi (-\cos \phi \sin \psi - \sin \phi \cos \psi \cos \theta) E_1 - \dot{\theta} \sin \psi (-\sin \phi \sin \psi + \cos \phi \cos \psi \cos \theta) E_2 \\ &\quad - \dot{\theta} \sin \theta \sin \psi \cos \psi E_3 \end{aligned} \quad (23.16)$$

Après calculs, on arrive à l'expression :

$$\Omega = (\dot{\psi} \sin \phi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \phi) E_1 + (-\dot{\psi} \cos \phi \sin \theta + \dot{\theta} \sin \phi) E_2 + (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi}) E_3 \quad (23.17)$$

Soit :

$$\Omega = \begin{pmatrix} \dot{\psi} \sin \phi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \phi \\ -\dot{\psi} \cos \phi \sin \theta + \dot{\theta} \sin \phi \\ \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi} \end{pmatrix}_{E_i} \quad (23.18)$$

23.2.2 Expression du vecteur de la vitesse angulaire dans le repère local

Dans le repère local (e_1, e_2, e_3) , Ω s'écrit :

$$\Omega = \dot{\psi}e_3 + \dot{\theta}ON + \dot{\phi}E_3$$

comme

$$ON = e_1 \cos \psi - e_2 \sin \psi$$

on a alors facilement :

$$\Omega = (\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi) e_1 + (-\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi) e_2 + (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) e_3 \quad (23.19)$$

Soit :

$$\Omega = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi \\ -\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi \\ \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \end{pmatrix}_{e_i} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \quad (23.20)$$

Littérature

1. **H. Moritz.** 1982. Variational Methods in Earth Rotation. p167-226. *Geodesy and Global Geodynamics*. Editeurs H. Moritz et H. Sünkel. Publication n°41 de l'Institut de Géodésie de l'Université Technique de Graz, Autriche.
2. **H. Moritz & I. Mueller.** 1988. The Theory of the Earth Rotation. 617 p. Ungar Publishing Company. New York.

CHAPITRE 24

NOTE DE GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE - L'OPÉRATEUR DE PETERSON -

La Mesure de la Terre(sens étymologique du mot *géométrie*) est une des principales sources des mathématiques. Sans remonter jusqu'à l'Égypte ancienne, rappelons par exemple que ce sont ses travaux de géodésie qui ont conduit Carl Friedrich Gauss à développer l'étude des surfaces et, notamment, à introduire l'application qui porte aujourd'hui son nom.¹

Charles-Michel Marle et Philippe Pilibossian [1]

L'objet de cette note de géométrie différentielle est l'application d'un théorème de la théorie des surfaces dit théorème de l'opérateur de Peterson dans les cas de la sphère et de l'ellipsoïde de révolution.

24.1 INTRODUCTION

Soit (Σ) une surface définie par la fonction vectorielle $\mathbf{OM}(u, v)$. Soit le repère local $(M, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{N})$ défini par :

1. C'est l'application qui associe, à chaque point de la surface du globe terrestre, la direction de la verticale ascendante en ce point.

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u}(u, v) \quad (24.1)$$

$$\mathbf{e}_2 = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v}(u, v) \quad (24.2)$$

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2}{\|\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2\|} \quad (24.3)$$

Soit g la métrique définie sur (Σ) , on a ;

$$g = g_{11}du^2 + 2g_{12}dudv + g_{22}dv^2 \quad (24.4)$$

ou encore sous forme matricielle :

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix} \quad (24.5)$$

Soient X, Y deux vecteurs du plan tangent en un point P de la surface :

$$X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

Alors $g(X, Y)$ est un réel donné par :

$$g(X, Y) = X^T \cdot g \cdot Y = Y^T \cdot g \cdot X = X^T \cdot \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix} \cdot Y = g_{11}ac + g_{12}(ad + bc) + g_{22}bd \quad (24.6)$$

où T désigne la transposée de matrice. On définit la matrice $h = (h_{ij})$ par :

$$h_{ij} = \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial u \partial v} \cdot \mathbf{N} \quad (24.7)$$

24.2 L'OPÉRATEUR DE PETERSON

L'Opérateur de Peterson est un opérateur linéaire A défini par :

$$g(AX, X) = h(X, X) \quad \forall X \neq 0 \quad (24.8)$$

où X est un vecteur non nul du plan tangent.

Théorème : Soit le repère tridimensionnel local $(M, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{N})$ précédemment défini, on montre que :

$$\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial u_j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \mathbf{e}_k + h_{ij} \mathbf{N} \quad (24.9)$$

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial u_i} = - \sum_k A_{ki} \mathbf{e}_k \quad (24.10)$$

où $A = (A_{ij})$ est la matrice de l'opérateur linéaire de Peterson, et Γ_{ij}^k les coefficients de Christoffel donnés par :

$$\Gamma_{ij}^k = \sum_l \frac{g^{kl}}{2} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_l} \right) \quad (24.11)$$

et g^{kl} les coefficients de l'inverse de la matrice $g = (g_{ij})$.

24.3 APPLICATIONS : CAS DE LA SPHÈRE

On considère que notre surface est une sphère de rayon a . Un point M de la surface est paramétré par :

$$\mathbf{OM}(\varphi, \lambda) = \begin{cases} X = a \cos \varphi \cos \lambda \\ Y = a \cos \varphi \sin \lambda \\ Z = a \sin \varphi \end{cases} \quad (24.12)$$

Le repère $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{N})$ est défini dans la base orthonormée $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ par :

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \varphi} = \begin{cases} -a \sin \varphi \cos \lambda \\ -a \sin \varphi \sin \lambda \\ a \cos \varphi \end{cases} \quad (24.13)$$

$$\mathbf{e}_2 = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \lambda} = \begin{cases} -a \cos \varphi \sin \lambda \\ a \cos \varphi \cos \lambda \\ 0 \end{cases} \quad (24.14)$$

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2}{\|\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2\|} = \begin{cases} -\cos \varphi \cos \lambda \\ -\cos \varphi \sin \lambda \\ -\sin \varphi \end{cases} \quad (24.15)$$

Matriciellement, on peut écrire (24.13), (24.14) et (24.15) sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \cos \lambda & -\sin \varphi \sin \lambda & \cos \varphi \\ -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ -\cos \varphi \cos \lambda & -\cos \varphi \sin \lambda & -\sin \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} = R \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} \quad (24.16)$$

Avec R la matrice :

$$R = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \cos \lambda & -\sin \varphi \sin \lambda & \cos \varphi \\ -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ -\cos \varphi \cos \lambda & -\cos \varphi \sin \lambda & -\sin \varphi \end{pmatrix} \quad (24.17)$$

R est une matrice de rotation, donc matrice orthogonale vérifie :

$$R^{-1} = R^T \quad (24.18)$$

où T désigne la transposée de matrice.

On peut écrire alors :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} = R^T \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \frac{\mathbf{e}_2}{a \cos \varphi} \\ \mathbf{N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \cos \lambda & -\sin \lambda & -\cos \varphi \cos \lambda \\ -\sin \varphi \sin \lambda & \cos \lambda & -\cos \varphi \sin \lambda \\ \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \frac{\mathbf{e}_2}{a \cos \varphi} \\ \mathbf{N} \end{pmatrix} \quad (24.19)$$

On peut écrire (24.16) sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \sin \varphi \cos \lambda & -a \sin \varphi \sin \lambda & a \cos \varphi \\ -a \cos \varphi \sin \lambda & a \cos \varphi \cos \lambda & 0 \\ -\cos \varphi \cos \lambda & -\cos \varphi \sin \lambda & -\sin \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} = \bar{R} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} \quad (24.20)$$

Avec \bar{R} la matrice :

$$\bar{R} = \begin{pmatrix} -a \sin \varphi \cos \lambda & -a \sin \varphi \sin \lambda & a \cos \varphi \\ -a \cos \varphi \sin \lambda & a \cos \varphi \cos \lambda & 0 \\ -\cos \varphi \cos \lambda & -\cos \varphi \sin \lambda & -\sin \varphi \end{pmatrix} \quad (24.21)$$

De même (24.19) s'écrit sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} = Q \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-\sin \varphi \cos \lambda}{a} & \frac{-\sin \lambda}{a \cos \varphi} & -\cos \varphi \cos \lambda \\ \frac{-\sin \varphi \sin \lambda}{a} & \frac{\cos \lambda}{a \cos \varphi} & -\cos \varphi \sin \lambda \\ \frac{\cos \varphi}{a} & 0 & -\sin \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{N} \end{pmatrix} \quad (24.22)$$

24.3.1 L'Expression des dérivées des vecteurs du repère local

Maintenant, on veut calculer $\frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial \lambda}$, $\frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial \lambda}$, $\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \lambda}$ en fonction des vecteurs du repère local au point $M(\varphi, \lambda)$ de la sphère.

Pour les dérivées par rapport à φ , on utilise (24.20) :

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{N} \end{pmatrix} = \frac{\partial \bar{R}}{\partial \varphi} \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} \quad (24.23)$$

En utilisant l'équation (24.22), on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{N} \end{pmatrix} = \frac{\partial \bar{R}}{\partial \varphi} \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} = \frac{\partial \bar{R}}{\partial \varphi} Q \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{N} \end{pmatrix} \quad (24.24)$$

Après calculs, on trouve :

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{N} \end{pmatrix} = U \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{N} \end{pmatrix} \quad (24.25)$$

avec U la matrice :

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & -tg\varphi & 0 \\ \frac{-1}{a} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (24.26)$$

Soit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial \varphi} &= a\mathbf{N} \\ \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial \varphi} &= -tg\varphi \mathbf{e}_2 \\ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \varphi} &= -\frac{1}{a}\mathbf{e}_1 \end{aligned} \quad (24.27)$$

De même, on a :

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{N} \end{pmatrix} = \frac{\partial \bar{R}}{\partial \lambda} \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} = \frac{\partial \bar{R}}{\partial \lambda} Q \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{N} \end{pmatrix} \quad (24.28)$$

Après calculs, on trouve :

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{N} \end{pmatrix} = V \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{N} \end{pmatrix} \quad (24.29)$$

avec V la matrice :

$$V = \begin{pmatrix} 0 & -tg\varphi & 0 \\ \sin\varphi \cos\varphi & 0 & a\cos^2\varphi \\ 0 & \frac{-1}{a} & 0 \end{pmatrix} \quad (24.30)$$

Soit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial \lambda} &= -tg\varphi \mathbf{e}_2 \\ \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial \lambda} &= \sin\varphi \cos\varphi \mathbf{e}_1 + a\cos^2\varphi \mathbf{N} \\ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \lambda} &= -\frac{1}{a}\mathbf{e}_2 \end{aligned} \quad (24.31)$$

24.3.2 Utilisation du Théorème de l'opérateur de Peterson

Maintenant on va déterminer les coefficients des équations (24.9) et (24.10) et de les comparer aux précédentes équations (24.27) et (24.31). Pour cela, on va calculer les coefficients de Christoffel et les coefficients h_{ij} .

Pour la sphère, on a :

$$g = a^2 d\varphi^2 + a^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2 \quad (24.32)$$

soit sous forme matricielle :

$$g = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \cos^2 \varphi \end{pmatrix} \quad (24.33)$$

Ce qui donne :

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^2 \cos^2 \varphi} \end{pmatrix} \quad (24.34)$$

Appliquant (24.11), on a :

$$\Gamma_{11}^1 = \sum_{l=1}^{l=2} \frac{g^{ll}}{2} \left(\frac{\partial g_{1l}}{\partial \varphi} + \frac{\partial g_{1l}}{\partial \varphi} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u_l} \right) = 0; \quad \Gamma_{11}^2 = 0; \quad \Gamma_{12}^1 = 0; \quad \Gamma_{12}^2 = -tg\varphi$$

$$\Gamma_{22}^1 = \cos\varphi \sin\varphi; \quad \Gamma_{22}^2 = 0$$

Calculons les h_{ij} . On a :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial \varphi^2} \begin{vmatrix} -a \cos \varphi \cos \lambda \\ -a \cos \varphi \sin \lambda \\ -a \sin \varphi \end{vmatrix}; \quad \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial \varphi \partial \lambda} \begin{vmatrix} a \sin \varphi \sin \lambda \\ -a \sin \varphi \cos \lambda \\ 0 \end{vmatrix}; \quad \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial \lambda^2} \begin{vmatrix} -a \cos \varphi \cos \lambda \\ -a \cos \varphi \sin \lambda \\ 0 \end{vmatrix}; \quad (24.35)$$

Par suite :

$$h_{11} = \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial \varphi^2} \cdot \mathbf{N} = a \quad (24.36)$$

$$h_{12} = h_{21} = \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial \varphi \partial \lambda} \cdot \mathbf{N} = 0 \quad (24.37)$$

$$h_{22} = \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial \lambda^2} \cdot \mathbf{N} = a \cos^2 \varphi \quad (24.38)$$

D'où :

$$\frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial \varphi} = \Gamma_{11}^1 \mathbf{e}_1 + \Gamma_{11}^2 \mathbf{e}_2 + h_{11} \mathbf{N} = a \mathbf{N} \quad (24.39)$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial \varphi} = \Gamma_{21}^1 \mathbf{e}_1 + \Gamma_{21}^2 \mathbf{e}_2 + h_{21} \mathbf{N} = -tg\varphi \mathbf{e}_2 \quad (24.40)$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial \lambda} = \Gamma_{12}^1 \mathbf{e}_1 + \Gamma_{12}^2 \mathbf{e}_2 + h_{12} \mathbf{N} = -tg\varphi \mathbf{e}_2 \quad (24.41)$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial \lambda} = \Gamma_{22}^1 \mathbf{e}_1 + \Gamma_{22}^2 \mathbf{e}_2 + h_{22} \mathbf{N} = \cos\varphi \sin\varphi \mathbf{e}_1 + a \cos^2 \varphi \mathbf{N} \quad (24.42)$$

En comparant (24.39-24.42) avec (24.27),(24.31) on trouve les mêmes expressions. De (24.27),(24.31), on déduit les coefficients de la matrice de l'opérateur de Peterson, à savoir :

$$A_{11} = \frac{1}{a} \quad (24.43)$$

$$A_{22} = \frac{1}{a} \quad (24.44)$$

$$A_{12} = A_{21} = 0 \quad (24.45)$$

24.4 CALCUL DES COEFFICIENTS DE LA MATRICE DE L'OPÉRATEUR DE PETERSON

D'après la définition de l'opérateur de Peterson, on a :

$$g(AX, X) = h(X, X) \quad \forall X \neq 0$$

Posons :

$$A = (A_{ij}); \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (24.46)$$

respectivement la matrice de l'opérateur de Peterson et un vecteur du plan tangent non nul, on a alors en utilisant la définition de l'opérateur de Peterson :

$$AX = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \quad (24.47)$$

En utilisant (24.6), on a :

$$(r, s) \cdot \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x, y) \cdot \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (24.48)$$

Soit le système :

$$(r, s) \cdot \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \cos^2 \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x, y) \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \cos^2 \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (24.49)$$

ce qui donne l'équation :

$$x^2 a^2 A_{11} + y^2 a^2 \cos^2 \varphi A_{22} + xy a^2 (A_{12} + A_{21} \cos^2 \varphi) = ax^2 + ay^2 \cos^2 \varphi \quad (24.50)$$

D'où les coefficients A_{ij} , le point est supposé non au pôle, :

$$A_{11} = \frac{1}{a} \quad (24.51)$$

$$A_{12} = A_{21} = 0 \quad (24.52)$$

$$A_{22} = \frac{1}{a} \quad (24.53)$$

les coefficients données par (24.43 - 24.44 -24.45).

On laisse au lecteur à titre d'exercice l'étude du cas de l'ellipsoïde de révolution.

Littérature

1. **Catherine Doss-Bachelet, Jean-Pierre François, Claude Piquet.** 2000. Géométrie différentielle. Collection Mathématiques 2e Cycle, cours et exercices corrigés, dirigée par Charles-Michel Marle et Philippe Pilibossian. Ellipses, 200p.

NOTE SUR LES REPRÉSENTATIONS QUASI-CONFORMES

25.1 INTRODUCTION

En cartographie mathématique, on a étudié les représentations de la sphère avec les variables (L_M, λ) ou celles de l'ellipsoïde de révolution avec les coordonnées (L, λ) vers le plan (X, Y) avec :

$$\begin{cases} X = X(L_M, \lambda) \\ Y = Y(L_M, \lambda) \end{cases} \quad (25.1)$$

$$\text{ou} \quad \begin{cases} X = X(L, \lambda) \\ Y = Y(L, \lambda) \end{cases} \quad (25.2)$$

avec :

$$L_M = \text{Logtg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \quad \text{latitude de Mercator} \quad (25.3)$$

$$L = \text{Logtg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) - \frac{e}{2} \text{Log} \frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi} \quad \text{latitude isométrique} \quad (25.4)$$

En posant :

$$z = L_M + i\lambda \quad (25.5)$$

$$\text{ou} \quad z = L + i\lambda \quad (25.6)$$

$$Z = X + iY \quad (25.7)$$

on a considéré les représentations conformes (c'est-à-dire qui conservent les angles) ou encore définies par :

$$Z = Z(z) \quad (25.8)$$

avec $Z(z)$ une fonction dite holomorphe de z soit :

$$\frac{\partial Z}{\partial \bar{z}} = 0 \quad (25.9)$$

où \bar{z} est le conjugué de z soit $\bar{z} = L - i\lambda$.

25.2 LES REPRÉSENTATIONS OU TRANSFORMATIONS QUASI-CONFORMES

Définition : Une fonction $f(z) = Z = Z(z)$ définie et dérivable sur un domaine $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ (l'ensemble des nombres complexes) est dite quasi-conforme si elle vérifie :

$$\frac{\partial Z}{\partial \bar{z}} = \mu(z) \cdot \frac{\partial Z}{\partial z} \quad (25.10)$$

avec :

$$|\mu(z)| < 1 \quad (25.11)$$

$|z|$ désigne le module du nombre complexe z . Le coefficient μ s'appelle *coefficient de Beltrami*.

25.2.1 Développement d'une fonction en un point z_0

Soit f une fonction quasi-conforme et un point $z_0 \in \mathcal{D}$. Ecrivons un développement de f au point z_0 . On a alors :

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0) \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) + (\bar{z} - \bar{z}_0) \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\bar{z}_0) + \dots \quad (25.12)$$

Par un changement de variable, on peut prendre $z_0 = 0$, d'où :

$$f(z) = f(z_0) + z \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) + \bar{z} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\bar{z}_0) + \dots \quad (25.13)$$

Utilisant (25.10), l'équation précédente s'écrit en négligeant les termes du deuxième degré :

$$f(z) = f(z_0) + z \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) + \bar{z} \mu(z_0) \cdot \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) \quad (25.14)$$

Donc $f(z)$ s'écrit localement :

$$f(z) = \alpha + \beta z + \gamma \bar{z} \quad (25.15)$$

$$\text{où } \alpha, \beta, \gamma \text{ des constantes complexes avec } \left| \frac{\gamma}{\beta} \right| < 1 \quad (25.16)$$

25.3 ETUDE DE LA TRANSFORMÉE D'UN CERCLE

On sait que pour une transformation conforme, l'image d'un cercle autour d'un point est un cercle (ou encore l'indicatrice de Tissot est un cercle). Soit un point z_0 qu'on peut prendre égal à 0. Par un changement de l'origine des axes, la fonction f s'écrit :

$$f(z) = \beta z + \mu \beta \bar{z} \quad (25.17)$$

Par abus, on garde la même notation. On considère autour de l'origine $z_0 = 0$ un point $M(x = a \cdot \cos \theta, y = a \cdot \sin \theta)$ qui décrit un cercle infiniment petit de rayon a . Etudions son image par f .

De l'équation précédente, on a :

$$z = a \cos \theta + i a \sin \theta = a e^{i\theta} \quad (25.18)$$

$$\mu = |\mu| e^{ik} \quad (25.19)$$

$$\beta = |\beta| e^{il} \quad (25.20)$$

$$f(z) = a |\beta| e^{il} (e^{i\theta} + |\mu| e^{i(k-\theta)}) \quad (25.21)$$

Si $\theta_1 = \frac{k}{2} = \frac{\arg(\mu)}{2}$ on a : $z_1 = a e^{ik/2}$ et :

$$f(z_1) = a |\beta| e^{il} e^{ik/2} (1 + |\mu|) \quad (25.22)$$

$$|f(z_1)| = a |\beta| (1 + |\mu|) \quad (25.23)$$

Maintenant prenons $\theta_2 = \theta_1 + \frac{\pi}{2} = \frac{k}{2} + \frac{\pi}{2}$, alors $z_2 = a e^{i\theta_2} = a e^{ik/2} e^{i\pi/2} = i a e^{ik/2}$ et on obtient :

$$f(z_2) = i a |\beta| e^{il} e^{ik/2} (1 - |\mu|) \quad (25.24)$$

$$|f(z_2)| = a |\beta| (1 - |\mu|) \quad (25.25)$$

en tenant compte que $|\mu| < 1$.

1. $z = x + iy = |z| e^{i\theta}$, $\theta = \arg(z)$

Des équations (25.21),(25.23) et (25.25), on déduit que l'image de M décrit une ellipse de grand-demi axe et demi-petit axe respectivement (Fig. 25.1) :

$$a' = a|\beta|(1 + |\mu|) \quad (25.26)$$

$$b' = a|\beta|(1 - |\mu|) \quad (25.27)$$

On appelle :

$$K = \frac{1 + |\mu|}{1 - |\mu|} \quad (25.28)$$

coefficient de distortion ou de dilatation.

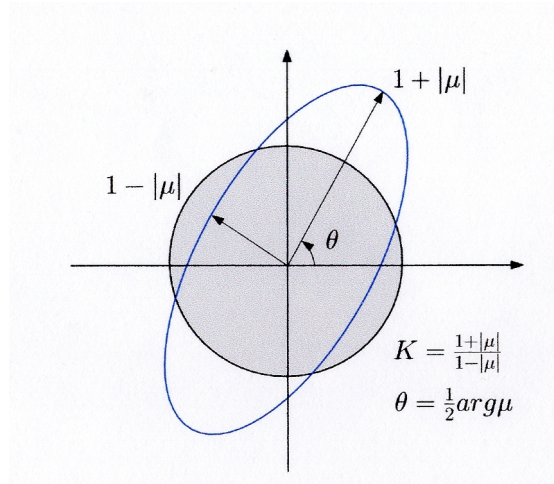


Fig. 25.1 L'Image d'un Cercle

25.4 CALCUL D'UN ÉLÉMENT DE LONGUEUR SUR LE PLAN

Un élément de longueur sur le plan est donné par :

$$dS^2 = dX^2 + dY^2 = |df|^2 = df \cdot \bar{df} \quad (25.29)$$

Comme $df = \beta dz + \gamma d\bar{z}$ et $\bar{df} = \bar{\beta} d\bar{z} + \bar{\gamma} dz$, on alors :

$$\begin{aligned} dS^2 &= dX^2 + dY^2 = |df|^2 = df \cdot \bar{df} = (\beta dz + \gamma d\bar{z})(\bar{\beta} d\bar{z} + \bar{\gamma} dz) \\ &= \beta \bar{\beta} dz d\bar{z} + \gamma \bar{\gamma} d\bar{z} dz + dz d\bar{z} \left(\beta \bar{\gamma} \frac{dz}{d\bar{z}} + \gamma \bar{\beta} \frac{d\bar{z}}{dz} \right) \end{aligned} \quad (25.30)$$

Posons :

$$ds^2 = dz.d\bar{z} \quad (25.31)$$

Le carré du module linéaire de la transformation quasi-conforme s'écrit :

$$m^2 = \frac{dS^2}{ds^2} = |\beta|^2 + |\gamma|^2 + \left(\beta\bar{\gamma} \frac{dz}{d\bar{z}} + \gamma\bar{\beta} \frac{d\bar{z}}{dz} \right) \quad (25.32)$$

Dans l'équation (25.32), considérons $z = ae^{i\theta}$ varie le long d'un cercle de rayon a infiniment petit et faisons tendre $\theta \rightarrow 2\pi$. Alors, on obtient :

$$\frac{dz}{d\bar{z}} = \frac{aie^{i\theta}d\theta}{-aie^{-i\theta}d\theta} = -e^{2i\theta} = -1 \quad (25.33)$$

$$\frac{d\bar{z}}{dz} = -e^{-2i\theta} = -1 \quad (25.34)$$

L'équation (25.32) devient :

$$m^2 = \frac{dS^2}{ds^2} = |\beta|^2 + |\gamma|^2 - (\beta\bar{\gamma} + \gamma\bar{\beta}) \quad (25.35)$$

Comme :

$$\gamma = \mu\beta$$

on obtient :

$$m^2 = \frac{dS^2}{ds^2} = |\beta|^2 + |\beta|^2|\mu|^2 - (\beta\bar{\beta}\bar{\mu} + \mu\beta\bar{\beta}) \quad (25.36)$$

or $\mu + \bar{\mu} = 2|\mu|\cosarg(\mu)$, par suite l'équation (25.36) s'écrit :

$$m^2 = \frac{dS^2}{ds^2} = |\beta|^2(1 + |\mu|^2 - 2|\mu|\cosarg(\mu)) \quad (25.37)$$

Remplaçant β par $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$, (25.37) devient :

$$m^2 = \frac{dS^2}{ds^2} = \left| \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) \right|^2 (1 + |\mu|^2 - 2|\mu|\cosarg(\mu)) \quad (25.38)$$

25.5 EXEMPLE DE TRANSFORMATION QUASI-CONFORME

Lors de passage de coordonnées planes $(X, Y)_i$ d'un système géodésique S_1 à des coordonnées planes $(X', Y')_j$ dans un autre système géodésique S_2 , on utilise souvent une transformation du type :

$$X' = X_0 + aX + bY \quad (25.39)$$

$$Y' = Y_0 + cX + dY \quad (25.40)$$

ou encore sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad (25.41)$$

En posant $Z = X' + iY'$ et $z = X + iY$, on obtient :

$$Z = (X_0 + iY_0) + X(a + ic) + Y(b + id) \quad (25.42)$$

Posons :

$$Z_0 = X_0 + iY_0 \quad (25.43)$$

Comme $X = (z + \bar{z})/2$ et $Y = (z - \bar{z})/2i$, alors l'équation (25.42) s'écrit :

$$Z = Z_0 + z \left(\frac{a+d}{2} + i \frac{c-b}{2} \right) + \bar{z} \left(\frac{a-d}{2} + i \frac{b+c}{2} \right) \quad (25.44)$$

Posons :

$$\beta = \frac{a+d}{2} + i \frac{c-b}{2} \quad (25.45)$$

$$\gamma = \frac{a-d}{2} + i \frac{b+c}{2} \quad (25.46)$$

Alors (25.44) s'écrit :

$$Z = Z_0 + \beta z + \gamma \bar{z} \quad (25.47)$$

Pour quelles valeurs de a, b, c, d la transformation (25.41) est quasi-conforme ? En comparant (25.44) avec (25.15), il faut que $|\gamma| < |\beta|$ soit :

$$\begin{aligned} |\gamma| < |\beta| &\Rightarrow |\gamma|^2 < |\beta|^2 \Rightarrow \frac{(a-d)^2 + (b+c)^2}{4} < \frac{(a+d)^2 + (c-b)^2}{4} \\ &\Rightarrow ad - bc > 0 \end{aligned} \quad (25.48)$$

C'est-à-dire que le déterminant de la matrice (25.41) soit positif.

Littérature

1. **L. Bers.** 1977. Quasiconformal mappings, with applications to differential equations, function theory and topology. Bulletin of the American Mathematical Society, vol 83, n°6, pp 1083-1100, 1977.
2. **W. Zeng, L.M. Lui, F. Luo, T.F. Chan, S.T. Yau, X.F. Gu.** 2010. Computing Quasiconformal Maps on Riemann surfaces using Discrete Curvature Flow. 23p. Mai 2010. ArXiv :1005.4648v1.

LA GÉOMÉTRIE DE COMPENSATION NON-LINÉAIRE - LE PROBLÈME SPATIAL D'INTERSECTION -

26.1 INTRODUCTION

Dans un article [1], E. Grafarend et B. Schaffrin ont étudié la géométrie de la compensation ou ajustement non-linéaire pour le cas du problème d'intersection plane en utilisant le modèle de Gauss Markov, par les moindres carrés. Le présent papier développe la même méthode en travaillant sur un exemple de la détermination d'un point par trilatération dans l'option de la géodésie tridimensionnelle pour la détermination des coordonnées (x, y, z) d'un point inconnu à partir des mesures des distances vers n points connus.

26.2 LA GÉOMÉTRIE NON LINÉAIRE DU MODÈLE DE GAUSS-MARKOV

Le modèle non linéaire de Gauss-Markov est défini par :

$$\zeta(X) = L - e; \quad e \in \mathcal{N}(0, \Gamma) \quad (26.1)$$

avec :

- L : le vecteur des observations $(n \times 1) = (L_1, L_2, \dots, L_n)^T$,

- X : le vecteur des inconnues $(m \times 1) = (X_1, X_2, \dots, X_m)^T$,
- e : le vecteur des erreurs $(n \times 1) = (e_1, e_2, \dots, e_n)^T$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0, \Gamma)$ avec $E(e) = 0$ et $\Gamma = E(ee^T)$ la matrice de dispersion ou variance, on prendra $\Gamma = \sigma_0^2 \cdot P^{-1}$. P est la matrice des poids et σ_0 une constante positive.
- ζ : est une fonction donnée injective d'un ouvert $U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $m < n$.

Remarque : dans le cas d'un modèle linéaire, la fonction $\zeta = A.X$ où A est une matrice $n \times m$.

On note $Im\zeta = \{\zeta(X)/X \in U\}$ l'image de U par la fonction ζ . $Im\zeta$ est une variété de dimension m vérifiant les conditions :

(i) : les vecteurs $\frac{\partial \zeta}{\partial X_1}, \frac{\partial \zeta}{\partial X_2}, \dots, \frac{\partial \zeta}{\partial X_m}$ sont linéairement indépendants en chaque point $X \in U$,

(ii) : les fonctions $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial X_i \partial X_j}$ sont continues sur U pour $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$.

On introduit un produit scalaire :

$$\langle \zeta_1, \zeta_2 \rangle = \zeta_1^T \cdot P \cdot \zeta_2 \quad (26.2)$$

D'où la norme du vecteur $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)^T$:

$$\|\zeta\|^2 = \langle \zeta, \zeta \rangle = \zeta^T \cdot P \cdot \zeta = \sum_{i=1}^n p_i \cdot \zeta_i^2 \quad (26.3)$$

dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^n en prenant la matrice de poids P une matrice diagonale .

Alors la solution par les moindres carrés \bar{X} sera définie par :

$$\|L - \bar{\zeta}(\bar{X})\| = \min \{\|L - \zeta(X)\| / X \in U\} \quad (26.4)$$

Cette condition est exprimée par les équations de Lagrange-Euler soit :

$$\frac{\partial}{\partial X_i} \|L - \zeta(X)\|^2 = 0 \quad \text{pour } i \in \{1, 2, \dots, m\} \quad (26.5)$$

En effet, on veut minimiser la fonction :

$$F(X) = F(X_1, X_2, \dots, X_m) = \|L - \zeta(X)\| = \|L - \zeta(X_1, X_2, \dots, X_m)\| \quad (26.6)$$

Comme F est une fonction positive, minimiser F c'est aussi minimiser F^2 , soit $G(X) = F^2(X)$. En appliquant les équations de Lagrange-Euler, on obtient :

$$-\frac{\partial G(X)}{\partial X_i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial G(X)}{\partial X_i} = 0$$

soit :

$$\frac{\partial}{\partial X_i} \|L - \zeta(X_1, X_2, \dots, X_m)\|^2 = 0 \quad \text{pour } i \in \{1, 2, \dots, m\} \quad (26.7)$$

or :

$$\|L - \zeta(X_1, X_2, \dots, X_m)\|^2 = (L - \zeta(X_1, X_2, \dots, X_m))^T . P . (L - \zeta(X_1, X_2, \dots, X_m)) = \zeta(X)^T . P . \zeta(X) - 2L^T . P . \zeta(X) + L^T . P . L \quad (26.8)$$

Soit :

$$\frac{\partial G(X)}{\partial X_i} = 2\zeta(X)^T . P . \frac{\partial \zeta(X)}{\partial X_i} - 2L^T . P . \frac{\partial \zeta(X)}{\partial X_i} \quad \text{pour } i \in \{1, 2, \dots, m\} \quad (26.9)$$

ou encore :

$$\frac{\partial G(X)}{\partial X_i} = 2(\zeta(X) - L)^T . P . \frac{\partial \zeta(X)}{\partial X_i} \quad \text{pour } i \in \{1, 2, \dots, m\}$$

ce qui donne en utilisant (26.5) :

$$\langle L - \zeta(X), \frac{\partial \zeta(X)}{\partial X_i} \rangle = 0 \quad \text{pour } i \in \{1, 2, \dots, m\} \quad (26.10)$$

$$\text{ou } \langle e, \frac{\partial \zeta(X)}{\partial X_i} \rangle = 0 \quad \text{pour } i \in \{1, 2, \dots, m\} \quad (26.11)$$

Géométriquement, cela veut dire que le vecteur erreur $e = L - \zeta(X)$ est perpendiculaire (produit scalaire nul) au plan tangent de la variété $Im\zeta$ au point $\zeta(\bar{X})$ (s'il existe).

Pour le cas non-linéaire, la condition (26.11) est nécessaire mais non suffisante. Pour obtenir le minimum, il faut que la matrice $(\frac{\partial^2 G}{\partial X_i \partial X_j})$, $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$ soit définie positive.

26.3 ETUDE D'UN CAS PRATIQUE

On considère la détermination d'un point par trilatération dans l'option de la géodésie tridimensionnelle pour la détermination des coordonnées (x, y, z) d'un point M inconnu à partir des mesures des distances vers 4 points connus $M_k(u_k, v_k, w_k)_{k=1,2,3,4}$.

Pour faciliter les calculs, on prendra $P = I$, $\sigma_0 = 1$ et nous adoptons la fonction $\zeta(X)$ comme suit :

$$\zeta(X) = \begin{cases} \zeta_1 = (x - u_1)^2 + (y - v_1)^2 + (z - w_1)^2 \\ \zeta_2 = (x - u_2)^2 + (y - v_2)^2 + (z - w_2)^2 \\ \zeta_3 = (x - u_3)^2 + (y - v_3)^2 + (z - w_3)^2 \\ \zeta_4 = (x - u_4)^2 + (y - v_4)^2 + (z - w_4)^2 \end{cases} \quad (26.12)$$

$$\text{avec } X_1 = x, \quad X_2 = y, \quad X_3 = z \quad \text{les inconnues} \quad (26.13)$$

et d'après (26.12), la fonction ζ n'est pas une fonction linéaire des variables X_i . ζ est une fonction de $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ qui s'écrit :

$$\zeta(X) = \zeta_k e_k$$

où e_k est la base orthonormée de \mathbb{R}^n . Voyons qu'elle vérifie les deux conditions (i) et (ii) cités ci-dessus.

Calculons $\frac{\partial \zeta}{\partial X_i}$, on a alors :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial X_1} = \begin{cases} 2(x - u_1) \\ 2(x - u_2) \\ 2(x - u_3) \\ 2(x - u_4) \end{cases}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial X_2} = \begin{cases} 2(y - v_1) \\ 2(y - v_2) \\ 2(y - v_3) \\ 2(y - v_4) \end{cases}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial X_3} = \begin{cases} 2(z - w_1) \\ 2(z - w_2) \\ 2(z - w_3) \\ 2(z - w_4) \end{cases}, \quad (26.14)$$

Pour que les 3 vecteurs soient linéairement indépendants, il faut que les points M, M_i, M_j, M_k ne soient pas alignés. Pour la condition (ii), on a facilement :

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial X_1^2} = \begin{cases} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{cases}, \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial X_2^2} = \begin{cases} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{cases}, \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial X_3^2} = \begin{cases} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{cases} \quad (26.15)$$

et pour $i \neq j$, on a :

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial X_i \partial X_j} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases} \quad (26.16)$$

Donc les quantités $\frac{\partial^2 \zeta(X)}{\partial X_i \partial X_j}$ sont continues et la condition (ii) est vérifiée.

26.3.1 Ecriture des Equations de Lagrange-Euler

Pour déterminer la solution par les moindres carrés du modèle non-linéaire, on écrit les conditions (26.10). Le vecteur $L = (L_1, L_2, L_3, L_4)^T$ tel que chacun des L_i représente le carré de la distance spatiale mesurée. On a alors en utilisant (26.14) :

$$\langle L - \zeta(X), \frac{\partial \zeta(X)}{\partial X_i} \rangle = 0; \quad i = 1, 2, 3$$

soit :

$$\begin{aligned}
(x-u_1)(L_1-\zeta_1) + (x-u_2)(L_2-\zeta_2) + (x-u_3)(L_3-\zeta_3) + (x-u_4)(L_4-\zeta_4) &= 0 \\
(y-v_1)(L_1-\zeta_1) + (y-v_2)(L_2-\zeta_2) + (y-v_3)(L_3-\zeta_3) + (y-v_4)(L_4-\zeta_4) &= 0 \\
(z-w_1)(L_1-\zeta_1) + (z-w_2)(L_2-\zeta_2) + (z-w_3)(L_3-\zeta_3) \\
+(z-w_4)(L_4-\zeta_4) &= 0
\end{aligned} \tag{26.17}$$

Les équations (26.17) représente un système de trois équations non linéaires de trois inconnues (x, y, z) dont la solution est un peu compliquée.

Pour faciliter encore la résolution du système précédent, on va supposer que la variable z est connue égale à z_0 , dans ce cas, on se limite à trois distances mesurées L_1, L_2 et L_3 . Alors (26.17) s'écrit :

$$\begin{aligned}
(x-u_1)(L_1-\zeta_1) + (x-u_2)(L_2-\zeta_2) + (x-u_3)(L_3-\zeta_3) &= 0 \\
(y-v_1)(L_1-\zeta_1) + (y-v_2)(L_2-\zeta_2) + (y-v_3)(L_3-\zeta_3) &= 0
\end{aligned} \tag{26.18}$$

avec :

$$\zeta_1 = (x-u_1)^2 + (y-v_1)^2 + (z_0-w_1)^2$$

$$\zeta_2 = (x-u_2)^2 + (y-v_2)^2 + (z_0-w_2)^2$$

$$\zeta_3 = (x-u_3)^2 + (y-v_3)^2 + (z_0-w_3)^2$$

Les expressions $\zeta_i - L_i$ s'écrivent sous la forme :

$$\zeta_i - L_i = x^2 + y^2 - 2xu_i - 2yv_i + a_i \tag{26.19}$$

$$\text{avec } a_i = \text{constante} \tag{26.20}$$

Le système (26.18) devient :

$$\begin{aligned}
(x-u_1)(x^2 + y^2 - 2xu_1 - 2yv_1 + a_1) + (x-u_2)(x^2 + y^2 - 2xu_2 - 2yv_2 + a_2) \\
+(x-u_3)(x^2 + y^2 - 2xu_3 - 2yv_3 + a_3) = 0
\end{aligned} \tag{26.21}$$

$$\begin{aligned}
(y-v_1)(x^2 + y^2 - 2xu_1 - 2yv_1 + a_1) + (y-v_2)(x^2 + y^2 - 2xu_2 - 2yv_2 + a_2) \\
+(y-v_3)(x^2 + y^2 - 2xu_3 - 2yv_3 + a_3) = 0
\end{aligned} \tag{26.22}$$

En développant les équations (26.21) et (26.22), on obtient :

$$\begin{aligned}
& 3x^3 + 3xy^2 - 3x^2(u_1 + u_2 + u_3) - y^2(u_1 + u_2 + u_3) - 2xy(v_1 + v_2 + v_3) + \\
& \quad x(a_1 + a_2 + a_3 + 2u_1^2 + 2u_2^2 + 2u_3^2) + 2y(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3) \\
& \quad - (a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3) = 0
\end{aligned} \tag{26.23}$$

$$\begin{aligned}
& 3y^3 + 3yx^2 - 3y^2(v_1 + v_2 + v_3) - x^2(v_1 + v_2 + v_3) - 2xy(u_1 + u_2 + u_3) + \\
& \quad y(a_1 + a_2 + a_3 + 2v_1^2 + 2v_2^2 + 2v_3^2) + 2x(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3) \\
& \quad - (a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3) = 0
\end{aligned} \tag{26.24}$$

Supposons qu'on se limite à deux distances L_1 et L_2 , alors on a à résoudre :

$$\begin{aligned}
& 2x^3 + 2xy^2 - 2x^2(u_1 + u_2) - y^2(u_1 + u_2) - 2xy(v_1 + v_2) + \\
& \quad x(a_1 + a_2 + 2u_1^2 + 2u_2^2) + 2y(u_1v_1 + u_2v_2) - (a_1u_1 + a_2u_2) = 0
\end{aligned} \tag{26.25}$$

$$\begin{aligned}
& 2y^3 + 2yx^2 - 2y^2(v_1 + v_2) - x^2(v_1 + v_2) - 2xy(u_1 + u_2) + \\
& \quad y(a_1 + a_2 + 2v_1^2 + 2v_2^2) + 2x(u_1v_1 + u_2v_2) - (a_1v_1 + a_2v_2) = 0
\end{aligned} \tag{26.26}$$

26.3.2 Réduction des Equations de Lagrange-Euler

Dans ce paragraphe, on essaye de réduire l'écriture du système (26.25) - (26.26). A cet effet posons :

$$\begin{aligned}
& z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy \quad \text{avec} \quad i = \sqrt{-1} \\
& s = u_1 + u_2, \quad t = v_1 + v_2, \quad p = u_1^2 + u_2^2, \quad q = v_1^2 + v_2^2 \\
& a = a_1 + a_2, \quad r = u_1v_1 + u_2v_2, \quad d = a_1u_1 + a_2u_2, \quad f = a_1v_1 + a_2v_2
\end{aligned} \tag{26.27}$$

ce qui donne :

$$2x = z + \bar{z}, \quad 2iy = z - \bar{z} \tag{26.28}$$

Alors les expressions (26.25) - (26.26) deviennent :

$$\begin{aligned}
& 4z^2\bar{z} + 4z\bar{z}^2 + (2it - s)z^2 - 6sz\bar{z} - (s + 2it)\bar{z}^2 + 2z(a + 2p - 2ir) \\
& \quad + 2\bar{z}(a + 2p + 2ir) - 4d = 0
\end{aligned} \tag{26.29}$$

$$\begin{aligned}
& 4z^2\bar{z} - 4z\bar{z}^2 + (it - 2s)z^2 - 6it\bar{z}z + (2s + it)\bar{z}^2 + 2z(a + 2q + 2ir) \\
& \quad - 2\bar{z}(a + 2q - 2ir) - 4if = 0
\end{aligned} \tag{26.30}$$

La résolution des équations précédentes fera prochainement l'objet d'une note technique.

26.4 CALCUL DE LA MATRICE COVARIANCE DES INCONNUES

Comme on a :

$$\zeta = \begin{pmatrix} \zeta_1 = (x - u_1)^2 + (y - v_1)^2 + (z_0 - w_1)^2 \\ \zeta_2 = (x - u_2)^2 + (y - v_2)^2 + (z_0 - w_2)^2 \\ \zeta_3 = (x - u_3)^2 + (y - v_3)^2 + (z_0 - w_3)^2 \end{pmatrix} \quad (26.31)$$

Or, on s'est limité à deux inconnues, le vecteur $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)^T$. D'où en différentiant (26.31) en utilisant les deux premières lignes, on obtient alors :

$$d\zeta = \begin{pmatrix} d\zeta_1 \\ d\zeta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x - u_1) & 2(y - v_1) \\ 2(x - u_2) & 2(y - v_2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = J_X \cdot dX \quad (26.32)$$

avec :

$$J_X = 2 \cdot \begin{pmatrix} x - u_1 & y - v_1 \\ x - u_2 & y - v_2 \end{pmatrix} \quad (26.33)$$

Par suite :

$$dX = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = J_X^{-1} \cdot \begin{pmatrix} d\zeta_1 \\ d\zeta_2 \end{pmatrix} \quad (26.34)$$

d'où la matrice covariance du vecteur inconnu $X = (x, y)^T$:

$$\sigma_X^2 = J_X^{-1} \cdot \sigma_L^2 \cdot J_X^{-1T} \quad (26.35)$$

Littérature

1. **E.W. Grafarend et B. Schaffrin.** 1989. The geometry of non-linear adjustment - the planar trisection problem. *FESTCHRIFT to TORBEN KRARUP* edited by E. Kejlo, K. Poder and C.C. Tscherning. Geodaetisk Institut, Meddelelse n° 58, p149-172. København, Danmark.
2. **P.J.G Teunissen.** 1985. The Geometry of Geodetic Inverse Linear Mapping and Non-Linear Adjustment. Publications On Geodesy, n°1, Volume 8, Netherlands Geodetic Commission. 177p.

- LA GÉOMÉTRIE DE COMPENSATION NON-LINÉAIRE - RÉSOLUTION DU SYSTÈME DES EQUATIONS POLYNOMIALES

27.1 INTRODUCTION

Dans le chapitre précédent - La Géométrie de Compensation Non-Linéaire - le problème spatial d'intersection-, on a obtenu le système donné par les équations (26.29) et (26.30) :

$$4z^2\bar{z} + 4z\bar{z}^2 + (2it - s)z^2 - 6sz\bar{z} - (s + 2it)\bar{z}^2 + 2z(a + 2p - 2ir) + 2\bar{z}(a + 2p + 2ir) - 4d = 0 \quad (27.1)$$

$$4z^2\bar{z} - 4z\bar{z}^2 + (it - 2s)z^2 - 6it\bar{z}z + (2s + it)\bar{z}^2 + 2z(a + 2q + 2ir) - 2\bar{z}(a + 2q - 2ir) - 4if = 0 \quad (27.2)$$

Nous présentons dans la suite son résolution.

27.2 RÉOLUTION DU SYSTÈME

Posons :

$$z = x + iy = \rho e^{i\theta} \quad (27.3)$$

$$s + 2it = l e^{i\omega} \quad (27.4)$$

$$a + 2p + 2ir = m e^{i\alpha} \quad (27.5)$$

$$a + 2q + 2ir = k e^{i\mu} \quad (27.6)$$

$$2s + it = h e^{i\varphi} \quad (27.7)$$

Utilisant les relations :

$$z + \bar{z} = 2\rho \cos\theta \quad (27.8)$$

$$z - \bar{z} = 2i\rho \sin\theta, \quad z\bar{z} = \rho^2 \quad (27.9)$$

Les équations (27.1) et (27.2) deviennent :

$$8\rho^3 \cos\theta - 6s\rho^2 - 2l\rho^2 \cos(2\theta - \omega) + 4m\rho \cos(\theta - \alpha) - 4d = 0 \quad (27.10)$$

$$8i\rho^3 \sin\theta - 6it\rho^2 - 2ih\rho^2 \sin(2\theta - \varphi) + 4ik\rho \sin(\theta + \mu) - 4if = 0 \quad (27.11)$$

Soit :

$$4\rho^3 \cos\theta - [3s + l\cos(2\theta - \omega)]\rho^2 + 2m\rho \cos(\theta - \alpha) - 2d = 0 \quad (27.12)$$

$$4\rho^3 \sin\theta - [3t + h\sin(2\theta - \varphi)]\rho^2 + 2k\rho \sin(\theta + \mu) - 2f = 0 \quad (27.13)$$

Eliminant les termes constants entre (27.12) et(27.13) et après simplification par $\rho \neq 0$, on obtient l'équation :

$$4\rho^2(d\sin\theta - f\cos\theta) + \rho(3sf - 3td + lf\cos(2\theta - \omega) - hdsin(2\theta - \varphi)) + 2kdsin(\theta + \mu) - 2mf\cos(\theta - \alpha) = 0 \quad (27.14)$$

Maintenant, on élimine les coefficients en ρ^3 des équations (27.12) et(27.13), nous obtenons une équation en deuxième degré en ρ :

$$\rho^2(3s.\sin\theta - 3t\cos\theta + l\sin\theta\cos(2\theta - \omega) - h\cos\theta\sin(2\theta - \varphi)) + 2\rho(k\cos\theta\sin(\theta + \mu) - m\sin\theta\cos(\theta - \alpha)) - 2f\cos\theta + 2d\sin\theta = 0 \quad (27.15)$$

27.3 RÉOLUTION DU SYSTÈME DES INCONNUES EN ρ ET θ

On écrit les équations (27.14) et(27.15) sous la forme :

$$A\rho^2 + B\rho + C = 0 \quad (27.16)$$

$$A'\rho^2 + B'\rho + C' = 0 \quad (27.17)$$

Le système précédent est résolvable si et seulement si :

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \quad (27.18)$$

soit en choisissant :

$$\frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \Rightarrow BC' - B'C = 0 \quad (27.19)$$

Soit :

$$[3sf - 3td + lf\cos(2\theta - \omega) - hdsin(2\theta - \varphi)](2dsin\theta - 2fcos\theta) = [2kcos\theta sin(\theta + \mu) - 2msin\theta cos(\theta - \alpha)] [2kdsin(\theta + \mu) - 2mfcos(\theta - \alpha)] \quad (27.20)$$

ce qui donne un polynôme en $sin\theta, cos\theta, sin2\theta, cos2\theta$. En posant :

$$\xi = tg\theta \quad (27.21)$$

et utilisant les formules :

$$sin2\theta = \frac{2\xi}{1 + \xi^2} \quad (27.22)$$

$$cos2\theta = \frac{1 - \xi^2}{1 + \xi^2} \quad (27.23)$$

L'équation (27.20) devient un polynôme du troisième degré en ξ qu'on peut résoudre par les méthodes classiques.

ÉLÉMENTS MATHÉMATIQUES POUR LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS

Dans cette note, on présente les théorèmes mathématiques relatifs à l'application de la Théorie des moindres carrés.

28.1 DÉFINITIONS

Définition 1 : Soient E et F deux espaces vectoriels normés de dimension finie, et f une application de E dans F . f est dérivable en $a \in E$ s'il existe une application linéaire L de E dans F qui vérifie :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha > 0 / \|u\| \leq \alpha \Rightarrow \|f(a+u) - f(a) - L(u)\| \leq \varepsilon$$

ou :

$$f(a+u) = f(a) + L(u) + \|u\|\varepsilon(u), \quad \lim_{u \rightarrow 0} \varepsilon(u) = 0$$

On note :

$$L = f'(a) \tag{28.1}$$

$f'(a) \in \mathcal{L}(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans F .

Si f est dérivable en a , on pose :

$$f''(a) = (f')'(a) \quad (28.2)$$

$f''(a)$ est une application linéaire de E dans $\mathcal{L}(E, F)$, donc $f''(a) \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F))$ qui est isomorphe à l'espace vectoriel $\mathcal{L}_2(E, F)$ des applications bilinéaires de E dans F , c'est-à-dire des applications B telles que :

$$\begin{cases} \forall (x, x_1, x_2) \in E^3, \forall (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2, \\ B(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, x) = \alpha_1 B(x_1, x) + \alpha_2 B(x_2, x) \\ B(x, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 B(x, x_1) + \alpha_2 B(x, x_2) \end{cases} \quad (28.3)$$

$f''(a)$ est une application bilinéaire symétrique si :

$$f''(a)(h, k) = f''(a)(k, h) \quad (28.4)$$

28.2 COMPOSITION DES DÉRIVÉES PREMIÈRES

Définition 2 : Soient E, F et G trois espaces vectoriels normés de dimension finie, et f une application de E dans F dérivable en a et g une application de F dans G dérivable en $b = f(a)$; alors $h = g \circ f$ est dérivable en a et :

$$h'(a) = (g \circ f)'(a) = g'(b) \circ f'(a) \quad (28.5)$$

28.3 CONDITION NÉCESSAIRE D'EXTREMUM LOCAL

Théorème 1 : Si une fonction f d'un espace vectoriel normé E dans \mathbb{R} admet un extremum local en un point a où elle est dérivable, alors :

$$f'(a) = 0 \quad (28.6)$$

Démonstration : Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert contenant 0. On définit la fonction $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(t) = f(a + tu)$, on a alors $\varphi'(t) = f'(a + tu)u$. En particulier $\varphi'(0) = f'(a)u$.

Si a est un minimum relatif, soit :

$$\begin{aligned} f(a) \leq f(a + tu) \forall t \in I, \Rightarrow \varphi(0) \leq \varphi(t) \Rightarrow 0 \geq \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \\ \varphi'(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} \geq 0 \end{aligned} \quad (28.7)$$

car f est dérivable en a ou encore φ est dérivable en $0 \in I$, on a donc :

$$\varphi'(0) = 0 \Rightarrow f'(a)u = 0 \forall u \Rightarrow f'(a) = 0 \quad (28.8)$$

28.4 FORMULATION DU PROBLÈME DES MOINDRES CARRÉS - LE CAS LINÉAIRE

Soient B une matrice (m,n) réelle et L un vecteur de \mathbb{R}^m . On cherche un vecteur X de \mathbb{R}^n tel que :

$$\|B.X - L\| = \min_{\zeta \in \mathbb{R}^n} \|B.\zeta - L\| \quad (28.9)$$

C'est-à-dire approchant au mieux la solution du système :

$$B.X = L \quad (28.10)$$

Si l'on pose :

$$V = B.X - L \quad (28.11)$$

V est appelé vecteur résidu. On cherche donc un vecteur X qui minimise $\|V\|$ ou $\|V\|^2$ c'est-à-dire qui minimise la somme des carrés des résidus d'où le terme "X est solution des moindres carrés (Least-Squares Solution)".

Pour cela, on introduit la forme quadratique f définie par :

$$f(U) = \frac{1}{2} \|B.U - L\|^2 - \frac{1}{2} \|L\|^2 \quad (28.12)$$

avec U un vecteur de \mathbb{R}^n . On introduit un produit scalaire :

$$(\zeta, \xi) = \zeta^T \cdot \xi = \sum_{i=1}^{i=n} \zeta_i \cdot \xi_i \quad (28.13)$$

D'où la norme du vecteur $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)^T$:

$$\|\zeta\|^2 = (\zeta, \zeta) = \zeta^T \cdot \zeta = \sum_{i=1}^n \zeta_i^2 \quad (28.14)$$

dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^n . Développons l'équation (28.12), on obtient :

$$\begin{aligned} f(U) &= \frac{1}{2} \|B.U - L\|^2 - \frac{1}{2} \|L\|^2 = \frac{1}{2} ((B.U - L, B.U - L) - (L, L)) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot ((BU - L)^T \cdot (BU - L) - L^T \cdot L) = \frac{1}{2} \cdot (B^T \cdot B.U, U) - (B^T \cdot L, U) \\ &= \frac{1}{2} U^T \cdot B^T \cdot B.U - L^T \cdot B.U \end{aligned} \quad (28.15)$$

Le problème consiste à minimiser $f(U)$ sur \mathbb{R}^n , donc chercher un minimum absolu (et non pas seulement relatif). On a établi une condition nécessaire de minimum relatif : $f'(U) = 0$. La recherche de la solution complète fait appel aux propriétés des fonctions convexes.

28.4.1 Calcul des dérivées première et seconde de f

On commence par le calcul de f' . D'où :

$$\begin{aligned} f(U+h) &= \frac{1}{2} \cdot ((U+h)^T \cdot B^T \cdot B \cdot (U+h) - L^T \cdot B \cdot (U+h)) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (U^T \cdot B^T \cdot B \cdot U + 2h^T \cdot B^T \cdot B \cdot U + h^T \cdot B^T \cdot B \cdot h) - L^T \cdot B \cdot U - L^T \cdot B \cdot h \end{aligned} \quad (28.16)$$

Par suite, en posant :

$$h^T \cdot B^T \cdot B \cdot h = 2\|h\| \cdot \varepsilon(h) \quad (28.17)$$

$$\text{et } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0 \quad (28.18)$$

Alors :

$$f(U+h) - f(U) = h^T \cdot B^T \cdot B \cdot U - h^T \cdot B^T \cdot L + \|h\| \varepsilon(h) \quad (28.19)$$

Or l'équation précédente (28.19) s'écrit :

$$f(U+h) - f(U) = (B^T \cdot B \cdot U - B^T \cdot L, h) + \|h\| \varepsilon(h) \quad (28.20)$$

Or en posant :

$$Q(h) = (B^T \cdot B \cdot U - B^T \cdot L, h) \quad (28.21)$$

Il est immédiat que Q est une application linéaire de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} qui à h associe le réel $(B^T \cdot B \cdot U - B^T \cdot L, h)$. D'après la définition 1, on a donc :

$$\begin{aligned} f(U+h) - f(U) &= (B^T \cdot B \cdot U - B^T \cdot L, h) + \|h\| \varepsilon(h) = (f'(U), h) + \|h\| \varepsilon(h) \\ \text{avec } f'(U) &= B^T \cdot B \cdot U - B^T \cdot L \quad \text{et } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0 \end{aligned} \quad (28.22)$$

Il s'ensuit que :

$$f''(U) = B^T \cdot B \quad (28.23)$$

Théorème 2. Théorème de Taylor-Young : Soit f une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} . Si f est dérivable en $a \in \mathbb{R}^n$, alors :

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \|h\| \varepsilon(h), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0 \quad (28.24)$$

Si f est deux fois dérivable en a , alors :

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)(h,h) + \|h\|^2\varepsilon(h), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0 \quad (28.25)$$

Théorème 3. Théorème de Taylor-Mac Laurin : Soit f une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} . Si f est dérivable en $]a, a+h[$, alors :

$$f(a+h) = f(a) + f'(a+\theta h)h, \quad 0 < \theta < 1 \quad (28.26)$$

Si f est deux fois dérivable sur $]a, a+h[$, alors :

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a+\theta h)(h,h) + \|h\|^2\varepsilon(h), \quad 0 < \theta < 1 \quad (28.27)$$

28.5 CONVEXITÉ

Définition 3. Une partie U de \mathbb{R}^n est convexe si :

$$\forall (u, v) \in U^2, \forall \theta \in [0, 1], \theta u + (1 - \theta)v \in U \quad (28.28)$$

Définition 4. Une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ convexe $\subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe si :

$$\forall (u, v) \in U^2, \forall \theta \in [0, 1], f[\theta u + (1 - \theta)v] \leq \theta f(u) + (1 - \theta)f(v) \quad (28.29)$$

Théorème 4 : Condition nécessaire de minimum relatif sur un ensemble convexe. Soient $f : \Omega$ ouvert $\subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et U convexe $\subset \Omega$. Si f est dérivable en $u \in U$ et si elle admet en u un minimum relatif par rapport à U , alors :

$$f'(u)(v - u) \geq 0 \quad \forall v \in U \quad (28.30)$$

Démonstration : Soient $v \in U$ et $w = v - u$. U est convexe $\Rightarrow \forall \theta \in [0, 1], u + \theta w = (1 - \theta)u + \theta v \in U$. $f(u + \theta w) = f(u) + f'(u)\theta w + \|\theta w\|\varepsilon_1(\theta w)$ d'après la formule de Taylor-Young, soit : $f(u + \theta w) = f(u) + \theta[f'(u)w + \varepsilon(\theta w)]$, $\lim_{\theta \rightarrow 0} \varepsilon(\theta) = 0$.

u minimum relatif $\Rightarrow 0 \leq f(u + \theta w) - f(u) = \theta[f'(u)w + \varepsilon(\theta)] \Rightarrow f'(u)w + \varepsilon(\theta) \geq 0 \Rightarrow f'(u)w \geq 0$ dès que $\varepsilon(\theta)$ est suffisamment petit. D'où :

$$f'(u)(v - u) \geq 0$$

Théorème 5 : Convexité et dérivabilité première. Soient $f : \Omega$ ouvert $\subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, dérivable dans Ω et U convexe $\subset \Omega$. La fonction f est convexe si et seulement si :

$$f(v) \geq f(u) + f'(u)(v - u) \quad \forall (u, v) \in U^2 \quad (28.31)$$

Démonstration : Soient $(u, v) \in U^2, u \neq v, \theta \in]0, 1[$.

$$\begin{aligned} f \text{ est convexe} &\Rightarrow f(u + \theta(v - u)) \leq (1 - \theta)f(u) + \theta f(v) \\ &\Rightarrow \frac{f(u + \theta(v - u)) - f(u)}{\theta} \leq f(v) - f(u) \end{aligned}$$

Soit $h = \theta(v - u) \Rightarrow f(u + \theta(v - u)) = f(u + h) = f(u) + f'(u)h + \|h\|\varepsilon(h) = f(u) + \theta f'(u)(v - u) + \|h\|\varepsilon(h)$

$$\Rightarrow \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{f(u + \theta(v - u)) - f(u)}{\theta} = f'(u)(v - u) \Rightarrow f'(u)(v - u) \leq f(v) - f(u)$$

C'est l'équation (28.31).

Reciproquement, On a :

$$f(v) \geq f(u) + f'(u)(v - u) \quad \forall (u, v) \in U^2$$

on peut écrire :

$$\begin{cases} f(v) \geq f(v + \theta(u - v)) + f'(v + \theta(u - v))(v - v - \theta(u - v)) & \text{on a pris } u = v + \theta(u - v) \\ f(u) \geq f(v + \theta(u - v)) + f'(v + \theta(u - v))(u - v - \theta(u - v)) & \text{on a pris } v = v + \theta(u - v) \\ \text{avec } u \neq v, 0 < \theta < 1 \end{cases} \quad (28.32)$$

En utilisant que $f'(a)$ est une application linéaire, on a :

$$\begin{cases} f(v) \geq f(v + \theta(u - v)) - \theta f'(v + \theta(u - v))(u - v) \\ f(u) \geq f(v + \theta(u - v)) + (1 - \theta) f'(v + \theta(u - v))(u - v) \end{cases} \quad (28.33)$$

En multipliant la première équation par $(1 - \theta)$ et la deuxième par θ et faisant la somme on obtient :

$$(1 - \theta)f(v) + \theta f(u) \geq f(v + \theta(u - v)) = f((1 - \theta)v + \theta u) \Rightarrow f \text{ est convexe}$$

Théorème 6 : Convexité et dérivabilité seconde. Soient $f : \Omega \text{ ouvert } \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, deux fois dérivable dans Ω et U convexe $\subset \Omega$. La fonction f est convexe sur U si et seulement si :

$$f''(u)(v - u, v - u) \geq 0 \quad \forall (u, v) \in U^2 \quad (28.34)$$

Démonstration : La formule de Taylor-Mac Laurin s'écrit :

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a + \theta h)(h, h), \quad 0 < \theta < 1$$

En l'appliquant à $a = u$ et $h = v - u$, on obtient :

$$f(v) - f(u) - f'(u)(v - u) = \frac{1}{2}f''((1 - \theta)u + \theta v)(v - u, v - u)$$

Si $w = (1 - \theta)u + \theta v \in U$ convexe, on a : $v - u = (1 - \theta)(v - u)$, soit $\rho = 1/(1 - \theta) > 0$, il vient :

$$f(v) - f(u) - f'(u)(v-u) = \frac{\rho^2}{2} f''(w)(v-w, v-w), \quad w \in]u, v[$$

Si $f''(w)(v-w, v-w) \geq 0, \forall (w, v) \in U^2$, alors $f(v) - f(u) - f'(u)(v-u) \geq 0$ donc f est convexe d'après le théorème 5 'convexité et dérivabilité première'.

Reciproquement. Soit $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, g(v) = f(v) - f'(u)v$, on a alors :

$$g(v) - g(u) = f(v) - f'(u)v - f(u) + f'(u)u = f(v) - f(u) - f'(u)(v-u) \geq 0 \text{ car } f \text{ est convexe}$$

donc g admet un minimum sur U en u . On a :

$$g'(v) = f'(v) - f'(u) \Rightarrow g'(u) = f'(u) - f'(u) = 0 \quad \text{et } g''(v) = f''(v)$$

La formule de Taylor-Young :

$$\varphi(a+h) = \varphi(a) + \varphi'(a)h + \frac{1}{2}\varphi''(a)(h,h) + \|h\|^2 \varepsilon(h), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$$

s'écrit pour $\varphi = g, a = u, h = tw$ avec $w = v-u$ d'où $a+h = u+t(v-u) \in U$ pour $t \in [0, 1]$:

$$g(u+tw) = g(u) + g'(u)tw + \frac{1}{2}g''(u)(tw, tw) + \|tw\|^2 \varepsilon_1(tw) = g(u) + \frac{t^2}{2}f''(u)(w, w) + \frac{t^2}{2}\varepsilon(t)$$

Comme g admet un minimum en u , on a alors :

$$g(u+tw) - g(u) \geq 0 \Rightarrow \frac{t^2}{2} (f''(u)(w, w) + \varepsilon(t)) \geq 0$$

comme $\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0$ et pour t suffisamment petit, on a $f''(u)(w, w) \geq 0$ donc :

$$f''(u)(v-u, v-u) \geq 0$$

Théorème 7 : Convexité, dérivabilité première et minimum global. Soient U convexe $\subset \mathbb{R}^n$ et f une fonction convexe de U dans \mathbb{R} .

1. Si f admet un minimum relatif en un point de U , elle y admet un minimum global.
2. Si f est définie sur un ouvert Ω contenant U et dérivable en $u \in U$, alors f admet en u un minimum global sur U si et seulement si :

$$\forall v \in U, f'(v)(v-u) \geq 0$$

3. Si U est ouvert, la condition précédente équivaut à $f'(u) = 0$.

Démonstration

1. Soient $v \in U$ et $w = v - u$. f est convexe $\Rightarrow \forall \theta \in [0, 1]$ $f(v + \theta w) \leq (1 - \theta)f(u) + \theta f(v) \Rightarrow f(v + \theta w) - f(u) \leq \theta(f(v) - f(u))$.

u minimum relatif $\Rightarrow \exists \theta_0 > 0 / 0 \leq f(v + \theta_0 w) - f(u) \Rightarrow 0 \leq \theta_0(f(v) - f(u)) \Rightarrow f(v) \geq f(u)$

2. La condition est nécessaire (minimum relatif sur un convexe). Réciproquement, soit f convexe sur U convexe, f dérivable en u , telle que $f'(u)(v - u) \geq 0 \forall v \in U$.

f convexe $\Rightarrow f(v) \geq f(u) + f'(u)(v - u) \quad \forall (u, v) \in U^2$ (convexité et dérivabilité première)
donc $\forall v, f(v) - f(u) \geq f'(u)(v - u) \geq 0 \Rightarrow u$ est un minimum.

3. $f'(u) = 0 \Rightarrow f'(u)(v - u) = 0 \forall v \in U \Rightarrow f'(u)(v - u) \geq 0, \forall v \in U$.

Réciproquement. U ouvert \exists boule ouverte de U contenant u :

$\forall h \in \mathbb{R}^n, \exists \alpha \in \mathbb{R} / \varepsilon < \alpha \Rightarrow (u + \varepsilon h, u - \varepsilon h) \in U^2 \Rightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon f'(u)h \geq 0 \\ -\varepsilon f'(u)h \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(u)h = 0 \quad \forall h \Rightarrow f'(u) = 0$$

28.6 APPLICATION AU PROBLÈME DES MOINDRES CARRÉS

On a :

$$f(U) = \frac{1}{2}(B^T \cdot BU, U) - (B^T \cdot L) = \frac{1}{2}\|BU - L\|^2 - \frac{1}{2}\|L\|^2 \quad (28.35)$$

$$f'(U) = B^T \cdot BU - B^T \cdot L \quad (28.36)$$

$$f''(U) = B^T \cdot B \quad \text{est une matrice symétrique positive} \quad (28.37)$$

Donc :

$$\forall (U, W) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad f''(U)(W - U, W - U) = B^T \cdot B(W - U, W - U) \geq 0 \\ \Rightarrow \text{(convexité et dérivabilité seconde) } f \text{ est convexe sur } \mathbb{R}^n \quad (28.38)$$

D'après le théorème 'convexité, dérivabilité première et minimum global', la recherche du minimum de f coïncide alors avec l'ensemble des solutions de l'équation :

$$f'(U) = 0$$

soit :

$$B^T \cdot B \cdot U = B^T \cdot L \quad (28.39)$$

C'est la solution des moindres carrés.

EQUILIBRIUM FIGURES IN GEODESY AND GEOPHYSICS

PROF. HELMUT MORITZ

UNIVERSITÉ TECHNIQUE, GRAZ, AUTRICHE

Ce papier représente la traduction de la communication du Professeur Helmut Moritz (1988) intitulée " EQUILIBRIUM FIGURES IN GEODESY AND GEOPHYSICS " .

29.1 INTRODUCTION

Actuellement, l'intérêt aux figures d'équilibre terrestre est vraiment très lent. Le dernier ouvrage important de géodésie physique qui a extensivement traité les figures d'équilibre était (Ledersteger, 1969), alors que (Moritz, 1980) ne le mentionne pas.

La raison est que l'un des premiers résultats de la géodésie satellitaire, aux alentours de 1960, était la valeur de f l'aplatissement de la terre ($\cong 1/298.25$) qui était incompatible avec celle

de l'hydrostatique 1/297.34 (Bullard, 1948) ; cf. aussi (Heiskanen and Moritz, 1967, pp. 340-341). Cette différence montre que la terre ne peut pas être en équilibre hydrostatique.

L'ellipsoïde équipotentiel, que souligne la définition moderne du système de référence géodésique, à partir de la formule internationale de gravité de 1930 au Système de Référence Géodésique de 1980 (Moritz, 1984), est non plus une figure d'équilibre.

De l'autre côté, un modèle hydrostatique de la terre continue d'être une référence pour la géophysique théorique de la rotation de la terre et d'une terre élastique oscillante ; cf. (Melchior, 1983, sec.6.2 ; Moritz and Muller, 1987, sec. 4.2).

Ici, nous avons trois faits non liés : la terre non en équilibre hydrostatique, une référence géodésique non hydrostatique, une référence géophysique hydrostatique, qui appellent à une interrelation ; et les bases de ce-ci continuent d'être une théorie précise pour une terre hydrostatique.

Depuis le temps où Clairaut publiait sa fondamentale équation en 1743 jusqu'aux dernières vingt années passées, le problème des figures d'équilibre hydrostatique terrestre a fasciné l'attention des mathématiciens, des géophysiciens, des astronomes et de la même façon les géodésiens, produisant des résultats théoriques hautement intéressants et pratiques très utiles. Là, il reste le fait curieux est que ces travaux n'ont toujours été inter-relatés. L'anglais la littérature pratiquement orientée a fréquemment peu tenu en compte des avancées théoriques très grandes publiées en français, allemand, italien ou russe.

Le présent papier essaye une revue des approches variées. Il n'a pas l'attention de compléter quoi que ce soit et devrait être considéré comme seulement une première approximation.

29.2 L'EQUATION DE CLAIRAUT

La théorie de l'équilibre d'une figure sphéroïde est gouvernée par la fameuse équation différentielle de Clairaut publiée en 1743 :

$$\frac{d^2f}{dr^2} + \frac{6\rho}{rD} \frac{df}{dr} + \frac{6}{r^2} \left(\frac{\rho}{D} - 1 \right) = 0 \quad (29.1)$$

On considère ici que la Terre est un corps symétrique rotatif, les surfaces de densité constante ρ (qui sont en même temps les surfaces de potentiel de pesanteur W constant) sont légèrement des sphéroïdes aplatis avec en première approximation des ellipsoïdes de demi-grand axe a et de demi-petit axe b et de rayon moyen r telque :

$$f = \frac{a-b}{a} = f(r) \quad (29.2)$$

représentant l'applatissement. Le rayon moyen r est tel que :

$$\rho = \rho(r) \quad (29.3)$$

et enfin :

$$D = \frac{3}{r^3} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' = D(r) \quad (29.4)$$

désigne la densité moyenne à l'intérieur de la surface $\rho = \rho(r)$, laquelle pour le présent sujet peut être considérée comme une sphère. Comme variable d'intégration, r est noté par r' , une notation qu'on va remplacer plus tard par r où pas de risque de confusion.

L'équation de Clairaut est une approximation linéaire en f ; les termes d'ordre f^2 sont négligés. Pour plus de précision, les termes du deuxième ordre seront retenus menant à la théorie du second ordre qui sera discutée dans la section (29.6).

La dérivation standard de (29.1) est celle donnée dans (Jeffreys, 1970, sec.4.03). Elle sera utilisée aussi dans la section (29.6). de façon que nous nous limitons ici à un bref rappel.

L'équation fondamentale de l'équilibre hydrostatique est :

$$dp = \rho dW \quad (29.5)$$

où p est la pression, ρ la densité et W le potentiel de pesanteur. Une conséquence immédiate de (29.5) est que :

$$W = W(\rho) \quad (29.6)$$

le potentiel est une fonction de la densité seulement de façon que les surfaces de densité constante, $\rho = \text{constante}$, sont aussi les surfaces équipotentielles $W = \text{constante}$. Dans la suite, nous parlons des équi-surfaces.

Maintenant nous décomposons le potentiel de pesanteur interne sous la forme :

$$W(r, \theta) = W_0(r) + W_2(r)P_2(\cos\theta) \quad (29.7)$$

où θ est la colatitude sphérique (la distance polaire sphérique), à cause de la symétrie rotationnelle, il n'y a pas de dépendance de la longitude λ . Notons que r désigne le rayon moyen comme ci-dessus.

Comme $\rho = \rho(r)$, il ensuit de (29.6) que W aussi doit dépendre seulement de r telque :

$$W_2(r) = 0 \quad (29.8)$$

$P_2(\cos\theta)$ désigne l'usuel polynôme de Legendre du deuxième degré. La condition (29.8) entraîne que :

$$-\frac{f(r)}{r} \int_0^r \rho r^2 dr + \frac{1}{5r^3} \int_0^r \rho \frac{d(fr^5)}{dr} dr + \frac{1}{5} r^2 \int_r^R \rho \frac{df}{dr} dr + \frac{\omega^2 r^2}{8\pi G} = 0 \quad (29.9)$$

Ici "r" sous l'intégrale désigne la variable d'intégration qu'on aurait noté correctement par r' . Le symbole R désigne le rayon moyen de la Terre $R = 6371$ km, ω est la vitesse de rotation de la terre et G la constante de gravitation usuelle.

Avec des manipulations de (29.9), on arrive à l'équation (29.1) en différenciant les intégrales.

Pour plus de traitement de (29.1) par la transformation classique de Radau, on arrive au résultat connu :

$$J_2 = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{2}{5} \sqrt{\frac{5m}{2f} - 1} \right) H \quad (29.10)$$

qui tenant compte des termes du second ordre ; permet le calcul du coefficient zonal du deuxième degré :

$$J_2 = \frac{C - A}{Ma^2} \quad (29.11)$$

à partir de la quantité :

$$H = \frac{C - A}{C} \quad (29.12)$$

très bien connue à partir de la précession astronomique. Les notations sont standard : C et A sont les moments d'inertie principaux (polaire et équatorial), M désigne la masse de la terre et a son rayon équatorial moyen.

Maintenant J_2 est directement lié à l'appatissement par :

$$f = \frac{3}{2} J_2 + \frac{1}{2} m + O(f^2) \quad (29.13)$$

$O(f^2)$ désigne les termes d'ordre f^2 et plus et :

$$m = \frac{\omega^2 a}{\gamma_e} \quad (29.14)$$

le plus petit rapport de la force centrifuge à l'équateur par la gravité normale à l'équateur γ_e .

Avant l'arrivée des satellites artificiels, l'appatissement f était calculé en combinant les équations (29.10) et (29.13), sachant que J_2 peut être calculé indirectement à partir de H par (29.10), en supposant l'équilibre hydrostatique.

Les satellites artificiels ont fait que J_2 est directement observable, qui mène à la différence mentionnée dans le paragraphe 1., et en conséquence de l'intérêt des géodésiens à l'équilibre des

figures, malgré les papiers telsque (Khan,1968, 1969 ; Nakiboglu, 1979 ; Denis and Ibrahim, 1981).

29.3 LA MÉTHODE DES EQUATIONS INTÉGRALES

Le traitement mathématique rigoureux de l'équilibre des figures revenait au mathématicien Français Poincaré (1885) et à son contemporain le mathématicien Russe Liapunov. Alors que Poincaré a concentré ses recherches sur l'équilibre homogène des figures ($\rho = const.$), Liapunov (1904) étudait des figures hétérogènes donnant une rigoureuse justification de la théorie de Clairaut.

Lichtenstein (1933) continuait le travail de Liapunov et essayait de le simplifier, mais son essai d'achever une rigueur mathématique fait son livre extrêmement difficile à lire, ainsi son travail, aussi parcequ'il est écrit en allemand, a partagé le destin des recherches de Liapunov d'être largement ignorées par la communauté géodésique et géophysique.

Leur résultat peut être décrit comme suit :considérer une masse hétérogène non tournante en équilibre hydrostatique de densité de distribution arbitraire en absence de forces externes. La densité est sujet seulement à la condition naturelle d'être positive et non décroissante vers l'intérieur. Dans ce cas, il peut être prouvé que la configuration doit être d'une symétrie sphérique : $\rho = \rho(r)$ est une fonction(dans le sens ci-dessus) arbitraire du rayon r des équi-surfaces sphériques.

Si cette configuration est sujet à une rotation "suffisamment lente", alors une figure sphérique d'équilibre existe qui est fermée à la configuration sphérique originale et possède la même loi de densité $\rho(r)$, r est maintenant désigne le rayon moyen des equi-surfaces. En d'autres mots, Liapunov et Lichtenstein ont prouvé l'existence et l'unicité d'une figure d'équilibre "au voisinage" d'une configuration sphérique de masse donnée.

Pour être sûr "la petitesse " de la vitesse angulaire ω est à considérer mathématiquement, sans entraîner que la vitesse de rotation actuelle de la terre est "suffisamment petite" dans ce sens. L'auteur ne sait pas si les estimations extrêmement laborieuses de cette tâche ont été traitées numériquement.

D'une manière, Liapunov et Lichtenstein ont achevé essentiellement le problème de Clairaut comme l'a fait Hormander en 1976 pour le problème des valeurs à la frontière gravimétrique de Molodensky (cf. Moritz, 1980, sec.51) : une démonstration de l'existence et de l'unicité sous certaines restrictions mathématiques.

Il serait présomptueux de donner même une description mathématique de la démonstration dans cette note, le lecteur se réfère au livre de Lichtenstein.

Cependant, les bases de la démonstration, est une équation intégrale linéaire, qui a une certaine analogie avec la célèbre équation intégrale de Molodensky et peut, alors, intéresser le lecteur géodésien. Par suite, nous essayons de donner une simple dérivation de l'équation intégrale fondamentale de Lichtenstein.

Considérons une masse sphérique symétrique non tournante Σ et on la soumet à tourner avec la vitesse angulaire ω qui la déforme en un sphéroïde S . Notons par $\zeta = QP$ la distance de la "nouvelle" équi-surface à partir de celle "ancienne". La déviation ζ satisfait une équation intégrale qui est déterminée comme suit (Fig.29.1).

Soient U le potentiel de pesanteur "normal" de la configuration sphérique et W celui de la configuration actuelle. Le potentiel U est purement gravitationnel (non rotationnel), alors que W inclut la force centrifuge.

L'effet de changement de la configuration sphérique à celle de sphéroïde consiste en trois parties :

(1) L'élément de volume dv , contenant la densité $\rho' = \rho(r')$ est déplacé de Q' à P' . Alors ρ' est maintenant à P alors que la nouvelle densité au point Q' est :

$$\rho' - \frac{\partial \rho'}{\partial r'} \zeta'$$

alors l'effet total du changement du potentiel au point Q est :

$$-G \iiint_v \zeta' \frac{\partial \rho'}{\partial r'} \frac{1}{l} dv \quad (29.15)$$

Voir la Fig.29.1 pour le sens de l , r' et ζ' , G désigne la constante gravitationnelle et v le volume de Σ .

(2) L'effet du "gonflement" (positif si S est au dessus de Σ , négatif autrement) peut être considéré comme une surface couche sur la sphère Σ , avec une densité surfacique $\rho' \zeta'$ (la variable d'intégration est notée par prime même si le point d'intégration est sur Σ). Ce-ci donne la contribution :

$$-G \iint_{\Sigma} \zeta' \rho' \frac{1}{l} d\Sigma \quad (29.16)$$

(3) Le potentiel centrifuge :

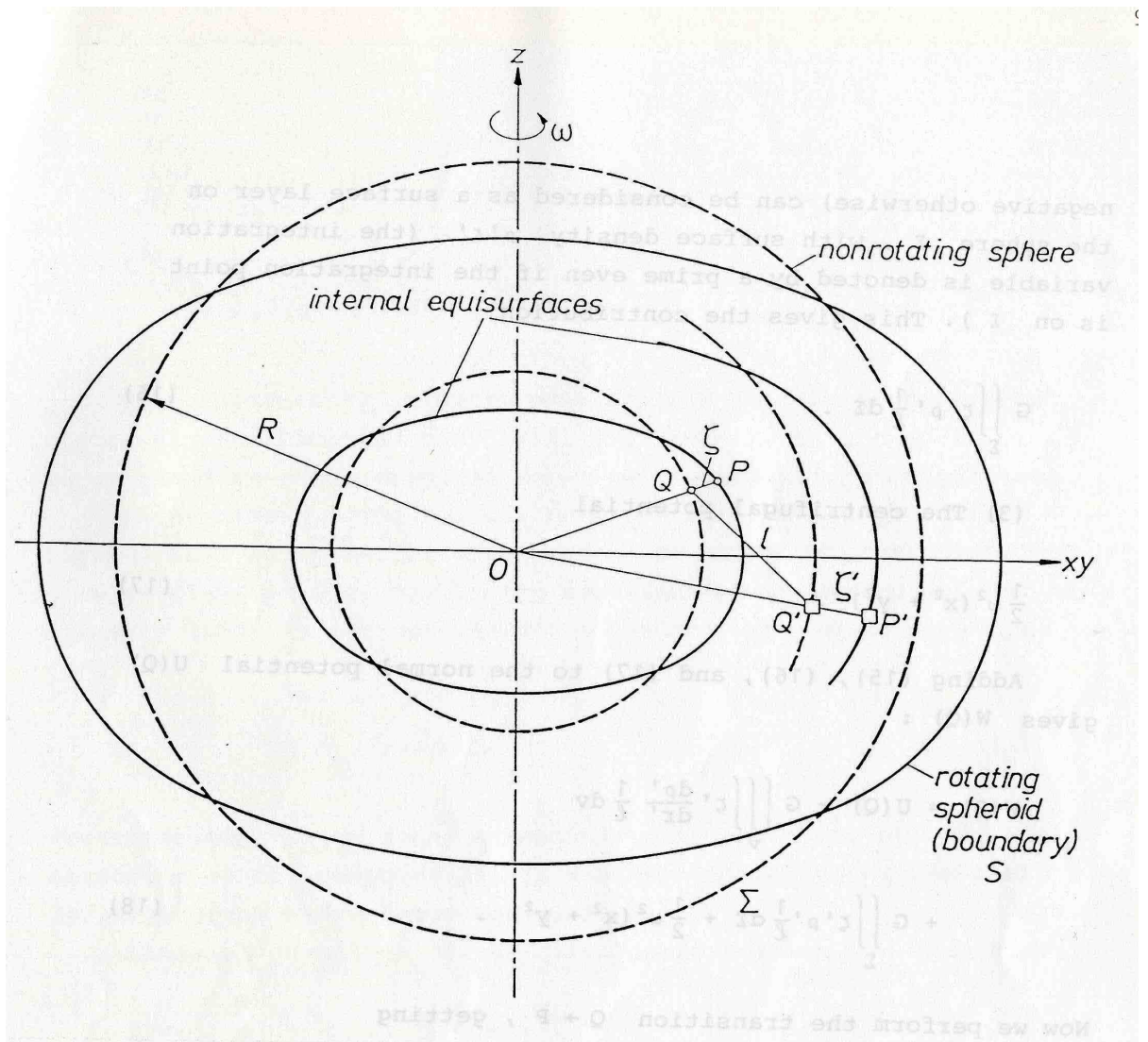


Fig. 29.1 La Rotation déforme une sphère en un sphéroïde

$$\frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) \quad (29.17)$$

Ajoutant (29.15), (29.16), et (29.17) au potentiel normal $U(Q)$ donne $W(Q)$:

$$W(Q) = U(Q) - G \iiint_v \zeta' \frac{\partial \rho'}{\partial r'} \frac{1}{l} dv + G \iint_{\Sigma} \zeta' \rho' \frac{1}{l} d\Sigma + \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) \quad (29.18)$$

Maintenant, nous faisons le passage de $Q \rightarrow P$, en obtenant :

$$W(P) = W(Q) + \frac{\partial W}{\partial \zeta} \zeta = W(Q) - g\zeta \quad (29.19)$$

Avec la définition des équi-surfaces, $W(P)$ et $U(Q)$ sont des fonctions de r , le rayon vecteur de la sphère passant par Q , qui est identique au rayon vecteur moyen de l'équi-surface passant par P . Alors :

$$W(P) - U(Q) = v(r) \quad (29.20)$$

est une petite fonction de r seulement, dont on peut supposer qu'elle est stable.

Combinant toutes ces équations, nous obtenons :

$$-g\zeta - G \iiint_v \zeta' \frac{\partial \rho'}{\partial r'} \frac{1}{l} dv + G \iint_\Sigma \zeta' \rho' \frac{1}{l} d\Sigma + \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) - v(r) = 0 \quad (29.21)$$

Cette équation intégrale fondamentale en ζ a été obtenue rigoureusement dans (Lichtenstein, 1933, pp.97-101). Notons que ce-ci étend la configuration sphérique symétrique originale.

Lichtenstein (1933, p. 22) a aussi montré que les figures d'équilibre doivent être symétriques par rapport au plan équatorial (le plan xy de la Fig.29.1). Si de plus, on assume la symétrie rotationnelle (ce qui n'est pas nécessaire mais naturel), ζ doit avoir la forme :

$$\zeta = \sum_0^{+\infty} \zeta_{2n} P_{2n}(\cos\theta) \quad (29.22)$$

contenant seulement les termes zonaux harmoniques pairs. (L'existence des zonaux harmoniques impairs dans le potentiel est une autre indication de la déviation de la terre d'un équilibre hydrostatique!).

Limitons nous à la première approximation, nous avons alors :

$$\zeta = \zeta_0(r) + \zeta_2(r) P_2(\cos\theta)$$

Celle-ci est substituée dans (29.21). Maintenant les intégrations peuvent être faites, prenant en compte l'orthogonalité des harmoniques sphériques. Nous trouvons alors que $\zeta_0(r)$ peut être choisi nul en prenant :

$$\zeta_0(r) = \frac{1}{3} \omega^2 r^2 \quad (29.23)$$

Alors que pour ζ_2 nous obtenons l'équation intégrale :

$$4\pi G \frac{\zeta_2(r)}{r^2} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' - \frac{4\pi G}{5r^3} \int_0^r \rho(r') d[r'^4 \zeta_2(r')] + \quad (29.24)$$

$$- \frac{4\pi G r^2}{5} \int_r^R \rho(r') d \left[\frac{\zeta_2(r')}{r'} \right] + \frac{1}{3} \omega^2 r^2 = 0$$

qui est facilement visible pour être identique à (29.9). Ce-ci donne une autre méthode de la détermination de l'équation de Clairaut.

29.4 LA GÉOMÉTRIE DES SURFACES D'EQUILIBRE

L'équation (29.1) de Clairaut en f l'aplatissement le paramètre géométrique de base est une équation différentielle homogène.

Les équations différentielles homogènes (avec second membre nul) avec variable indépendante t , le temps, correspondent au mouvement libre, à l'opposé du mouvement forcé. Dans notre cas, la variable indépendante est le rayon r plutôt que le temps, mais l'argument peut indiquer que la géométrie des équi-surfaces pour les figures d'équilibres semble avoir une autonomie considérable.

Cette idée a été complètement investie dans le livre fondamental (Wavre, 1932). Depuis elle était un peu connue par la communauté scientifique anglo-phone, nous présentons brièvement les grandes lignes de la théorie de Wavre de la stratification des figures d'équilibre.

29.4.1 Stratification des Equi-surfaces

Soit $S(t)$ désignant l'ensemble des équi-surfaces (surfaces de densité constante et de potentiel comme constant) fonction d'un paramètre t (il n'y a pas de danger de confusion avec le temps !).

Le paramètre t paramètre les équi-surfaces individuelles et peut, en principe, être sélectionné de plusieurs manières. Précédemment, nous avons paramétré les équi-surfaces par son rayon moyen r , mais dans la théorie de Wavre, il est plus convenient de prendre comme paramètre t le demi-petit axe de l'équi-surface sphéroïdale en considération. (Ce-ci est bien connu puisque la coordonnée ellipsoïdale u a aussi cette propriété, voir (Heiskanen and Moritz, 1967, p.40)). Pour la surface limite "libre" S on prend $t = 1$ telque $S = S(1)$.

Nous assumons aussi la symétrie rotationnelle autour l'axe z , sachant aussi que la stratification doit être aussi symétrique par rapport au plan équatorial (invariance pour $z \rightarrow -z$). Alors ; nous n'avons pas de dépendance en longitude λ , comme coordonnée longitudinale, nous prenons comme paramètre θ qui paramètre les lignes verticales comme indiqué dans la Fig.(29.2). Comme les équi-surfaces $t = cont.$ ne sont pas parallèles, leur distance infinitésimale dn diffère en général de dt . Nous posons :

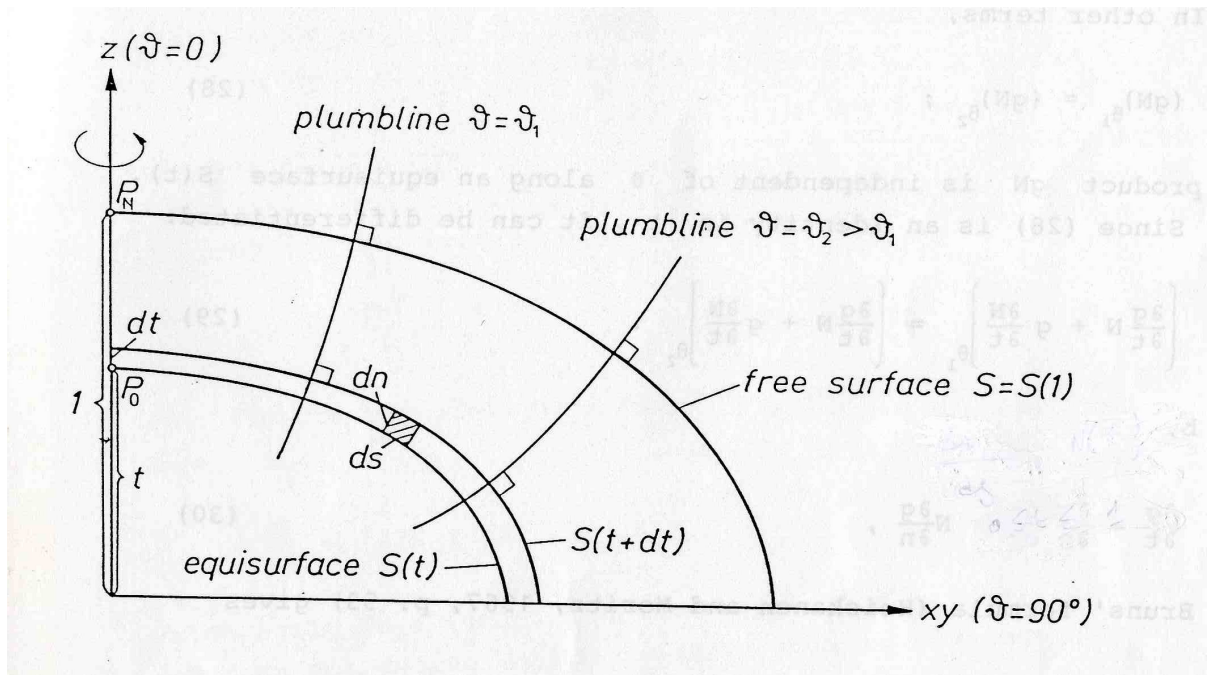


Fig. 29.2 La Géométrie de stratification

$$\frac{dn}{dt} = N(t, \theta) \quad (29.25)$$

où la fonction N est inconnue *a priori*. Notons que N est toujours positive (de la géométrie), sans dimensions (par notre choix des unités) et égale à 1 sur l'axe $\theta = 0$.

Comme par définition, le potentiel W dépend de t seulement, nous avons pour la pesanteur :

$$g = -\frac{\partial W}{\partial n} = -\frac{dW}{dt} \frac{dt}{dn} = -\frac{1}{N} \frac{dW}{dt} \quad (29.26)$$

Alors :

$$\frac{dW}{dt} = -gN = W'(t) \quad (29.27)$$

est aussi fonction seulement de t , même si g et N dépendent aussi de θ . En d'autres termes :

$$(gN)_{\theta_1} = (gN)_{\theta_2} \quad (29.28)$$

le produit gN est indépendant de θ sur l'équi-surface $S(t)$.

Comme (29.28) est une identité en t , elle peut être différenciée :

$$\left(\frac{\partial g}{\partial t}N + g\frac{\partial N}{\partial t}\right)_{\theta_1} = \left(\frac{\partial g}{\partial t}N + g\frac{\partial N}{\partial t}\right)_{\theta_1} \quad (29.29)$$

Maintenant avec (29.25) :

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial n} \frac{dn}{dt} = N \frac{\partial g}{\partial n} \quad (29.30)$$

et la formule de Bruns (Heiskanen and Moritz, 1967, p.53) donne :

$$\frac{\partial g}{\partial n} = -2Jg + 4\pi G\rho - 2\omega^2 = -2Jg - f \quad (29.31)$$

appelant avec Wavre :

$$f = -4\pi G\rho + 2\omega^2 \quad (\equiv \Delta W!) \quad (29.32)$$

la "densité transformée" ; ce n'est autre que l'application de l'opérateur de Laplace au potentiel de la pesanteur W , et le lecteur reconnaîtra l'équation de Poisson ($\Delta W = -4\pi G\rho + 2\omega^2$). Dans (29.31), J désigne la courbure moyenne des équi-surfaces.

Substituant (29.31) dans (29.30) et le résultat dans (29.29), nous obtenons après quelques calculs élémentaires, en utilisant aussi (29.26), la formule fondamentale de Wavre :

$$\frac{f(t)}{W'(t)} = \frac{\left(2JN - \frac{\partial \text{Log}N}{\partial t}\right)_{\theta_2} - \left(2JN - \frac{\partial \text{Log}N}{\partial t}\right)_{\theta_1}}{(N^2)_{\theta_2} - (N^2)_{\theta_1}} \quad (29.33)$$

Cette équation est remarquable du fait qu'elle donne une nette séparation entre la géométrie et la physique de l'équilibre des surfaces : le membre de gauche, contenant les quantités physiques comme la densité ρ et le potentiel W , dépend seulement de t , alors que le membre de droite dépend seulement de la géométrie de la stratification (J, N) et il est indépendant de la distribution de la densité !

29.4.2 Le Théorème de Wavre

Soit pour le membre à gauche de (29.33) :

$$\Psi(t) = \frac{f(t)}{W'(t)} \quad (29.34)$$

Alors (29.30), utilisant (29.31) et (29.34), peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial t} = -2JN + \Psi N^2 \quad (29.35)$$

qui est encore une fonction seulement de la géométrie de stratification et ne dépend pas de la densité ! Ce-ci est une directe conséquence de la définition (29.34) et de la remarquable pro-

priété de (29.33) toute juste citée.

L'équation (29.35) est vérifiée pour tout θ , et en particulier pour $\theta = 0$, sur l'axe de rotation. Alors on peut l'intégrer le long de cet axe de P_N à P_0 (29.2) :

$$\int_{P_N}^{P_0} \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial t} dt = \int_1^t (-2JN + \Psi N^2) dt = \text{Log} g_0 - \text{Log} g_N \quad (29.36)$$

de façon que :

$$g_0 = g_N \exp \left[\int_1^t (-2JN + \Psi N^2) dt \right] = g(t, 0) \quad (29.37)$$

où $g_N = g(1, 0)$ désigne la pesanteur au pôle.

Maintenant (29.28), avec $\theta_1 = 0$ et $\theta_2 = \theta$, ensemble avec (29.37) donnent :

$$g(t, \theta) = \frac{1}{N(t, \theta)} g(t, 0) = \frac{g_N}{N(t, \theta)} \exp \left[\int_1^t (-2JN + \Psi N^2) dt \right] \quad (29.38)$$

Notons que $N(t, 0) = 1$ comme nous l'avons remarqué. Finalement (29.34) et (29.27) donnent :

$$f(t) = -\Psi(t)N(t, \theta)g(t, \theta) \quad (29.39)$$

et aussi la densité $\rho(t)$ par (29.32).

Notons la vraie remarquable structure logique de ces formules : la physique, spécialement la distribution de la densité $\rho(t)$, est déterminée uniquement par la géométrie de la stratification. En effet, étant donné la géométrie (J, N) , on peut calculer $\Psi(t)$ par (29.33) et (29.34). Alors la pesanteur $g(t, \theta)$ est obtenue par (29.38), et finalement la densité ρ par (29.39) et (29.32). Les seules constantes qu'il faut donner en addition à l'ensemble des surfaces $S(t)$ sont la vitesse angulaire ω et la valeur de la pesanteur au pôle g_P qui cependant est déterminée par ω et la masse totale M (éléments de Stokes), utilisant la théorie du champ du potentiel extérieur.

Alors nous avons :

Le théorème de Wavre : *La physique de l'équilibre des figures (la densité ρ , la pesanteur g) est complètement déterminée par la géométrie de la stratification, c'est-à-dire, l'ensemble des équi-surfaces $S(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) ensemble avec la masse totale M et la vitesse angulaire ω .*

29.4.3 la Stratification Sphérique Comme Exception

Pour la stratification sphérique, le théorème de Wavre ne peut pas s'appliquer vu que le membre à droite de (29.33) devient 0/0, telque $\Psi(t)$ est non définie.

En effet, nous avons vu que une configuration d'équilibre sphérique non rotative admet des lois de densité arbitraires (ρ positive et non décroissante vers le centre). La terre actuelle est proche à une stratification sphérique telle que le théorème de Wavre, bien que théoriquement applicable, n'est pas "stable" : une petite variation de la configuration géométrique peut entraîner un large changement de la loi de densité.

Cependant, la distribution de la densité de la terre peut être déterminée seulement empiriquement à partir de la séismologie, les oscillations libres, etc...

29.4.4 L'Impossibilité d'une Stratification Ellipsoïdale Pure

Wavre (1932, p.60) a donné aussi une élégante version de la démonstration de Pizzetti (1913 ; p. 193) qu'une famille d'équi-surfaces strictement ellipsoïdiques $S(t)$ est impossible, pourvu que la distribution de densité soit hétérogène (ça revient à Hamy en 1887). Les figures d'équilibre d'ellipsoïdes homogènes - ellipsoïdes de Mac Lauren et Jacobi - le sont bien sûr, mais sans intérêt géodésique.

Dans le paragraphe 6., nous verrons que même les ellipsoïdes équipotentielles (Heiskanen et Moritz, 1967, sec. 2-7) ne peuvent pas être des figures d'équilibre. Ce-ci a été mentionné par Karl Ledersteger. En effet, il faudrait noter ici que Ledersteger était le dernier grand géodésien qui s'était occupé lui-même sérieusement et profondément de la théorie de Wavre, ce-ci devrait être reconnu même si on n'est pas préparé de lui suivre sur tout le chemin.

29.4.5 Une Autre Méthode de la Détermination de l'Equation de Clairaut

Bien que rigoureusement, les équi-surfaces sphéroïdes ne sont pas des ellipsoïdes, ils le sont en approximation linéaire (en f). Ainsi l'équation de Wavre (29.33) peut être utilisée pour une détermination élégante de l'équation de Clairaut. Choisissons $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 90^\circ$ et écrivons en notant que $N(t, 0) = 1$

$$g(t, 0) = g_P(t), \quad N(t, 90^\circ) = N_E(t) \quad (29.40)$$

$$J(t, 0) = J_P(t), \quad J(t, 90^\circ) = J_E(t)$$

Les équi-surfaces sont (approximativement) des ellipsoïdes de demis axes $a(t)$ et $b(t) = t$, telsque :

$$a(t) = \frac{1}{1-f} \cong 1 + f(t) \quad (29.41)$$

Nous avons aussi :

$$N_E(t) = \frac{da}{dt} = d'(t) \cong f'(t) \quad (29.42)$$

et les formules de l'ellipsoïde conventionnel donnent pour la courbure moyenne en approximation linéaire :

$$J_P = \frac{1}{t}(1 - 2f), \quad J_E = \frac{1}{t} \quad (29.43)$$

telle que (29.33), avec (29.32), devient facilement :

$$\frac{4\pi G\rho - 2\omega^2}{g_P(t)} = \frac{-t^2 f'' + 6f}{2t^2 f' + 2tf}$$

ou

$$(2t^2 f' + 2tf)(4\pi G\rho - 2\omega^2) = (-t^2 f'' + 6f)g_P(t) \quad (29.44)$$

Correspondant à notre approximation, nous négligeons le produit $f\omega^2$ (ce-ci élimine ω^2 de nos prochains calculs) et prenons $g_P(t)$ sphérique :

$$g_P(t) = \frac{4\pi}{3} GtD(t) \quad (29.45)$$

une formule bien connue, égale à $Gm(t)/t^2$, où $m(t)$ désigne la masse à l'intérieur de la sphère de rayon t , $D(t)$ est la densité moyenne équation (29.4). Alors (29.44) se réduit à :

$$3\rho(2t^2 f' + 2tf) = tD(-t^2 f'' + 6f) \quad (29.46)$$

à partir de laquelle la formule de Clairaut (29.1) ensuit immédiatement (avec $t \cong r$ dans notre approximation).

29.4.6 Les Remarques en Conclusion

L'équation (29.33) est vérifiée pour θ_1 et θ_2 arbitraires. Si nous remplaçons θ_2 par θ_3 , nous obtenons la relation géométrique pure :

$$\begin{aligned} & \frac{\left(2JN - \frac{\partial \text{Log}N}{\partial t}\right)_{\theta_3} - \left(2JN - \frac{\partial \text{Log}N}{\partial t}\right)_{\theta_1}}{(N^2)_{\theta_3} - (N^2)_{\theta_1}} \\ &= \frac{\left(2JN - \frac{\partial \text{Log}N}{\partial t}\right)_{\theta_2} - \left(2JN - \frac{\partial \text{Log}N}{\partial t}\right)_{\theta_1}}{(N^2)_{\theta_2} - (N^2)_{\theta_1}} \end{aligned} \quad (29.47)$$

qui est une condition nécessaire pour toutes les stratifications des figures d'équilibre.

Est-ce que cette relation est aussi suffisante? Si c'est vrai, alors on pouvait détacher la couche supérieure de toute équi-surface interne $S(t)$, voir Fig.29.2. Pour la figure "réduite" restante limitée par $S(t)$, l'équation (29.47) continue d'être vérifiée pour toute équi-surface de ses équi-

surfaces internes et la figure réduite pourrait être aussi une possible figure d'équilibre.

C'est le "prinzip der Entblätterung" de Ledersteger (1969, p.536) (principe de détachement des couches délimitées par deux équi-surfaces). Pour des figures d'équilibre homogènes (ellipsoïdes de Mac Laurin), ce principe est vérifié même dans ce cas, de telles couches sont délimitées par des ellipsoïdes géométriquement similaires et il est connu qu'un tel "ellipsoïde homeoid" n'exerce pas d'attraction dans son intérieur ; voir (Kellogg, 1929, p.22) ou (Chandrasekhar, 1969, p.39).

Pour des figures hétérogènes, cependant ce principe ne tient pas (Voss, 1965). Ce-ci montre que (29.47) est seulement nécessaire mais non suffisante. Alors, avant d'appliquer la procédure de Wavre décrite par (29.38) et (29.39), on doit premièrement être sûr que la stratification donnée correspond réellement à une p ce qui n'est pas chose évidente.

La raison profonde qui fait que la théorie de Wavre est "incomplète" dans ce sens semble être de fait qu'il utilise seulement l'équation de Poisson "locale" (29.32) mais non la condition globale que le potentiel gravitationnel V (potentiel de pesanteur W moins le potentiel centrifuge) doit être harmonique en tout lieu à l'extérieur de la surface limite et tend vers zéro comme GM/r pour $r \rightarrow +\infty$. Alors la théorie de Wavre continue de tenir bon si S est délimitée par une configuration de masse symétrique rotationnelle (comme type un anneau équatorial de Saturne). Alors, cependant, nous ne parlons plus de figures libres d'équilibre. (En effet, la couche entre $S(t)$ et $S(1)$ est une telle configuration de masse symétrique rotationnelle externe pour la figure limitée par $S(t)$!).

Un dernier mot de la relation entre l'approche de Wavre et celle de Clairaut - Liapunov - Lichtenstein décrite dans le paragraphe 3. En un sens, les deux approches sont "dialectiquement opposées". Wavre part à partir d'une stratification (la géométrie) et détermine la distribution de densité correspondante (la physique), tandis que Lichtenstein commence à partir de la donnée d'une distribution de densité (qui est initialement sphérique) et détermine la configuration ou la stratification qui résulte d'une "petite" rotation ω . Et Wavre détermine la physique du problème, alors que Lichtenstein détermine la géométrie à partir de la physique. Aussi, pour Lichtenstein, la configuration sphérique est le point de départ, alors pour Wavre c'est une singularité 0/0 !

L'approche de Wavre est aussi décrite dans les livres (Baeschlin, 1948) et (Ledersteger, 1969) tandis que le livre de base en anglais (Jardetzky, 1958) ne la présente pas, même s'il montre une méthode d'approximation due aussi à Wavre ("procédé uniforme") qui étend, par un astuce ingénieux mais compliqué, à éviter le problème de convergence pour certaines séries de harmoniques sphériques. Nous n'allons pas traiter ce-ci maintenant parceque l'auteur pense que ce problème peut être attaqué par une méthode assez simple comme nous allons le voir dans la section (29.6).

29.5 ENERGIE DE POTENTIEL STATIONNAIRE

Dans des domaines variés de la physique, l'équilibre est associé avec une valeur stationnaire de l'énergie du potentiel (maximum ou minimum, suivant le signe). Liapunov et Poincaré ont traité de ce point de vue des figures d'équilibre homogènes ; un traitement moderne est trouvable dans le livre (Macke ; 1967, p.543). L'approche de Macke a été généralisée à des figures d'équilibre hétérogènes (terrestres) (Macke et al., 1964 ; Voss, 1965, 1966). Cette approche est intéressante parcequ'elle reflète la pensée typicale et les méthodes mathématiques des théories modernes de la physique.

29.5.1 L'Energie de Potentiel

L'énergie gravitationnelle d'une particule matérielle de masse m dans un champ de potentiel V est mV , et pour un système de particules c'est :

$$E = \sum m_i V_i \quad (29.48)$$

le signe (+ ou -) est conventionnel.

Ce-ci est vérifié pour un champ de potentiel externe. Si le champ est produit par l'attraction gravitationnelle mutuelle des particules elles-mêmes :

$$V_i = G \sum_j \frac{m_j}{l_{ij}} \quad (j \neq i) \quad (29.49)$$

alors (29.48) donne :

$$G \sum_{i,j} \frac{m_i m_j}{l_{ij}}$$

Chaque terme est compté deux fois, cependant (intervenant i et j), telque on doit diviser par 2, en obtenant :

$$E_V = \frac{1}{2} G \sum_i \sum_j \frac{m_i m_j}{l_{ij}} \quad (j \neq i) \quad (29.50)$$

voir aussi (Kellogg, 1929 ; pp. 79-81) ou (Poincaré, 1903, pp. 7-8).

L'analogie continu de (29.50) est :

$$E_V = \frac{1}{2} G \iiint_V \iiint_V \frac{\rho(\underline{x}) \rho'(\underline{x}')}{\|\underline{x} - \underline{x}'\|} dv dv' \quad (29.51)$$

avec les notations habituelles : $\underline{x}, \underline{x}'$ les vecteurs positions ; dv, dv' les éléments volumes, et $l = \|\underline{x} - \underline{x}'\|$. Une autre forme de (29.51) est :

$$E_V = \frac{1}{2} \iiint_V V \rho dv \quad (29.52)$$

où V est le potentiel gravitationnel usuel. En comparant avec (29.48), on note le facteur $1/2$ reflétant le fait que E_V est produit par un champ interne créé par les éléments de masse $dm = \rho dv$ elles mêmes.

Pour la partie centrifuge, nous obtenons :

$$E_\Phi = \sum_i m_i \Phi_i = \iiint_V \Phi \rho dv \quad (29.53)$$

en accord avec (29.48), dès que le potentiel centrifuge Φ agit comme un champ extérieur.

L'énergie potentielle du potentiel de pesanteur $W = V + \Phi$ est alors la somme de (29.52) et (29.53) :

$$E_W = \int (\frac{1}{2}V + \Phi) \rho dv \quad (29.54)$$

utilisant une simple intégrale pour la convenance des notations.

29.5.2 Les fonctions de Dirac et Heaviside

Rappelons les définitions de base de la fonction delta de Dirac :

$$\begin{aligned} \delta(x) &= 0 \quad \text{excepté pour } x = 0 \\ \delta(0) &= 1 \quad \text{de telle manière que} \end{aligned} \quad (29.55)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (29.56)$$

C'est une étrange fonction mais elle est très utile et très connue en physique.

Son intégrale est la fonction escalier de Heaviside :

$$\theta(x) = \int_{-\infty}^x \delta(x') dx' \quad (29.57)$$

De (29.55) et (29.56), on déduit immédiatement que :

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x < 0 \end{cases} \quad (29.58)$$

Pour $\theta(0)$ on prendra la valeur $1/2$.

De (29.57), on déduit la relation de base :

$$\theta(x) = \frac{d\theta(x)}{dx} = \theta'(x) \quad (29.59)$$

29.5.3 Une Remarquable Expression de la Densité

Assumons que le corps consiste en n couches délimitées par les surfaces S_k et S_{k+1} Fig.(29.3). La densité pour chaque couche est constante, qu'on note dans notre cas par ρ_{k+1} . Supposons

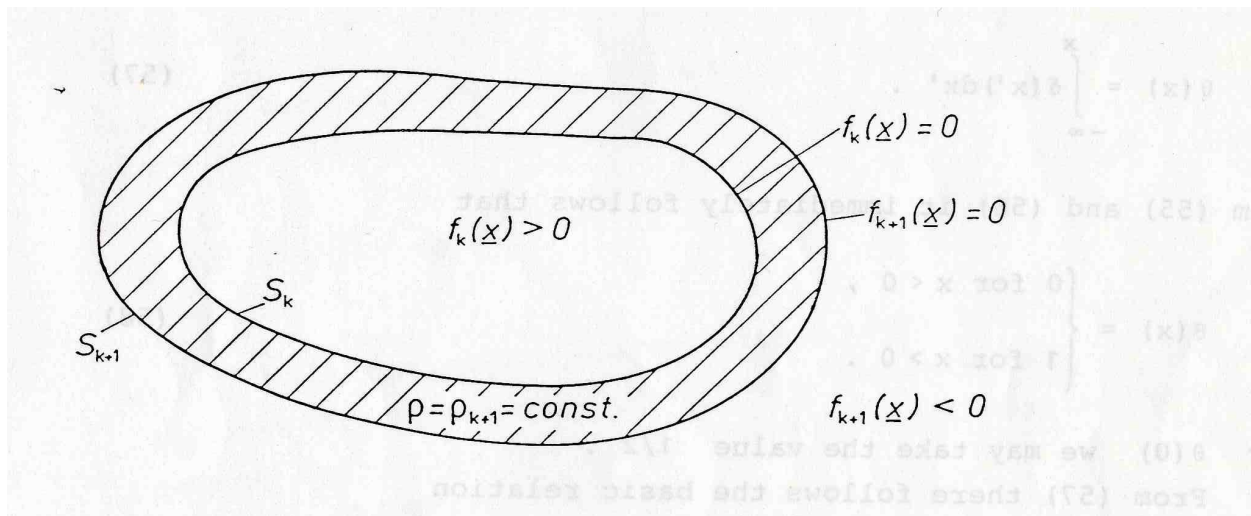


Fig. 29.3 Une couche à densité constante

que la surface S_k a pour équation :

$$f_k(\underline{x}) = 0 \quad (29.60)$$

et que f_k soit une fonction monotone avec :

$$f_k(\underline{x}) > 0 \quad \text{à l'intérieur de } S_k \quad (29.61)$$

(sinon on change de signe de f_k !).

Alors la densité en tout point avec la stratification du corps peut être décrite par une seule expression :

$$\rho(\underline{x}) = \sum_{k=1}^n (\rho_k - \rho_{k+1}) \theta[f_k(\underline{x})] \quad (29.62)$$

Le lecteur est invité à vérifier ce-ci sur la base de (29.58) et (29.61). L'équation (29.62) est vérifiée en tenant compte que $\rho_{n+1} = 0$ sachant que la densité est nulle à l'extérieur de la surface $S = S_n$.

29.5.4 Variation de l'Energie de Potentiel

Cherchons l'extrémum de l'énergie du potentiel $E = E_W$ telle qu'est donnée par (29.54) :

$$E = \int \left(\frac{1}{2} V + \Phi \right) \rho dv \quad (29.63)$$

où ρ est donnée par (29.62). La condition de bord est que le volume compris entre les surfaces S_k (Fig.29.3) reste inchangé :

$$v_k = \int_{S_k} dv = const. \quad (29.64)$$

Cette équation reste constante en la multipliant par $\rho_k - \rho_{k+1}$ ce qui donne :

$$M_k = \int_{S_k} (\rho_k - \rho_{k+1}) dv = \int (\rho_k - \rho_{k+1}) \theta[f_k(\underline{x})] dv = const. \quad (29.65)$$

Cette expression a la dimension d'une masse mais sans aucun sens physique. Notons cependant que le facteur $\theta[f_k(\underline{x})]$ nous a permis d'étendre formellement le volume d'intégration à l'espace entier parce que l'intrégrant s'annule à l'extérieur de S_k car on a là $f_k < 0$.

Introduisant les multiplicateurs de Lagrange λ_k , on doit alors minimiser (ou maximiser) :

$$E - \sum_{k=1}^n \lambda_k M_k$$

Ce-ci mène à la condition variationnelle :

$$\delta \left[E - \sum_{k=1}^n \lambda_k M_k \right] = 0 \quad (29.66)$$

ou

$$\int (V + \Phi) \delta \rho dv - \sum_k \lambda_k \delta M_k = 0 \quad (29.67)$$

Notons que nous avons varié la densité ρ par $\delta \rho$ et que, comparé à (29.63), le facteur 1/2 semble être oublié. Cependant par (29.51), E_V est une fonction quadratique de ρ , qui introduit en différentiant le facteur usuel 2, lequel combiné avec 1/2 donne 1. Avec le potentiel de

pesanteur $W = V + \Phi$ ce-ci se réduit à :

$$\int W \delta \rho dv - \sum_{k=1}^n \lambda_k \delta M_k = 0 \quad (29.68)$$

Maintenant on doit exprimer les variations de la densité $\delta \rho$ par $\delta f_k(\underline{x})$ dès que $\delta \rho$ est causé par un changement dans les coordonnées de la surface seulement. Maintenant notre expression (29.62) vient à portée, nous avons :

$$\delta \theta[f_k(\underline{x})] = \theta'[f_k(\underline{x})] \delta f_k(\underline{x}) \quad (29.69)$$

où $\theta'(x) = \delta(x)$ est la fonction delta par (29.59) ; on préfère la notation θ' afin d'éviter la confusion avec la variation δ .

Avec (29.69) tout est prêt : (29.62) donne $\delta \rho$ et (29.65) donne δM_k . Alors (29.68) devient :

$$\int \left\{ \sum_{k=1}^n (\rho_k - \rho_{k+1})(W(\underline{x}) - \lambda_k) \theta'[f_k(\underline{x})] \right\} \delta f_k(\underline{x}) dv = 0 \quad (29.70)$$

Les petites variations $\delta f_k(\underline{x})$ sont arbitraires, alors l'intégrant entre les $\{ \}$ doit s'annuler :

$$\sum_{k=1}^n (\rho_k - \rho_{k+1})(W(\underline{x}) - \lambda_k) \theta'[f_k(\underline{x})] = 0 \quad (29.71)$$

Maintenant, il n'y a pas un danger de confusion, donc on peut utiliser le symbole standard δ au lieu de θ' pour la fonction delta de Dirac.

Par la définition (29.55), $\delta[f_k(\underline{x})]$ s'annule partout sauf sur la surface S_k , où il est différent de zéro. Alors $\delta[f_k(\underline{x})] \neq 0$ sur S_k , on doit avoir :

$$W(\underline{x}) = \lambda_k = \text{constant sur } S_k \quad (29.72)$$

ce qui signifie que les surfaces frontières S_k des régions de densité constante doivent être des surfaces équipotentiellles.

Dans la limite $n \rightarrow +\infty$ en densité continue nous recouvrons alors le fait de base que les surfaces de densité constante doivent être des surfaces de potentiel constant. Ce-ci est notre bien connue condition pour l'équilibre des figures.

Quoi de nouveau ? Précédemment, au paragraphe 2. nous avons obtenu cette condition de (29.5) à l'aide de la pression p , une quantité que nous n'avons jamais utilisée par la suite. Pour le goût de certains, il n'est pas très élégant d'introduire un concept auxiliaire qui joue le rôle de deus ex machina et disparaît de nouveau. Ici, nous avons déduit notre condition de base $\rho = \text{const.} \iff W = \text{const.}$ du principe de l'énergie stationnaire, lequel est logiquement plus satisfaisant pour beaucoup de gens, spécialement en vue du fait que le principe du maximum

ou du minimum joue un rôle fondamental en physique.

Un autre admirable fait : le multiplicateur de Lagrange λ_k admet une interprétation physique naturelle ; ce n'est rien que la valeur constante du potentiel W sur la surface S_k , voir (29.72).

29.5.5 Une Equation Intégrale Générale

Maintenant nous sommes aussi en position de donner une expression explicite des fonctions $f_k(\underline{x})$ qui caractérisent les surfaces S_k : nous devons simplement poser :

$$f_k(\underline{x}) = W(\underline{x}) - \lambda_k \quad (29.73)$$

En effet, sur S_k nous avons $f_k(\underline{x}) = 0$ utilisant (29.72), et à l'intérieur de S_k on a $f_k(\underline{x}) > 0$ puisque W croît monotonement vers le centre. Alors (29.60) et (29.61) sont satisfaites.

Maintenant dans :

$$W(\underline{x}) = G \int \frac{\rho}{l} dv + \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) \quad (= V + \Phi) \quad (29.74)$$

on doit substituer (29.62) ensemble avec (29.73), en obtenant :

$$W(\underline{x}) = G \int \frac{dv}{l} \sum_{k=1}^n (\rho_k - \rho_{k+1}) \theta[W(\underline{x}') - \lambda_k] + \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) \quad (29.75)$$

avec $l = \|\underline{x} - \underline{x}'\|$. Ce-ci est une équation intégrale non linéaire en $W(\underline{x})$; les multiplicateurs de Lagrange λ_k sont déterminés par (29.64) la condition de volume constant :

$$v_k = \int \theta[W(\underline{x}) - \lambda_k] dv \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (29.76)$$

Il est immédiat de faire $n \rightarrow +\infty$ et performer la transition vers une distribution de masse continue, alors l'index k devient une variable continue u :

$$W(\underline{x}) = G \int \frac{dv}{l} \int_{u=0}^{+\infty} d\rho(u) \theta[W(\underline{x}') - \lambda(u)] + \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) \quad (29.77)$$

$$v(u) = \int \theta[W(\underline{x}) - \lambda(u)] dv \quad (29.78)$$

Sans doute, cette formulation de l'équilibre hydrostatique des figures est extrêmement élégante et générale. Voss(1965, 1966) a essayé de résoudre cette équation par une expression en séries en termes de f , f^2 , etc. (f est l'applatissage). Les termes linéaires donnent encore une fois la théorie de Clairaut, essentiellement l'équation intégrale linéaire (29.21). Voss a aussi calculé les termes du second ordre, mais les détails sont très compliqués et ces termes peuvent être calculés plus directement comme nous allons le voir dans la prochaine section. Une autre

application de l'approche de l'énergie de potentiel est trouvée dans (Chandrasekher et Roberts, 1963).

Donc l'importance capitale de la méthode décrite dans cette section est le concept et la théorie, mais c'est grand quand même.

29.6 LA THÉORIE DU DEUXIÈME ORDRE

Il est relativement simple à améliorer la théorie de Clairaut par les termes du second ordre, c'est-à-dire, de l'ordre de f^2 , avec f l'applatissage. Ce-ci a été fait par plusieurs auteurs ; nous mentionnons seulement (Darwin, 1899), Wavre (1932), Kopal (1960), et (Lanzano ; 1982, ch2 à l'ordre trois), les précurseurs étant Airy en 1826 et Callandreau en 1889. Les formules données, par de Sitter (1924), sans corrections par Jeffreys (1953) sont maintenant considérées standards, voir (Jones, 1954) et seront aussi utilisées ici.

Une difficulté théorique réside dans l'usage de la série de Legendre pour $1/l$, voir ci-dessous les équations (29.81) et (29.91) qui ne peuvent pas être convergentes. Ce-ci a amené Wavre (1932) à introduire une méthode ingénieuse (procédé uniforme, déjà mentionné ci-dessus) qui marche uniquement avec les séries convergentes. Cette procédure compliquée n'est pas réellement nécessaire comme on va le voir ci-dessous. Notre approche, basée sur les développements récents de la compréhension de la continuité analytique (Moritz, 1980, secs. 6 et 7), est extrêmement simple et peut être nouvelle.

29.6.1 Le Potentiel Intérieur

Le potentiel gravitationnel en un point P à l'intérieur d'un corps limité par une surface S (Fig.29.4) est :

$$V(P) = \iiint G \frac{\rho}{l} dv = \iiint_{I_P} G \frac{\rho}{l} dv + \iiint_{E_P} G \frac{\rho}{l} dv = V_i(P) + V_e(P) \quad (29.79)$$

où I_P désigne l'intérieur de la surface S_P de densité constante (non nécessairement de potentiel constant !) passant par P , et E_P désigne son extérieur, soit la couche entre S_P et S .

Considérons premièrement :

$$V_i(P) = G \iiint_{I_P} \frac{\rho}{l} dv \quad (29.80)$$

Alors nous avons la série très connue de Legendre, voir (Heiskanen and Moritz, 1967, p. 33) :

$$\frac{1}{l} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{r'^n}{r^{n+1}} P_n(\cos\psi) \quad (29.81)$$

qui converge si $r' < r$. Le problème est que pour $r = r_P$ Fig.(29.4), cette condition de convergence peut être violée : r' doit être plus grand que r . La ruse est de quitter I_P et E_P mais de

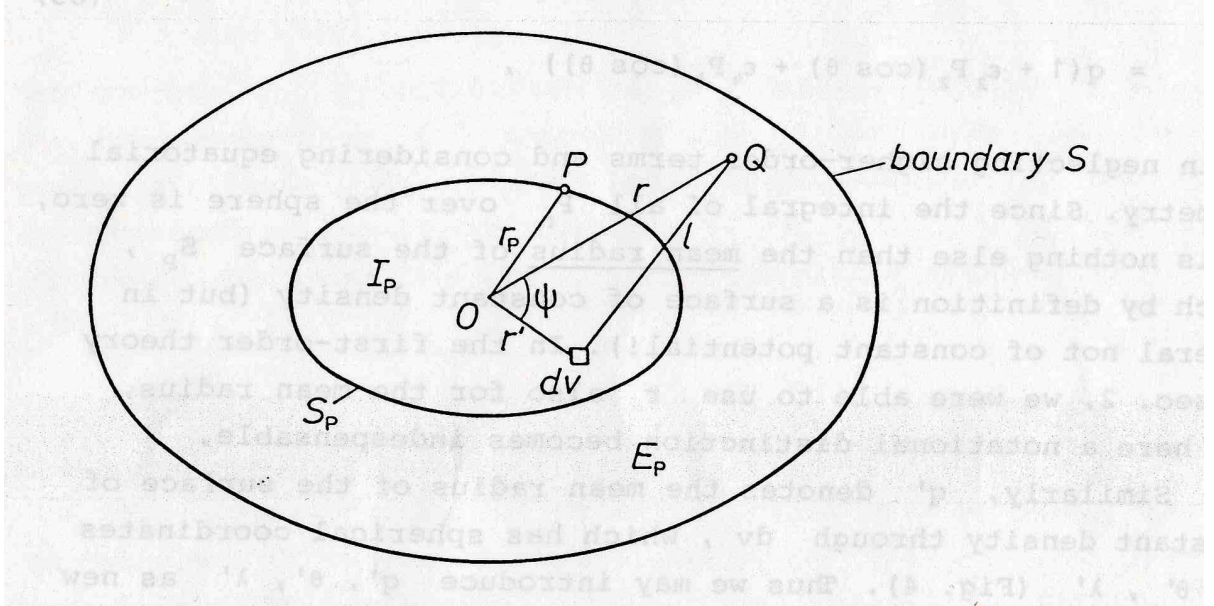


Fig. 29.4 Illustration du calcul de $V(P)$

calculer V premièrement au point Q à l'extérieur de S_P pour laquelle $r' < r$ est certainement toujours satisfaite. Alors nous calculons :

$$\begin{aligned} V_i(Q) &= G \iiint_{I_P} \frac{\rho}{l} dv = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{r^{n+1}} G \iiint_{I_P} \rho r^n P_n(\cos\psi) dv \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{K_n}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta) = \frac{K_0}{r} + \frac{K_2}{r^3} P_2(\cos\theta) + \frac{K_4}{r^5} P_4(\cos\theta) \end{aligned} \quad (29.82)$$

en négligeant les termes de degré élevé. Ici r, θ, λ sont les coordonnées sphériques usuelles (rayon vecteur, distance polaire et la longitude) du point Q . Due à la symétrie rotationnelle, il n'a pas de dépendance explicite en longitude λ .

La surface S_P peut être écrite sous la forme :

$$\begin{aligned}
r &= q \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n P_n(\cos\theta) \right) = r(q, \theta) \\
&= q(1 + \varepsilon_2 P_2(\cos\theta) + \varepsilon_4 P_4(\cos\theta))
\end{aligned} \tag{29.83}$$

de même négligeant les termes de haut degré et considérant la symétrie équatoriale. Comme l'intégrale de tous les P_n sur la sphère vaut zéro, q n'est autre que le rayon moyen de la surface S_P , qui par définition est une surface de densité constante (mais en général non de potentiel constant). Dans la théorie du premier ordre de la section 2., on avait la possibilité d'utiliser r aussi pour le rayon moyen, mais ici une notation distincte devient indispensable.

Similairement q' désigne le rayon moyen de la surface de densité constante passant par dv , qui a les coordonnées sphériques r', θ', λ' Fig.(29.4). Alors nous devons introduire q', θ', λ' comme nouvelles variables d'intégration. Ce-ci a l'avantage que :

$$\iiint_{I_P} = \iiint_{\sigma} \int_{r'=0}^r = \iiint_{\sigma} \int_{q'=0}^q \tag{29.84}$$

où q , correspondant à S_P par (29.83), est maintenant constante ; σ désigne comme usuelle la sphère unité.

Pour l'élément de volume, nous avons :

$$dv = r'^2 \sin\theta' dr' d\theta' d\lambda' = r'^2 dr' d\sigma \tag{29.85}$$

en introduisant l'élément $d\sigma$ de la sphère unité comme indiqué. On a alors :

$$dr' d\theta' d\lambda' = J dq' d\theta' d\lambda' = \frac{\partial r'}{\partial q'} dq' d\theta' d\lambda' \tag{29.86}$$

en évaluant le déterminant jacobien J , utilisant aussi la forme (29.83) pour la relation :

$$r' = r(q', \theta') \tag{29.87}$$

Alors, par (29.84) et (29.86) :

$$G \iiint_{I_P} \rho r'^m P_n(\cos\psi) dv = G \int_{q'=0}^q dq' \rho(q') \iint_{\sigma} r'^m P_n(\cos\psi) \frac{\partial r'}{\partial q'} d\sigma \tag{29.88}$$

La densité ρ , par définition de q , dépend seulement de q (ou de q').

Nous développons maintenant r'^m en séries de la forme (29.83) (ce-ci est possible parce que les puissances des polynômes de Legendre P_n peuvent être exprimées comme combinaisons linéaires de P_k , cf (29.102) et on utilise les relations d'orthogonalité des P_n . Le résultat est (29.82) où :

$$K_n = K_n(q) \tag{29.89}$$

sont des fonctions seulement de q , le rayon moyen des S_P .

L'astuce logique qui fait que (29.82) est rigoureusement possible était de calculer V en un point Q "externe" Fig.(29.4). Il va par suite que $V(Q)$ est une fonction analytique (harmonique) à l'extérieur et sur S_P . Par suite, l'expression (29.82) continue d'être vérifiée si nous

faisons le passage de Q à P . Alors aussi :

$$V_i(P) = \frac{K_0(q)}{r} + \frac{K_2(q)}{r^3} P_2(\cos\theta) + \frac{K_4(q)}{r^5} P_4(\cos\theta) \quad (29.90)$$

si maintenant $r = r_P$, $\theta = \theta_P$.

Cet argument est basé sur la continuation analytique des séries harmoniques sphériques, cf (Moritz, 1980 ; pp.54-55). Le problème de convergence ne se pose pas puisque nous travaillons avec seulement des séries tronquées. Si le lecteur insiste, nous devons recourir au théorème de Runge (ibid., pp. 64-65) ; à n'importe quelle vitesse, regardant la convergence nous sommes maintenant dans le même bateau que Wavre (1932) avec son considérable très compliqué "procédé uniforme".

Maintenant nous appliquons le même astuce avec $V_e(P)$ dans (29.79) : premièrement on évalue $V(Q)$, le potentiel gravitationnel de la couche entre S_P et S Fig.(29.4) au point Q vraiment à l'intérieur de la couche, telque toujours $r' > r$ et les séries correspondantes à (29.81) :

$$\frac{1}{l} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{r^n}{r'^{n+1}} P_n(\cos\psi) \quad (29.91)$$

convergent toujours. Alors, on réalise la continuation analytique $Q \rightarrow P$ avec le résultat :

$$V_e(P) = L_0(q) + r^2 L_2(q) P_2(\cos\theta) + r^4 L_4(q) P_4(\cos\theta) \quad (29.92)$$

analogue à (29.90).

Le champ potentiel gravitationnel total V en un point P avec les coordonnées r, θ est la somme de (29.90) et (29.92), et le potentiel de pesanteur W est trouvé en ajoutant le potentiel centrifuge. Le résultat, en notation standard de Sitter (1924), doit être écrit :

$$W = \frac{4\pi}{3} q^3 G \rho_m \left[D \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{2} \mu \frac{r^2}{q^3} \sin^2 \theta \right) - \frac{2}{5} \left(S \frac{q^2}{r^3} + T \frac{r^2}{q^3} \right) P_2(\cos\theta) \right] + \frac{4\pi}{3} q^3 G \rho_m \left[\frac{12}{35} \left(P \frac{q^4}{r^5} + \frac{8}{9} Q \frac{r^4}{q^5} \right) P_4(\cos\theta) \right] \quad (29.93)$$

où :

$$\mu = \frac{\omega^2 R^3}{GMD} \quad (29.94)$$

est un paramètre sans dimensions et ρ_m désigne la densité moyenne de la terre. Les fonctions $D = D(q), S = S(q), \dots, Q = Q(q)$ seront considérées plus tard.

29.6.2 Ellipsoïde et Sphéroïde

C'est un exercice élémentaire de calculer l'équation suivante, précise à l'ordre f^2 , pour un ellipsoïde :

$$r = a(1 - f \cos^2 \theta - \frac{3}{8} f^2 \sin^2 2\theta) \quad (29.95)$$

a et f sont respectivement son demi-grand axe et son aplatissement. Pour un sphéroïde général on doit écrire :

$$r = a[1 - f \cos^2 \theta - (\frac{3}{8} f^2 + \kappa) \sin^2 2\theta] \quad (29.96)$$

telque κ désigne la déviation maximum (pour $\theta = 45^\circ$) du sphéroïde par rapport à l'ellipsoïde qui a les mêmes demi-axes a et b . Allant de a au rayon moyen β , nous obtenons de (29.96) après un peu d'algèbre :

$$r = q \left[1 - \frac{2}{3} (f + \frac{23}{42} f^2 + \frac{4}{7} \kappa) P_2(\cos \theta) + \frac{4}{35} (3f^2 + 8\kappa) P_4(\cos \theta) \right] \quad (29.97)$$

qui représente (29.83) exprimée en termes de l'aplatissement f et du paramètre κ caractérisant la déviation du sphéroïde de l'ellipsoïde équiaxial. Avec de Sitter, nous trouvons que c'est plus pratique d'introduire "l'aplatissement réduit" :

$$f^* = f - \frac{5}{42} f^2 + \frac{4}{7} \kappa \quad (29.98)$$

qui se différentie de f seulement par les termes du second ordre tels qu'on peut écrire $f^{*2} = f^2$. Alors nous avons les expressions désirées :

$$\begin{aligned} D &= \beta^{-3} \int_0^\beta \delta \frac{d}{d\beta} \left[\left(1 + \frac{4}{15} f^2 \right) \beta^3 \right] d\beta \\ S &= \beta^{-5} \int_0^\beta \delta \frac{d}{d\beta} \left[\left(f^* + \frac{2}{7} f^2 \right) \beta^5 \right] d\beta \\ T &= \int_\beta^1 \delta \frac{d}{d\beta} \left[f^* + \frac{16}{21} f^2 \right] d\beta \\ P &= \beta^{-7} \int_0^\beta \delta \frac{d}{d\beta} \left[\left(f^2 + \frac{8}{9} \kappa \right) \beta^7 \right] d\beta \\ Q &= \beta^2 \int_\beta^1 \delta \frac{d}{d\beta} [\kappa \beta^{-2}] d\beta \end{aligned} \quad (29.99)$$

où :

$$\delta = \frac{\rho}{\rho_m} = \frac{\text{densité}}{\text{densité moyenne de la terre}} \quad (29.100)$$

et :

$$\beta = \frac{q}{R} = \frac{\text{rayon moyen de } S_P}{\text{rayon moyen de la terre}} \quad (29.101)$$

sont des quantités sans dimensions ; en d'autres termes nous avons exprimé le rayon moyen β utilisant R le rayon moyen de la terre comme unité. Notant la variable d'intégration β' par β pour simplifier les notations avec pas de risque de confusion.

Utilisant le théorème du binôme, nous devons exprimer dans (29.93) les différentes puissances de r par (29.97) utilisant la formule très connue (à vérifier !) :

$$[P_2(\cos\theta)]^2 = \frac{1}{5} + \frac{2}{7}P_2(\cos\theta) + \frac{18}{35}P_4(\cos\theta) \quad (29.102)$$

Alors (29.93) devient (avec R comme unité) :

$$W = \frac{4\pi}{3}\beta^2 G\rho_m [A_0(\beta) + A_2(\beta)P_2(\cos\theta) + A_4(\beta)P_4(\cos\theta)] \quad (29.103)$$

où :

$$\begin{aligned} A_0(\beta) &= D\left(1 + \frac{1}{3}\mu + \frac{4}{45}f^2 + \frac{4}{45}f\mu\right) - \frac{4}{25}fS + \frac{8}{75}fT \quad (29.104) \\ A_2(\beta) &= -\frac{2}{3}\left[-D\left(f^* + \frac{6}{7}f^2\right) + \frac{3}{5}S\left(1 + \frac{4}{7}f\right) + \frac{3}{5}\left(1 - \frac{8}{21}f\right) + \frac{1}{2}D\mu\left(1 + \frac{20}{21}f\right)\right] \\ A_4(\beta) &= \frac{8}{35}\left[\left(-\frac{1}{2}f^2 - 4\kappa\right)D - \frac{9}{5}fS + \frac{6}{5}fT + \frac{3}{2}P + \frac{4}{3}Q + f\mu D\right] \end{aligned}$$

L'équation (29.103) avec (29.104) expriment le potentiel sur la surface de densité constante, $\beta = \text{const.}$, comme fonction de son rayon moyen β et de la distance polaire θ .

Pour une référence future, nous calculons aussi :

$$A_4 + \frac{24}{35}fA_2 = \frac{8}{35}\left[\left(\frac{3}{2}f^2 - 4\kappa\right)D - 3fS + \frac{3}{2}P + \frac{4}{3}Q\right] \quad (29.105)$$

29.6.3 L'Equilibre Hydrostatique

Comme nous l'avons remarqué plusieurs fois, les précédents développements ne supposent pas que les surfaces de densité constante ρ , $\beta = \text{const.}$, doivent être des surfaces de potentiel W constant, c'est-à-dire l'équilibre hydrostatique n'est pas présupposé. La seule supposition est la symétrie rotationnelle et la symétrie équatoriale de la stratification des surfaces $\beta = \text{const.}$,

qui dévient légèrement de la stratification ellipsoïdique (le paramètre κ est supposé du second ordre f^2).

Finalement maintenant, nous introduisons la condition d'équilibre hydrostatique. Alors W doit être constant sur les surfaces $\beta = \text{const.}$, qui implique que dans (29.103), $A_2(\beta)$ et $A_4(\beta)$ doivent être identiquement nuls car ils sont multipliés par une fonction de θ : W doit être indépendant de θ . Ce-ci donne :

$$A_2^H = 0 \quad (29.106)$$

et :

$$A_4^H = 0 \quad (29.107)$$

A_2^H et A_4^H désignent A_2 et A_4 donnés par (29.104) pour le cas de l'équilibre hydrostatique.

L'équation (29.106) est essentiellement identique à (29.8) ou (29.9), mais en plus les termes du second ordre. Elle est traitée de la même manière, en arrivant à une équation différentielle du deuxième ordre en f (ou plus précisément f^*), ce qui n'est autre que l'équation de Clairaut (29.1) complétée par les corrections du second ordre.

L'équation (29.107) est nouvelle. En la traitant, ou mieux l'équation (29.105), comme nous avons traité (29.106), nous arrivons à une équation différentielle du second ordre en κ . C'est l'équation de Darwin qui, suivant (Jones, 1954, p. 12) peut s'écrire :

$$\begin{aligned} & \beta^2 \frac{d^2 \kappa}{d\beta^2} + 6 \frac{\delta}{D} \frac{d\kappa}{d\beta} - \left(20 - 6 \frac{\delta}{D}\right) \kappa \\ & = f^2 \left[3 \left(1 - \frac{\delta}{D}\right) + \left(1 - \frac{9\delta}{2D}\right) \eta - \frac{1}{4} \left(1 + 9 \frac{\delta}{D} \eta^2\right) \right] \end{aligned} \quad (29.108)$$

Ici D est une quantité sans dimensions définie par (29.99), qui est la densité moyenne à l'intérieur de l'équi-surface $\beta = \text{const.}$ (notée par D dans (29.4)) divisée par ρ_m la densité moyenne de la terre, et :

$$\eta = \frac{\beta}{f} \frac{df}{d\beta} \quad (29.109)$$

est la fameuse variable de Radau utilisée pour obtenir (29.10) de (29.1).

Maintenant (29.108), à l'opposée de (29.1), est une équation différentielle non homogène si $\rho \neq 0$, de façon que la solution $\kappa \equiv 0$ est impossible. Ce-ci confirme l'impossibilité pour une stratification ellipsoïdique pure (sec.29.4.4).

On peut aussi montrer (Wavre, 1932, p. 109) que κ (l'équivalent de E de Wavre) ne peut pas être nul sur la surface libre : sinon il serait identiquement nul à son intérieur, chose que nous

avons vue juste être impossible. Alors, l'ellipsoïde équipotentiel de référence ne peut pas être une figure d'équilibre.

Pour une figure d'équilibre terrestre, κ doit être positif et décroissant vers le centre. Sur la surface de la terre, on a la valeur de Bullard (1948) :

$$\kappa = \kappa^H \cong 0.00000068 \quad (29.110)$$

voir aussi (Jones, 1954, p. 13). Ce-ci signifie que le sphéroïde d'équilibre se trouve sous l'ellipsoïde à une distance qui atteint son maximum $a_\kappa \cong 4.3m$ à la latitude 45° . Ce effet est extrêmement petit mais néanmoins essentiel !.

29.7 LA TERRE RÉELLE ET L'ELLIPSOÏDE DE RÉFÉRENCE

Ni la terre ni l'ellipsoïde de référence (considérée comme équipotentielle ou ellipsoïde de niveau) est en équilibre hydrostatique. Pourtant, les équations du second ordre (29.103) et (29.104) se tiennent aussi dans ces cas, puisqu'elles ont été déterminées sans présupposer un équilibre hydrostatique.

Cependant, il est possible de trouver deux distributions de masse correspondantes, l'une pour l'équilibre et l'autre pour l'ellipsoïde de niveau ; pour lesquelles les valeurs de f^* sont égales pour chaque β :

$$f^* = f^{*H} \quad (29.111)$$

En d'autres termes, les coefficients de P_2 dans (29.97), avec (29.98) :

$$-\frac{2}{3}(f^* + \frac{2}{3}f^{*2}) \cong -\frac{2}{3}(f^{*H} + \frac{2}{3}f^{*H2})$$

sont égaux.

Ce-ci se suit tout de suite du fait que A_2 suivant (29.104) est identique pour les cas hydrostatique et ellipsoïdique puisque D, S, T et μ dépendent seulement de la densité ρ comme fonction de β et comme dans les termes du second ordre, f peut être remplacé par f^* , de façon que κ ne se présente pas (Moritz, 1973).

Il faudrait signaler, cependant, comme :

$$\kappa \neq \kappa^H \quad (29.112)$$

et aussi :

$$f \neq f^H \quad (29.113)$$

excepté pour les termes du second ordre f doit être prise égale à f^H . Alors, nous avons le :

Théorème : *Pout toute distribution de masse en équilibre hydrostatique, il lui correspond une distribution de masse pour l'ellipsoïde équipotentiel de manière que la densité ρ est la même fonction de β et que les valeurs de l'aplatissement réduit f^* sont les mêmes pour tout couple de surfaces correspondantes à la même valeur β .*

Dans la suite, nous supposons toujours que f^* est choisie de cette manière. Nous obtenons alors une configuration de masse ellipsoïdale qui dévie très légèrement de celle de la configuration d'équilibre.

Avec cette hypothèse, (29.103) se réduit à :

$$W = W_0(\beta) + W_4(\beta)P_4(\cos\theta) \quad (29.114)$$

puisque nous avons la possibilité de prendre $A_2 = A_2^H = 0$.

Les expressions de $W_0(\beta)$ et $W_4(\beta)$ sont immédiatement trouvées en comparant (29.114) avec (29.103) en utilisant (29.104). Pour W_4 nous obtenons une expression particulièrement simple en soustrayant la valeur hydrostatique W^H , qui est trouvée en mettant $\kappa = \kappa^H$ dans (29.104) et qui est nulle par (29.107) :

$$W_4(\beta) = \frac{4}{3}\pi G\beta^2\rho_m \frac{32}{105} \left[-3(\kappa - \kappa^H)D + \frac{8}{9}(P - P^H) + (Q - Q^H) \right] \quad (29.115)$$

où par (29.99) :

$$\begin{aligned} \frac{9}{8}(P - P^H) &= \beta^{-7} \int_0^\beta \delta \frac{d}{d\beta} [(\kappa - \kappa^H)\beta^7] d\beta \\ Q - Q^H &= \beta^2 \int_\beta^1 \delta \frac{d}{d\beta} [(\kappa - \kappa^H)\beta^{-2}] d\beta \end{aligned} \quad (29.116)$$

Pour la déviation ζ de toute surface de potentiel constant de la surface correspondante de densité constante, nous trouvons facilement (théorème de Bruns !) :

$$\zeta = \frac{1}{g} W_4(\beta) P_4(\cos\theta) \quad (29.117)$$

où g désigne la gravité du point intérieur en considération.

Pour l'ellipsoïde, nous avons $\kappa = 0$ sur la surface. Pour la terre réelle, les observations satellitaires de J_4 donnent la valeur à la surface :

$$\kappa = -0.00000084 \quad (29.118)$$

(Moritz, 1973, p.48), qui est même plus lointaine de la valeur hydrostatique (29.110) : notez la différence de signe ! Autrement, les précédentes formules se tiennent aussi pour ce cas, utilisant (29.118).

Le problème est que κ décroît monotonement vers le centre seulement dans le cas hydrostatique (29.110). Pour les deux $\kappa = 0$ et (29.118) ; il s'accroît premièrement en valeur absolue avant de décroître, ce qui n'est très satisfaisant de point de vue esthétique.

Plus de détails peuvent être trouvés dans (Moritz, 1973). Le problème de la relation des modèles d'ellipsoïdes de densité avec les figures d'équilibre hydrostatique est particulièrement adressée dans la courte note (Marussi et al., 1974).

Un problème non résolu est de trouver une distribution "optimale" de κ pour l'ellipsoïde de niveau, c'est-à-dire par une condition de la stationnarité de l'énergie de potentiel comme discutée dans la section (29.5).

Littérature

1. **Baeschlin, C.F.** (1948) : Lehrbuch der Geodäsie, Orell Füssli Verlag, Zürich.
2. **Bullard, E.C.** (1948) : The figure of the earth, Monthly Not. Roy. Astr. Soc., Suppl., 5, 186-192.
3. **Chandrasekhar, S.** (1969) : Ellipsoidal figures of Equilibrium, Yale Univ. Press, New Haven.
4. **Chandrasekhar, S., and Roberts, P.H.** (1963) : the ellipticity of a slowly rotating configuration, Astrophys. J., 138, 801-808.
5. **Darwin, G.H.** (1899) : The theory of the figure of the earth carried to the second order of small quantities, Monthly Not. Roy. Astr. Soc., 60, 82-124.
6. **Denis, C., and Ibrahim, A.** (1981) : On a self-consistent representation of earth models, with an application to the computing of internal flattening, Bull. Géod., 55, 179-195.
7. **de Sitter, W.** (1924) : On the flattening and the constitution of the earth, Bull. Astron. Inst. Netherlands, II (55), 97-108.
8. **Heiskanen, W.A., and Moritz, H.** (1967) : Physical Geodesy, Freeman, San Francisco (reprint by Section of Physical Geodesy, Techn. Univ., Steyrergasse 17, A-8010 Graz).
9. **Jardetzky, W.S.** (1958) : Theories of Figures of Celestial Bodies, Interscience Publ., New York.
10. **Jeffreys, H.** (1953) : The figures of rotating planets, Monthly Not. Roy. Astr. Soc., Geophys. Suppl., 113, 97-105.
11. **Jeffreys, H.** (1970) : The Earth, 5th ed., Cambridge Univ. Press.
12. **Jones, H. Spencer.** (1954) : Dimensions and rotation, in : The Earth as a Planet (G.P. Kuiper,ed.), 1-41, Univ. of Chicago Press.
13. **Kellogg, O.D.** (1929) : Foundations of Potential Theory, Springer, Berlin (reprinted 1967).
14. **Khan, M.A.** (1968) : A re-evaluation of the theory for the hydrostatic figure of the earth, J. Geophys. Res., 73, 5335-5342.
15. **Khan, M.A.** (1969) : General solution of the problem of hydrostatic equilibrium of the earth, Geophys. J. Roy. Astr. Soc., 18, 177-188.
16. **Kopal, Z.** (1960) : Figures of Equilibrium of Celestial Bodies, Univ. of Wisconsin Press, Madison.

17. **Lanzano, P.** (1982) : Deformations of an Elastic Earth, Academic Press, New York .
18. **Ledersteger, K.** (1969) : Astronomische und physikalische Geodäsie (Erdmessung), v. V of Jordan/Eggert/kneissl, Handbuch der Vermessungskunde, J.B. Metzler, Stuttgart.
19. **Liapounoff, A.** (1904) : Sur l'équation de Clairaut et les équations plus générales de la théorie de la figure des planètes, Mém. de l'Acad. des Sciences de Pétersbourg, ser. 8, 15 (10), 1-66.
20. **Lichtenstein, L.** (1933) : Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, Springer, Berlin.
21. **Macke, W.** (1967) : Mechanik der Teilchen, Systeme und Kontinua, Geest & Portig, Leipzig.
22. **Macke, W., Rennert, P., Rieger, F., and Voss, K.** (1964) : Über die Gestalt und das Schwerfeld der Erde, Z. Geophys., 30, 21-28.
23. **Marussi, A., Moritz, H., Rapp, R.H., and Vicente, R.O.** (1974) : Ellipsoidal density models and hydrostatic equilibrium : interim report, Physics of the Earth and Planetary Interiors, 9, 4-6.
24. **Melchior, P.** (1983) : The Tides of The Planet Earth, 2nd. ed., Pergamon Press, Oxford.
25. **Moritz, H.** (1973) : Computation of ellipsoidal mass distributions, Report 206, Dept. of Geodet. Sci., Ohio State Univ., Columbus.
26. **Moritz, H.** (1980) : Advanced Physical Geodesy, Herbert Wichmann, Karlsruhe, and Abacus Press, Tunbridge Wells, Kent.
27. **Moritz, H.** (1984) : The Geodetic Reference System 1980 ; Bull. Gé. 58 (3) ("The Geodesist's Handbook 1984"), 388-398.
28. **Moritz, H. and Mueller, I.I.** (1987) : Earth Rotation : Theory and Observation, Ungar, New York.
29. **Nakiboglu, S.M.** (1979) : Hydrostatic Figure and related properties of the earth, Geophys. J. Roy. Astr. Soc., 57, 639-648.
30. **Pizzetti, P.** (1913) : Principii della Teoria Meccanica della Figura dei Pianeti, Enrico Spoerri, Pisa.
31. **Poincaré, H.** (1885) : Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation, Acta Math., 7 ; 259-380 (reprinted in vol. VII of his Oeuvres).
32. **Poincaré, H.** (1903) : Figures d'Equilibre d'une Masse Fluide, Gauthiers-Villars, Paris.
33. **Voss, K.** (1965) : Über die Gestalt und das Schwerfeld der II, Z. Geophys. ; 31, 313-326.
34. **Voss, K.** (1966) : Über die Gestalt und das Schwerfeld der Erde III, Z. Geophys., 32, 216-231.

35. **Wavre, R.** (1932) : Figures Planétaires et Géodésie, Gauthier-Villars, Paris.

The collected works of Liapunov are :

А.М. Ляпунов (1954-1965) : Собрание Сочинений в 6-ти томах, Издательство Академий Наук СССР, Москва.

The review monograph :

Итоги науки и техники, Астрономия, Том 10 : Равновесие и устойчивость гравитирующих систем, ред. И.С. Щербина-Самойлова, Всесоюзный институт научной и технической информации АН СССР, Москва 1975.

gives many references in Russian.

The author is indebted to Prof. K. Bretterbauer, Prof. E. Grafarend, Dr. M.S. Petrovskaya and Prof. L. Stange for help with the references. Mr. K. Rautz has carefully checked the formulas and the text, and also drawn the figures.

After finishing this paper, the report :

Denis, C. (1985) : The hydrostatic figure of the earth, Geophys. Rep. Publ. No. 85/002, Department of Astronomy and Astrophysics, University of Liège.

came to my attention. It is almost exactly complementary to the present paper, containing detailed numerical studies, geophysical discussions, and additional references.

I also was delighted to see the recent paper :

Молоденский, М.С. (1988) : зависимость гравитационного поля земли от изменения скорости ее вращения, Геодезия и Картография No 5 ,11-13,
in which M.S Molodensky occupies himself with the integral equation of Lichtenstein !

LA REPRÉSENTATION PLANE UTM

30.1 DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS

La représentation plane UTM (Universal Transverse Mercator) est l'une des représentations la plus utilisée dans le monde.

C'est une représentation :

- conforme d'un modèle ellipsoïdique,
- transverse : c'est-à-dire l'image de l'équateur (en partie) est l'axe Ox (vers l'Est) et l'image d'un méridien appelé méridien central, de longitude que nous supposons égale à 0, est l'axe Oy (vers le Nord) du plan.

Les coordonnées rectangulaires d'un point sont des fonctions de la forme :

$$X = X(\varphi, \lambda) \quad (30.1)$$

$$Y = Y(\varphi, \lambda) \quad (30.2)$$

où (φ, λ) sont les coordonnées du point sur le modèle ellipsoïdique.

Soit un point $M(\varphi, 0)$ sur le méridien origine, alors les coordonnées de m son image sur le plan sont :

$$X(\varphi, 0) = 0 \quad (30.3)$$

$$Y(\varphi, 0) = Y(\varphi) \quad (30.4)$$

$Y(\varphi)$ sera déterminée en imposant que le long du méridien central ou origine, les longueurs sont conservées. Sur le méridien, la longueur est donnée par :

$$\beta(\varphi) = \int_0^\varphi \rho ds \quad (30.5)$$

d'où :

$$\beta(\varphi) = Y(\varphi) = Y(\varphi, 0)$$

30.2 DÉTERMINATION DES COORDONNÉES UTM

30.2.1 Calcul Direct

Sur l'ellipsoïde, on a :

$$ds^2 = \rho^2 d\varphi^2 + N^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2 \quad (30.6)$$

le carré de l'élément de longueur infinitésimal, avec :

$$N(\varphi) = a(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2}$$

$$\rho(\varphi) = a(1 - e^2)(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-3/2}$$

respectivement les rayons de courbure de la grande normale et de la méridienne, a le demi grand axe et e la première excentricité de l'ellipsoïde de référence. On peut écrire que :

$$ds^2 = N^2 \cos^2 \varphi \left(\frac{\rho^2 d\varphi^2}{N^2 \cos^2 \varphi} + d\lambda^2 \right) \quad (30.7)$$

en posant :

$$dL = \frac{\rho d\varphi}{N \cos \varphi} \quad (30.8)$$

$$\text{ou } L = \text{Logtg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) - \frac{e}{2} \text{Log} \frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi} \quad (30.9)$$

Avec L la latitude isométrique. On a alors les coordonnées (L, λ) symétriques et orthogonales. L'expression de ds^2 est égale à :

$$ds^2 = N^2 \cos^2 \varphi (dL^2 + d\lambda^2) \quad (30.10)$$

Sur le plan, on a :

$$dS^2 = dX^2 + dY^2 \quad (30.11)$$

On pose :

$$z = L + i\lambda \quad (30.12)$$

$$Z = Y + iX \quad (30.13)$$

où i désigne le nombre complexe tel que $i^2 = -1$. Entre z et Z , on a la relation :

$$Z = Y + iX = f(z) = f(L + i\lambda) \quad (30.14)$$

où f est une fonction à déterminer. La représentation étant conforme, la fonction f est par suite une fonction analytique dans \mathbb{C} (l'ensemble des nombres complexes). La fonction f est dérivable à tout ordre et développable en séries en tout point complexe. Considérons le point z_0 tel que $z_0 = L + i0 = L$ et $z = L + i\lambda$, ce qui donne $z - z_0 = i\lambda$, par suite f s'écrit au voisinage de z_0 :

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + \frac{(z - z_0)^2}{2!}f''(z_0) + \dots + \frac{(z - z_0)^n}{n!}f^{(n)}(z_0) + \dots \quad (30.15)$$

On se limite à $n = 8$. D'où :

$$Y + iX = f(L) + i\lambda f'(L) - \frac{\lambda^2}{2!}f''(L) - i\lambda^3 f'''(L) \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\lambda^4 f^{(4)}(L) + i\frac{\lambda^5}{5!}f^{(5)}(L) - \frac{\lambda^6}{6!}f^{(6)}(L) - i\frac{\lambda^7}{7!}f^{(7)}(L) + \frac{\lambda^8}{8!}f^{(8)}(L) + \dots \quad (30.16)$$

Pour $\lambda = 0$, on a $Y + iX = f(L)$ soit :

$$Y = f(L) = Y(\varphi, 0) = \beta(\varphi)$$

Posons :

$$a_0 = f(L) = \beta(\varphi) \quad (30.17)$$

$$a_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(L) = \frac{d^n \beta(\varphi)}{n! d\varphi^n} \quad (30.18)$$

Ce qui donne :

$$Y + iX = a_0 + ia_1\lambda - a_2\lambda^2 - ia_3\lambda^3 + a_4\lambda^4 + ia_5\lambda^5 - a_6\lambda^6 - ia_7\lambda^7 + a_8\lambda^8 + \dots \quad (30.19)$$

D'où :

$$X = a_1\lambda - a_3\lambda^3 + a_5\lambda^5 - a_7\lambda^7 + \dots \quad (30.20)$$

$$Y = \beta(\varphi) - a_2\lambda^2 + a_4\lambda^4 - a_6\lambda^6 + a_8\lambda^8 + \dots \quad (30.21)$$

Avec :

$$a_0 = f(L) = \beta(\varphi) \quad (30.22)$$

$$a_1 = f'(L) = \frac{d\beta}{dL} = \frac{d\beta}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dL} \quad (30.23)$$

En posant :

$$\eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi$$

avec e' la deuxième excentricité :

$$e'^2 = \frac{e^2}{1 - e^2} \quad (30.24)$$

et :

$$t = tg \varphi \quad (30.25)$$

on obtient les coefficients :

$$a_1 = N \cos \varphi \quad (30.26)$$

$$a_2 = -\frac{1}{2} N \cos \varphi \sin \varphi \quad (30.27)$$

$$a_3 = -\frac{1}{6} N \cos^3 \varphi (1 + \eta^2 - t^2) \quad (30.28)$$

$$a_4 = \frac{1}{24} N \cos^3 \varphi \sin \varphi (5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4) \quad (30.29)$$

$$a_5 = \frac{1}{120} N \cos^5 \varphi (5 - 18t^2 + t^4 + 14\eta^2 - 58\eta^2 t^2 + 13\eta^4) \quad (30.30)$$

$$a_6 = -\frac{1}{720} N \cos^5 \varphi \sin \varphi (61 - 58t^2 + t^4 + 270\eta^2 - 330t^2 \eta^2 + 200\eta^4 - 232t^2 \eta^4) \quad (30.31)$$

$$a_7 = -\frac{1}{5040} N \cos^7 \varphi (61 + 131t^2 + 179t^4 + 331\eta^2 - 3298t^2 \eta^2) \quad (30.32)$$

$$a_8 = \frac{1}{40320} N \cos^7 \varphi \sin \varphi (165 - 61t^2 + 537t^4 + 9679\eta^2 - 23278t^2 \eta^2 + 9244\eta^4 + 358t^4 \eta^2 - 19788t^2 \eta^4) \quad (30.33)$$

Le calcul de $\beta(\varphi) = f(L) = \beta$ se calcule à partir du développement de $\beta(\varphi)$ en fonction de $u = e^2 \sin^2(\varphi)$ car $u < 1$. On exprime $\sin^m \varphi$ en fonction de \sin de multiples de φ soit $\sin p \varphi$. En intégrant, on arrive à :

$$\beta(\varphi) = a(1 - e^2) \cdot (C_0 \varphi + C_2 \sin 2\varphi + C_4 \sin 4\varphi + C_6 \sin 6\varphi + C_8 \sin 8\varphi + C_{10} \sin 10\varphi + C_{12} \sin 12\varphi) \quad (30.34)$$

Avec :

$$C_0 = 1 + 3e^2/4 + 45.e^4/64 + 175.e^6/256 + 11025.e^8/16384 + 43659.e^{10}/65536 + 693693.e^{12}/1048576 \quad (30.35)$$

$$C_2 = -(3.e^2/8 + 15.e^4/32 + 525.e^6/1024 + 2205.e^8/4096 + 72765.e^{10}/131072 + 297297.e^{12}/524288) \quad (30.36)$$

$$C_4 = 15.e^4/256 + 105.e^6/1024 + 2205.e^8/16384 + 10395e^{10}/65536 + 1486485e^{12}/8388608 \quad (30.37)$$

$$C_6 = -35.e^6/3072 - 315.e^8/12288 - 31185.e^{10}/786432 - 165165.e^{12}/3145728 \quad (30.38)$$

$$C_8 = 315.e^8/131072 + 3465.e^{10}/524288 + 99099.e^{12}/8388608 \quad (30.39)$$

$$C_{10} = -693.e^{10}/1310720 - 9009.e^{12}/5242880 \quad (30.40)$$

$$C_{12} = 1001.e^{12}/8388608 \quad (30.41)$$

Posons :

$$\Lambda = \lambda - \lambda_0 \quad (30.42)$$

Alors les formules définitives du calcul direct sont en s'arrêtant à l'ordre 8 :

$$X = a_1\Lambda - a_3\Lambda^3 + a_5\Lambda^5 - a_7\Lambda^7 \quad (30.43)$$

$$Y = \beta(\varphi) - a_2\Lambda^2 + a_4\Lambda^4 - a_6\Lambda^6 + a_8\Lambda^8 \quad (30.44)$$

En général, on applique à X, Y un coefficient de réduction $k = 0.9996$ et une constante de translation en X de 500000 m, les coordonnées obtenues sont :

$$X' = k.X + 500000.00 \text{ m} \quad (30.45)$$

$$Y' = k.Y \quad (30.46)$$

30.2.2 Calcul Inverse

Ayant les coordonnées (X', Y') en UTM et la longitude λ_0 du méridien central, comment calculer (φ, λ) . On revient à

$$X = (X' - 500000)/k \quad (30.47)$$

$$Y = Y'/k \quad (30.48)$$

En utilisant les variables : $z = L + i(\lambda - \lambda_0)$ et $Z = Y + iX$, on cherche à déterminer une fonction analytique g telle que :

$$z = g(Z) \quad (30.49)$$

$$\text{ou } L + i(\lambda - \lambda_0) = g(Y + iX) \quad (30.50)$$

Considérons sur l'axe OY le point $P(0, Y)$ (Fig.(30.1), il lui correspond l'affixe $Z_0 = Y$, sur l'ellipsoïde, il est l'image de $L' = L'(\varphi') = g(Z_0)$. D'où le développement de g au point Z_0 :

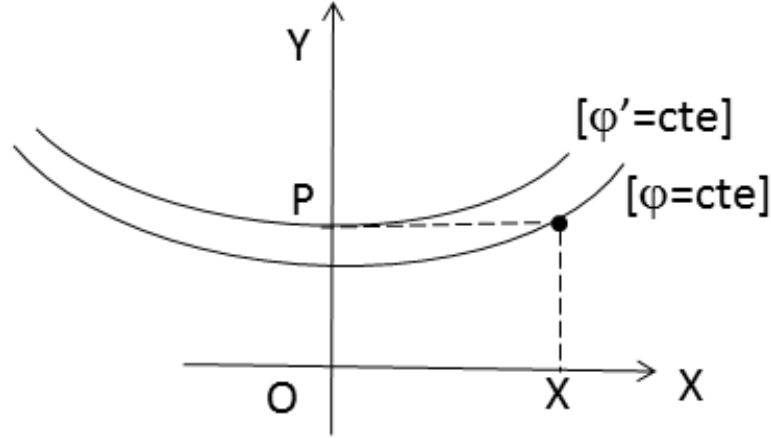


Fig. 30.1 Passage de (X, Y) à (φ, λ)

$$g(Z) = g(Z_0) + (Z - Z_0)g'(Z_0) + \frac{(Z - Z_0)^2}{2!}g''(Z_0) + \dots + \frac{(Z - Z_0)^n}{n!}g^{(n)}(Z_0) + \dots \quad (30.51)$$

Or :

$$Z - Z_0 = Y + iX - Y = iX$$

ce qui donne :

$$L + i(\lambda - \lambda_0) = g(Z_0) + iXg'(Y) - \frac{1}{2}X^2 \cdot g''(Y) - \frac{1}{3!}iX^3g^{(3)}(Y) + \frac{1}{4!}X^4g^{(4)}(Y) + \frac{1}{5!}iX^5g^{(5)}(Y) - \frac{1}{6!}X^6g^{(6)}(Y) + \dots \quad (30.52)$$

Posons :

$$b_0 = g(Z_0) = g(Y) = L' \quad (30.53)$$

$$b_n = \frac{g^{(n)}(Y)}{n!} = \frac{1}{n!} \frac{d^n L'}{dY^n} = \frac{1}{n!} \frac{d^n L'}{d\beta^n} \quad (30.54)$$

D'où :

$$\lambda - \lambda_0 = b_1X - b_3X^3 + b_5X^5 - b_7X^7 + \dots \quad (30.55)$$

$$L = L' - b_2X^2 + b_4X^4 - b_6X^6 + b_8X^8 + \dots \quad (30.56)$$

Avec :

$$b_0 = g(Z_0) = L' \quad (30.57)$$

$$b_1 = g'(Y) = \frac{dL'}{dY} = \frac{dL'}{d\beta} = \frac{dL'}{d\varphi'} \cdot \frac{d\varphi'}{d\beta} \quad (30.58)$$

En posant $\eta'^2 = e'^2 \cos^2 \varphi'$ avec e' la deuxième excentricité $e'^2 = e^2 / (1 - e^2)$, $t' = \operatorname{tg} \varphi'$ et $N' = N(\varphi')$ on obtient les coefficients :

$$b_1 = \frac{1}{N' \cos \varphi'} \quad (30.59)$$

$$b_2 = \frac{\operatorname{tg} \varphi'}{2N'^2 \cos \varphi'} \quad (30.60)$$

$$b_3 = \frac{(1 + 2t'^2 + \eta'^2)}{6N'^3 \cos \varphi'} \quad (30.61)$$

$$b_4 = \frac{\operatorname{tg} \varphi' (1 + 6t'^2 + \eta'^2 - 4\eta'^4)}{24N'^4 \cos \varphi'} \quad (30.62)$$

$$b_5 = \frac{(5 + 28t'^2 + 6\eta'^2 + 24t'^4 + 8\eta'^2 t'^2)}{120N'^5 \cos \varphi'} \quad (30.63)$$

$$b_6 = \frac{\operatorname{tg} \varphi' (61 + 180t'^2 + 46\eta'^2 + 120t'^4 + 48\eta'^2 t'^2)}{720N'^6 \cos \varphi'} \quad (30.64)$$

$$b_7 = \frac{(61 + 622t'^2 + 107\eta'^2 + 1320t'^4 + 1538\eta'^2 t'^2 + 46\eta'^4)}{5040N'^7 \cos \varphi'} \quad (30.65)$$

Ayant L , on calcule φ en utilisant la formule :

$$L = \operatorname{Log} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) - \frac{e}{2} \operatorname{Log} \left(\frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi} \right) \quad (30.66)$$

ce-ci se fait par itérations.

30.2.3 Le Module linéaire

Le module linéaire m est telque :

$$m^2 = \left(\frac{dS}{ds} \right)^2 = \frac{dS^2}{ds^2} = \frac{dX^2 + dY^2}{\rho^2 d\varphi^2 + N^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2} \quad (30.67)$$

La représentation étant conforme, alors le module linéaire est indépendant de la direction, mais ne dépend que du point, on choisit de calculer m le long des parallèles, soit $d\varphi = 0$, ce qui donne :

$$m^2 = \frac{dX^2 + dY^2}{N^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2} \quad (30.68)$$

Comme $X = a_1\lambda - a_3\lambda^3 + a_5\lambda^5 + \dots$

Et $Y = \beta(\varphi) - a_2\lambda^2 + a_4\lambda^4 + \dots$

Et que les coefficients a_i sont des fonctions de la latitude (φ) seulement, d'où :

$$dX = a_1d\lambda - 3a_3\lambda^2d\lambda + 5a_5\lambda^4d\lambda = (a_1 - 3a_3\lambda^2 + 5a_5\lambda^4)d\lambda \quad (30.69)$$

et

$$dY = -2a_2\lambda d\lambda + 4a_4\lambda^3d\lambda \quad (30.70)$$

En gardant les termes en λ et λ^2 , on obtient :

$$dX = N\cos\varphi[1 + (\lambda^2/2)\cos^2\varphi(1 - tg^2\varphi + \eta^2)]d\lambda \quad (30.71)$$

Et :

$$dY = \lambda N\cos^2\varphi tg\varphi d\lambda \quad (30.72)$$

Par suite :

$$dX^2 + dY^2 = N^2\cos^2\varphi((1 + (\lambda^2/2)\cos^2\varphi(1 - tg^2\varphi + \eta^2))^2 + \lambda^2\sin^2\varphi)d\lambda^2 \quad (30.73)$$

En simplifiant et en négligeant les termes en λ^4 , on trouve :

$$m = \sqrt{1 + \lambda^2(1 + \eta^2)\cos^2\varphi} \quad (30.74)$$

Au lieu de prendre m comme module linéaire, on le multiplie par un facteur k appelé facteur de réduction de l'échelle généralement égal à 0.9996. Le module linéaire devient :

$$m' = k\sqrt{1 + \lambda^2(1 + \eta^2)\cos^2\varphi} \quad (30.75)$$

On remplace λ par $\lambda - \lambda_0$; on trouve la formule du module linéaire :

$$m' = k\sqrt{1 + (\lambda - \lambda_0)^2(1 + e'^2\cos^2\varphi)\cos^2\varphi} \quad (30.76)$$

30.2.4 Convergence des méridiens

Le gisement de l'image du méridien appelé 'convergence des méridiens' et noté par γ en un point (φ, λ) est donné en première approximation par la formule :

$$tg\gamma = (\lambda - \lambda_0)\sin\varphi \quad (30.77)$$

γ est comptée dans le sens des gisements.

LE MODÈLE DE BURSA-WOLF

31.1 INTRODUCTION

Avec le développement de la technologie de positionnement spatial (GPS, GLONASS, Galileo, ComPass), laquelle fournit à l'utilisateur sa position (X, Y, Z) tridimensionnelle dans un système géocentrique mondial donné, par exemple pour la technologie GPS c'est le système dit *WGS84* (World Geodetic System 1984), il est nécessaire de savoir la transformation de passage du système géodésique mondial au système géodésique national ou local. Nous présentons ci-après en détail le modèle de Bursa-Wolf de transformations de passage entre les systèmes géodésiques.

Nous utilisons par la suite les notations suivantes :

- (X_1, Y_1, Z_1) les coordonnées cartésiennes 3D dans le système $S_1 (O', X_1, Y_1, Z_1)$,
- (X_2, Y_2, Z_2) les coordonnées cartésiennes 3D dans le système $S_2 (O, X_2, Y_2, Z_2)$ (système 2).

31.2 LE MODÈLE DE BURSA - WOLF

Ce modèle s'écrit sous la forme vectorielle :

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{T} + (1+m) \cdot \mathbf{R}(rx, ry, rz) \cdot \mathbf{X}_1 \quad (31.1)$$

où :

- \mathbf{X}_2 est le vecteur de composantes $(X_2, Y_2, Z_2)^T$, T désigne transposée,
- $\mathbf{T} = \mathbf{OO}'$ est le vecteur translation de composantes $(T_X, T_Y, T_Z)^T$ entre les systèmes 1 et 2,
- $1+m$ est le facteur d'échelle entre les 2 systèmes,
- $\mathbf{R}(rx, ry, rz)$ est la matrice de rotation (3×3) pour passer du système 1 au système 2,
- \mathbf{X}_1 est le vecteur de composantes $(X_1, Y_1, Z_1)^T$.

En développant (31.1), on obtient :

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_X \\ T_Y \\ T_Z \end{pmatrix} + (1+m) \begin{pmatrix} 1 & +rz & -ry \\ -rz & 1 & +rx \\ +ry & -rx & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} \quad (31.2)$$

avec (rx, ry, rz) les rotations comptées positivement dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. Comment a-t-on obtenu cette formule ?

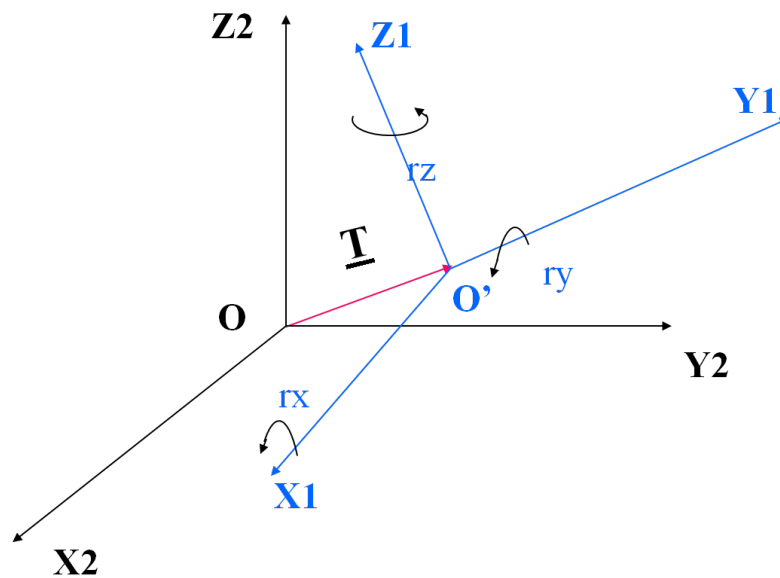


Fig. 31.1 Le Modèle de Bursa-Wolf

Posons :

$$\alpha = rx \quad (31.3)$$

$$\beta = ry \quad (31.4)$$

$$\gamma = rz \quad (31.5)$$

31.3 MATRICES DE ROTATION

Dans (31.2), α, β et γ sont les angles de rotation respectivement pour ramener les axes $O'X_1, O'Y_1$ et $O'Z_1$ parallèles aux axes OX_2, OY_2 et OZ_2 . Faisant abstraction de la translation entre les systèmes 1 et 2, soit un point M dans le plan OX_1Y_1 d'affixe $Z_1 = X_1 + iY_1$, dans le plan $O'X_2Y_2$ le point M a l'affixe $Z_2 = X_2 + iY_2$. On peut écrire :

$$Z_2 = X_2 + iY_2 = \rho e^{i\theta} \quad (31.6)$$

$$Z_1 = \rho e^{i(\theta+\gamma)} = \rho e^{i\theta} e^{i\gamma} = Z_2 e^{i\gamma} \quad (31.7)$$

En passant aux coordonnées, on a :

$$\begin{aligned} X_1 + iY_1 &= e^{i\gamma}(X_2 + iY_2) \\ \Rightarrow X_2 + iY_2 &= e^{-i\gamma}(X_1 + iY_1) = (\cos\gamma - i\sin\gamma)(X_1 + iY_1) \end{aligned} \quad (31.8)$$

En séparant les parties réelles et imaginaires de l'équation précédente, on obtient :

$$X_2 = X_1 \cos\gamma + Y_1 \sin\gamma \quad (31.9)$$

$$Y_2 = -X_1 \sin\gamma + Y_1 \cos\gamma \quad (31.10)$$

En les écrivant sous forme matricielle avec $Z_2 = Z_1$:

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} = R(\gamma) \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} \quad (31.11)$$

avec :

$$R(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (31.12)$$

Appelons $R(\alpha), R(\beta)$ les autres matrices de rotation. On a alors :

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad (31.13)$$

$$R(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix} \quad (31.14)$$

Le modèle de Bursa-Wolf est obtenu comme suit :

- on fait subir une rotation autour de $O'X_1$ d'angle α de matrice de rotation $R(\alpha)$,
- on fait subir une rotation autour de $O'Y_1$ d'angle β de matrice de rotation $R(\beta)$,
- on fait subir une rotation autour de $O'Z_1$ d'angle γ de matrice de rotation $R(\gamma)$.

Le résultat est la matrice :

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = R(\gamma).R(\beta).R(\alpha) \quad (31.15)$$

Comme les angles de rotations sont petites $\leq 3^\circ$, on va exprimer chaque matrice R en gardant seulement les termes du deuxième ordre. On utilise les développements :

$$\sin\alpha \approx \alpha \quad (31.16)$$

$$\cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2} \quad (31.17)$$

Alors les formules (31.13-31.12) deviennent :

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{\alpha^2}{2} & \alpha \\ 0 & -\alpha & 1 - \frac{\alpha^2}{2} \end{pmatrix} \quad (31.18)$$

$$R(\beta) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\beta^2}{2} & 0 & -\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \beta & 0 & 1 - \frac{\beta^2}{2} \end{pmatrix} \quad (31.19)$$

$$R(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\gamma^2}{2} & \gamma & 0 \\ -\gamma & 1 - \frac{\gamma^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (31.20)$$

En revenant à la formule (31.15), on obtient pour la matrice $R(\alpha, \beta, \gamma)$ l'expression suivante à l'ordre 2 :

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\gamma^2}{2} - \frac{\beta^2}{2} & \gamma + \alpha\beta & -\beta + \alpha\gamma \\ -\gamma & 1 - \frac{\gamma^2}{2} - \frac{\alpha^2}{2} & \alpha + \beta\gamma \\ \beta & -\alpha & 1 - \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\beta^2}{2} \end{pmatrix} \quad (31.21)$$

Maintenant, comme les trois angles sont petites, on va considérer que les termes du premier ordre ce qui donne pour $R(\alpha, \beta, \gamma)$:

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} 1 & \gamma & -\beta \\ -\gamma & 1 & \alpha \\ \beta & -\alpha & 1 \end{pmatrix} \quad (31.22)$$

Revenons à (rx, ry, rz) , nous trouvons :

$$R(rx, ry, rz) = \begin{pmatrix} 1 & rz & -ry \\ -rz & 1 & rx \\ ry & -rx & 1 \end{pmatrix} \quad (31.23)$$

La formule (31.2) s'écrit :

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_X \\ T_Y \\ T_Z \end{pmatrix} + (1+m) \begin{pmatrix} 0 & rz & -ry \\ -rz & 0 & rx \\ ry & -rx & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} \quad (31.24)$$

Littérature

1. **T. Soler.** 1998. A compendium of transformation formulas useful in GPS work. *Journal of Geodesy*, Vol.72, n°7/8, pp 482-490.

LES ASPECTS DIRECT, OBLIQUE ET TRANSVERSE DE LA REPRÉSENTATION PLANE MERCATOR

32.1 L'ASPECT DIRECT

La représentation Mercator (aspect direct) est une représentation plane cylindrique conforme de la sphère. A un point $p(\varphi, \lambda)$ associe son image $P(X, Y)$ du plan (O, X, Y) telque :

$$X = R\lambda \quad (32.1)$$

$$Y = R \operatorname{Logtg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \quad (32.2)$$

On appelle :

$$L_M = \operatorname{Logtg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \quad (32.3)$$

la latitude croissante ou la latitude de Mercator, R le rayon de la sphère modèle.

32.2 L'ASPECT OBLIQUE

Considérons maintenant la représentation Mercator oblique de direction le vecteur unitaire OP' de composantes $(\cos\varphi_0\cos\lambda_0, \cos\varphi_0\sin\lambda_0, \sin\varphi_0)^T$ (Fig.32.1). On veut calculer les côtés

$$O'M' = \Lambda \text{ et } MM' = \Phi.$$

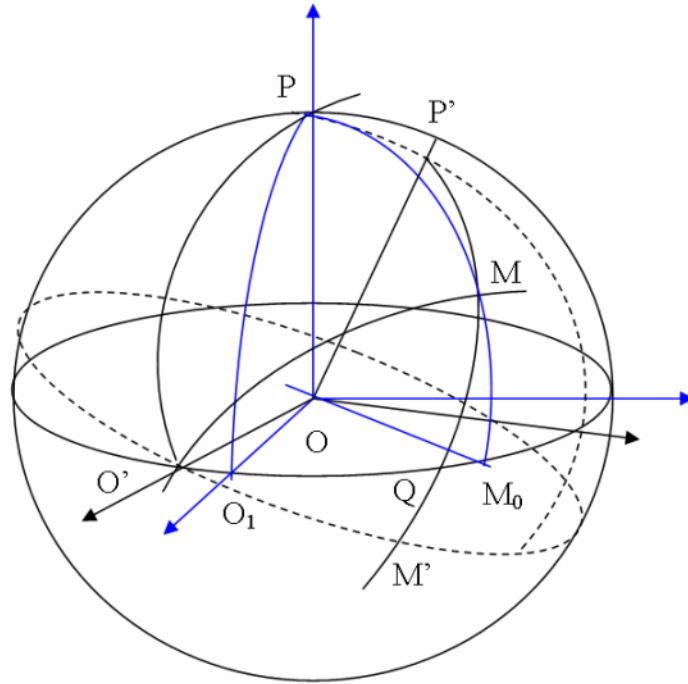


Fig. 32.1 L'Aspect Oblique

Soit le triangle sphérique $O'PM$, on a les éléments suivants :

$$- PM = \frac{\pi}{2} - \varphi,$$

$$- O'P = \frac{\pi}{2},$$

$$- O'\hat{P}M = \frac{\pi}{2} - \lambda_0 + \lambda = \lambda - \lambda_0 + \frac{\pi}{2}.$$

D'où $O'M$ par la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique¹ :

1. $\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$

$$\cos O'M = \cos \frac{\pi}{2} \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) + \sin \frac{\pi}{2} \sin(\frac{\pi}{2} - \varphi) \cos(\lambda - \lambda_0 + \frac{\pi}{2}) \quad (32.4)$$

Soit en appelant $\psi = O'M$:

$$\cos \psi = -\cos \varphi \sin(\lambda - \lambda_0) \quad (32.5)$$

Soit maintenant le triangle sphérique $O'MM_0$:

- $O'M = \psi$ connu,
- $MM_0 = \varphi$,
- $O'M_0 = \lambda - \lambda_0 + \frac{\pi}{2}$,
- $O'\hat{M}_0M = \frac{\pi}{2}$.

En appliquant la formule des Sinus :

$$\frac{\sin O'\hat{M}_0M}{\sin O'M} = \frac{\sin M_0\hat{O}'M}{\sin M_0M} \Rightarrow \frac{\sin(\pi/2)}{\sin \psi} = \frac{\sin M_0\hat{O}'M}{\sin \varphi} \Rightarrow \sin \omega = \frac{\sin \varphi}{\sin \psi} \quad (32.6)$$

$$\text{avec } \omega = M_0\hat{O}'M \quad (32.7)$$

Détermination de Φ :

Dans le triangle sphérique $O'M'M$:

- $O'M = \psi$,
- $M'M = \Phi$,
- $O'\hat{M}'M = \frac{\pi}{2}$,
- $M\hat{O}'M' = \omega + \frac{\pi}{2} - \varphi_0 = \frac{\pi}{2} + \omega - \varphi_0$.

En utilisant la formule des Sinus :

$$\frac{\sin O'\hat{M}'M}{\sin O'M} = \frac{\sin M'\hat{O}'M}{\sin M'M} \Rightarrow \frac{\sin(\pi/2)}{\sin \psi} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + \omega - \varphi_0)}{\sin \Phi} \Rightarrow \sin \Phi = \cos(\omega - \varphi_0) \sin \psi \quad (32.8)$$

Détermination de Λ :

Nous appliquons le règle de Neper dans le triangle rectangle en M' $O'M'M$:

$$\cos(\frac{\pi}{2} - \Lambda) = \cot g(\frac{\pi}{2} + \omega - \varphi_0) \cdot \cot g(\frac{\pi}{2} - \Phi) \quad (32.9)$$

soit :

$$\sin \Lambda = -\operatorname{tg}(\omega - \varphi_0) \cdot \operatorname{tg} \Phi \quad (32.10)$$

32.3 L'ASPECT TRANSVERSE

Soit la figure suivante (32.2) :

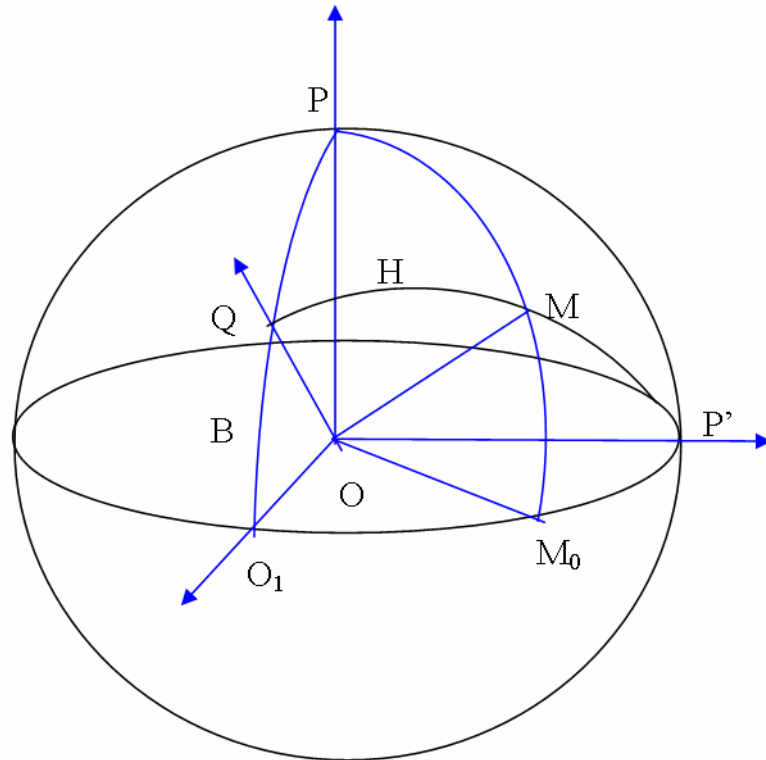


Fig. 32.2 L'Aspect Transverse

On définit les nouvelles variables dites de Cassini-Soldner :

$$B = O_1Q \quad ; \quad H = QM \quad (32.11)$$

B, H sont respectivement les pseudo longitude et latitude. On a alors les équations :

$$X = R.B \quad (32.12)$$

$$Y = R.Logtg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{H}{2}\right) \quad (32.13)$$

Exprimons maintenant (B, H) en fonction de (φ, λ) . Dans le triangle rectangle PQM en Q , nous avons :

- $\hat{P} = \lambda$,
- $PM = \frac{\pi}{2} - \varphi$,
- $QP = \frac{\pi}{2} - B$,
- $QM = H$.

Alors la formule des Sinus donne :

$$\frac{\sin\lambda}{\sin H} = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\sin(\frac{\pi}{2} - \varphi)} \Rightarrow \frac{\sin\lambda}{\sin H} = \frac{1}{\cos\varphi} \Rightarrow \sin H = \sin\lambda \cos\varphi \quad (32.14)$$

Utilisant la règle de Neper dans le même triangle, nous obtenons :

$$\cos\lambda = \cotg B \cdot \cotg\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \Rightarrow \tg B = \frac{\tg\varphi}{\cos\lambda} \quad (32.15)$$

Remarque : On peut retrouver ces relations à partir du cas oblique en faisant $\varphi_0 \rightarrow 0$ et $\lambda_0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$. En effet, l'équation (32.5) devient :

$$\cos\psi = -\cos\varphi \sin(\lambda - \lambda_0) = -\cos\varphi \sin\left(\lambda - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\varphi \cos\lambda \quad (32.16)$$

$$\text{et } \sin\omega = \frac{\sin\varphi}{\sin\psi} \quad (32.17)$$

Or :

$$\sin\Phi = \cos(\omega - \varphi_0) \sin\psi = \cos\omega \sin\psi \quad (32.18)$$

Comme :

$$\begin{aligned} \cos^2\omega &= 1 - \sin^2\omega = 1 - \left(\frac{\sin\varphi}{\sin\psi}\right)^2 = 1 - \frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\psi} = 1 - \frac{\sin^2\varphi}{1 - \cos^2\psi} = \\ &= 1 - \frac{\sin^2\varphi}{1 - \cos^2\varphi \cos^2\lambda} = \frac{1 - \cos^2\varphi \cos^2\lambda - \sin^2\varphi}{1 - \cos^2\varphi \cos^2\lambda} = \frac{\cos^2\varphi(1 - \cos^2\lambda)}{1 - \cos^2\varphi \cos^2\lambda} = \\ &= \frac{\cos^2\varphi \sin^2\lambda}{1 - \cos^2\varphi \cos^2\lambda} \end{aligned} \quad (32.19)$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} \cos^2 \omega &= \frac{\cos^2 \varphi \sin^2 \lambda}{1 - \cos^2 \varphi \cos^2 \lambda} \\ \Rightarrow \cos \omega &= \frac{\cos \varphi \sin \lambda}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi \cos^2 \lambda}} = \frac{\cos \varphi \sin \lambda}{\sin \psi} \end{aligned} \quad (32.20)$$

$$\Rightarrow \sin \Phi = \cos \omega \cdot \sin \psi = \cos \varphi \sin \lambda \quad (32.21)$$

en considérant $\varphi > 0$, c'est l'équation (32.14). L'équation (32.10) devient :

$$\sin \Lambda = -\operatorname{tg} \omega \cdot \operatorname{tg} \Phi = -\frac{\sin \omega}{\cos \omega} \cdot \frac{\sin \Phi}{\cos \Phi} = -\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} \frac{\sin \psi}{\cos \varphi \sin \lambda} \frac{\cos \varphi \sin \lambda}{\cos \Phi} = -\frac{\sin \varphi}{\cos \Phi} \quad (32.22)$$

utilisant :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$$

on a alors :

$$\operatorname{tg} \Lambda = -\frac{\sin \varphi}{\cos \Phi \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \Phi}}} = -\frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \Phi - \sin^2 \varphi}} = -\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi \cos \lambda} = -\frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos \lambda} \quad (32.23)$$

On retrouve à un signe près l'équation (32.15).

Littérature

1. **A. Ben Hadj Salem**. 2013. *Eléments de Géodésie*. (En préparation). 335p.

CHAPITRE 33

PRÉSENTATION DES ASPECTS DE LA GÉOMÉTRIE DE COMPENSATION NON-LINÉAIRE

L'objet de cette note est de présenter les aspects théoriques de la géométrie de la compensation non-linéaire par les moindres carrés. Elle est inspirée du travail réalisé par le Prof. P.J.G Teunissen ([1],1985).

33.1 INTRODUCTION

La théorie des moindres carrés telle qu'elle a été définie par Gauss repose sur la linéarisation. On arrive au modèle de Gauss-Markov :

$$A.X = L + V \quad (33.1)$$

avec :

- X le vecteur des inconnues,
- A la matrice des coefficients,
- L le vecteur des observables,
- V le vecteur des résidus.

La compensation des modèles linéaires a été l'objet de plusieurs investigations au cours des dernières années. Sauf que le cas de la compensation non-linéaire n'a pas été aussi développé et la bibliographie relative à ce sujet est très limitée.

33.2 PRÉSENTATION DU PROBLÈME

On considère une application non linéaire

$$y : M \rightarrow N \text{ qui à } x \in M \rightarrow y = y(x) \in N \quad (33.2)$$

où M et N deux variétés géométriques lisses munies respectivement d'un produit scalaire ou encore d'une métrique $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle_N$. Appelons :

$$\tilde{N} = \text{Im}(M) = \{y \in N / \exists x \in M \text{ unique avec } y = y(x)\} \quad (33.3)$$

Le problème de la compensation non linéaire peut être divisé en deux sous problèmes :

1. Le premier problème est de trouver les estimateurs \hat{x} et \hat{y} respectivement de x et y vérifiant la condition (33.5) ci-dessous.
2. Le deuxième sous problème est d'obtenir les propriétés statistiques des deux estimateurs précédemment cités.

Afin de pouvoir résoudre ces deux questions importantes, on se limite au cas de la résolution du problème par les estimateurs des moindres carrés. Pour cela, on suppose que l'application y est injective c'est-à-dire :

$$\forall x_1, x_2 \in M \text{ avec } x_1 \neq x_2 \Rightarrow y(x_1) \neq y(x_2) \quad (33.4)$$

ou encore, l'antécédent d'une image est un seul point.

La condition des moindres carrés est :

$$\min_{x \in M} 2E(x) = \min_{y \in \tilde{N} = y(M)} \|y_s - y\|_N = \min_{y \in \tilde{N} = y(M)} \langle y_s - y(x), y_s - y(x) \rangle_N \quad (33.5)$$

où on a noté y_s le vecteur des observables.

Appelons $P : x \in M \mapsto y(x) \in N$ et $Q : y \in \tilde{N} \mapsto x \in M$ les applications non linéaires avec :

$$\hat{y} = P(\hat{x}) \quad \text{et} \quad \hat{x} = Q(\hat{y}) \quad (33.6)$$

$$\text{avec } P \circ Q = I \quad (33.7)$$

Due à la non linéarité des applications P et Q , il est difficile de trouver une formule fermée en y . La solution est d'appliquer des méthodes itératives :

- on part d'un point $\mathbf{x}_0 \in M$ et on essaye de générer une suite $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots$ qui convergera vers le point solution $\hat{\mathbf{x}}$. Les méthodes trouvées dans la littérature procèdent conformément au schéma suivant (J.M Ortega J.M and W.C Rheinboldt, [2],1970) :

$$x_{q+1}^{(\beta)} = x_q^\beta + t_q \Delta x_q^\beta; \quad \beta = 1, 2, \dots, n \quad (33.8)$$

1. On prend $q = 0$ et on donne une première valeur \mathbf{x}_0 .

2. On détermine le pas Δx_q .

3. On détermine un scalaire t_q tel que :

$$\|y_s - y(x_{q+1})\|_M \leq \|y_s - y(x_q)\|_M \quad (33.9)$$

Cette relation assure la convergence.

4. Voir si la convergence est assurée, dans ce cas $x_{q+1} = \hat{\mathbf{x}}_1$, sinon, $q \rightarrow q + 1$ et on passe à l'étape 2.

La résolution de (33.9) dépend du choix de $\Delta \mathbf{x}_q$ et t_q .

La méthode itérative comprend deux catégories :

- la première est une méthode itérative directe qui ne nécessite pas l'utilisation des données de la fonction $E(x)$ (33.5),

- la deuxième catégorie concerne la méthode itérative du gradient qui fait appel aux calculs des dérivées de l'expression $E(x)$.

Concernant la détermination des propriétés statistiques, elle n'est pas aussi facile comme pour le cas linéaire. On a peu d'information sur une méthodologie pour traiter cette question.

L'application de la méthode itérative de Gauss fait intervenir les outils de la géométrie différentielle ou la géométrie riemannienne ce que nous rappelons dans une prochaine note.

Littérature

1. **P.J.G Teunissen.** 1985. The Geometry of Geodetic Inverse Linear Mapping and Non-Linear Adjustment. Publications On Geodesy, n°1, Volume 8, Netherlands Geodetic Commission. 177p.
2. **J.M Ortega J.M and W.C Rheinboldt.** 1970. Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables. Academic Press.

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DU PROBLÈME DE COMPENSATION NON-LINÉAIRE

34.1 INTRODUCTION

Dans un article [1], E. Grafarend et B. Schaffrin ont étudié la géométrie de la compensation ou l'ajustement non-linéaire et ont présenté le cas du problème d'intersection plane en utilisant le modèle de Gauss Markov, par les moindres carrés. Le présent papier présente les principes de la géométrie de la compensation non-linéaire par la méthode des moindres carrés en s'appuyant sur le Lemme de Pázman [2].

34.2 LA GÉOMÉTRIE NON LINÉAIRE DU MODÈLE DE GAUSS-MARKOV

Le modèle non linéaire de Gauss-Markov est défini par :

$$\zeta(X) = L - e; \quad e \in \mathcal{N}(0, \Gamma) \quad (34.1)$$

avec :

- L : le vecteur des observations $(n \times 1) = (L_1, L_2, \dots, L_n)^T$,

- X : le vecteur des inconnues $(m \times 1) = (X_1, X_2, \dots, X_m)^T$,
- e : le vecteur des erreurs $(n \times 1) = (e_1, e_2, \dots, e_n)^T$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0, \Gamma)$ avec $E(e) = 0$ et $\Gamma = E(ee^T)$ la matrice de dispersion ou variance, on prendra $\Gamma = \sigma_0^2 \cdot P^{-1}$. P est la matrice des poids et σ_0 une constante positive.
- ζ : est une fonction donnée injective d'un ouvert $U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $m < n$.

Remarque : dans le cas d'un modèle linéaire, la fonction $\zeta = A \cdot X$ où A est une matrice $n \times m$.

On note $Im\zeta = \{\zeta(X)/X \in U\}$ l'image de U par la fonction ζ . $Im\zeta$ est une variété de dimension m vérifiant les conditions :

(i) : les vecteurs $\frac{\partial \zeta}{\partial X_1}, \frac{\partial \zeta}{\partial X_2}, \dots, \frac{\partial \zeta}{\partial X_m}$ sont linéairement indépendants en chaque point $X \in U$,

(ii) : les fonctions $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial X_i \partial X_j}$ sont continues sur U pour $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$.

On introduit un produit scalaire :

$$\langle \zeta_1, \zeta_2 \rangle = \zeta_1^T \cdot P \cdot \zeta_2 \quad (34.2)$$

D'où la norme du vecteur $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)^T$:

$$\|\zeta\|^2 = \langle \zeta, \zeta \rangle = \zeta^T \cdot P \cdot \zeta = \sum_{i=1}^n p_i \cdot \zeta_i^2 \quad (34.3)$$

dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^n en prenant la matrice de poids P une matrice diagonale.

Alors la solution par les moindres carrés \bar{X} sera définie par :

$$\|L - \bar{\zeta}(\bar{X})\| = \min \{\|L - \zeta(X)\| / X \in U\} \quad (34.4)$$

Cette condition est exprimée par les équations de Lagrange-Euler soit :

$$\frac{\partial}{\partial X_i} \|L - \zeta(X)\|^2 = 0 \quad \text{pour } i \in \{1, 2, \dots, m\} \quad (34.5)$$

En effet, on veut minimiser la fonction :

$$F(X) = F(X_1, X_2, \dots, X_m) = \|L - \zeta(X)\| = \|L - \zeta(X_1, X_2, \dots, X_m)\| \quad (34.6)$$

Comme F est une fonction positive, minimiser F c'est aussi minimiser F^2 , soit $J(X) = F^2(X)$. En appliquant les équations de Lagrange-Euler, on obtient :

$$-\frac{\partial J(X)}{\partial X_i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial J(X)}{\partial X_i} = 0$$

soit :

$$\frac{\partial}{\partial X_i} \|L - \zeta(X_1, X_2, \dots, X_m)\|^2 = 0 \quad \text{pour } i \in \{1, 2, \dots, m\} \quad (34.7)$$

or :

$$\|L - \zeta(X_1, X_2, \dots, X_m)\|^2 = (L - \zeta(X_1, X_2, \dots, X_m))^T \cdot P \cdot (L - \zeta(X_1, X_2, \dots, X_m)) = \zeta(X)^T \cdot P \cdot \zeta(X) - 2L^T \cdot P \cdot \zeta(X) + L^T \cdot P \cdot L \quad (34.8)$$

Soit :

$$\frac{\partial J(X)}{\partial X_i} = 2\zeta(X)^T \cdot P \cdot \frac{\partial \zeta(X)}{\partial X_i} - 2L^T \cdot P \cdot \frac{\partial \zeta(X)}{\partial X_i} \quad \text{pour } i \in \{1, 2, \dots, m\} \quad (34.9)$$

ou encore :

$$\frac{\partial J(X)}{\partial X_i} = 2(\zeta(X) - L)^T \cdot P \cdot \frac{\partial \zeta(X)}{\partial X_i} \quad \text{pour } i \in \{1, 2, \dots, m\}$$

ce qui donne en utilisant (34.5) :

$$\langle L - \zeta(X), \frac{\partial \zeta(X)}{\partial X_i} \rangle = 0 \quad \text{pour } i \in \{1, 2, \dots, m\} \quad (34.10)$$

$$\text{ou } \langle e, \frac{\partial \zeta(X)}{\partial X_i} \rangle = 0 \quad \text{pour } i \in \{1, 2, \dots, m\} \quad (34.11)$$

Géométriquement, cela veut dire que le vecteur erreur $e = L - \zeta(X)$ est perpendiculaire (produit scalaire nul) au plan tangent de la variété $Im\zeta$ au point $\zeta(\bar{X})$ (s'il existe).

Pour le cas non-linéaire, la condition (34.10) est nécessaire mais non suffisante. Pour obtenir le minimum, il faut que la matrice $(\frac{\partial^2 J}{\partial X_i \partial X_j})$, $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$ soit définie positive.

34.3 INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE

Dans cette section, on va clarifier l'interprétation géométrique de façon que la solution de (34.10) soit localement unique.

Considérons la matrice $m \times m$ définie par :

$$G(X) = (G_{\alpha\beta}) \quad \text{avec } G_{\alpha\beta} = \langle \frac{\partial \zeta(X)}{\partial X_\alpha}, \frac{\partial \zeta(X)}{\partial X_\beta} \rangle \quad \begin{cases} \alpha = 1, 2, \dots, m \\ \beta = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (34.12)$$

Or :

$$ds^2 = G_{\alpha\beta} dX_\alpha dX_\beta \quad (34.13)$$

représente la métrique de la variété $Im\zeta$. La matrice $G(X) = (G_{\alpha\beta})$ est appelée en terme statistique la matrice d'information de Fisher.

Introduisons la matrice B définie par :

$$B(X, L) = (B_{\alpha\beta}) \quad \text{avec } B_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \|L - \zeta(X)\|^2 \quad \begin{cases} \alpha = 1, 2, \dots, m \\ \beta = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (34.14)$$

or :

$$\|L - \zeta(X)\|^2 = (L - \zeta(X))^T P (L - \zeta(X)) = (L^T - \zeta^T(X)) (PL - P\zeta(X)) = L^T PL - 2L^T P\zeta(X) + \zeta^T(X) P\zeta(X) \quad (34.15)$$

D'où :

$$\frac{\partial}{\partial X_\alpha} (L^T PL - 2L^T P\zeta(X) + \zeta^T(X) P\zeta(X)) = -2L^T P \frac{\partial \zeta}{\partial X_\alpha} + 2\zeta^T(X) P \frac{\partial \zeta(X)}{\partial X_\alpha} = -2(L^T - \zeta^T(X)) P \frac{\partial \zeta(X)}{\partial X_\alpha} \quad (34.16)$$

Donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \|L - \zeta(X)\|^2 &= -L^T P \frac{\partial^2 \zeta(X)}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} + \frac{\partial \zeta(X)}{\partial X_\beta} P \frac{\partial \zeta(X)}{\partial X_\alpha} + \zeta^T(X) P \frac{\partial^2 \zeta(X)}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} = \\ &= \frac{\partial \zeta^T(X)}{\partial X_\beta} P \frac{\partial \zeta(X)}{\partial X_\alpha} - (L^T - \zeta^T(X)) P \frac{\partial^2 \zeta(X)}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} = \\ &< \frac{\partial \zeta(X)}{\partial X_\beta}, \frac{\partial \zeta(X)}{\partial X_\alpha} > - < L - \zeta(X), \frac{\partial^2 \zeta(X)}{\partial X_\beta \partial X_\alpha} > \end{aligned} \quad (34.17)$$

Soit :

$$B_{\alpha\beta} = G_{\alpha\beta} - < L - \zeta(X), \frac{\partial^2 \zeta(X)}{\partial X_\beta \partial X_\alpha} > \quad (34.18)$$

Posons :

$$H(L, X) = (h_{\alpha\beta}) = (< L - \zeta(X), \frac{\partial^2 \zeta(X)}{\partial X_\beta \partial X_\alpha} >) \quad \begin{cases} \alpha = 1, 2, \dots, m \\ \beta = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (34.19)$$

c'est-à-dire :

$$B = G - H \quad (34.20)$$

Revenons à $Im\zeta(X) = \{\zeta(X) \mid X \in U\}$. Soit une ligne géodésique de $Im\zeta(X)$ passant par un point $\zeta = \zeta(X)$ paramétrée par son abscisse curviligne s , on a alors :

$$\chi(s) = \zeta(X(s)), \quad s \in [s_1, s_2] \quad (34.21)$$

où $X(s)$ décrit une certaine courbe dans le domaine $U \subset \mathbb{R}^m$.

Le vecteur :

$$\chi'(s) = \frac{d\chi(s)}{ds} \quad (34.22)$$

représente le vecteur tangent à la ligne géodésique au point $\zeta(X(s))$ de $Im\zeta(X)$. Ce vecteur vérifie :

$$\|\chi'(s)\|^2 = 1 \quad (34.23)$$

Par suite, la dérivée de ce vecteur par rapport à s est un vecteur orthogonal à $\chi'(s)$ donc orthogonal à $Im\zeta(X(s))$ au point $\zeta(X(s))$:

$$\chi''(s) = \frac{d\chi'(s)}{ds} \perp \chi'(s) \quad (34.24)$$

c'est-à-dire parallèle au vecteur normal à la surface ou la variété $Im\zeta(X)$ et on retrouve la propriété que $\chi(s)$ est une géodésique.

Remarquons que pour une ligne géodésique, la courbure géodésique est nulle et la courbure normale coïncide avec la courbure de la courbe $\chi(s)$ soit :

$$\rho(s) = \frac{1}{\|\chi''(s)\|} \quad (34.25)$$

le rayon de courbure. Appelons :

$$n(s) = \frac{\chi''(s)}{\|\chi''(s)\|} = \chi''(s) \cdot \rho(s) \quad (34.26)$$

c'est un vecteur unitaire perpendiculaire au plan tangent à la surface $Im\zeta(X)$.

D'après l'équation (34.10), au point $\zeta(\bar{X})$, le vecteur e est perpendiculaire à $L - \zeta(\bar{X})$. Appelons alors :

$$K(\zeta(\bar{X})) = \left\{ Z / Z \in \mathbb{R}^n \text{ avec } \langle Z, \frac{\partial \zeta(\bar{X})}{\partial X_\alpha} \rangle = 0 \quad \alpha = 1, 2, \dots, m \right\} \quad (34.27)$$

On donc $e = L - \zeta(\bar{X}) \in K$. Ce dernier est un espace vectoriel de dimension $n - m$ orthogonal à $Im\zeta(X)$ au point $\zeta(\bar{X})$. On a aussi $\chi''(s) \in K$.

34.3.1 Lemme de Pázman

On peut maintenant énoncer le lemme de Pázman (1984, [2]) comme suit :

Lemme de Pázman : Pour tout vecteur d'observation $L \in \mathbb{R}^m$, et toute solution appropriée \bar{X} des équations :

$$\langle L - \zeta(\bar{X}), \frac{\partial \zeta(\bar{X})}{\partial X_\alpha} \rangle = 0, \alpha = 1, 2, \dots, m$$

les conditions suivantes sont équivalentes :

1)- La matrice $B(\bar{X}, L) = G(\bar{X}) - \langle L - \zeta(\bar{X}), \frac{\partial^2 \zeta(\bar{X})}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \rangle$ est définie positive.

2)- Pour toute ligne géodésique $\chi(X(s))$ vérifiant :

$$\chi(\bar{s}) = \zeta(\bar{X}(\bar{s}))$$

On a l'inégalité :

$$\langle L - \zeta(\bar{X}), n(\bar{s}) \rangle < \rho(\bar{s}) \quad (34.28)$$

34.3.1.1 $1 \implies 2$

En effet, supposons que la matrice $B(\bar{X}, L)$ est définie positive c'est-à-dire :

$$\forall Y \in \mathbb{R}^m, Y \neq 0 \implies Y^T . B . Y > 0 \quad (34.29)$$

Prenons alors $Y = \chi'(\bar{s})$. On a :

$$\chi'^T(\bar{s}) . B(L, \bar{X}) . \chi'(\bar{s}) > 0 \quad (34.30)$$

Comme $B = G(\bar{X}) - H(L, \bar{X})$, on obtient :

$$\chi'^T(\bar{s}) . (G(\bar{X}) - H(L, \bar{X})) . \chi'(\bar{s}) > 0$$

soit :

$$\chi'^T(\bar{s}) . G(\bar{X}) \chi'(\bar{s}) - \chi'^T(\bar{s}) H(L, \bar{X}) . \chi'(\bar{s}) > 0 \quad (34.31)$$

Or pour s :

$$Y = \chi'(s) = \frac{d\chi(s)}{ds} = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{\partial \zeta(X(s))}{\partial X_i} \frac{dX_i(s)}{ds} = \sum_{i=1}^{i=m} \chi'_i(s) \frac{\partial \zeta(X(s))}{\partial X_i} \quad (34.32)$$

en notant $\chi'_i(s) = \frac{dX_i(s)}{ds}$ les composantes de $\chi'(s)$ dans le plan tangent à $Im\zeta$ au point $\zeta(X(s))$.
Comme :

$$\begin{aligned} \|\chi'(\bar{s})\|^2 = 1 &= \chi'^T(s) . \chi'(s) = \left\langle \sum_{i=1}^{i=m} \chi'_i(s) \frac{\partial \zeta(X(s))}{\partial X_i}, \sum_{j=1}^{j=m} \chi'_j(s) \frac{\partial \zeta(X(s))}{\partial X_j} \right\rangle = \\ &= \sum_{i,j=1}^m \chi'_i(s) . \left(\left\langle \frac{\partial \zeta(X(s))}{\partial X_i}, \frac{\partial \zeta(X(s))}{\partial X_j} \right\rangle \right) \chi'_j(s) = \chi'(s)^T . G . \chi'(s) = 1 \end{aligned} \quad (34.33)$$

Prenons $s = \bar{s}$, alors (34.31) devient :

$$\chi'^T(\bar{s})H(L, \bar{X}) \cdot \chi'(\bar{s}) < 1 \quad (34.34)$$

Comme $B = G - H$ donc la matrice H est exprimée dans la base de B soit $\left(\frac{\partial \zeta(X(s))}{\partial X_j}\right)$ En utilisant (34.32), le nombre réel $\chi'^T(\bar{s})H(L, \bar{X}) \cdot \chi'(\bar{s})$ s'écrit :

$$\chi'^T(\bar{s})H(L, \bar{X}) \cdot \chi'(\bar{s}) = \sum_{i=1}^{i=m} \chi'_i(\bar{s}) \left(\sum_{j=1}^{j=m} h_{ij} \cdot \chi'_j(\bar{s}) \right) = \sum_{i,j=1}^m \chi'_i(\bar{s}) \cdot \chi'_j(\bar{s}) \cdot h_{ij} \quad (34.35)$$

On remplace h_{ij} par

$$\langle L - \zeta(\bar{X}), \frac{\partial^2 \zeta(\bar{X})}{\partial X_i \partial X_j} \rangle$$

Par un calcul simple, l'équation (34.35) devient :

$$\chi'^T(\bar{s})H(L, \bar{X}) \cdot \chi'(\bar{s}) = \langle L - \zeta(\bar{X}), \sum_{i,j=1}^m \chi'_i(\bar{s}) \cdot \chi'_j(\bar{s}) \frac{\partial^2 \zeta(\bar{X})}{\partial X_i \partial X_j} \rangle \quad (34.36)$$

Maintenant, on va s'intéresser au membre droit du produit scalaire de l'équation (34.36). En différentiant l'équation (34.32) par rapport à s , on obtient :

$$\chi''(s) = \sum_i \frac{d\chi'_i(s)}{ds} \cdot \frac{\partial \zeta(X(s))}{\partial X_i} + \sum_i \chi'_i(s) \sum_j \frac{\partial^2 \zeta(X(s))}{\partial X_i \partial X_j} \cdot \frac{dX_j}{ds} \quad (34.37)$$

Alors on a pour $s = \bar{s}$:

$$\begin{aligned} \langle L - \zeta(\bar{X}), \chi''(\bar{s}) \rangle &= \langle L - \zeta(\bar{X}), \sum_i \frac{d\chi'_i(s)}{ds} \cdot \frac{\partial \zeta(X(s))}{\partial X_i} + \sum_i \chi'_i(s) \sum_j \frac{\partial^2 \zeta(X(s))}{\partial X_i \partial X_j} \cdot \frac{dX_j}{ds} \rangle = \\ &= \sum_i \frac{d\chi'_i(s)}{ds} \cdot \langle L - \zeta(\bar{X}), \frac{\partial \zeta(X(s))}{\partial X_i} \rangle + \sum_i \chi'_i(s) \sum_j \langle L - \zeta(\bar{X}), \frac{\partial^2 \zeta(X(s))}{\partial X_i \partial X_j} \cdot \frac{dX_j}{ds} \rangle \end{aligned} \quad (34.38)$$

Or en utilisant l'équation (34.10), le premier terme de la deuxième ligne de l'équation précédente est nul :

$$\sum_i \frac{d\chi'_i(s)}{ds} \cdot \langle L - \zeta(\bar{X}), \frac{\partial \zeta(X(\bar{s}))}{\partial X_i} \rangle = 0$$

et comme :

$$\chi'_j(s) = \frac{dX_j}{ds}$$

Alors l'équation (34.38) devient :

$$\begin{aligned} \langle L - \zeta(\bar{X}), \chi''(\bar{s}) \rangle &= \sum_i \chi'_i(s) \sum_j \langle L - \zeta(\bar{X}), \frac{\partial^2 \zeta(X(s))}{\partial X_i \partial X_j} \cdot \chi'_j(s) \rangle = \\ &= \sum_i \sum_j \chi'_j(\bar{s}) \chi'_i(\bar{s}) \langle L - \zeta(\bar{X}), \frac{\partial^2 \zeta(X(\bar{s}))}{\partial X_i \partial X_j} \rangle \end{aligned} \quad (34.39)$$

Or le deuxième membre n'est autre que l'équation (34.36). En utilisant (34.34), on obtient :

$$\langle L - \zeta(\bar{X}), \chi''(\bar{s}) \rangle < 1 \quad (34.40)$$

Or :

$$n(\bar{s}) = \rho(\bar{s}) \cdot \chi''(\bar{s})$$

D'où :

$$\langle L - \zeta(\bar{X}), n(\bar{s}) \rangle < \rho(\bar{s}) \quad (34.41)$$

34.3.1.2 2 \implies 1

On suppose que réciproquement, on a pour toute géodésique $\chi(s) = \zeta(X(s))$ de $Im\zeta$ passant par le point $\chi(\bar{s}) = \zeta(\bar{X}(\bar{s}))$ vérifiant :

$$\langle L - \zeta(\bar{X}), n(\bar{s}) \rangle < \rho(\bar{s}) \quad (34.42)$$

et :

$$\langle L - \zeta(\bar{X}), \frac{\partial \zeta(X)}{\partial X_i} \rangle = 0 \quad \text{pour } i \in \{1, 2, \dots, m\}$$

telque $\chi'(s)$ vérifiant :

$$\|\chi'(s)\|^2 = 1$$

Comme :

$$n(s) = \frac{\chi''(s)}{\|\chi''(s)\|} = \rho(s) \chi''(s)$$

le remplaçant dans l'équation (34.42), on obtient :

$$\langle L - \zeta(\bar{X}), \rho(s) \chi''(s) \rangle < \rho(\bar{s}) \quad (34.43)$$

et en simplifiant par $\rho \neq 0$, soit :

$$\langle L - \zeta(\bar{X}), \chi''(s) \rangle < 1 \quad (34.44)$$

Comme :

$$\chi(s) = \zeta(X(s)) \implies \chi'(s) = \frac{d\chi(s)}{ds} = \sum_{i=1, m} \frac{\partial \zeta}{\partial X_i} \frac{dX_i(s)}{ds} = \sum_{i=1, m} \chi'_i(s) \frac{\partial \zeta}{\partial X_i}$$

D'où en dérivant une deuxième fois par rapport à s :

$$\begin{aligned} \chi''(s) &= \sum_i \frac{d\chi'_i(s)}{ds} \cdot \frac{\partial \zeta(X(s))}{\partial X_i} + \sum_i \chi'_i(s) \sum_j \frac{\partial^2 \zeta(X(s))}{\partial X_i \partial X_j} \cdot \frac{dX_j}{ds} \\ &= \sum_i \frac{d\chi'_i(s)}{ds} \cdot \frac{\partial \zeta(X(s))}{\partial X_i} + \sum_i \sum_j \chi'_i(s) \chi'_j(s) \frac{\partial^2 \zeta(X(s))}{\partial X_i \partial X_j} \end{aligned} \quad (34.45)$$

En remplaçant $\chi''(s)$ dans (34.44), on obtient :

$$\langle L - \zeta(\bar{X}), \sum_i \frac{d\chi'_i(s)}{ds} \cdot \frac{\partial \zeta(X(s))}{\partial X_i} + \sum_i \sum_j \chi'_i(s) \chi'_j(s) \frac{\partial^2 \zeta(X(s))}{\partial X_i \partial X_j} \rangle < 1 \quad (34.46)$$

ou encore :

$$\sum_i \chi''_i(s) \langle L - \zeta(\bar{X}), \frac{\partial \zeta(X(s))}{\partial X_i} \rangle + \sum_i \sum_j \chi'_i(s) \chi'_j(s) \langle L - \zeta(\bar{X}), \frac{\partial^2 \zeta(X(s))}{\partial X_i \partial X_j} \rangle < 1 \quad (34.47)$$

Or la première somme est nulle en vertu de l'équation (34.10). Il reste :

$$\sum_i \sum_j \chi'_i(s) \chi'_j(s) \langle L - \zeta(\bar{X}), \frac{\partial^2 \zeta(X(s))}{\partial X_i \partial X_j} \rangle < 1 \quad (34.48)$$

Comme :

$$\chi'(s) = \frac{d\chi(s)}{ds} = \sum_{i=1,m} \frac{\partial \zeta}{\partial X_i} \frac{dX_i(s)}{ds} = \sum_{i=1,m} \chi'_i(s) \frac{\partial \zeta}{\partial X_i}$$

et $\chi'(s)$ vérifie $\|\chi'(s)\| = 1$ car c'est un vecteur unitaire tangent à la géodésique $\chi(s)$. Donc

$$\langle \chi'(s), \chi'(s) \rangle = 1 \Rightarrow \langle \sum_{i=1,m} \chi'_i(s) \frac{\partial \zeta}{\partial X_i}, \sum_{j=1,m} \chi'_j(s) \frac{\partial \zeta}{\partial X_j} \rangle = 1 \quad (34.49)$$

soit :

$$\sum_{i=1,m} \sum_{j=1,m} \chi'_i(s) \langle \frac{\partial \zeta}{\partial X_i}, \frac{\partial \zeta}{\partial X_j} \rangle \chi'_j(s) = \sum_{i=1,m} \sum_{j=1,m} \chi'_i(s) G_{ij} \chi'_j(s) = 1 \quad (34.50)$$

et ce-ci n'est autre que :

$$\chi'^T(s) \cdot G \cdot \chi'(s) = 1 \quad (34.51)$$

En utilisant l'équation (34.48), on a :

$$\sum_i \sum_j \chi'_i(s) \chi'_j(s) \langle L - \zeta(\bar{X}), \frac{\partial^2 \zeta(X(s))}{\partial X_i \partial X_j} \rangle < \chi'^T(s) \cdot G \cdot \chi'(s) \quad (34.52)$$

ou encore :

$$0 < \chi'^T(s) \cdot G \cdot \chi'(s) - \sum_i \sum_j \chi'_i(s) \cdot h_{ij} \cdot \chi'_j(s) \quad (34.53)$$

Finalement, nous obtenons :

$$0 < \chi'^T(s) \cdot G \cdot \chi'(s) - \chi'^T(s) \cdot H \cdot \chi'(s) \quad (34.54)$$

C'est-à-dire pour tout vecteur $Y = \chi'(s) \neq 0$ du plan tangent de $Im\zeta$:

$$Y^T . B . Y > 0 \implies \text{ la matrice } B \text{ est définie positive} \quad (34.55)$$

C.Q.F.D

Maintenant, on peut dire quand \bar{X} solution de (34.10) est solution des moindres carrés en référence à l'équation (34.4) et ce à partir du corollaire suivant :

Corollaire : Si \bar{X} est solution de :

$$\langle L - \zeta(X), \frac{\partial \zeta(X)}{\partial X_i} \rangle = 0 \quad \text{pour } i \in \{1, 2, \dots, m\} \quad (34.56)$$

avec :

$$\|L - \zeta(\bar{X})\| < r \quad (34.57)$$

où r désigne le rayon de courbure minimum de la variété $Im\zeta$ défini par :

$$r = \inf \{ \rho_\chi(s) / \chi(s) = \zeta(X(s)) \text{ une géodésique passant par } \zeta(X), \forall X \in U \} \quad (34.58)$$

Alors \bar{X} coincide avec la solution des moindres carrés $\bar{X} = \hat{X}(L)$.

Démonstration :

Comme les deux vecteurs $e = L - \zeta(\bar{X})$ et $n(\bar{s})$ sont orthogonaux à $Im\zeta$, ils sont colinéaires et comme $n(\bar{s})$ est un vecteur unitaire alors leur produit scalaire $\langle L - \zeta(\bar{X}), n(\bar{s}) \rangle$ est plus petit ou égal à $\|L - \zeta(\bar{X})\|$. Or ce terme est plus petit que r d'après (34.57). et comme r est le plus petit rayon de courbure, on a $r \leq \rho_\chi(\bar{s})$ pour toute géodésique $\chi(\bar{s})$ passant par $\zeta(\bar{X})$. Ce-ci est traduit par l'équation :

$$\langle L - \zeta(\bar{X}), n(\bar{s}) \rangle \leq \|L - \zeta(\bar{X})\| < r \leq \rho_\chi(\bar{s}) \quad (34.59)$$

De cette dernière équation, on a :

$$\langle L - \zeta(\bar{X}), n(\bar{s}) \rangle \leq \rho_\chi(\bar{s}) \quad (34.60)$$

En utilisant le lemme de Pázman cité ci-dessus, la matrice B est définie positive donc $\zeta(\bar{X})$ est un minimum strict [3]. Or on a supposé que l'application ζ est injective (si $\zeta(X_1) = \zeta(X_2) \implies X_1 = X_2$), alors \bar{X} coincide avec la solution des moindres carrés $\bar{X} = \hat{X}(L)$.

Littérature

1. **E.W. Grafarend et B. Schaffrin.** 1989. The geometry of non-linear adjustment - the planar trisection problem. *FESTCHRIFT to TORBEN KRARUP* edited by E. Kejlo, K. Poder and C.C. Tscherning. Geodaetisk Institut, Meddelelse n°58. p 149-172. København, Danmark.

2. **A. Pázman.** 1984. Probability distribution of the multivariate nonlinear least-squares estimates ; Kybernetika n°20, p 209-230.
3. **H. Cartan.** 1979. Cours de Calcul Différentiel. Collection Les Méthodes. Hermann, Paris. 362p.
4. **P.J.G Teunissen.** 1985. The Geometry of Geodetic Inverse Linear Mapping and Non-Linear Adjustment. Publications On Geodesy, n°1, Volume 8, Netherlands Geodetic Commission. 177p.

Liste des figures

4.1	Modèle de Helmert	30
9.1	La Correspondance de la sphère de Jacobi, [2]	70
10.1	Système Terre-Lune	74
10.2	Les Figures obtenues par $\mathcal{EP}_2(\cos\psi)$	75
11.1	Le Repère Local	80
13.1	Transformée de la géodésique	91
20.1	les décalages entre le système ancien (LV03) et le nouveau (LV95)	147
22.1	Le Repère local en A	163
23.1	Les Angles d'Euler	166
25.1	L'Image d'un Cercle	182
29.1	La Rotation déforme une sphère en un sphéroïde	211
29.2	La Géométrie de stratification	214
29.3	Une couche à densité constante	222

29.4	Illustration du calcul de $V(P)$	227
30.1	Passage de (X, Y) à (φ, λ)	246
31.1	Le Modèle de Bursa-Wolf	250
32.1	L'Aspect Oblique	256
32.2	L'Aspect Transverse	258

Liste des tables
