

LA PROJECTION STEREOGRAPHIQUE

Par

Abdelmajid BEN HADJ SALEM

ANCIEN INGÉNIEUR GÉOGRAPHE GÉNÉRAL À L'OFFICE DE LA
TOPOGRAPHIE ET DU CADASTRE DE TUNISIE

NOVEMBRE 2015

VERSION 2.

abenhadsalem@gmail.com

Table des matières

1	Introduction et Rappels Historiques	1
2	Présentation	1
2.1	Le calcul inverse	3
3	Application des Coordonnées Géographiques	3
4	Propriétés	5

Résumé

Le sujet de cette note est de présenter la représentation stéréographique. C'est la représentation d'un point P d'une sphère de rayon a en un point \hat{P} du plan.

1 Introduction et Rappels Historiques

La représentation stéréographique de la sphère au plan est l'une des représentations la plus utilisée depuis l'antiquité. Elle était connue par Hipparchos (185-120 avant J.C) ainsi que Claudius Ptolemaeus (80-160) [1]. Ptolemaeus connaît que la représentation stéréographique transforme les cercles en cercles ou en droites, mais on ignore s'il savait que l'image de *tout cercle de la sphère* est un cercle ou une droite. Cette propriété fût démontrée par l'astronome et ingénieur Arabe Al-Farghani [2],[3] qui vivait entre le Caire et Baghdad au milieu du 9ème siècle. Cette représentation était employée dans la confection des astrolabes.

C'était Thomas Harriot (1560-1620) qui avait montré que la représentation stéréographique est conforme et approuvée par un papier présenté par Edmond Halley (1656-1742) à la Société Royale de Londres.

Le terme "projection stéréographique " fût donné par le mathématicien Belge et d'origine espagnole François d'Aiguillon (1567-1617) en 1613 dans le sixième chapitre concernant les projections de son livre d'optique "Opticorum liber extus de projectionibus".

Rappelons que l'histoire des représentations conformes a été le point de départ de la géométrie différentielle moderne avec le papier de Carl Friedrich Gauss (1777-1855) de 1827 sur la théorie générale des surfaces [4]. Un autre apport considérable était venu du travail du mathématicien Français Gaspard Monge (1746-1818) spécialement de son livre sur l'application de l'analyse à la géométrie [6],[7].

2 Présentation

Soit le pôle sud S de la sphère coincide avec l'origine du repère (S, x, y) du plan. L'axe $S\zeta$ représente la ligne des pôles sud-nord. Un point $P(\xi, \eta, \zeta)$ de la

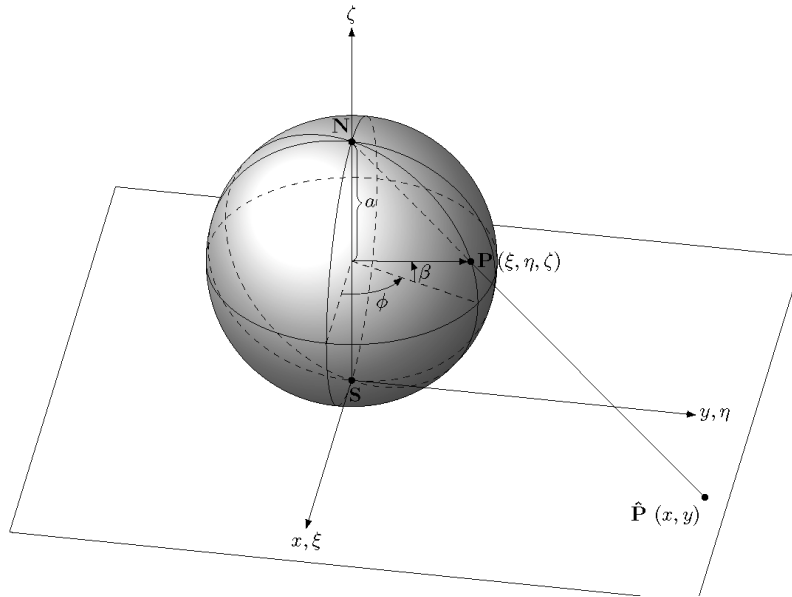


Fig. 1: La Représentation Stéréographique

sphère a pour image le point $\hat{P}(x, y)$ du plan. Le point \hat{P} est l'intersection de la droite NP avec le plan. N désigne le pôle nord $N(0, 0, 2a) \in \mathbb{R}^3$. La sphère a pour centre le point de coordonnées $(0, 0, \zeta = a)$. Son équation est :

$$\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - a)^2 = a^2 \iff \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 2a\zeta = 0 \quad (1)$$

La droite NP a pour équation :

$$\begin{cases} x = 0 + t\xi = t\xi \\ y = 0 + t\eta = t\eta \\ z = 2a + t(\zeta - 2a) \end{cases} \quad (2)$$

La droite NP coupe le plan $z = \zeta = 0$ au point \hat{P} telque :

$$2a + t(\zeta - 2a) = 0 \implies t = \frac{2a}{2a - \zeta} \quad (3)$$

D'où les coordonnées de $\hat{P}(x, y)$ avec :

$$\begin{cases} x = t\xi = \frac{2a\xi}{2a - \zeta} \\ y = t\eta = \frac{2a\eta}{2a - \zeta} \\ \text{avec } \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 2a\zeta = 0 \end{cases} \quad (4)$$

2.1 Le calcul inverse

Ayant (x, y) , exprimons (ξ, η, ζ) en fonction de x et y . De (4), on tire :

$$\xi = (2a - \zeta) \frac{x}{2a} \quad (5)$$

$$\eta = (2a - \zeta) \frac{y}{2a} \quad (6)$$

En remplaçant (5) et (6) dans (1), on obtient :

$$(2a - \zeta)^2 \frac{x^2}{4a^2} + (2a - \zeta)^2 \frac{y^2}{4a^2} + \zeta^2 - 2a\zeta = 0 \quad (7)$$

Après calculs, on trouve l'équation suivante du second degré en ζ :

$$\zeta^2 \frac{x^2 + y^2 + 4a^2}{4a^2} - \zeta \frac{x^2 + y^2 + 2a^2}{a} + x^2 + y^2 = 0 \quad (8)$$

Son résolution donne les deux solutions, a étant positif :

$$\zeta_1 = 2a \quad (9)$$

$$\zeta_2 = \frac{2a(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2 + 4a^2} \quad (10)$$

ζ_1 ça correspond au point N le pôle nord de la sphère, son image le point $(\{\infty\})$. On retient donc $\zeta = \zeta_2$. Calculons $2a - \zeta$:

$$2a - \zeta = \frac{8a^3}{x^2 + y^2 + 4a^2} \quad (11)$$

D'où les expressions de ξ, η, ζ en fonction de x, y :

$$\xi = \frac{4a^2 x}{x^2 + y^2 + 4a^2} \quad (12)$$

$$\eta = \frac{4a^2 y}{x^2 + y^2 + 4a^2} \quad (13)$$

$$\zeta = \frac{2a(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2 + 4a^2} \quad (14)$$

3 Application des Coordonnées Géographiques

Le point P a pour coordonnées tridimensionnelles exprimées en fonction de β, ϕ :

$$P = \begin{cases} \xi = a \cos \beta \cos \phi \\ \eta = a \cos \beta \sin \phi \\ \zeta = a + a \sin \beta \end{cases} \quad (15)$$

avec :

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 2a\zeta = 0$$

La métrique de la sphère est donnée par :

$$ds^2 = a^2 d\beta^2 + a^2 \cos^2 \beta d\phi^2 \quad (16)$$

Sur l'image le plan, on a :

$$dS^2 = dx^2 + dy^2 \quad (17)$$

D'où le module linéaire m :

$$m^2 = \frac{dS^2}{ds^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{a^2 d\beta^2 + a^2 \cos^2 \beta d\phi^2} \quad (18)$$

Calculons alors dS^2 . Comme :

$$x = \frac{2a\xi}{2a - \zeta} = \frac{2a \cos \beta \cos \phi}{1 - \sin \beta} \quad (19)$$

$$y = \frac{2a\eta}{2a - \zeta} = \frac{2a \cos \beta \sin \phi}{1 - \sin \beta} \quad (20)$$

Ce qui donne :

$$dS^2 = \frac{4a^2(d\beta^2 + \cos^2 \beta d\phi^2)}{(1 - \sin \beta)^2} \quad (21)$$

Soit :

$$m^2 = \frac{dS^2}{ds^2} = \frac{4}{(1 - \sin \beta)^2} \implies m = \frac{2}{1 - \sin \beta} \quad (22)$$

$-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2} \implies 1 - \sin \beta > 0$. Or l'expression (22) s'écrit aussi :

$$m = \frac{2}{1 - \sin \beta} = \frac{2}{1 - 2 \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2}} = \frac{2}{(\cos \frac{\beta}{2} - \sin \frac{\beta}{2})^2} = \frac{1}{\cos^2(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2})} \quad (23)$$

La représentation stéréographique est évidemment conforme puisque son module linéaire m est indépendant de la direction [8] et ne dépend que du point (ici dépend seulement de β).

Retrouvons cette propriété de conformité autrement. Posons :

$$Z = x + iy \quad (24)$$

Soit

$$Z = x + iy = \frac{2a(\xi + i\eta)}{2a - \zeta} = \frac{2a \cos \beta (\cos \phi + i \sin \phi)}{1 - \sin \beta} = \frac{a \cos \beta e^{i\phi}}{\cos^2(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2})} \quad (25)$$

De (16), on peut écrire :

$$ds^2 = a^2 \cos^2 \beta \left(\frac{d\beta^2}{\cos^2 \beta} + d\phi^2 \right) = a^2 \cos^2 \beta (dL_M^2 + d\phi^2) \quad (26)$$

où :

$$dL_M = \frac{d\beta}{\cos\beta} \implies L_M = \int_0^\beta \frac{d\theta}{\cos\theta} = \text{Logtg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2} \right) \Rightarrow e^{L_M} = \text{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2} \right) \quad (27)$$

L_M est la latitude de Mercator. Les coordonnées (L_M, ϕ) sont des coordonnées symétriques et orthogonales, posons :

$$z = L_M + i\phi \quad (28)$$

Alors l'expression (25) s'écrit :

$$Z = 2ae^{L_M} e^{i\phi} = 2ae^{L_M+i\phi} = 2ae^z \quad (29)$$

Or l'expression Z donnée par (29) est une fonction holomorphe ou analytique de z . Donc elle représente une transformation conforme.

4 Propriétés

Propriété 1 : *Les cercles de la sphère ont transformés en cercles ou des droites du plan et vice-versa.*

Lemme 1 : *Tout plan intersectant une sphère donnée, on obtient un cercle.*

Démonstration du Lemme 1 : Soit la sphère \mathcal{S} d'équation :

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1 \quad (30)$$

et un plan K d'équation :

$$c_1\xi + c_2\eta + c_3\zeta + c_0 = 0 \quad (31)$$

couplant la sphère \mathcal{S} , le vecteur u ci-dessous :

$$u = \begin{cases} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{cases} \quad (32)$$

est perpendiculaire au plan K . Soit la droite Δ passant le centre de la sphère \mathcal{S} . Elle coupe le plan au point Ω . L'équation de la droite Δ est :

$$\Delta \begin{cases} \xi = tc_1 \\ \eta = tc_2 \\ \zeta = tc_3 \end{cases} \quad (33)$$

Les coordonnées de Ω sont telles que :

$$tc_1^2 + tc_2^2 + tc_3^2 + c_0 = 0 \implies t = -\frac{c_0}{\|u\|^2} \quad (34)$$

d'où :

$$\Omega = \begin{cases} -\frac{c_0 c_1}{\|u\|^2} \\ -\frac{c_0 c_2}{\|u\|^2} \\ -\frac{c_0 c_3}{\|u\|^2} \end{cases} \quad (35)$$

Soit un point $M(\xi, \eta, \zeta)$ de l'intersection de la sphère \mathcal{S} et du plan K . Calculons la distance ΩM . Soit :

$$\Omega M = \begin{cases} \xi + \frac{c_0 c_1}{\|u\|^2} \\ \eta + \frac{c_0 c_2}{\|u\|^2} \\ \zeta + \frac{c_0 c_3}{\|u\|^2} \end{cases} \quad (36)$$

D'où :

$$\Omega M^2 = \left(\xi + \frac{c_0 c_1}{\|u\|^2} \right)^2 + \left(\eta + \frac{c_0 c_2}{\|u\|^2} \right)^2 + \left(\zeta + \frac{c_0 c_3}{\|u\|^2} \right)^2 = 1 - \frac{c_0^2}{\|u\|^2} \quad (37)$$

Cette distance est constante, c'est-à-dire que l'ensemble des points $M = K \cap \mathcal{S}$ est un cercle de centre Ω et de rayon $r = \sqrt{1 - \frac{c_0^2}{\|u\|^2}}$. \diamond

Revenons à la propriété 1 : Soit un cercle \mathcal{F} de la sphère S obtenu comme intersection d'un plan K d'équation :

$$c_1 \xi + c_2 \eta + c_3 \zeta + c_0 = 0 \quad (38)$$

et de la sphère d'équation :

$$\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - a)^2 = a^2 \iff \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 2a\zeta = 0$$

Les coefficients c_i sont telque le plan K coupe ou est tangent à la sphère S . Remplaçant les formules de (12-13-14) dans (38) en prenant par exemple $a = \frac{1}{2}$, on obtient :

$$(c_0 + c_3)(x^2 + y^2) + c_1 x + c_2 y + c_0 = 0 \quad (39)$$

Si $c_0 + c_3 \neq 0$, l'équation précédente est l'équation du cercle :

$$\left(x + \frac{c_1}{2(c_0 + c_3)} \right)^2 + \left(y + \frac{c_2}{2(c_0 + c_3)} \right)^2 = \rho^2 \quad (40)$$

$$\text{avec } \rho^2 = \frac{c_1^2 + c_2^2}{4(c_0 + c_3)^2} - \frac{c_0}{c_0 + c_3} \quad (41)$$

Si $c_0 + c_3 = 0$ et $c_0 \neq 0$ les équations du plan (38) et du cercle (39) deviennent :

$$\frac{c_1}{c_0}\xi + \frac{c_2}{c_0}\eta - \zeta + 1 = 0 \quad (42)$$

$$\frac{c_1}{c_0}\xi + \frac{c_2}{c_0}\eta + 1 = 0 \quad (43)$$

Le plan donné par (42) passe par le pôle nord N et l'image du cercle est la droite donnée par (43).

Si $c_3 = c_0 = 0$, l'équation du plan est :

$$c_1\xi + c_2\eta = 0 \quad (44)$$

coupe la sphère suivant un méridien dont l'image est la droite passant par l'origine S :

$$c_1x + c_2y = 0 \quad (45)$$

Inversement, on donne le cercle d'équation :

$$(x - v)^2 + (y - w)^2 = \rho^2 \quad (46)$$

En utilisant (4) et en prenant $2a = 1$, on obtient :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\xi}{1-\zeta} - v\right)^2 + \left(\frac{\eta}{1-\zeta} - w\right)^2 = \rho^2 \\ \Rightarrow \xi^2 + \eta^2 - 2\xi v(1-\zeta) - 2\eta w(1-\zeta) + (v^2 + w^2)(1-\zeta)^2 &= \rho^2(1-\zeta)^2 \end{aligned} \quad (47)$$

Comme le point antécédent (ξ, η) appartient à la sphère, on utilise que :

$$\xi^2 + \eta^2 = \zeta - \zeta^2 = \zeta(1 - \zeta)$$

L'équation (47) devient pour $\zeta \neq 1$:

$$2\xi v + 2\eta w + (v^2 + w^2 - \rho^2 - 1)\zeta - v^2 - w^2 + \rho^2 = 0 \quad (48)$$

C'est l'équation du plan qui coupe la sphère S suivant un cercle.

Références

- [1] H.A. Kastrup.2008. On the Advancements of Conformal Transformations and their Associated Symmetries in Geometry and Theoretical Physics. arxiv :physics.hist-ph/0808.2730v1. www.arxiv.org.
- [2] See Appendix 3 of the next Ref. [3] : Al-Farghani's Proof of the Basic Theorem of Stereographic Projection" by N.D. Sergeyeva and L.M. Karpova, pp. 210-217; Al-Farghani, On the Astrolabe, Arabic Text Edition with Translation and Commentary by R. Lorch (Boethius Texte u. Abhandl. Geschichte Mathem. u. Naturw. **52**, Franz Steiner Verlag, Stuttgart, 2005).

- [3] Jordanus de Nemore and the Mathematics of Astrolabes : *De Plana Spera*; an Edition with Introduction, Translation and Commentary by R.B. Thomson (Studies and Texts **39**, Pontifical Institute of Mediaeval Studies, Toronto, 1978).
- [4] C.F. Gauss, Disquisitiones generales circa superficies curvas, Werke 4 (see Ref. [5]) pp. 217-258; German translation and edition by A. Wangerin : Allgemeine Flächentheorie (Disquisitiones ...) von Carl Friedrich Gauss (1827) (Ostwald's Klassiker der Exakten Wissenschaften 5, Verlag Wilhelm Engelmann, Leipzig, 1889); English translation with notes and a bibliography by J.C. Morehead and A.M. Hildebrandt : Karl Friedrich Gauss, General Investigations of Curved Surfaces of 1827 and 1825 (The Princeton University Library, Princeton, 1902); available from Internet Archive : <http://www.archive.org/>. A French translation of 1852 is available from Gallica : <http://www.gallica.bnf.fr/>.
- [5] C.F. Gauss, Allgemeine Auflösung der Aufgabe: Die Theile einer gegebenen Fläche auf einer anderen gegebenen Fläche so abzubilden dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird; Carl Friedrich Gauss, Werke 4 (Königl. Gesellsch. Wiss. Göttingen, Göttingen, 1873) pp. 189-216; available from Göttinger Digitalisierungszentrum (GDZ) : <http://www.gdz.sub.uni-goettingen.de/>; from Gallica : www.gallica.bnf.fr/; from Internet Archive : <http://www.archive.org/>. English translation : C.F. Gauss, General solution of the Problem : to represent the Parts of a given Surface on another given Surface, so that the smallest Parts of the Representation shall be similar to the corresponding Parts of the Surface represented; The Philosophical Magazine and Annals of Philosophy, New Ser., IV, 104- 113 and 206-215 (1828); available from Internet Archive : <http://www.archive.org/> French translation by L. Laugel : Solution Générale de ce Problème : Représenter les ... [Représentation Conforme] par C.-F. Gauss (Hermann & Fils, Paris, 1915); available from Gallica (under Gauss) : <http://www.gallica.bnf.fr/>.
- [6] G. Monge, Application de l'analyse à la géométrie à l'usage de l'Ecole Impériale Polytechnique, 4ème édition (Bernard, Paris, 1809); previously (1795, 1800/1801, 1807) published as : Feuilles d'Analyse appliquée à la Géométrie, à l'usage de l'Ecole Polytechnique, Paris. We shall encounter the 5th edition from 1850, newly edited by Liouville, below [7].
- [7] Liouville published his proof in an appendix to a new edition of Monge's book (Ref. [4]), the publication of which he had organized : G. Monge, Application de l'Analyse à la Géométrie, 5ème édition, revue, corrigée et annotée par M. Liouville (Bachelier, Paris, 1850), Note VI (pp. 609-616) : Extension au cas des trois dimensions de la question du tracé géographique. The book is available from Google Book Search : <http://www>.

books.google.de/ (copied from the Harvard Library).

- [8] A. Ben Hadj Salem. 2015. *Eléments de Géodésie et de la Théorie des Moindres Carrés*. 390 pages.