La Détermination d'un Géoide de Haute Précision par l'Approche d'A. Ardalan I: Rappels de la Théorie de Pizzetti-Somigliana

---

Abdelmajid BEN HADJ SALEM

Office de la Topographie et du Cadastre (OTC),
BP 156, 1080 Tunis Cedex, TUNISIE

E-mail: `abenhadjsalem@gmail.com`

ABSTRACT: A partir d'une approche de A. Ardalan [1] sur le calcul d'un géoide régional de haute résolution dans le système géodésique mondial 2000 (World Geodetic Datum 2000), nous proposons d'appliquer cette approche à la détermination d'un géoide tunisien et de calculer la différence entre la position du géoide et le zéro de référence des altitudes orthométriques.

Juin 2013

Table des matières

1 Introduction

Parmi les objectifs de la mise à niveau de la géodésie tunisienne figure la détermination du géoide tunisien, car le territoire tunisien manque une information sur cette surface appelée géoide qui avait été définie par C. Gauss [2] par : " *Ce que nous appelons dans le sens géométrique la surface de la terre ce n'est que la surface qui coupe les lignes de la pesanteur sous un angle droit et qui fait partie de la surface des océans*".

Le terme géoïde fut pour la première fois introduit par J. Listing en 1872 [3] :" *nous appellerons la surface mathématique de la terre définie précédemment la surface à laquelle les océans font partie, surface géodale de la terre ou géoïde*".

2 Rappels et Notations

2.1 Présentation des Coordonnées Ellipsoidiques ou de Jacobi

Soit $E(a, b)$ ou $E(a, e)$ l'ellipsoide de référence où a, b, e désignent respectivement le demi grand-axe, le demi petit-axe et la première excentricité. Un point M est défini par ses coordonnées tridimensionnelles (x, y, z) dans un repère orthonormé $\mathcal{R}(O, e_1, e_2, e_3)$ ou $\mathcal{R}(O, x, y, z)$. On considère une famille d'ellipsoides de demi petit-axe $u, u > 0$, de demi grand-axe $\sqrt{u^2 + \epsilon^2}$, avec :

$$\epsilon^2 = a^2 - b^2 \tag{2.1}$$

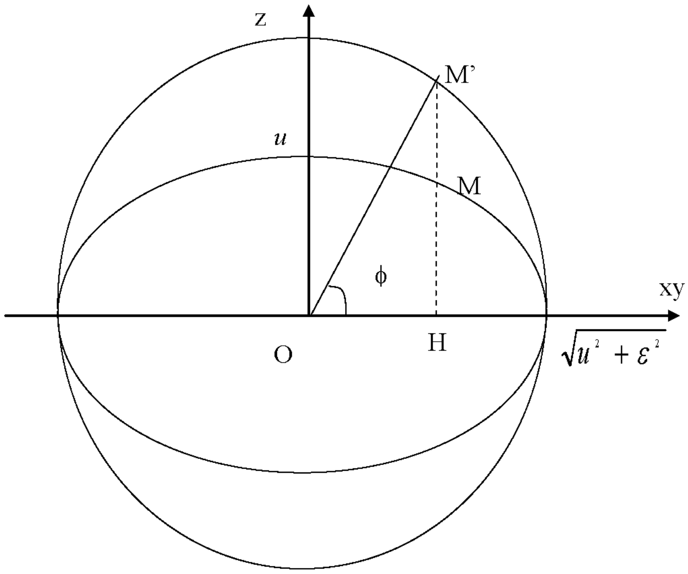

FIGURE 1. Les Coordonnées de Jacobi

Le point M appartient à l'ellipsoide d'équation :

$$\frac{x^2+y^2}{u^2+\epsilon^2}+\frac{z^2}{u^2}=1 \tag{2.2}$$

Soit ϕ l'angle $\angle(OM, OM')$ (Fig.1) appelé la latitude réduite correspondante au point M, on a alors :

$$sin\phi=\frac{HM'}{OM'}=\frac{HM'}{\sqrt{u^2+\epsilon^2}} \tag{2.3}$$

Par définition de l'ellipse méridienne passant par M, on a le rapport d'affinité :

$$\frac{u}{\sqrt{u^2+\epsilon^2}}=\frac{HM}{HM'} \Longrightarrow HM=\frac{u}{\sqrt{u^2+\epsilon^2}}.HM' \tag{2.4}$$

D'où :

$$sin\phi=\frac{HM'}{\sqrt{u^2+\epsilon^2}}=\frac{1}{\sqrt{u^2+\epsilon^2}}.\frac{\sqrt{u^2+\epsilon^2}}{u}.HM=\frac{HM}{u} \tag{2.5}$$

Soit :

$$z=HM=u.sin\phi \tag{2.6}$$

Et :

$$x=OH.cos\lambda=OM'cos\phi.cos\lambda \tag{2.7}$$

$$y=OH.sin\lambda=OM'cos\phi.sin\lambda \tag{2.8}$$

En résumé, on a les coordonnées du point M exprimées en fonction des coordonnées de Jacobi (u, ϕ, λ) :

$$M = \left| \begin{array}{l} x = \sqrt{u^2+\epsilon^2}.cos\phi cos\lambda \\ y = \sqrt{u^2+\epsilon^2}.cos\phi sin\lambda \\ z = u.sin\phi \end{array} \right. \tag{2.9}$$

avec $\phi \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\lambda \in [0, 2\pi]$ et $u \in \mathbb{R}^*$. Si $u = b$, on retrouve l'équation de l'ellipsoide de référence E :

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \tag{2.10}$$

2.2 Passage des coordonnées (u, ϕ, λ) aux coordonnées (x, y, z)

De l'équation (2.2), on a :

$$u^2(x^2+y^2) + z^2(u^2+\epsilon^2) = u^2(u^2+\epsilon^2) \Rightarrow u^4 + u^2(\epsilon^2 - x^2 - y^2 - z^2) - z^2\epsilon^2 = 0 \tag{2.11}$$

C'est une équation du second degré en u^2. Son discriminant Δ vaut :

$$\Delta = (r^2-\epsilon^2)^2 + 4z^2\epsilon^2 \tag{2.12}$$

$$\text{avec } r^2 = x^2+y^2+z^2 \tag{2.13}$$

L'équation (2.11) a deux solutions, l'une négative à rejeter et l'autre positive strictement à savoir :

$$u_2^2 = \frac{r^2 - \epsilon^2 + \sqrt{\Delta}}{2} > 0 \Rightarrow$$

$$u_2 = \left\{ \frac{1}{2} \left(x^2+y^2+z^2-\epsilon^2 + \sqrt{(x^2+y^2+z^2-\epsilon^2)^2 + 4z^2\epsilon^2} \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{2.14}$$

Si $x \neq 0$, on a :

$$tg\lambda = \frac{y}{x} \tag{2.15}$$

et :

$$sin\phi = \frac{z}{u} \tag{2.16}$$

d'où ϕ.

2.3 Le Repère Mobile (E_u, E_ϕ, E_{lm})

On a donc :

$$\frac{\partial M}{\partial u} = \left| \begin{array}{l} \dfrac{u}{\sqrt{u^2+\epsilon^2}} cos\phi cos\lambda \\ \dfrac{u}{\sqrt{u^2+\epsilon^2}} cos\phi sin\lambda \\ sin\phi \end{array} \right. ; \quad \left\| \frac{\partial M}{\partial u} \right\| = \frac{\sqrt{u^2+\epsilon^2 sin^2\phi}}{\sqrt{u^2+\epsilon^2}} \tag{2.17}$$

Soit :

$$E_u = \frac{\dfrac{\partial M}{\partial u}}{\left\| \dfrac{\partial M}{\partial u} \right\|} = \left| \begin{array}{l} \dfrac{u}{\sqrt{u^2+\epsilon^2 sin^2\phi}} cos\phi cos\lambda \\ \dfrac{u}{\sqrt{u^2+\epsilon^2 sin^2\phi}} cos\phi sin\lambda \\ \dfrac{\sqrt{u^2+\epsilon^2}}{\sqrt{u^2+\epsilon^2 sin^2\phi}} sin\phi \end{array} \right. \tag{2.18}$$

De même :

$$\frac{\partial M}{\partial \phi} = \begin{vmatrix} -\sqrt{u^2+\epsilon^2} sin\phi cos\lambda \\ -\sqrt{u^2+\epsilon^2} sin\phi sin\lambda \\ u.cos\phi \end{vmatrix} \; ; \quad \left\| \frac{\partial M}{\partial \phi} \right\| = \sqrt{u^2+\epsilon^2 sin^2\phi} \tag{2.19}$$

Soit :

$$E_\phi = \frac{\frac{\partial M}{\partial \phi}}{\left\| \frac{\partial M}{\partial \phi} \right\|} = \begin{vmatrix} -\frac{\sqrt{u^2+\epsilon^2}}{\sqrt{u^2+\epsilon^2 sin^2\phi}} sin\phi cos\lambda \\ -\frac{\sqrt{u^2+\epsilon^2}}{\sqrt{u^2+\epsilon^2 sin^2\phi}} sin\phi sin\lambda \\ \frac{u}{\sqrt{u^2+\epsilon^2 sin^2\phi}} cos\phi \end{vmatrix} \tag{2.20}$$

Enfin :

$$\frac{\partial M}{\partial \lambda} = \begin{vmatrix} -\sqrt{u^2+\epsilon^2} cos\phi sin\lambda \\ \sqrt{u^2+\epsilon^2} cos\phi cos\lambda \\ 0 \end{vmatrix} \; ; \quad \left\| \frac{\partial M}{\partial \lambda} \right\| = \sqrt{u^2+\epsilon^2} cos\phi \tag{2.21}$$

Soit :

$$E_\lambda = \frac{\frac{\partial M}{\partial \phi}}{\left\| \frac{\partial M}{\partial \lambda} \right\|} = \begin{vmatrix} -sin\lambda \\ cos\lambda \\ 0 \end{vmatrix} \tag{2.22}$$

2.4 L'expression de la métrique $g = ds^2$ en coordonnées de Jacobi

A partir des formules (2.9), on obtient :

$$\begin{aligned} g = ds^2 &= \frac{u^2+\epsilon^2 sin^2\phi}{u^2+\epsilon^2} du^2 + (u^2+\epsilon^2 sin^2\phi) d\phi^2 + (u^2+\epsilon^2) cos^2\phi d\lambda^2 \\ &= g_{uu} du^2 + g_{\phi\phi} d\phi^2 + g_{\lambda\lambda} d\lambda^2 = (du, d\phi, d\lambda)^T.J. \begin{pmatrix} du \\ d\phi \\ d\lambda \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.23}$$

Avec :

$$J = \begin{pmatrix} g_{uu} & 0 & 0 \\ 0 & g_{\phi\phi} & 0 \\ 0 & 0 & g_{\lambda\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u^2+\epsilon^2 sin^2\phi}{u^2+\epsilon^2} & 0 & 0 \\ 0 & u^2+\epsilon^2 sin^2\phi & 0 \\ 0 & 0 & (u^2+\epsilon^2) cos^2\phi \end{pmatrix} \tag{2.24}$$

Posons :

$$g = Det(J) = (u^2+\epsilon^2 sin^2\phi)^2 cos^2\phi \tag{2.25}$$

2.5 L'Expression du Laplacien Δ en Coordonnées ellipsoïdiques

Le laplacien en coordonnées (u, ϕ, λ) est exprimé par la formule [4] :

$$\Delta V = \frac{1}{\sqrt{g}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{uu}} . \frac{\partial V}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{\phi\phi}} . \frac{\partial V}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{\lambda\lambda}} . \frac{\partial V}{\partial \lambda} \right) \right\} \tag{2.26}$$

En utilisant les formules (2.24) et (2.25), on obtient la formule du laplacien en coordonnées ellipsoïdiques :

$$\Delta V = \frac{1}{u^2 + \epsilon^2 sin^2\phi}\left\{(u^2+\epsilon^2)\frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + 2u\frac{\partial V}{\partial u} + \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} - tg\phi\frac{\partial V}{\partial \phi} + \frac{u^2+\epsilon^2 sin^2\phi}{(u^2+\epsilon^2)cos^2\phi}\frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2}\right\} \quad (2.27)$$

3 Résolution du Laplacien en Coordonnées ellipsoïdiques

On cherche à résoudre l'équation (2.27) en considérant le potentiel Normal sous la forme :

$$V(u,\phi,\lambda) = f(u).h(\phi).l(\lambda) \quad (3.1)$$

où f, h, l trois fonctions lisses suffisamment différentiables respectivement des variables u, ϕ, λ. Ce qui donne :

$$\begin{aligned} &\Delta V = 0 \Rightarrow \\ h(\phi).l(\lambda)&\left((u^2+\epsilon^2)\frac{d^2 f}{du^2} + 2u\frac{df}{du}\right) + \\ f(u).l(\lambda)&\left(\frac{d^2 h}{d\phi^2} - tg\phi\frac{dh}{d\phi}\right) + \\ \frac{u^2+\epsilon^2 sin^2\phi}{(u^2+\epsilon^2)cos^2\phi}&f(u).h(\phi).\frac{d^2 l}{d\lambda^2} = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

En divisant par $f(u).h(\phi).l(\lambda) \neq 0$, on a alors :

$$\begin{aligned} &\Delta V = 0 \Rightarrow \\ \frac{1}{f(u)}&\left((u^2+\epsilon^2)\frac{d^2 f}{du^2} + 2u\frac{df}{du}\right) + \\ \frac{1}{h(\phi)}&\left(\frac{d^2 h}{d\phi^2} - tg\phi\frac{dh}{d\phi}\right) + \\ \frac{u^2+\epsilon^2 sin^2\phi}{(u^2+\epsilon^2)cos^2\phi}&.\frac{\frac{d^2 l}{d\lambda^2}}{l(\lambda)} = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

La variable λ se trouve dans le dernier terme de l'équation précédente ce qui donne premièrement :

$$\frac{(u^2+\epsilon^2)cos^2\phi}{u^2+\epsilon^2 sin^2\phi}.\left[\frac{1}{f(u)}\left((u^2+\epsilon^2)\frac{d^2 f}{du^2} + 2u\frac{df}{du}\right) + \frac{1}{h(\phi)}\left(\frac{d^2 h}{d\phi^2} - tg\phi\frac{dh}{d\phi}\right)\right] = -\frac{\frac{d^2 l}{d\lambda^2}}{l(\lambda)} \quad (3.4)$$

Le membre à gauche de (3.4) est fonction seulement de u, ϕ alors que celui à droite est fonction de λ, ce-ci n'est possible que si les deux membres sont égaux à une constante. Soit pour le membre à droite :

$$-\frac{\frac{d^2 l}{d\lambda^2}}{l(\lambda)} = constante \quad (3.5)$$

Soit pour avoir :

$$l(\lambda = 0) = l(\lambda = 2\pi) \tag{3.6}$$

on doit choisir la constante égale à m^2, avec $m \in \mathbb{N}$, d'où :

$$\frac{d^2l}{d\lambda^2} + m^2 l(\lambda) = 0 \Rightarrow l(\lambda) = A.sinm\lambda + B.cosm\lambda \tag{3.7}$$

avec A, B deux constantes.

L'équation (3.3) devient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(u)}\left((u^2+\epsilon^2)\frac{d^2f}{du^2} + 2u\frac{df}{du}\right) + \\ \frac{1}{h(\phi)}\left(\frac{d^2h}{d\phi^2} - tg\phi\frac{dh}{d\phi}\right) + \\ -m^2\frac{u^2+\epsilon^2 sin^2\phi}{(u^2+\epsilon^2)cos^2\phi} = 0 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Or le terme :

$$\frac{u^2+\epsilon^2 sin^2\phi}{(u^2+\epsilon^2)cos^2\phi} = \frac{1}{cos^2\phi} - \frac{\epsilon^2}{u^2+\epsilon^2}$$

Par suite :

$$\frac{1}{f(u)}\left((u^2+\epsilon^2)\frac{d^2f}{du^2} + 2u\frac{df}{du}\right) + m^2\frac{\epsilon^2}{u^2+\epsilon^2} = \frac{m^2}{cos^2\phi} - \frac{1}{h(\phi)}\left(\frac{d^2h}{d\phi^2} - tg\phi\frac{dh}{d\phi}\right) \tag{3.9}$$

Le membre à gauche dépend de u, celui de droite dépend de ϕ. Les deux membres doivent être égaux à une constante qu'on prendra égale à $n(n+1)$ avec $n \in \mathbb{N}$, d'où la deuxième équation différentielle :

$$h''cos\phi - h'sin\phi + \left(n(n+1)cos\phi - \frac{m^2}{cos\phi}\right)h = 0 \tag{3.10}$$

dont les solutions sont [4] :

$$h(\phi) = P_{nm}(sin\phi) \tag{3.11}$$

où les $P_{nm}(sin\phi)$ sont appelées les fonctions de Legendre associées [4] d'ordre m et de degré n. La troisième équation différentielle est :

$$\frac{1}{f(u)}\left((u^2+\epsilon^2)\frac{d^2f}{du^2} + 2u\frac{df}{du}\right) + m^2\frac{\epsilon^2}{u^2+\epsilon^2} = n(n+1) \tag{3.12}$$

Soit :

$$(u^2+\epsilon^2)\frac{d^2f}{du^2} + 2u\frac{df}{du} - \left(n(n+1) - m^2\frac{\epsilon^2}{u^2+\epsilon^2}\right)f(u) = 0 \tag{3.13}$$

Posons :

$$t = i\frac{u}{\epsilon} \tag{3.14}$$

et :

$$F(t) = f(\frac{\epsilon t}{i}) \tag{3.15}$$

Alors la trosième équation s'écrit :

$$(1-t^2)\frac{d^2F}{dt^2} - 2t\frac{dF}{dt} + \left(n(n+1) - m^2\frac{1}{1-t^2}\right)F(t) = 0 \tag{3.16}$$

Dont les solutions sont [4] :

$$F_1(t) = f_1(u) = P_{nm}(i\frac{u}{\epsilon}) \tag{3.17}$$

$$F_2(t) = f_2(u) = Q_{nm}(i\frac{u}{\epsilon}) \tag{3.18}$$

où $Q_{nm}(w)$ sont les fonctions de Legendre de seconde espèce d'ordre m et de degré n.

Alors, l'expression des solutions générales de $\Delta V = 0$ pour $V = f(u).h(\phi).l(\lambda)$ est une combinaison linéaire des chacunes des solutions des trois équations différentielles. Parmi les solutions possibles (en notant b le demi petit-axe de l'ellipsoide de référence E) on a :

$$V_i(u,\phi,\lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{n} \frac{P_{nm}(i\frac{u}{\epsilon})}{P_{nm}(i\frac{b}{\epsilon})}\left[a_{nm}P_{nm}(sin\phi)cosm\lambda + b_{nm}P_{nm}(sin\phi)sinm\lambda\right] \tag{3.19}$$

$$V_e(u,\phi,\lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{n} \frac{Q_{nm}(i\frac{u}{\epsilon})}{Q_{nm}(i\frac{b}{\epsilon})}\left[a_{nm}P_{nm}(sin\phi)cosm\lambda + b_{nm}P_{nm}(sin\phi)sinm\lambda\right] \tag{3.20}$$

Avec $m \leq n$ des entiers positifs et V_i, V_e sont respectivement le potentiel gravitationnel normal à l'intérieur et à l'extérieur de la Terre.

4 La Théorie de Pizzetti-Somigliana

4.1 Le potentiel de la pesanteur en coordonnées sphériques

Le potentiel de la pesanteur en un point $M(x,y,z)$ est donné par la fonction :

$$W = V + \Phi \tag{4.1}$$

avec V le potentiel gravitationnel :

$$V = \iiint_T \frac{\rho dv}{r} \tag{4.2}$$

et Φ le potentiel centrifuge dû à la rotation de la Terre :

$$\Phi = \frac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2) \tag{4.3}$$

Le potentiel gravitationnel s'écrit sous la forme :

$$V = \frac{GM}{r}\left(1 - \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{a}{r}\right)^n (J_{nm}cosm\lambda + K_{nm}sinm\lambda)\, P_{nm}(cos\theta)\right) \tag{4.4}$$

où :

- J_{nm}, K_{nm} : sont les coefficients que nous obtenons par l'observation et ils sont connus.

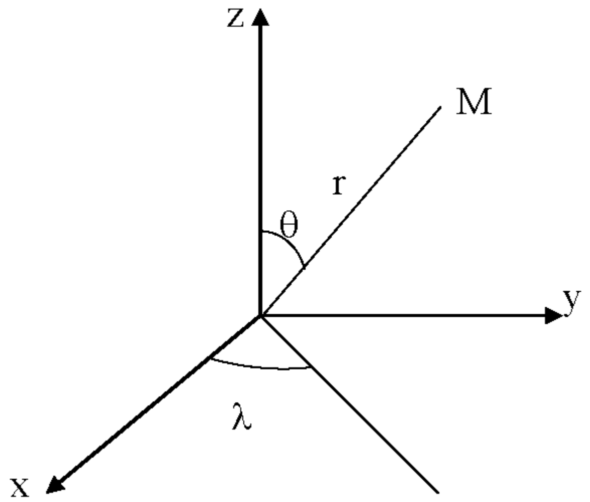

FIGURE 2. Les Coordonnées Sphériques

- $P_{nm}(cos\theta)$: on les appelle les harmoniques sphériques ou polynômes de Legendre de deuxième espèce.

Au lieu d'utiliser le potentiel de la pesanteur, on utilise un potentiel de référence qui soit celui d'un ellipsoïde de révolution (dans notre cas c'est l'ellipsoide de référence $E(a, e)$), alors, on a :

$$U = \frac{GM}{r}\left(1 - \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{2n} J_{2n}P_{2n}(cos\theta)\right) + \frac{1}{2}\omega^2 r^2 cos^2\theta \tag{4.5}$$

(r, θ, λ) sont les coordonnées sphériques (Fig. :2), c'est-à-dire :

$$M = \left| \begin{array}{l} x = rsin\theta cos\lambda \\ y = rsin\theta sin\lambda \\ z = rcos\theta \end{array} \right. \tag{4.6}$$

P_{nm} sont les fonctions de Legendre associés de 1er espèce de degré n et d'ordre m [4],[5].

4.2 Le Potentiel de la pesanteur en coordonnées ellipsoïdiques

Le potentiel de la pesanteur normal est donné par :

$$U = V_N + \Phi_N \tag{4.7}$$

avec en coordonnées ellipsoïdiques :

$$\Phi_N = \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2) = \frac{1}{2}\omega^2(u^2 + \epsilon^2)cos^2\phi \tag{4.8}$$

Le potentiel gravitationnel normal $V_N = V_e$. Comme on considère la terre comme un ellipsoïde de révolution de paramètres (a, b), c'est un corps symétrique par rapport à l'axe z donc le potentiel gravitationnel normal V_N ne dépend pas de la longitude géodésique λ, alors V_N devient avec $m = 0$:

$$V_N = V_e(u, \phi) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{Q_{n0}(i\frac{u}{\epsilon})}{Q_{n0}(i\frac{b}{\epsilon})}.a_{n0}P_{n0}(sin\phi) \tag{4.9}$$

On pose :

$$P_{n0}(sin\phi) = P_n(sin\phi) \tag{4.10}$$

$$Q_{n0}(i\frac{u}{\epsilon}) = Q_n(i\frac{u}{\epsilon}) \tag{4.11}$$

$$Q_{n0}(i\frac{b}{\epsilon}) = Q_n(i\frac{b}{\epsilon}) \tag{4.12}$$

Les fonctions $P_n(w)$ sont appelées les polynômes de Legendre en w de degré n (voir l'Annexe ci-après). L'expression de U_N devient :

$$U_N = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{Q_n(i\frac{u}{\epsilon})}{Q_n(i\frac{b}{\epsilon})}.a_nP_n(sin\phi) + \frac{1}{2}\omega^2(u^2 + \epsilon^2)cos^2\phi \tag{4.13}$$

Maintenant on cherche U_N tel que pour $u = b$, la fonction U_N est égale à la valeur U_0 sur l'ellipsoide de référence, pour tout ϕ ce qui donne :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{Q_n(i\frac{b}{\epsilon})}{Q_n(i\frac{b}{\epsilon})}.a_nP_n(sin\phi) + \frac{1}{2}\omega^2(b^2 + \epsilon^2)cos^2\phi = U_0 \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_nP_n(sin\phi) + \frac{1}{2}\omega^2(b^2 + \epsilon^2)cos^2\phi = U_0 \tag{4.14}$$

soit en détail :

$$a_0P_0(sin\phi) + a_1P_1(sin\phi) + a_2P_2(sin\phi) + \sum_{n=3}^{+\infty} a_nP_n(sin\phi) + \frac{1}{2}\omega^2(b^2 + \epsilon^2)cos^2\phi = U_0 \tag{4.15}$$

Or :

$$P_0(sin\phi) = 1 \tag{4.16}$$

$$P_1(sin\phi) = sin\phi \tag{4.17}$$

$$P_2(sin\phi) = \frac{3sin^2\phi}{2} - \frac{1}{2} = 1 - \frac{3}{2}cos^2\phi \tag{4.18}$$

Ce qui donne :

$$a_0 + a_2 - U_0 + a_1sin\phi + \frac{1}{2}(\omega^2(b^2 + \epsilon^2) - 3a_2)cos^2\phi + \sum_{n=3}^{+\infty} a_nP_n(sin\phi) = 0 \Rightarrow$$

$$a_0 + a_2 - U_0 = 0 \tag{4.19}$$

$$a_1 = 0 \tag{4.20}$$

$$\omega^2(b^2 + \epsilon^2) - 3a_2 = 0 \tag{4.21}$$

$$a_n = 0 \quad pour\ n \geq 3 \tag{4.22}$$

D'où :

$$a_0 = U_0 - \frac{1}{3}\omega^2(b^2+\epsilon^2) = U_0 - \frac{1}{3}a^2\omega^2 \tag{4.23}$$
$$a_1 = 0 \tag{4.24}$$
$$a_2 = \frac{1}{3}a^2\omega^2 \tag{4.25}$$

Par suite, U_N s'écrit :

$$U_N = \frac{Q_0(i\frac{u}{\epsilon})}{Q_0(i\frac{b}{\epsilon})}.a_0 + \frac{Q_2(i\frac{u}{\epsilon})}{Q_2(i\frac{b}{\epsilon})}a_2P_2(sin\phi) + \frac{1}{2}\omega^2(u^2+\epsilon^2)cos^2\phi \tag{4.26}$$

Comme [4] :

$$Q_0(\zeta) = coth^{-1}\zeta, \quad \zeta \in \mathbb{C} \tag{4.27}$$
$$Q_2(\zeta) = \left(\frac{3}{2}\zeta^2 - \frac{1}{2}\right)coth^{-1}\zeta - \frac{3}{2}\zeta \tag{4.28}$$

Prenons $\zeta = i\dfrac{u}{\epsilon}$ d'où :

$$Q_0(\zeta) = coth^{-1}\zeta = \left(\frac{ch(iu/\epsilon)}{sh(iu/\epsilon)}\right)^{-1} = \left(-i\frac{cos(u/\epsilon)}{sin(u/\epsilon)}\right)^{-1} = -iArcotg(\frac{u}{\epsilon}) = -iArctg\frac{\epsilon}{u} \tag{4.29}$$

De même :

$$Q_0(\frac{ib}{\epsilon}) = -iArctg(\frac{\epsilon}{b}) \tag{4.30}$$

Calculons maintenant $Q_2(i\frac{u}{\epsilon})$:

$$\begin{aligned} Q_2(\zeta) = \left(\frac{3}{2}\zeta^2 - \frac{1}{2}\right)coth^{-1}\zeta - \frac{3}{2}\zeta &= \left(-\frac{3}{2}\frac{u^2}{\epsilon^2} - \frac{1}{2}\right)(-iArctg\frac{\epsilon}{u}) - \frac{3i}{2}\frac{u}{\epsilon} \\ &= \frac{i}{2}\left[\left(1+\frac{3u^2}{\epsilon^2}\right)Arctg\frac{\epsilon}{u} - \frac{3u}{\epsilon}\right] \end{aligned} \tag{4.31}$$

Posons :

$$q = q(u) = \frac{1}{2}\left[\left(1+3\frac{u^2}{\epsilon^2}\right)Arctg\frac{\epsilon}{u} - 3\frac{u}{\epsilon}\right] \tag{4.32}$$
$$q_0 = q(u=b) = \frac{1}{2}\left[\left(1+3\frac{b^2}{\epsilon^2}\right)Arctg\frac{\epsilon}{b} - 3\frac{b}{\epsilon}\right] \tag{4.33}$$

Alors, on a :

$$U = (U_0 - \frac{1}{3}a^2\omega^2)\frac{Arctg(\frac{\epsilon}{u})}{Arctg(\frac{\epsilon}{b})} + \frac{1}{3}a^2\omega^2\frac{q}{q_0}\left(1 - \frac{3}{2}cos^2\phi\right) + \frac{1}{2}\omega^2(u^2+\epsilon^2)cos^2\phi \tag{4.34}$$

On a :

$$\frac{\epsilon}{b} = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2}} = \sqrt{e'^2} = e' \tag{4.35}$$

où e' est la deuxième excentricité. Au premier ordre, on a :

$$Arctg\frac{\epsilon}{u} = \frac{\epsilon}{u} \tag{4.36}$$

Si on considère la terre comme point ponctuel de masse M, le potentiel gravitationnel sera donné par :

$$V' = \frac{G.M}{u} \tag{4.37}$$

où G est la constante universelle de gravitation. En se reférant au premier terme de l'expression de U donnée par (4.34), On peut écrire :

$$U = \frac{GM}{\epsilon}Arctg\frac{\epsilon}{u} + \frac{1}{3}a^2\omega^2\frac{q}{q_0}\left(1 - \frac{3}{2}cos^2\phi\right) + \frac{1}{2}\omega^2(u^2 + \epsilon^2)cos^2\phi \tag{4.38}$$

ou encore :

$$U = \frac{GM}{\epsilon}Arctg\frac{\epsilon}{u} + \frac{1}{2}\omega^2a^2\frac{q}{q_0}\left(sin^2\phi - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\omega^2(u^2 + \epsilon^2)cos^2\phi \tag{4.39}$$

avec :

$$q = q(u) = \frac{1}{2}\left[\left(1 + 3\frac{u^2}{\epsilon^2}\right)Arctg\frac{\epsilon}{u} - 3\frac{u}{\epsilon}\right] \tag{4.40}$$

$$q_0 = q(u = b) = \frac{1}{2}\left[\left(1 + 3\frac{b^2}{\epsilon^2}\right)Arctg\frac{\epsilon}{b} - 3\frac{b}{\epsilon}\right] \tag{4.41}$$

$$U_0 = \frac{GM}{\epsilon}Arctge' + \frac{1}{3}\omega^2a^2 \tag{4.42}$$

La dernière équation lie la masse de la Terre M au potentiel U_0 et aux paramètres a, b, ω, G.

Références

[1] **A. Ardalan** & **A. Safari**. 2005. Global height datum unification : a new approch in gravity potentiel space. Journal of Geodesy. Vol 79, pp 512-523.

[2] **M. Bursa, K. Pec**. 1993. *Gravity Field and Dynamics of the Earth*. Springer-Verlag, 385p.

[3] **J.B. Listing**. 1873. Über unsere jetzige Kenntnis der Gestalt und Grösse der Erde. Nachr kgl GesWiss3 ; Verlag J Dieterischen Buchhandlung, Göttingen.

[4] **W.A. Heiskanen, H. Moritz**. 1967. *Physical Geodesy*. Freeman, San Francisco. Reprint, 1979. Institute of Physical Geodesy, Technical University, Graz, Austria. 364p.

[5] **C. Le Cocq**. 1984. *Introduction à la Géodésie Physique*. Cours ENSG, IGN France. 85 p.