ECOLE SUPÉRIEURE PRIVÉE D'AÉRONAUTIQUE ET DES TECHNOLOGIES DE TUNIS

COURS D'ANALYSE NUMÉRIQUE ET MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES POUR LES ELÈVES INGÉNIEURS TOPOGRAPHES - GÉOMATICIENS DE L'ESAT

Par

Abdelmajid BEN HADJ SALEM

INGÉNIEUR GÉOGRAPHE GÉNÉRAL

NOVEMBRE 2014

VERSION 2.

Table des matières

PRÉFACE

Ce cours donne les bases mathématiques de l'analyse numérique et les mathématiques appliquées nécessaires pour les élèves ingénieurs de l'option Topographie et Géomatique de l'ESAT.

On commence par un rappel des principales formules et connaissances en mathématiques concernant :

- la trigonométrie plane,

- la résolution des triangles,

- les espaces euclidiens,

- les fonctions.

Le cours proprement comporte :

- introduction au calcul matriciel,

- la résolution des systèmes linéaires,

- l'interpolation,

- la théorie élémentaire de l'approximation,

- interpolation par les fonctions splines,

- applications à la théorie des Moindres carrés.

CHAPITRE 1

Rappels de Trigonométrie Plane

1.1 Trigonométrie Plane

On considère un cercle de rayon l'unité, entré au point O. On définit les fonctions circulaires comme suit (Fig. 1.1) :

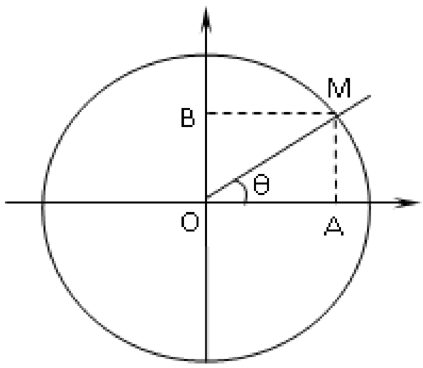


Fig. 1.1 Cercle Unité

$$sin\theta = AM/OM \tag{1.1}$$
$$cos\theta = OA/OM \tag{1.2}$$
$$tg\theta = AM/OA \tag{1.3}$$
$$cotg\theta = 1/tg\theta \tag{1.4}$$

Ecrivons dans le triangle OAM, le théorème de Pythagore, on obtient :

$$OM^2 = OA^2 + AM^2 OA^2/OM^2 + AM^2/OM^2 = 1$$

Soit :

$$\boxed{cos^2\theta + sin^2\theta = 1} \tag{1.5}$$

L'équation (1.5) est dite la relation fondamentale de la trigonométrie plane.

1.2 PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS CIRCULAIRES

Les fonctions circulaires sont des fonctions périodiques, en effet, on a :

$$sin(\theta + 2k\pi) = sin\theta \tag{1.6}$$

$$cos(\theta + 2k\pi) = cos\theta \tag{1.7}$$

$$tg(\theta + k\pi) = tg\theta \tag{1.8}$$

pour $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, ..., \pm n$.

On peut prendre les domaines de définition comme suit :

- pour les fonctions *sin* et *cos* : $[-\pi, +\pi]$,

- pour la fonction *tg* : $[-\pi/2, +\pi/2]$

De plus, on a les propriétés suivantes :

$$sin(-\theta) = -sin\theta \tag{1.9}$$

$$cos(-\theta) = cos\theta \tag{1.10}$$

$$tg(-\theta) = -tg\theta \tag{1.11}$$

Et :

$$sin(\theta + \pi/2) = cos\theta \tag{1.12}$$

$$cos(\theta + \pi/2) = -sin\theta \tag{1.13}$$

$$tg(\theta + \pi/2) = -cotg\theta \tag{1.14}$$

$$sin(\pi - \theta) = sin\theta \tag{1.15}$$

$$cos(\pi - \theta) = -cos\theta \tag{1.16}$$

$$tg(\pi - \theta) = -tg\theta \tag{1.17}$$

$$sin(\theta + \pi) = -sin\theta \tag{1.18}$$

$$cos(\theta + \pi) = -cos\theta \tag{1.19}$$

$$tg(\theta + \pi) = tg\theta \tag{1.20}$$

1.3 FORMULES USUELLES

On a les formules suivantes :

$$cos(a+b) = cosa.cosb - sina.sinb \tag{1.21}$$
$$cos(a-b) = cosa.cosb + sina.sinb \tag{1.22}$$
$$sin(a+b) = sina.cosb + sinb.cosa \tag{1.23}$$
$$sin(a-b) = sina.cosb - sinb.cosa \tag{1.24}$$

et :

$$cosa + cosb = 2cos\frac{a+b}{2}cos\frac{a-b}{2} \tag{1.25}$$
$$cosa - cosb = -2sin\frac{a+b}{2}sin\frac{a-b}{2} \tag{1.26}$$
$$sina + sinb = 2sin\frac{a+b}{2}cos\frac{a-b}{2} \tag{1.27}$$
$$sina - sinb = 2cos\frac{a+b}{2}sin\frac{a-b}{2} \tag{1.28}$$

$$tg(a+b) = \frac{tga + tgb}{1 - tga.tgb} \tag{1.29}$$
$$tg(a-b) = \frac{tga - tgb}{1 + tga.tgb} \tag{1.30}$$
$$tga + tgb = \frac{sin(a+b)}{cosacosb} \tag{1.31}$$
$$sin2a = 2sina.cosa \tag{1.32}$$
$$cos2a = cos^2a - sin^2a = 2cos^2a - 1 = 1 - 2sin^2a \tag{1.33}$$
$$tg2a = \frac{2tga}{1 - tg^2a} \tag{1.34}$$

Si on pose :

$$tg(a/2) = t$$

Alors :

$$sina = \frac{2t}{1+t^2} \tag{1.35}$$
$$cosa = \frac{1-t^2}{1+t^2} \tag{1.36}$$
$$tga = \frac{2t}{1-t^2} \tag{1.37}$$

Pour les valeurs remarquables, on a le tableau suivant :

a en radians	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$sina$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tga	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$

Tableau 1.1 Tableau des valeurs remarquables

1.4 DÉRIVÉES DES FONCTIONS CIRCULAIRES

Les fonctions circulaires sont des fonctions indéfiniment dérivables dans leurs domaines de définition. On a alors :

$$y = sinx \Longrightarrow y' = cosx \tag{1.38}$$

$$y = cosx \Longrightarrow y' = -sinx \tag{1.39}$$

$$y = tgx \Longrightarrow y' = 1 + tg^2x = 1/cos^2x \tag{1.40}$$

Pour x au voisinage de 0 $(x < 3°)$ on a les développements limités suivants :

$$sinx = x - x^3/6 + ... \tag{1.41}$$

$$cosx = 1 - x^2/2 + ... \tag{1.42}$$

$$tgx = x + x^3/3 + ... \tag{1.43}$$

1.5 EXERCICES

1- Simplifier les expressions suivantes :

$$A = 2cos^8x - 2sin^8x + 3sin^6x + 5cos^6x + 3cos^4x$$

$$B = \frac{cos^2x - sin^2y}{sin^2xsin^2y} - cotg^2xcotg^2y$$

2- Résoudre les équations :

* $tgx = 2sinx$,

* $sin^4x + cos^4x = 5/8$.

3- Calculer :

* $A = cos3x$,

* $B = sin3x$.

CHAPITRE 2

LES ESPACES EUCLIDIENS

Dans un espace rapporté à un système de 3 axes orthonormés, on a :

- $x = OP$ = abscisse de M,

- $y = OQ$ = ordonnée de M,

- $z = OR$ = côte de M.

Si $\boldsymbol{k}$ est vecteur unitaire de Oz, alors on écrira :

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x,y,z)^T, \ \boldsymbol{OM}\left|\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}\right. = (x,y,z)^T \tag{2.1}$$

où T désigne transposée. Vectoriellement, on écrit :

$$\boldsymbol{OM} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

2.1 LES ESPACES VECTORIELS

Définition 2.1 *Un espace vectoriel réel est un ensemble d'éléments appelés vecteurs, ayant les propriétés suivantes :*

Si $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_n$, *sont des vecteurs de l'espace vectoriel* V *et si* $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$ *sont des nombres réels, alors la combinaison linéaire* $\mu_1.\boldsymbol{x}_1 + \mu_2.\boldsymbol{x}_2 + ... + \mu_n.\boldsymbol{x}_n$ *est définie et c'est un élément de* V.

A partir de la définition, on a les propriétés suivantes :

$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ et $\mu, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$

$$\mu.(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mu.\mathbf{x}+\mu.\mathbf{y} \tag{2.2}$$

$$(\mu_1+\mu_2).\mathbf{x} = \mu_1.\mathbf{x}+\mu_2.\mathbf{x} \tag{2.3}$$

$$(\mu_1\mu_2)\mathbf{x} = \mu_1(\mu_2.\mathbf{x}) = \mu_2.(\mu_1.\mathbf{x}) \tag{2.4}$$

$$1.\mathbf{x} = \mathbf{x} \tag{2.5}$$

$$\mathbf{x}+\mathbf{o} \; = \mathbf{o}+\mathbf{x} = \mathbf{x} \tag{2.6}$$

Exemples : la droite réelle $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel. $\mathbb{R} = \{\alpha/\alpha \in \mathbb{R}\}$.

$\mathbb{R}^3 = \left\{\mathbf{x} = (a,b,c)^T\right\}$ où a,b,c sont les composantes du vecteur $\mathbf{x}$.

2.1.1 Les Bases d'un espace vectoriel de dimension finie

Définition : Un ensemble $(\mathbf{e}_i)$ de l'espace vectoriel V est une base de V si :

a) les vecteurs $(\mathbf{e}_i)$ sont indépendants,

$$\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \mathbf{e}_i = 0 \Leftrightarrow \lambda_i = 0 \; \forall i \tag{2.7}$$

b) tout vecteur $\mathbf{x}$ s'exprime d'une manière unique en fonction de $\mathbf{e}_i$ donc

$$\forall \mathbf{x} \in V, \exists \lambda_i \text{ uniques}/ \; \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \mathbf{e}_i \tag{2.8}$$

Exemple : dans $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ est une base dite base canonique de $\mathbb{R}^3$.

2.1.2 Normes Vectorielles

Soit V un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$ des scalaires.

Définition 2.2 *Une norme sur V est une application $||.|| : V \longrightarrow R$ qui vérifie les propriétés suivantes :*

$$||v|| = 0 \Longleftrightarrow v = 0, \quad \textit{et} \quad ||v|| \geq 0 \quad \textit{pour tout } v \in V$$
$$||\alpha v|| = |\alpha| ||v|| \quad \textit{pour tout } \alpha \in \mathbb{R}, v \in V$$
$$||u+v|| \leq ||u|| + ||v|| \quad \textit{pour tout } u, v \in V$$

La dernière propriété s'appelle *l'inégalité triangulaire*. Une norme sur V sera également appelée *norme vectorielle*. On la note par $||.||_V$. Enfin, on appelle *un espace vectoriel normé* un espace vectoriel muni d'une norme.

Si V est de dimension finie n, les normes les plus utilisées sont :

$$||v||_1 = \sum_{i=1}^{i=n} |v_i| \tag{2.10}$$

$$||v||_2 = \left(\sum_{i=1}^{i=n} v_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.11}$$

$$||v||_\infty = max_i |v_i| \tag{2.12}$$

avec $v = (v_1, v_2, ..., v_n)^T \in V$. La norme $||.||_2$ est appelée la norme euclidienne. Un espace vectoriel muni de cette norme est dit *espace euclidien*. Comme exemple $V = \mathbb{R}^n$.

2.1.3 Norme d'un vecteur

Si $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ alors :

$$\|\mathbf{x}\| = ||\mathbf{x}||_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \tag{2.13}$$

2.1.4 Produit scalaire de 2 vecteurs

Soient $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ et $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)^T$ alors :

$$\mathbf{x}.\mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \tag{2.14}$$

et $\mathbf{x}.\mathbf{y}$ est un réel.

On a aussi :

$$\mathbf{x}.\mathbf{x}' = \|\mathbf{x}\|.\|\mathbf{x}'\|.cos(\widehat{\mathbf{x}, \mathbf{x}'}) \tag{2.15}$$

Si $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$, on a alors :

$$\mathbf{x}.\mathbf{x} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = ||\mathbf{x}||^2$$

Si E est un espace vectoriel sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels, l'opérateur $(.,.)$ définit un produit scalaire dans E si $(.,.)$ est une application de $E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que : * $\forall x, y \in E,\ (x,y) = (y,x) \in \mathbb{R}$,

* $\forall x \in E,\ (x,x) \geq 0$,

* $\forall x \in E,\ (x,x) = 0 \Longrightarrow x = 0$,

* l'application $(.,.)$ est bilinéaire.

2.1.5 Produit vectoriel de 2 vecteurs

Soient $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ et $\mathbf{x}' = (x_1', x_2', x_3')^T$, alors le produit vectoriel des vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{x}'$ est le vecteur $\mathbf{y}$ noté $\mathbf{x} \wedge \mathbf{x}'$ telque $\mathbf{y}$ soit orthogonal au plan engendré par $\mathbf{x}$ et $\mathbf{x}'$ et que $(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{y})$ forme un repère direct. On écrit :

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{x}' \tag{2.16}$$

Les composantes du vecteur $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)^T$ sont :

$$y_1 = x_2 x_3' - x_2' x_3 \tag{2.17}$$
$$y_2 = x_3 x_1' - x_1 x_3' \tag{2.18}$$
$$y_3 = x_1 x_2' - x_1' x_2 \tag{2.19}$$

On a aussi

$$\mathbf{y} = \|\mathbf{x}\|.\|\mathbf{x}'\|.sin(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \tag{2.20}$$

De plus, on a les propriétés suivantes :

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = -\mathbf{y} \wedge \mathbf{x} \tag{2.21}$$
$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{x} = \mathbf{o} \tag{2.22}$$

2.1.6 Coordonnées polaires d'un point M dans le plan

Utilisant la figure ci-dessous, les coordonnées polaires de M sont :

$$\theta = \text{angle orienté} \tag{2.23}$$
$$\rho = \text{longueur de } \boldsymbol{OM} \tag{2.24}$$

Si on choisit un axe Oy perpendiculaire à l'axe polaire et faisant avec lui un angle de $+\frac{\pi}{2} = 90° = 100$ gr, on obtient un système d'axes orthonormés. On peut alors passer des coordonnées cartésiennes (x, y) aux coordonnées polaires et reciproquement par les formules :

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{2.25}$$
$$\theta = Arctg(\frac{y}{x}) \Longleftrightarrow tg\theta = \frac{y}{x} \tag{2.26}$$

Ou :

$$x = \rho cos\theta \tag{2.27}$$
$$y = \rho sin\theta \tag{2.28}$$

2.1.7 Les Coordonnées Polaires dans l'Espace

Les coordonnées polaires d'un point M dans l'espace sont :

- λ =angle orienté depuis un méridien origine, c'est la longitude,

- ϕ = angle orienté depuis le plan de l'équateur au parallèle passant par M, c'est la latitude,

- r = la longueur de $\boldsymbol{OM}$.

On écrira $M(\phi,\lambda,r)$. Les coordonnées tridimensionnelles correspondantes sont :

$$OM = \begin{cases} X = rcos\phi cos\lambda \\ Y = rcos\phi sin\lambda \\ Z = rsin\phi \end{cases}$$

2.2 EQUATION D'UNE DROITE DANS $\mathbb{R}^2$

2.2.1 Une droite passant par un point $A_0(x_0,y_0)$ et de direction un vecteur $\boldsymbol{u} = (\alpha,\beta)^T$

Un point $M(x,y)$ appartient à la droite D vérifie **AM** parallèle à **u**. Or **AM**=$(x-x_0,y-y_0)^T$ où T désigne transposée. D'où pour $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$:

$$\frac{x-x_0}{\alpha} = \frac{y-y_0}{\beta} \Rightarrow \beta(x-x_0) - \alpha(y-y_0) = 0 \tag{2.29}$$
$$\text{soit } \beta x - \alpha y + \alpha y_0 - \beta x_0 = 0 \tag{2.30}$$

2.2.2 Une droite D passante par 2 points $A_0(x_0,y_0)$ et $A'_0(x'_0,y'_0)$

On considère alors $\mathbf{u} = \mathbf{A_0A'_0}$ et on traite le cas 4.9.1.

2.2.3 *Une droite perpendiculaire à un vecteur* $\mathbf{u} = (v, w)^T$ *et passant par un point* $A_0(x_0, y_0)$

$M(x,y) \in D \Rightarrow \mathbf{AM} \perp \mathbf{u} \Longrightarrow \mathbf{AM}.\mathbf{u} = 0$ Soit :

$$(x - x_0).v + (y - y_0).w = 0$$

ou :

$$vx + wy - vx_0 - wy_0 = 0 \tag{2.31}$$

2.2.4 *Equation d'une droite tangente à la courbe* $y = f(x)$ *au point* $(x_0, y_0 = f(x_0))$

Elle s'écrit tout simplement :

$$y - y_0 = f'(x_0).(x - x_0) \tag{2.32}$$

2.2.5 *Equation de la normale à la courbe* $y = f(x)$ *au point* $(x_0, y_0 = f(x_0))$

Pour x_0 tel que $f'(x_0) \neq 0$, on a l'équation :

$$y - y_0 = \frac{-1}{f'(x_0)}.(x - x_0) \tag{2.33}$$

Condition pour que deux droites soient perpendiculaires :

a- si les droites sont données par :

$$y = ax + b \text{ et } y = a'x + b'$$

Il faut :

$$aa' = -1 \tag{2.34}$$

b- si les droites sont données par :

$$mx + ny + p = 0 \text{ et } m'x + n'y + p' = 0$$

La condition est :

$$mm' + nn' = 0 \tag{2.35}$$

2.2.6 Angle de deux droites

Soient les deux droites d'équations :

$$y = ax + b \text{ et } y = a'x + b'$$

Alors l'angle V des deux droites est tel que :

$$tgV = \frac{a' - a}{1 + aa'} \tag{2.36}$$

2.2.7 Distance d'un point $M(x_0, y_0)$ à une droite

La distance d'un point $M(x_0, y_0)$ à une droite d'équation $mx + ny + p = 0$ est :

$$d = \frac{|mx_0 + ny_0 + p|}{\sqrt{m^2 + n^2}} \tag{2.37}$$

où $|a|$ désigne valeur absolue de a = a si $a \geq 0$ et $-a$ si $a \leq 0$.

2.2.8 Intersection de deux droites

Les coordonnées du point d'intersection sont les solutions du système formé par les équations des deux droites.
Exercice : Trouver le point d'intersection de la droite D1 passant par $A(4,3)$ et $B(10,6)$ et de la droite D2 perpendiculaire à AB et passant par $C(5,11)$.

2.3 EQUATION D'UNE DROITE DANS $\mathbb{R}^3$

2.3.1 Equation paramétrique d'une droite

Une droite passant par un point $A_0(x_0, y_0, z_0)$ et de direction le vecteur $\mathbf{u} = (\alpha, \beta, \gamma)^T$ On a l'équation :

$$x = x_0 + t\alpha \tag{2.38}$$

$$y = y_0 + t\beta \tag{2.39}$$

$$z = z_0 + t\gamma \tag{2.40}$$

avec $t \in \mathbb{R}$. En éliminant t des équations précédentes, on obtient l'équation cartésienne d'une droite dans $\mathbb{R}^3$:

$$\frac{x-x_0}{\alpha} = \frac{y-y_0}{\beta} = \frac{z-z_0}{\gamma} \tag{2.41}$$

avec $\alpha\beta\gamma \neq 0$.

2.4 CHANGEMENT D'AXES DE COORDONNÉES

2.4.1 Translation d'axes

On passe du repère (O,x,y) au repère (O',X,Y) par une translation de vecteur $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{OO'}$, on a alors :

$$x = x_0 + X \tag{2.42}$$

$$y = y_0 + Y \tag{2.43}$$

où (x_0, y_0) sont les coordonnées de O' dans le repère (O,x,y).

2.4.2 Rotation des axes d'un angle α

Les nouvelles coordonnées s'expriment comme suit :

$$X = xcos\alpha + ysin\alpha \tag{2.44}$$

$$Y = -xsin\alpha + ycos\alpha \tag{2.45}$$

2.4.3 Translation et rotation des axes

Dans ce cas, on a les formules suivantes :

$$X = x_0 + xcos\alpha + ysin\alpha \tag{2.46}$$

$$Y = y_0 - xsin\alpha + ycos\alpha \tag{2.47}$$

2.5 Exercices

Exercice n°1 :

Soit E l'espace vectoriel de dimension 2 formé des polynômes de degré ≤ 1 $P(t) = a + bt$. On munit E de l'application suivante $(.|.)$:

$$\forall P, Q \in E, \quad (P|Q) = \int_{-1}^{+1} P(t)Q(t)dt$$

1. Montrer que l'application $(.|.)$ définit un produit scalaire dans E.

2. Calculer la norme du polynôme $R(t) = t + 1$.

3. Chercher les polynômes $P(t) = a + bt$ orthogonaux à $R(t)$.

CHAPITRE 3

Résolution Des Triangles

3.1 Triangles Quelconques

On a les formules suivantes :

$$A+B+C=\pi \tag{3.1}$$

$$\frac{a}{sinA}=\frac{b}{sinB}=\frac{c}{sinC}=2R \text{ Relations des sinus} \tag{3.2}$$

$$a^2=b^2+c^2-2bccosA \tag{3.3}$$

$$b^2=a^2+c^2-2accosB \tag{3.4}$$

$$c^2=a^2+b^2-2abcosC \tag{3.5}$$

$$a=bcosC+ccosB, \quad b=ccosA+acosC, \quad c=acosB+bcosA \tag{3.6}$$

En posant $2p=a+b+c$, on obtient la surface S du triangle par :

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{abc}{4R}=p.r=p^2tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2} \tag{3.7}$$

De plus, on a :

$$sin\frac{A}{2}=\frac{\sqrt{(p-b(p-c)}}{bc} \tag{3.8}$$

$$cos\frac{A}{2}=\frac{\sqrt{p(p-a)}}{bc} \tag{3.9}$$

$$tg\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}=\frac{r}{p-a} \tag{3.10}$$

3.2 CAS CLASSIQUES DE RÉSOLUTION

Ces formules sont très utiles en topographie (mesures de points inacessibles).

Cas n°	Données	Formules à utiliser
1	Un côté a, 2angles B et C	$A = \pi - (B+C)$ $b = a\dfrac{sinB}{sinA}$; $c = a\dfrac{sinC}{sinA}$ $S = \dfrac{bcsinA}{2} = \dfrac{a^2 sinBsinC}{2sin^2A}$
2	Deux côtés a, b un angle C (entre a et b)	$tg\frac{A-B}{2} = \dfrac{a-b}{a+b}tg\dfrac{(A+B)}{2}$ or $A+B = \pi - C$. On en déduit $A-B$ donc A puis B. $c = a\dfrac{sinC}{sinA}$; $S = \dfrac{absinC}{2}$
3	Deux côtés a, b un angle A (non entre a et b) cas douteux	$sinB = b\dfrac{sinA}{a}$; $C = \pi - (A+B)$ $c = a\dfrac{sinC}{sinA}$; $S = \dfrac{absinC}{2}$ **Discussion** 1°) $A > \pi/2; a \leq b$ o solution $a > b$ 1 solution $B < \frac{\pi}{2}$ 2°) $A < \pi/2; a > b$ 1 solution $B < \pi/2$ $a < b$: $\underline{a < bsinA}$ o solution $\underline{a = bsinA}$ 1 solution $B = \pi/2$ $\underline{a > bsinA}$ 2 solutions B' et $\pi - B'$
4	trois côtés a, b, c	$tg\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$ $tg\dfrac{B}{2} = \sqrt{\dfrac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$ $tg\dfrac{C}{2} = \sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$ on vérifie que $A+B+C = \pi$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Tableau 3.1 Cas classiques de résolution

3.2.1 *Triangles rectangles*

On a les relations fondamentales :

$$A = B + C = \frac{\pi}{2} \tag{3.11}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \text{ Relation de Pythagore,} \quad a = 2R \tag{3.12}$$

$$sinB = \frac{b}{a} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} \tag{3.13}$$

$$cosB = \frac{c}{a} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} \tag{3.14}$$

$$tgB = \frac{b}{c} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} \tag{3.15}$$

3.2.1.1 Cas classiques de résolution

Cas n°	Données	Formules à utiliser
1	$A = \frac{\pi}{2}$, B et a	$C = \pi/2 - B$
		$b = asinB$, $c = acosB$
		$S = \frac{a^2 sin2B}{4} = \frac{bc}{2}$
2	$A = \frac{\pi}{2}$, B et b	$C = \pi/2 - B$
		$a = \frac{b}{sinB}$ $\frac{b^2 cotgB}{2}$
3	$A = \frac{\pi}{2}$, a, b	$sinB = cosC = \frac{b}{a} \Rightarrow B$ et C
		$c = \sqrt{a^2 - b^2}$, $S = \frac{bc}{2}$
4	$A = \frac{\pi}{2}$ b, c	$tgB = cotgC = \frac{b}{c} \Rightarrow B$ et C
		$a = \sqrt{b^2 + c^2}$ ou $a = \frac{b}{sinB}$
		$S = \frac{bc}{2}$

Tableau 3.2 Cas des triangles rectangles

CHAPITRE 4

LES FONCTIONS

4.1 DÉFINITIONS

4.1.1 Fonction

Deux variables x et y sont fonctions l'une de l'autre, si à toute valeur de l'une on peut correspondre une valeur ou un ensemble de valeurs de l'autre. On note la fonction y de la variable x par :

$$y = f(x) \tag{4.1}$$

Exemple :

$$y = 2x + 1 \tag{4.2}$$

4.1.2 Domaine de définition :

c'est l'ensemble $\mathscr{D}$ des réels tel que quelque soit x appartient à ce domaine, la fonction $y = f(x)$ est définie. On note :

$$\mathscr{D} = \{x \in \mathbb{R} / \ y = f(x) \text{ est définie}\} \tag{4.3}$$

Pour la fonction précédente, $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

4.1.3 La dérivée d'une fonction

Définition 4.1 *La dérivée d'une fonction f en un point M de la courbe $y = f(x)$ est la limite de rapport de l'accroissement Δy de la fonction à l'accroissement Δx de la variable quand ce dernier tend vers 0.*

$$y'(x_0) = \underbrace{lim}_{x \to x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underbrace{lim}_{x \to x_0} \frac{y(x) - y(x_0)}{x - x_0} = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} \tag{4.4}$$

La dérivée d'une fonction en un point est la pente de la tangente au graphe de la fonction en ce point :

$$y' = tg\alpha = \frac{dy}{dx} \tag{4.5}$$

4.2 DÉRIVÉES USUELLES

Fonctions	Dérivées
$y = a$	$y' = 0$
$y = ax$	$y' = a$
$y = ax + b$	$y' = a$
$y = x^2$	$y' = 2x$
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
$y = \frac{1}{x}$	$y' = \frac{-1}{x^2}$
$y = Logx$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = sinx$	$y' = cosx$
$y = cosx$	$y' = -sinx$
$y = tgx$	$y' = 1 + tg^2x$

Tableau 4.1 Dérivées des fonctions usuelles

CHAPITRE 5

La Trigonométrie Sphérique

5.1 La Trigonométrie Sphérique

La trigonométrie sphérique établit les relations liant les grandeurs caractéristiques d'un triangle sphérique.

5.1.1 Le Triangle Sphérique

On considère une sphère de centre un point O et de rayon l'unité et trois points sur la sphère A, B, et C.

Définition 5.1 *On appelle triangle sphérique la figure formée par les 3 arcs de grands cercles AB, AC, et CB inférieurs à* 200 *grades.*

Les grandeurs qui caractérisent le triangle sphérique ABC sont :

- les 3 côtés notés respectivement a, b, c, équivalents aux angles au centre des directions OA, OB, OC soit $a = (\widehat{OB, OC}), b = (\widehat{OA, OC}), c = (\widehat{OA, OB})$.

- les 3 angles dièdres des faces du trièdre OA, OB, OC notés A, B, C.

Remarquons que les angles et côtés du triangle sont les grandeurs mesurables par des angles.

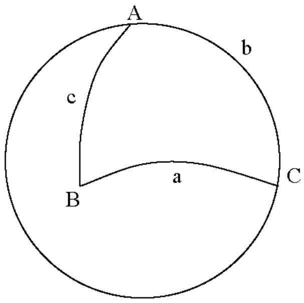


Fig. 5.1 Le Triangle Sphérique

5.1.2 Le Trièdre Supplémentaire - Le Triangle Sphérique Polaire

Au trièdre OA, OB, OC on associe le trièdre supplémentaire dont les arrêtes OA', OB', OC' sont respectivement orthogonales aux faces OBC, OAC, OAB. Le point A' est choisi tel que A et A' soient dans la même demie sphère limitée par BC. Soit le point C'' diamétralement opposé au point C (Fig.5.2). On a donc :

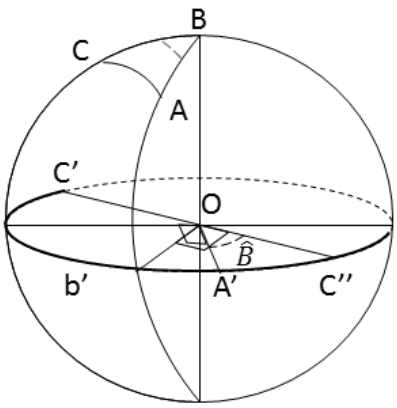


Fig. 5.2 Le triangle sphérique polaire

$$(\widehat{OA, OC''}) = \pi - (\widehat{OBC, OAB}) = \pi - B = (\widehat{OA', OC'})$$

D'où les relations :

$$\begin{aligned}(\widehat{OB', OC'}) &= a' = \pi - A \\ (\widehat{OA', OC'}) &= b' = \pi - B \\ (\widehat{OA', OB'}) &= c' = \pi - C\end{aligned} \tag{5.1}$$

Définition 5.2 *Le triangle sphérique A', B', C' est dit triangle polaire du triangle ABC.*

Comme le triangle ABC est le triangle polaire de $A'B'C'$, on a :

$$\begin{aligned} a &= \pi - A' \\ b &= \pi - B' \\ c &= \pi - C' \end{aligned} \tag{5.2}$$

5.1.3 Les Formules de la Trigonométrie Sphérique

Un triangle sphérique est entièrement défini par la donnée de 3 de ses 6 éléments. Alors entre 4 éléments quelconques, il y a :

$$C_6^4 = \frac{6!}{4!2!} = 15$$

relations non indépendantes comme suit :

- 3 côtés, 1 angle : 3 relations,

- 3 angles, 1 côté : 3 relations,

- 2 côtés, 2 angles(opposés aux côtés) : 3 relations,

- 2 côtés, 2 angles (adjacents aux côtés) : 6 relations.

5.1.4 Etablissement de la Formule Fondamentale

Soit un triangle sphérique ABC, en calculant le produit scalaire $\boldsymbol{OB}.\boldsymbol{OC}$ de 2 manières (Fig.5.3), on arrive à la formule fondamentale :

$$\boldsymbol{OB} = cos(\pi/2 - c).\boldsymbol{OH} + sin(\pi/2 - c).\boldsymbol{OA} = sinc.\boldsymbol{OH} + cosc.\boldsymbol{OA}$$
$$\boldsymbol{OC} = sinb.\boldsymbol{OK} + cosb.\boldsymbol{OA}$$

D'où :

$$\boldsymbol{OB.OC} = sinc.sinb.\boldsymbol{OH.OK} + cosb.cosc$$

Or :

$$\boldsymbol{OH.OK} = ||\boldsymbol{OH}||.||\boldsymbol{OK}||.cos(\boldsymbol{OH}, \boldsymbol{OK}) = 1.1.cosA = cosA$$

Et :

$$\boldsymbol{OB.OC} = ||\boldsymbol{OB}||.||\boldsymbol{OC}||.cos(\boldsymbol{OB}, \boldsymbol{OC}) = 1.1.cosa = cosa$$

D'où :

$$\boxed{cosa = cosb.cosc + sinb.sinc.cosA} \tag{5.3}$$

En utilisant le triangle polaire, on a :

$$cosa' = cosb'.cosc' + sinb'.sinc'.cosA'$$

Or $a' = \pi - A,\ \ b' = \pi - B,$ et $c' = \pi - C,\ \ a = \pi - A'$, d'où :

$$\boxed{cosA = -cosB.cosC + sinB.sinC.cosa} \tag{5.4}$$

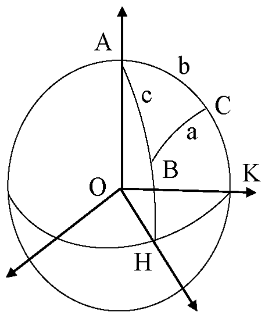


Fig. 5.3 Calcul de la formule fondamentale

5.1.5 La Formule des Sinus

De (5.3), on a :

$$cosA = \frac{cosa - cosbcocc}{sinbsinc}$$

Soit $sin^2A = 1 - cos^2A$, on arrive à :

$$\frac{sin^2A}{sin^2a} = \frac{sin^2B}{sin^2b} = \frac{sin^2C}{sin^2c}$$

D'où :

$$\boxed{\frac{sinA}{sina} = \frac{sinB}{sinb} = \frac{sinC}{sinc}} \tag{5.5}$$

5.1.6 Formules des Sinus Cosinus

En utilisant la formule fondamentale, on a :

$$cosa = cosb.cosc + sinb.sinc.cosA$$
$$cosb = cosa.cosc + sina.sinc.cosB$$

Et en remplaçant dans la deuxième formule, l'expression de $cosa$, on obtient $sinc.cosb = sinb.cosc.cosA + sina.cosB$, d'où :

$$\boxed{sina.cosB = cosb.sinc - cosc.sinb.cosA} \tag{5.6}$$

5.1.7 Formule des Cotangentes

En remplaçant dans (5.6) $sina$ par $sinA.sinb/sinB$, on obtient :

$$\boxed{sinA.cotgB = cotgb.sinc - cosc.cosA} \tag{5.7}$$

5.1.8 Cas d'un Triangle Rectangle

Pour un triangle sphérique rectangle, un des angles vaut $\pi/2$ = 100 gr = 90°. Les formules se simplifient, leur nombre est :

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!2!} = 10$$

Supposons que A = $\pi/2$, on fait le schéma ci-dessous (Fig.5.4).

On trouve les relations en appliquant la règle mnémonique de Neper [1] :

Le cosinus d'un élément quelconque est égal à :

- au produit des cotangentes des éléments adjacents,

- au produit des sinus des éléments non adjacents.

Exemple :

- $cosa = cotgB.cotgC$,

- $cosa = sin(\pi/2 - c).sin(\pi/2 - b) = cosc.cosb$.

5.1.9 L'Excès Sphérique

Définition 5.3 *On appelle fuseau sphérique la portion de la demi sphère limitée entre deux grands cercles (Fig.5.5).*

1. John Neper (1550 -1617) : Astronome écossais.

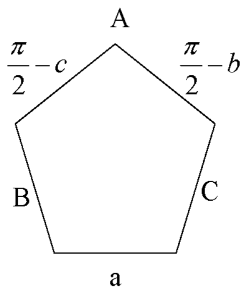


Fig. 5.4 La règle de Neper

La surface d'un fuseau sphérique d'un angle A est proportionnelle à AR^2 où R est le rayon de la sphère, soit $S = kAR^2$, pour $A = 2\pi$ on a $S = 4\pi R^2 = k2\pi R^2$ d'où $k = 2$, on obtient :

$$S = 2AR^2$$

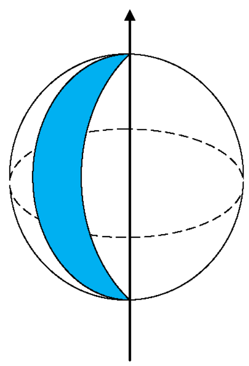


Fig. 5.5 Un fuseau sphérique

Considérons maintenant un triangle sphérique ABC :

- le fuseau (AB, AC) donne $S_1 = 2AR^2$,

- le fuseau (CA, CB) donne $S_2 = 2CR^2$,

- le fuseau (BC, BA) donne $S_3 = 2BR^2$,

d'où :

$$S_1 + S_2 + S_3 = 2R^2(A + B + C)$$

Or $S_1+S_2+S_3$ = la surface de la demi-sphère + 2 fois la surface du triangle sphérique ABC. On note T la surface du triangle sphérique ABC, on a alors :

$$2R^2(A+B+C)=2\pi R^2+2T$$

ou encore :

$$A+B+C=\pi+\frac{T}{R^2}=\pi+\varepsilon$$

Soit :

$$\boxed{\varepsilon(rd)=\frac{T}{R^2}=\frac{Aire ABC}{R^2}=\text{excès sphérique}} \tag{5.8}$$

5.2 EXERCICES ET PROBLÈMES

Exercice 5.1 *Calculer l'azimut d'une étoile de déclinaison δ =+5° quand sa distance zénithale est de 80° pour un observateur situé à la latitude φ = 56°.*

Exercice 5.2 *En appliquant au triangle de position les formules de trigonométrie sphérique montrer que l'on peut calculer l'angle horaire AH_c du coucher d'un astre par : $cosAH_c=-tg\varphi.tg\delta$.*

Exercice 5.3 *Soit un triangle sphérique ABC. On donne les éléments suivants :*

- $\hat{A}=80.1643\,3\,gr$,

- $\hat{B}=55.7735\,1\,gr$,

- $\hat{C}=64.0626\,1\,gr$,

- $AC=20.1357\,km$,

- $AB=22.1435\,km$.

1. Calculer $\alpha=\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}$.

2. Déterminer ε l'excès sphérique de ce triangle.

3. Calculer la fermeture du triangle ABC, donnée par :

$$f=\alpha-200.0000\,0\,gr-\varepsilon$$

Exercice 5.4 *Soit $(\mathbb{S}^2)$ une sphère de rayon égal à 1. Soit un carré sphérique ABCD de côté a (arc de grand cercle). On note $\alpha=\hat{A}=\hat{B}=\hat{C}=\hat{D}$.*

1. Montrer que :

$$cosa=cotg^2\frac{\alpha}{2}$$

2. Donner l'expression de la diagonale $d=l'arcAC$.

Problème 5.1 *Soit* $(\mathbb{S}^2)$ *une sphère de rayon égal à 1 et de centre le point* Ω. *Un point M de* $(\mathbb{S}^2)$ *a pour coordonnées* (φ, λ). *On appelle les coordonnées de Cassini-Soldner*[2 3] *de M les angles (Fig.5.6) :*

- $L = \widehat{\Omega O, \Omega H}$,

- $H = \widehat{\Omega H, \Omega M}$.

1. Déterminer les relations liant L, H *à* φ, λ.

2. Inversement, donner les relations liant φ, λ *à* L, H.

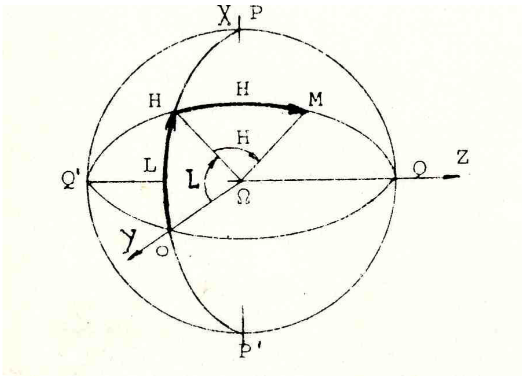


Fig. 5.6 Les coordonnées de Cassini-Soldner

Problème 5.2 *Au lieu M de latitude* φ = *38° Nord, on observe l'étoile polaire A de déclinaison* δ = *+ 89° et d'ascension droite* $\alpha = +2h13mn52.90s$.

1. Donner sur un graphique, les éléments du triangle sphérique PAM où P est le pôle Nord.

2. Sachant que l'heure sidérale locale HSL est égale au moment de l'observation à $6h37mn19.72s$, *calculer l'angle horaire AH.*

3. En appliquant la formule des cotangentes, montrer que l'azimut Az de l'étoile est donné par la formule :

$$tgAz = \frac{sinAH}{cosAH sin\varphi - cos\varphi tg\delta}$$

4. Calculer alors l'azimut Az.

5. Calculer la distance zénithale z de l'étoile.

2. César-François Cassini (1714-1784) : Astronome et géodésien français.
3. Dr Johann Georg von Soldner (1776-1833) : Mathématicien et astronome bavarois.

CHAPITRE 6

INTRODUCTION AU CALCUL MATRICIEL

6.1 LES APPLICATIONS LINÉAIRES

Définition 6.1 *Soient U,V deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$. Une application linéaire f de $U \Longrightarrow V$ est dite linéaire si et seulement si :*

$$\forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in U, \quad f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) \tag{6.1}$$

$$\forall \mu \in \mathbb{R}, \mathbf{x} \in U \quad f(\mu.\mathbf{x}) = \mu f(\mathbf{x}) \tag{6.2}$$

si $U = V$, f est un endomorphisme de U.

L'application f est dite :

- surjective si $\forall \mathbf{y} \in V$, $\exists \mathbf{x} \in U$ et $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$,

- injective si $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ alors $f(\mathbf{x}) \neq f(\mathbf{y})$,

- bijective si f est surjective et injective ou encore que $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ a une solution.

$Kerf = \{\mathbf{x} \in U / f(\mathbf{x}) = \mathbf{0} =\} =$ le noyau de f.

$Imf = \{\mathbf{y} \in V / \exists \mathbf{x} \in U et f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}\}$.

Si $V = U$ et f bijective, alors f est un automorphisme de U.

On considère U et V deux espaces vectoriels de dimension finie c'est-à-dire que les bases de U et de V sont finies.

Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, f est définie par la donnée de $f(\mathbf{e}_i)$ pour $i = 1,2,...,n$ et $(\mathbf{e}'_j)$ $j = 1,2,...,m$ la base de $\mathbb{R}^m$, alors :

$$f(\mathbf{e}_i) = a_{1i}.\mathbf{e}'_1 + a_{2i}.\mathbf{e}'_2 + ... + a_{mi}.\mathbf{e}'_m \tag{6.3}$$

On a donc le tableau suivant :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{6.4}$$

Le tableau $A = (a_{ij})$ s'appelle matrice à m lignes et n colonnes.

Si $m = n$, A est dite matrice carrée d'ordre n. Dans la suite, on considère les matrices carrées d'ordre n.

6.2 OPÉRATIONS SUR LES MATRICES

- Soit $A = (a_{ij})$, les éléments a_{ii} sont les éléments diagonaux. Les éléments a_{ij} avec $i \neq j$ sont les éléments non-diagonaux.

- Soit $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ et $C = A + B$. L'élément c_{ij} de C est tel que :

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad i, j = 1,2,...,n$$

- Soit $C = \mu A$ où μ est un réel, alors $C = (c_{ij})$ avec $c_{ij} = \mu.a_{ij}$ où $i, j = 1,2,...,n$.

- Soit $C = A.B$ le produit de 2 matrices carrées, alors $C = (c_{ij})$ telle que :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik} b_{kj} \tag{6.5}$$

on a en général :

$$A.B \neq B.A$$

- La matrice $O = (0)$ matrice dont tous les éléments sont nuls est la matrice neutre pour l'addition :

$$A + O = O + A = A$$

- La matrice unité $I = (\delta_{ij})$ avec $\delta_{ij} = 1$ si i=j et δ_{ij} = 0 si $i \neq j$ c-à-d que les éléments diagonaux de I sont égaux à 1 et les autres sont égaux à 0.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.6}$$

alors :

$$A.I = I.A = A \tag{6.7}$$

Donc I est l'élément neutre pour la multiplication des matrices.

6.3 PROPRIÉTÉS DES MATRICES

* Matrice transposée : soit la matrice $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$.

B est la matrice transposée de $A \Leftrightarrow b_{ji} = a_{ij}$ pour $i, j = 1, 2, ..., n$ et on note B^T.

* Matrice symétrique, soit $A = (a_{ij})$, A est symétrique $\Leftrightarrow A = A^T$ soit $a_{ij} = a_{ji}$ pour $i, j = 1, 2, ..., n$.

* Matrice antisymétrique : A est antisymétrique $A^T = -A$ soit $a_{ii} = 0$ pour i = 1,2,...,n.

* $A = (a_{ij})$ une matrice définie positive est une matrice carrée telle que :

$$\forall \text{ le vecteur } x \neq o \Rightarrow x^T.A.x > 0. \tag{6.8}$$

* Une matrice orthogonale est une matrice A où toutes les lignes ou colonnes c_i vérifient :

$c_i^T.c_j = 0$ si $i \neq j$ et $c_i^T.c_j = 1$ si i=j . Alors :

$$A^{-1} = A^T \tag{6.9}$$

* Matrice diagonale A : elle s'écrit $A = (a_{ii})_{i=1,2,...,n}$.

Soit A la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{6.10}$$

Alors le déterminant de A est égal à :

$$\text{dét}(A) = a.d - b.c \tag{6.11}$$

Et on note :

$$\text{Dét(A)} = \begin{vmatrix} a\ b \\ c\ d \end{vmatrix} = ad - bc \tag{6.12}$$

Théorème 6.1 *Si dét(A) est non nul, alors la matrice A est inversible.*

Soit la matrice d'ordre 3 :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \tag{6.13}$$

Alors le déterminant de A est donné par :

$$\text{Dét(A)} = a \begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} - a' \begin{vmatrix} b & c \\ b'' & c'' \end{vmatrix} + a'' \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} \tag{6.14}$$

On a alors :

$$Dét(A.B) = Dét(B.A) = Dét(A).Dét(B) \tag{6.15}$$

Théorème 6.2 *Une matrice carrée A est inversible s'il existe une matrice unique notée A^{-1} appelée matrice inverse de A telle que : $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$*

On a les propriétés suivantes :

$$(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1} \tag{6.16}$$

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T \tag{6.17}$$

Définition 6.2 *La trace d'une matrice $A = (a_{ij})$ est donnée par :*

$$trace(A) = tr(A) = \sum_{i=1}^{i=n} a_{ii} \tag{6.18}$$

D'où les propriétés :

$$tr(A+B) = tr(A) + tr(B) \tag{6.19}$$

$$tr(A.B) = tr(B.A) \tag{6.20}$$

6.4 VALEURS PROPRES D'UNE MATRICE

Définition 6.3 *Les valeurs propres $\lambda_i = \lambda_i(A), i = 1, 2, ..., n$ d'une matrice A carrée d'ordre n sont les racines réelles ou complexes, distinctes ou confondues du polynôme caractéristique :*

$$P_A : \lambda \in \mathbb{C} \longrightarrow P_A(\lambda) = dét(A - \lambda.I)$$

de la matrice A.

On a aussi les propriétés :

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \tag{6.21}$$

$$Dét(A) = \prod_{i=1}^{i=n} = \lambda_i(A) \tag{6.22}$$

Définition 6.4 *On appelle rayon spectral d'une matrice A le nombre $\rho \geq 0$ tel que :*

$$\rho(A) = max_{i \in [1,n]} \{|\lambda_i(A)|\} \tag{6.23}$$

6.4.1 Vecteurs propres

Définition 6.5 *A toute valeur propre λ_i d'une matrice carrée A est associée au moins un vecteur $u \in \mathbb{R}^n$ tel que :*

$$u \neq 0 \quad et \quad A.u = \lambda.u \tag{6.24}$$

6.5 RANG D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

Soient U et V deux espaces vectoriels réels de dimension n et $f : U \longrightarrow V$ une application linéaire, d'où :

Définition 6.6 *Le rang de l'application $f : U \longrightarrow V$ est égal à la dimension du sous-espace vectoriel image de f :*

$$Im(f) = \{f(u) \in V, \forall u \in U\}$$

Si f est représentée par une matrice A, le rang de f est égal au plus grand ordre des sous-matrices carrées inversibles de la matrice A. C'est pourquoi le rang de f c'est aussi le rang de A qu'on note $rang(A)$ ou $r(A)$.

6.6 EXERCICES :

Exercice n°1 :

Démontrer que l'application $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ telle que à $(x,y,z) \longrightarrow (y+z, x+z, x+y)$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Quel est son rang.

Exercice n°2 :

E désigne l'espace vectoriel engendré par les fonctions $f_1(x) = cosx$ et $f_2(x) = sinx$. Soit T l'application linéaire de E dans lui même définie par $T(f) = f'$ c'est-à-dire la dérivée de f. Trouver par rapport à la base (f_1, f_2) la matrice de T, puis de $T^2 = ToT, T^3$ et T^4.

Exercice n°3 :

Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice n°4 :

On note $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels et on rappelle qu'une norme matricielle sur $M_n(\mathbb{R})$ est une application vérifiant les propriétés suivantes :

* $||A|| = 0 \Longleftrightarrow A = 0$, et $||A|| \geq 0, \forall A \in M_n(\mathbb{R})$,

* $||\alpha A|| = |\alpha|.||A||, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall A \in M_n(\mathbb{R})$,

* $||A+B|| \leq ||A|| + ||B||, \forall A \in M_n(\mathbb{R})$.

On considère l'application définie par $F : A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow F(A) = \left(\sum_{i,j}^{n} a_{ij}^2\right)^{1/2}$.

1. Montrer que cette application est une norme matricielle sur $M_n(\mathbb{R})$ qu'on note $||.||_F$.

Exercice n°5 :

1. Calculer le déterminant de la matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Ecrire le polynôme caractéristique $P_A(\lambda)$.

3. Déterminer les valeurs propres de A.

Exercice n°6 :

Pour tout réel α, on note A_α la matrice :

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

1. Quelles sont les valeurs propres de la matrice A_α ?

2. Pour quelles valeurs de α la matrice $A_\alpha$est-elle inversible ?

Exercice n°7 :

Soit $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^T.A$, A est-elle inversible ? Calculer son inverse.

Exercice n°8 :

Soit la matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et $J = A - I$ où I est la matrice unité d'ordre3 :

1. Déterminer l'entier k tel que $J^k = 0$.

2. En déduire A^n pour tout entier ≥ 3.

CHAPITRE 7

Résolution des Systèmes Linéaires

Pour le calcul de compensation des réseaux géodésiques ou de réseaux locaux, on est amené à des calculs de résolution de systèmes linéaires en particulier des systèmes du type $Ax = b$ où la matrice A est symétrique définie positive. Dans la suite, on étudie les méthodes de résolution directes et itératives.

7.1 Les Méthodes Directes

Les méthodes directes de résolution des systèmes linéaires consistent, par élimination successive entre les différentes équations, à isoler les variables. Les différents algorithmes, pour se faire, reviennent essentiellement à obtenir un système triangulaire ou diagonal. Dans tout ce qui suit, on considère un système linéaire $A.x = b$, où A est une (n,n) matrice, d'éléments a_{ij} réels, supposée inversible, x et b des éléments de $\mathbb{R}^n$.

7.1.1 La Méthode de Gauss

Cette méthode est fondée sur la remarque suiivante :

Si M est une (n,n) matrice réelle inversible, alors les systèmes $A.x = b$ et $MA.x = M.b$ ont même solution.

On va chercher, en fait, une matrice telle que MA soit triangulaire supérieure.

7.1.1.1 Méthode de l'élimination

Au pas 1, on a :

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \ldots = b_1 \\ a_{21}^{(1)}x_1 + a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots = b_2 \\ \cdots + \cdots + \cdots = b_i \\ a_{n1}^{(1)}x_1 + a_{n2}^{(1)}x_2 + \ldots = b_n \end{cases} \tag{7.1}$$

On peut supposer (à une permutation de ligne près) que $a_{11}^{(1)} \neq 0$; d'où pour éliminer x_1 des $n-1$ dernières équations :

$$i \geq 2, \quad a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} a_{1j}^{(1)} \tag{7.2}$$

$$et \quad b_i^{(2)} = b_i - \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} b_1 \tag{7.3}$$

La matrice $A = A^{(1)}$ donne après cette élimination une matrice $A^{(2)}$ telle que :

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix} \tag{7.4}$$

d'où d'une façon générale, l'élimination de x_r des $n-r$ dernières équations donne :

$$pour\ i \geq r+1, \quad a_{ij}^{(r+1)} = a_{ij}^{(r)} - \frac{a_{ir}^{(r)}}{a_{rr}^{(r)}} a_{rj}^{(r)} \tag{7.5}$$

$$et \quad b_i^{(r+1)} = b_i^{(r)} - \frac{a_{ir}^{(r)}}{a_{rr}^{(r)}} b_r^{(r)} \tag{7.6}$$

et transforme $A^{(r)}$ en $A^{(r+1)}$ qui de la forme :

$$A^{(r+1)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & \ddots & a_{rr}^{(r)} & \cdots & \cdots & a_{rn}^{(r)} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{r+1,r+1}^{(r+1)} & \cdots & a_{r+1,n}^{(r+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,r+1} & \cdots & a_{n,n}^{(r+1)} \end{pmatrix} \tag{7.7}$$

7.1.1.2 Justification de la Méthode

On peut toujours supposer que $a_{rr}^{(r)}$ est différent de 0, quitte à effectuer une permutation de lignes, c'est-à-dire multiplier $A^{(r)}$ par une matrice $P^{(r)}$, matrice de permutation inversible et de déterminant égal à ± 1. Par ailleurs, si l'on pose $m_{ir} = \dfrac{a_{ir}^{(r)}}{a_{rr}^{(r)}}$, on vérifie aisément que :

$$A^{(r+1)} = M^{(r)}.A^{(r)} \tag{7.8}$$

où $M^{(r)}$ est une matrice de déterminant égal à 1 de la forme suivante :

$$M^{(r)} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -m_{r+1,r} & 1 & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -m_{r+2,r} & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -m_{n,r} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{7.9}$$

Dans tous les cas, on passe donc de $A^{(r)}$ à $A^{(r+1)}$ en multipliant $A^{(r)}$ par une matrice inversible.

7.1.1.3 Stabilité de la méthode

Il est assez clair que pour des raisons de stabilité numérique le terme $a_{rr}^{(r)}$, appelé pivot, qui intervient comme dénominateur dans les divisions a intérêt à être choisi le plus grand possible. Ceci entraîne que, dans la pratique, même lorsque celà n'est pas nécessaire (cas où $a_{rr}^{(r)} = 0$) on effectue tout de même une permutation de lignes et/ou de colonnes de façon à amener en position (r,r) un élément convenable de $A^{(r)}$. On utilise la méthode du "pivot partiel" : on amène en position (r,r) l'élément le plus grand de la r ème colonne de $A^{(r)}$ restreinte à ses $n-r$ dernières lignes.

La méthode du "pivot total" : on amène en position (r,r) l'élément le plus grand de $A^{(r)}$ restreinte à ses $n-r$ dernières lignes et colonnes.

7.1.1.4 Résultats complémentaires

- Si on note donc $M^{(r)}$ et $P^{(r)}$ les matrices nécessaires pour transformer $A^{(r)}$ en $A^{(r+1)}$, on a donc :

$$A = \left(\prod_{i=1}^{i=n-1} A^{(i)} P^{(i)} \right) A^{(n)} \tag{7.10}$$

d'où :

$$d\acute{e}t(A) = d\acute{e}t(A^{(n)}) \prod d\acute{e}t(A^{(i)}P^{(i)}) \tag{7.11}$$

où $d\acute{e}t(M^{(i)}) = 1$ et $d\acute{e}t(P^{(i)}) = \pm 1$. D'où le résultat :

$$d\acute{e}t(A) = \pm d\acute{e}t(A^{(n)}) = \pm \prod a_{rr}^{(r)} \tag{7.12}$$

La méthode de Gauss permet donc de calculer les valeurs absolues du déterminant d'une matrice.

- Si l'on effectue aucune permutation de lignes et/ou de colonnes, on a :

$$(M^{(n-1)}.M^{(n-2)}...M^{(1)}).A = A^{(n)} \tag{7.13}$$

ou encore en posant :

$$L^{-1} = M^{(n-1)}.M^{(n-2)}...M^{(1)} \Longrightarrow \quad A = L.A^{(n)} \tag{7.14}$$

On montre facilement que L est de la forme :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ m_{2,1} & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ m_{3,1} & m_{3,2} & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ m_{n,1} & \cdots & \cdots & m_{n,n-r} & 1 \end{pmatrix} \tag{7.15}$$

La méthode de Gauss revient donc à décomposer la matrice A en un produit de matrices triangulaires ; l'une étant supérieure et l'autre inférieure avec des 1 sur la diagonale.

7.1.1.5 Précision du résultat

Soit x_0 le résultat trouvé comme solution et x le vrai résultat, on a :

$$A.x_0 - b = v \tag{7.16}$$

où v est le vecteur résidu, d'où :

$$x - x_0 = -A^{-1}.v \tag{7.17}$$

Les estimations des bornes d'un déterminant à partir de ces éléments et vice-versa ne permettent pas d'avoir une bonne approximation des bornes des éléments de A^{-1}. Toutefois, connaissant $d\acute{e}t(A^{-1})$ on peut quand même être amené à se méfier dans certains cas. Par exemple soit le système :

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 1.0001x + 2.0001y = 5.0003 \end{cases} \tag{7.18}$$

dont la solution est $x = 1, y = 2$. Si l'on considère une solution $x_0 = -54.999$ et $y_0 = 30$, on a :

$$\begin{cases} x_0 + 2y_0 - 5 = 0.001 \\ 1.0001x_0 + 2.0001y_0 - 5.0003 = -0.0017999 \end{cases} \tag{7.19}$$

le résidu est faible mais la valeur du déterminant de A^{-1} est 10^4 ce qui signifie que le résultat peut être connu à 10 près.

7.1.2 Exercices

1. Résoudre par la méthode d'élimination de Gauss, en donnant l'expression de toutes les matrices et seconds membres intermédiaires, le système $Ax = b$, avec $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -9 & 4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ Répondre à la même question avec : $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Montrer que la méthode de Gauss revient à effectuer de l'ordre de $\frac{n^3}{3}$ multiplications et $\frac{n^3}{3}$ additions.

3. Montrer que si A peut se factoriser sous la forme $LA^{(n)}$, cette décomposition est unique.

4. Montrer que la méthode de Gauss par pivot partiel consiste à choisir une matrice de permutation P telle que PA puisse se factoriser sous la forme $L.U$ où U est de la même forme que $A^{(n)}$ puis à résoudre $Ly = Pb$ et $Ux = y$.

5. Décrire une méthode de calcul de l'inverse d'une matrice s'inspirant de la méthode de Gauss. Dénombrer les opérations pour ce faire.

7.1.3 La Méthode de Cholesky

On suppose ici que A est une matrice symétrique, définie positive, de dimension (n,n).

Théorème 7.1 *Une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice A soit symétrique, définie positive est qu'il existe une matrice $L(n,n)$ à éléments réels, triangulaire inférieure et inversible telle que $A = L.L^T$*

Demonstration

1. Condition suffisante :

Si $A = L.L^T$, alors $x^T.A.x = x^T.L.L^T.x = (L^T.x)^T.(L^T.x)$. Si $x \neq 0$, alors $L^T.x$ est différent de 0 et $x^T.A.x > 0$. Par ailleurs $A^T = (L.L^T)^T = L.L^T = A$ donc A est symétrique et définie positive.

2. Condition nécessaire :

Résonnons par réccurence. Le cas $n=1$ est trivial. Si $A=(a)$, on a $\forall x \neq 0, x.a.x > 0$ donc $a>0$ par suite $L=(\sqrt{a})$. Supposons maintenant que l'hypothèse soit vraie pour une matrice $(n-1,n-1)$. Soit A une (n,n) matrice symétrique définie positive se composant de la façon suivante :

$$A = \begin{pmatrix} B & a \\ a^T & \alpha \end{pmatrix} \tag{7.20}$$

avec B une matrice $(n-1,n-1)$, a un vecteur de dimension $n-1$ et α un scalaire. Il est clair que B est symétrique définie positive, on peut écrire donc $B=M.M^T$ où M est une $(n-1,n-1)$ matrice triangulaire inférieure inversible. Calculons L telle que $A=L.L^T$ sous la forme :

$$L = \begin{pmatrix} M & 0 \\ l^T & \lambda \end{pmatrix} \tag{7.21}$$

où l est un $(n-1)$ vecteur et λ un réel. Par identification de A donnée par (7.20) et de L ci-dessus, il vient :

$$B = M.M^T \tag{7.22}$$
$$M.l = a \tag{7.23}$$
$$l^T.l + \lambda^2 = \alpha \tag{7.24}$$
$$l^T.M^T = a^T \tag{7.25}$$

ceci permet de déterminer $l = M^{-1}.a$ et $\lambda^2 = \alpha - l^T.l$. Il reste à vérifier que $\alpha - l^T.l > 0$. Ceci résulte du fait que A est symétrique définie positive en utilisant un vecteur $x=(B^{-1}a,-1)^T$: $x^T.A.x$ s'écrit en effet :

$$x^T.A.x = (a^T.(B^{-1})^T,-1).\begin{pmatrix} B & a \\ a^T & \alpha \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} B^{-1}a \\ -1 \end{pmatrix} = \alpha - a^T.B^{-1}.a > 0 \tag{7.26}$$

Or $\alpha - l^T l$ s'écrit aussi $\alpha - (M^{-1}a)^T(M^{-1}a) = \alpha - a^T((M^{-1})^T)M^{-1}a$, d'où encore $\alpha - l^T l = \alpha - a^T.B^{-1}.a$. D'où la conclusion.

7.1.3.1 Application à la résolution d'un système $Ax=b$, où A est symétrique définie positive

Pour résoudre le système $Ax=b$, on calcule la matrice L associée à A ; on est ensuite amené à résoudre successivement :

$$L.y = b \tag{7.27}$$
$$L^T.x = y \tag{7.28}$$

7.1.3.2 Factorisation de A en LL^T

On a d'une façon générale :

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{k=j} l_{ik} l_{jk} \quad i \geq j$$

d'où pour $j = 1$ on a $a_{11} = l_{11}^2$ et $a_{i1} = l_{i1} l_{11}$, soit :

$$\begin{cases} l_{11} = \sqrt{a_{11}} \\ \\ l_{i1} = \dfrac{a_{i1}}{l_{11}} \quad \textit{pour } i = 2, ..., n \end{cases} \tag{7.29}$$

et plus généralement :

$$\begin{cases} l_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \displaystyle\sum_{k=1}^{k=j-1} l_{jk}^2} \\ \\ l_{ij} = \dfrac{a_{ij} - \displaystyle\sum_{k=1}^{k=j-1} l_{ik} l_{jk}}{l_{jj}} \quad \textit{pour } i = j+1, ..., n \end{cases} \tag{7.30}$$

7.1.3.3 Dénombrement des opérations

La factorisation nécessite :

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} (n-j) = \frac{n(n-1)}{2} \text{ divisions} \\ \\ \displaystyle\sum_{j=2}^{n} (j-1)(n-j+1) = \frac{n(n-1)(n+1)}{6} \text{ additions et multiplications} \\ \\ n \text{ racines carrées} \end{cases}$$

La résolution nécessite :

$$\begin{cases} n(n-1) \text{ additions et multiplications} \\ 2n \text{ divisions} \end{cases}$$

Cette méthode nécessite donc :

$$\begin{cases} \dfrac{n^3}{6} \text{ additions et multiplications} \\ \\ \dfrac{n^2}{2} \text{ divisions} \\ \\ n \text{ racines carrées} \end{cases}$$

Elle est <u>stable</u> si la matrice est symétrique définie positive.

7.1.4 Exercices :

1. Montrer que la méthode de Cholesky permet de calculer facilement le déterminant de A par :

$$d\acute{e}t(A) = \prod_{j=1}^{n} l_{jj}^2$$

2. Montrer que s'il existe deux décompositions de A en $A = M_1 M_1^T$ et $A = M_2 M_2^T$, avec M_i triangulaire inférieure inversible, on a :

$$M_1 = DM_2$$

où D est une matrice diagonale telle que $d_{ii} = \pm 1$.

3. Montrer que si A n'est pas définie positive, en appliquant la décomposition de Cholesky, on trouve nécessairement un élément $l_{jj}^2 \leq 0$.

4. Résoudre par la méthode de Cholesky le système linéaire :

$$\begin{pmatrix} 0.25 & 0.5 & 0 & -0.125 \\ 0.5 & 10 & -3 & -0.25 \\ 0 & -3 & 2 & 0.4 \\ -0.125 & -0.25 & 0.4 & 4.2225 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.75 \\ -3 \\ 2.6 \\ 19.015 \end{pmatrix}$$

7. On considère la matrice M :

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 6 & 5 \\ 6 & -1 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et on pose $A = M.M^T$.

- Montrer que M est inversible. En déduire que A est symétrique définie positive.

- On veut résoudre le système $Ax = b$ où b est le vecteur $(9, 21, 12, -\frac{10}{3})^T$. Quelles méthodes peut-on employer ?

- Déterminer la factorisation de Cholesky de la matrice A. En déduire la solution x du système $Ax = b$.

8. On donne la matrice : $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

a- Calculer $L.L^T$

b- Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 10 \end{pmatrix}$, la matrice A est-elle symétrique définie positive, justifier votre réponse.

9. On considère la matrice : $A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ d'un système linéaire $Ax = b$, avec $\varepsilon \in \mathbb{R}$.

a. Déterminer pour quelles valeurs du paramètre ε, la matrice A est symétrique définie positive.

b. Soit $\varepsilon = 0$. On veut résoudre le système $Ax = b$ par une méthode directe ; quelle factorisation de la matrice A envisager dans ce cas ? Justifier la réponse.

c. Soit maintenant $\varepsilon = 2$.

* Vérifier que la matrice A est définie positive et en calculer la factorisation de Cholesky.

* En supposant que $b = (1,1,1)^T$, résoudre le système linéaire $Ax = b$ en utilisant la factorisation calculée à la question précédente.

10. (Factorisation de Cholesky d'une matrice symétrique tridiagonale). Soit A une matrice symétrique d'ordre n, définie positive et tridiagonale (de la forme de la matrice B ci-dessous).

a. Montrer que A admet une factorisation de Cholesky $A = LL^T$, avec L de la forme :

$$L = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_2 & \alpha_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \beta_n & \alpha_n \end{pmatrix}$$

b. En déduire la factorisation de Cholesky de la matrice :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

7.2 LES MÉTHODES ITÉRATIVES

7.2.1 Généralités

Résoudre l'éqution $Ax = b$ par une méthode itérative revient à générer à partir d'un vecteur arbitraire x^0 une suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ de vecteurs telle que $lim_{k\to+\infty} x^{(k)} = x$.

On se bornera à étudier ici les cas où la suite est définie par la relation de réccurence :

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + C \tag{7.31}$$

La méthode itérative est alors dite convergente si :

$$lim_{k\to+\infty} x^{(k)} = A^{-1}b \tag{7.32}$$

On remarque alors que si $(x^{(k)})$ converge, sa limite est égale à $A^{-1}b$ si et seulement si $C = (I - B)A^{-1}b$.

Théorème 7.2 *Une méthode itérative du type $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + C$ est convergente si et seulement si $lim_{k\to+\infty}B^k = 0$.*

Notons : $\varepsilon^{(k)} = x^{(k)} - x$, on a $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + C$ et à la limite $x = Bx + C$, d'où :

$$\varepsilon^{(k+1)} = B\varepsilon^{(k)} \Longrightarrow \varepsilon^{(k+1)} = B^{k+1}\varepsilon^0 \tag{7.33}$$

La méthode est convergente si et seulement si $\varepsilon^{(k+1)} \longrightarrow 0$ quand $k \longrightarrow +\infty$, c'est-à-dire si et seulement si $lim_{k\longrightarrow+\infty}B^k = 0$

Théorème 7.3 *Soit une matrice M de rayon spectral $\rho(M)$. Pour que $lim_{k\to+\infty}M^k = 0$, il faut et il suffit que $\rho(M) < 1$.*

On rappelle que si M est une matrice, il existe une matrice inversible X telle que $X^{-1}MX = J$, où J est la forme canonique de Jordan de la matrice M. On a :

$$J = diag(J_1, J_2, ..., J_p) \tag{7.34}$$

une matrice dont les blocs diagonaux sont les matrices J_i avec :

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \ddots & \lambda_i & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix} = \lambda_i I_j + U_j \tag{7.35}$$

où I_j est la matrice unité de dimension (j, j) et U_j une matrice $j \times j$ dont tous les éléments sont nuls sauf ceux de la première diagonale supérieure qui sont égaux à 1.

Remarque 1 :

$J^k = diag(J_1^k, J_2^k, ..., J_p^k)$; on le démontre en effectuant le produit par blocs.

Remarque 2 :

$$J_i^k = (\lambda_i I_j + U_j)^k = \lambda_i^k I_j + C_1^k \lambda_i^{k-1} U_j + ... + C_l^k \lambda_i^{k-l} U_j^k + ... + C_{j-1}^k \lambda_i^{k-j+1} U_j^{j-1}$$

en effet, la matrice U_j^i est une matrice dont tous les éléments sont nuls sauf ceux de la ième diagonale supérieure qui sont égaux à 1, on a :

$$U_j^i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & 0 \end{pmatrix} \tag{7.36}$$

avec le 1 de la première ligne se trouve à la colonne $i+1$. On déduit de ces deux remarques que :

$$lim_{k\to+\infty}M^k = 0 \Leftrightarrow lim_{k\to+\infty}J^k = 0 \Leftrightarrow lim_{k\to+\infty}J_i^k = 0\ \forall i \Leftrightarrow lim_{k\to+\infty}\lambda_i^k = 0\ \forall i \Leftrightarrow max_i|\lambda_i| < 1$$

D'où la conclusion.

On peut donc déduire de ces deux théorèmes le critère de convergence suivant :

Pour qu'un processus itératif du type $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + C$ *converge, il faut et il suffit que* $\rho(B) < 1$

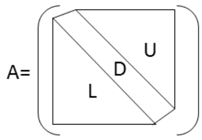
7.2.2 Méthode de Jacobi

Soit une décomposition de la matrice $A = M - N$; le processus itératif défini par $Mx^{(k)} = Nx^{(k-1)} + b$ converge vers $x = A^{-1}b$ si $x^{(k)}$ converge et est un processus du type $x^{(k)} = Bx^{(k-1)} + C$ où $B = M^{-1}N$; il converge donc si et seulement si $\rho(M^{-1}N) < 1$.

Soit $A(a_{ij})$, on pose :

$$D = \begin{cases} a_{ii}\ pour\ i = j \\ 0\ sinon \end{cases},\quad U = \begin{cases} a_{ij}\ pour\ j \geq i+1 \\ 0\ sinon \end{cases},\quad L = \begin{cases} a_{ij}\ pour\ i \geq j+1 \\ 0\ sinon \end{cases} \tag{7.37}$$

D'où la forme de la matrice A :



La décomposition où $M = D$ et $N = -(L+U)$ est appelée décomposition de Jacobi de la matrice A.

7.2.2.1 Critère de convergence

Si dans la matrice $A = (a_{ij})$, les conditions suivantes sont réalisées :

$$\forall i \ |a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{j=n} |a_{ij}| \tag{7.38}$$

alors l'itération de Jacobi converge.

Notons qu'il s'agit d'une condition suffisante de convergence. Posons :

$$t = max_{\{i\}} \left(\frac{\sum_{j=1, j\neq i}^{j=n} |a_{ij}|}{|a_{ii}|} \right)$$

Si x est solution de $Ax = b$, on a $Mx = Nx + b$ et $Mx^{(k)} = Nx^{(k-1)} + b$ d'où $M\varepsilon^{(k)} = N\varepsilon^{(k-1)}$ ou encore :

$$\forall i \ |a_{ii}||\varepsilon_i^{(k)}| \leq \sum_{j=1, j\neq i}^{j=n} |a_{ik}|.|\varepsilon_i^{(k-1)}|$$

ou : $|\varepsilon_i^{(k)}| \leq t max_j |\varepsilon_j^{(k-1)}|$ ce qui donne facilement : $|\varepsilon_i^{(k)}| \leq t max_j |\varepsilon_j^{(0)}|$. On montre ainsi que si $t < 1$, $|e_i^{(k)}| \longrightarrow 0$ lorsque k tend vers l'infini.

7.2.2.2 Estimation de l'erreur

Un majorant de l'erreur est fourni par :

$$max_i |\varepsilon_i^{(k)}| \leq \frac{t}{1-t} max_i \left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right| \tag{7.39}$$

Posons :

$$d^{(k)} = max_i \left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right| = max_i \left| \varepsilon_i^{(k)} - \varepsilon_i^{(k-1)} \right| \tag{7.40}$$

On a : $d^{(k)} \geq max_i|\varepsilon_i^{(k-1)}| - max_i|\varepsilon_i^{(k)}|$, d'où :

$$max_i \left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right| \geq \frac{1-t}{t} max_i \left| x_i^{(k)} - x_i \right| \tag{7.41}$$

ce-ci permet donc d'arrêter le processus itératif lorsque la norme de la différence entre deux vecteurs itérés consécutifs est inférieure à un certain seuil (norme au sens du max des valeurs absolues).

CHAPITRE 8

Interpolation de Lagrange

8.1 Introduction

Soit un nombre fini de a_i des points distincts de $\mathbb{R}$. A chacun des points a_i, est associé un nombre $c_i \in \mathbb{R}$, qui peut être (par exemple) soit une valeur expérimentale, soit la valeur $u(x_i)$ d'une fonction connue. Le problème posé est :

- faire passer une courbe σ d'un type donné par les points $M_i(a_i, c_i)$; c'est un problème d'interpolation. La fonction représentant la courbe σ est dite la fonction d'interpolation.

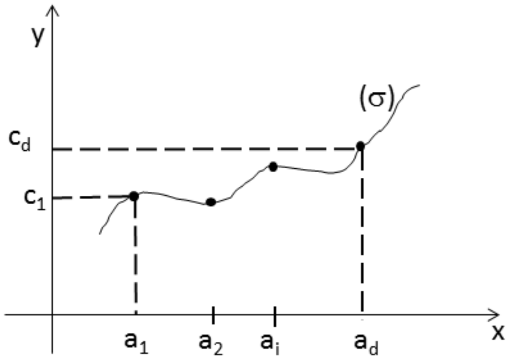


Fig. 8.1 La courbe (σ) de la fonction d'interpolation

8.2 INTRODUCTION À L'INTERPOLATION POLYNOMIALE

8.2.1 Espaces de polynômes

Nous rappelons quelques résultats sur les polynômes (ou fonctions polynomiales).

Définition 8.1 *Un monôme de degré k est une fonction de la forme* $x \in \mathbb{R} \longrightarrow cx^k$ *où* $c \in \mathbb{R}$ *et* $k \in \mathbb{N}$.

Définition 8.2 *Un polynôme est une somme (finie) de monômes.*

La fonction nulle est aussi considérée comme un polynôme. L'ensemble $\mathscr{P}$ des polynômes forme alors un espace vectoriel quand on utilise l'addition habituelle des fonctions $(p+q)$ ainsi que la multiplication par une constante (λp). Le produit de deux polynômes $(p.q)$ est encore un polynôme. Les fonctions polynômes sont indéfiniment dérivables. Tout polynôme p non nul s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme :

$$p(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_m x^m = \sum_{i=0}^{m} c_i x^i \tag{8.1}$$

avec $c_m \neq 0$. L'unicité provient de ce que $c_k = p^{(k)}(0)/k!$, où $p^{(k)}$ désigne la dérivée d'ordre k. Les nombres c_i s'appellent les coefficients de p. L'entier non nul m dans (8.1) est le degré de p et le coefficient c_m est le coefficient dominant de p. On convient que $deg 0 = -\infty$. Avec cette convention, quels que soient les polynômes p et q on a :

$$deg(pq) = deg p + deg q \tag{8.2}$$

$$deg(p+q) \leq max(deg p, deg q). \tag{8.3}$$

<u>**Exercice :**</u> 1. Ecrire une formule donnant les coefficients d'un produit de polynômes pq en fonction des coefficients des facteurs p et q.

Lorsque $\lambda \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$deg \lambda p = deg p \tag{8.4}$$

c'est un cas particulier de (8.2). En réalité le degré de $p+q$ coïncide toujours avec $max(deg p, deg q)$ sauf lorsque les deux polynômes ont même degré et leurs coefficients dominants sont opposés l'un de l'autre. On note $\mathscr{P}_m$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à m. Les propriétés (8.3) et (8.4) montrent que $\mathscr{P}_m$ est un sous-espace vectoriel dont la base canonique est $\mathbb{B} = (x^0, x^1, \ldots, x^m)$. En particulier sa dimension est $m+1$.

Si r est une racine de p (c'est-à-dire $p(r) = 0$) alors p est divisible par $(x-r)$. Cela signifie qu'il existe un polynôme q tel que $p(x) = (x-r)q(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On dit que r est une racine de multiplicité m lorsque $(x-r)^m$ divise p mais $(x-r)^{m+1}$ ne divise pas p. On montre en algèbre que cela est équivalent à :

$$0 = p(r) = p'(r) = \ldots = p^{(m)}(r) \quad et \quad p^{(m+1)}(r) \neq 0$$

Un polynôme $p \in \mathscr{P}_m$ non nul admet au plus m racines en tenant compte de la multiplicité. Cela signifie que si r_i est racine de multiplicité m_i de $p \neq 0$ pour $i = 1,...,l$ alors $m_1 + \ldots + m_l \leq m$. On dit alors que le nombre de racine de p est en tenant compte de la multiplicité plus petite ou égale au degré du polynôme p. On utilisera plusieurs fois que si p est un polynôme de degré au plus m qui admet au moins $m+1$ racines en tenant compte de la multiplicité, alors p est nécessairement le polynôme nul, autrement dit :

$$\left.\begin{array}{l} z_i \quad racine\ de\ p\ de\ multiplicit\acute{e} \geq m_i,\ i = 1,...,l, \\ \sum_{i=1}^{l} m_i > m, \\ p \in \mathscr{P}_m \end{array}\right\} \Longrightarrow p = 0 \qquad (8.5)$$

<u>**Exercice :**</u> 1. Peut-on retrouver un polynôme quand on connaît toutes ses racines ?

8.2.2 *Construction de l'interpolant de Lagrange*

a) Le problème général de l'interpolation polynomiale

En analyse numérique, une fonction c n'est souvent connue que par ses valeurs c_i en un nombre fini de points a_i, $c_i = c(a_i)$, (en réalité, en pratique c_i est seulement une approximation de $c(a_i)$). Cependant, dans la plupart des cas, il est nécessaire d'effectuer des opérations sur des fonctions globales (dérivation, intégration, ...) et on est donc conduit à reconstruire une fonction globale u à partir d'un nombre fini de données (a_i, c_i). Sauf cas très simple, la fonction u ne coïncidera pas avec la fonction "idéale" $\bar{u}$ mais il faut faire en sorte qu'elle n'en soit pas trop éloignée.

Le problème de l'interpolation polynomiale consiste à choisir comme fonction reconstruite une fonction polynomiale. C'est la méthode la plus ancienne, la plus élémentaire et encore la plus utile.

D'une manière précise, étant donnés $d+1$ points d'abscisses distinctes $M_j = (a_j, c_j)(j = 0,...,d)$ dans le plan (pour des raisons de commodité d'écriture les points seront toujours indicés à partir de 0), le problème consiste à trouver un polynôme $p \in \mathscr{P}_m$ dont le graphe passe par les $d+1$ points M_j. En formule, on doit avoir :

$$p \in \mathscr{P}_m \quad et \quad p(a_j) = c_j \ j = 0,...,d \qquad (8.6)$$

Ce problème est bien facile à résoudre lorsque lorsque on dispose de deux points M_0 et M_1 et cherche un polynôme de degré 1 car il suffit alors de choisir l'unique polynôme dont le graphe est la droite (M_0M_1) comme indiqué sur la figure (8.2) ci-dessous .

En effet, posant $p(x) = ax + b$, on détermine a et b grâce aux équations :

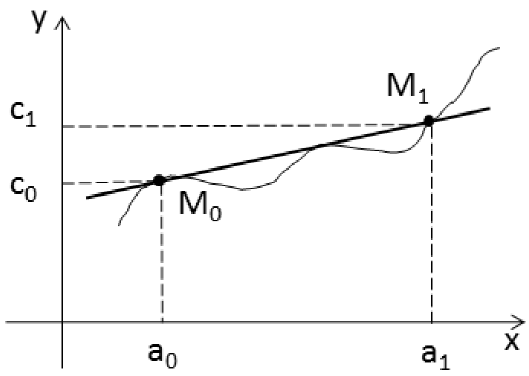


Fig. 8.2 L'interpolation linéaire

$$p(a_0) = c_0 = u(a_0)$$
$$p(a_1) = c_1 = u(a_1)$$

On trouve :

$$p(x) = \frac{c_1 - c_0}{a_0 - a_1}(x - a_0) + u(a_0) \tag{8.7}$$

que l'on peut aussi écrire :

$$\boxed{p(x) = u(a_0)\frac{x - a_1}{a_0 - a_1} + u(a_1)\frac{x - a_0}{a_1 - a_0}} \tag{8.8}$$

Alors pour trouver la valeur de $u(\alpha)$ pour $\alpha \in [a_0, a_1]$, il suffit d'appliquer la formule ci-dessus (8.8) : c'est **l'interpolation linéaire**.

Il est à peine plus compliqué lorsqu'on dispose de trois points $M_i(a_i, c_i), i = 0, 1, 2$ avec $a_0 < a_1 < a_2$ et on cherche un polynôme du second degré. Le graphe cherché est en général une parabole (correspondant à un polynôme de degré 2). On obtient donc la formule de l'interpolation parabolique.

Cependant dans le cas particulier où les trois points sont alignés, le graphe est à nouveau une droite (correspondant à un polynôme de degré 1).

Ceci dit, s'il n'est pas davantage précisé, le problème (8.6) peut n'avoir aucune solution ou bien en avoir une infinité.

<u>**Exercices :**</u> 1. Montrer qu'il existe une infinité de polynômes $p \in \mathscr{P}_2$ dont le graphe passe par les points $M_0(0,0)$ et $M_1(1,1)$.

2. Trouver quatre points $M_i (i = 1, 2, 3, 4)$ d'abscisses respectives $-1, 0, 1, 2$ qui ne se trouvent sur le graphe d'aucun polynôme de $\mathscr{P}_2$.

b) Détermination du polynôme d'interpolation

On devine facilement que pour qu'un seul polynôme satisfasse aux conditions (8.6), une relation doit exister entre m et d. Cette relation est facile à mettre en évidence. Pour déterminer $p \in \mathscr{P}_m$, nous devons déterminer l'ensemble de ses coefficients et ceux-ci sont au nombre de $m+1$. Or, pour les déterminer, nous disposons des $d+1$ données :

$$p(a_i) = c_i,\ i = 0, ..., d$$

On voit que pour espérer une solution unique, il nous faut supposer que $m = d$. Nous allons démontrer que sous cette condition le problème (8.6) admet effectivement une et une seule solution.

Théorème 8.1 *Soit $A = a_0, ..., a_d$ un ensemble de $d+1$ nombres réels distincts. Quelles que soient les valeurs $c_0, c_1, ..., c_d$, il existe un et un seul polynôme $p \in \mathscr{P}_d$ tel que $p(a_i) = c_i, i = 0, 1, ..., d$. Ce polynôme, est donné par la formule :*

$$p = p(x) = \sum_{i=0}^{d} c_i l_i(x) \tag{8.9}$$

$$\textit{avec} \quad l_i(x) = \frac{(x-a_0)\cdots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\cdots(x-a_d)}{(a_i-a_0)\cdots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\cdots(a_i-a_d)} \tag{8.10}$$

c) Terminologie et notations

Les nombres a_i s'appellent les **points d'interpolations** ou encore **noeuds d'interpolations**. Lorsque $c_i = u(a_i)$, la fonction $u(x)$ est la **fonction interpolée**. On dit aussi que les valeurs $u(a_i)$ sont les **valeurs interpolées**.

L'unique polynôme $p \in \mathscr{P}_d$ vérifiant $p(a_i) = u(a_i)$ $(i = 0, 1, ..., d)$ s'appelle alors le **polynôme d'interpolation de Lagrange** de $u(x)$ aux points a_i. On le note : $\mathbf{L}[a_0, \ldots, a_d; u]$ ou bien $\mathbf{L}[A; u]$.

Les polynômes $l_i(x)$ s'appellent les **polynômes fondamentaux de Lagrange**. En utilisant le symbole $\prod$ qui signifie le produit, on a la formule suivante qui est une variante compacte de (8.10).

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{d} \frac{x-a_j}{a_i-a_j} \tag{8.11}$$

Avec ces nouvelles notations, l'expression (8.9) devient

$$\mathbf{L}[a_0, \ldots, a_d; u](x) = \sum_{i=0}^{d} u(a_i) \prod_{j=0, j\neq i}^{d} \frac{x-a_j}{a_i-a_j} \tag{8.12}$$

Cette expression de $\mathbf{L}[A; u]$ est connue sous le nom de **formule d'interpolation de Lagrange**.

8.3 ESTIMATION DE L'ERREUR DANS L'INTERPOLATION DE LAGRANGE

Avant d'étudier l'estimation de l'erreur dans le cas de l'interpolation de Lagrange, rappelons le théorème de Rolle :

Théorème 8.2 *(Théorème de Rolle) : Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ telle que $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Avant de donner une estimation de l'erreur, nous allons démontrer le lemme suivant :

Lemme 8.1 *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur $[a,b]$ alors, si f possède au moins $n+2$ zéros distincts sur $[a,b]$, f' possède au moins $n+1$ zéros distincts sur $[a,b]$.*

Démonstration : il suffit d'appliquer le théorème de Rolle entre deux zéros consécutifs de f.

Corollaire 8.1 *Soit $f \in C^{n+1}([a,b])$. Si f possède au moins $n+2$ zéros distincts sur $[a,b]$, alors $f^{(n+1)}$ a au moins un zéro sur $[a,b]$.*

Démonstration : il suffit de faire une récurrence en appliquant le lemme précédent.

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle $[a,b]$ et soit $a \leq x_0 < \cdots < x_n \leq b$, $n+1$ points de $[a,b]$. On note P le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points $x_0, \cdots, x_n$.

L'erreur de l'interpolation est donnée par :

$$e(x) = f(x) - P(x) \tag{8.13}$$

Théorème 8.3 *On suppose $f \in C^{n+1}([a,b])$, alors :*

$$\forall x \in [a,b], \exists \xi \in [a,b], f(x) - P(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n).\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \tag{8.14}$$

Démonstration : si $x = x_i$, alors la relation est vérifiée.

Soit $x \in [a,b]$ fixé, x différent de tous les x_i. Posons $q(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$ et

$$W(t) = f(t) - P(t) - \frac{q(t)}{q(x)}(f(x) - P(x))$$

La fonction W est de classe C^{n+1} comme f et s'annule pour $t = x, x_0, x_1, \cdots, x_n$; elle admet donc au moins $n+2$ zéros. D'après le corollaire 8.1, il existe au moins un nombre $\xi \in [a,b]$ tel que $W^{(n+1)}(\xi) = 0$. On en déduit la relation.

Le point ξ étant inconnu, on cherche une majoration et on a le corollaire immédiat :

Corollaire 8.2 *Si $f^{(n+1)}$ est continue sur $[a,b]$, alors :*

$$\forall x \in [a,b], |f(x) - P(x)| = |e(x)| \leq \frac{|(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)|}{(n+1)!} sup_{x\in[a,b]}|f^{(n+1)}(x)| \tag{8.15}$$

Pour avoir une majoration minimale de l'erreur d'après (8.15), on va étudier les polynômes dits de Tchebychev [1].

8.4 POLYNÔMES DE TCHEBYCHEV

Considérons $e^{ni\theta}$, on a alors :

$$e^{ni\theta} = (cos\theta + isin\theta)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p cos\theta^{n-p} i^p sin^p\theta = cos(n\theta) + isin(n\theta) \tag{8.16}$$

On sépare partie réelle et partie imaginaire. Pour la partie réelle, on obtient pour p pair soit $2k$:

$$cosn\theta = \sum_{k=0} (-1)^k C_n^{2k} (cos\theta)^{n-2k} (1 - cos^2\theta)^k \tag{8.17}$$

On pose :

$$T_n(cos\theta) = cosn\theta \tag{8.18}$$

Posons :

$$x = cos\theta; \quad \frac{-\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{+\pi}{2} \Leftrightarrow \theta = Arccosx; \quad -1 \leq x \leq +1 \tag{8.19}$$

$T_n(x)$ est un polynôme dit polynôme de **Tchebychev** d'ordre et de degré n. Il est défini par :

$$T_n(x) = cos(nArccosx); \quad -1 \leq x \leq +1 \tag{8.20}$$

8.4.1 *Les propriétés de* $T_n(x)$

-1. $-1 \leq T_n(x) \leq +1$,

-2. Si n est pair alors $T_n(x)$ est pair,

-3. Si n est impair alors $T_n(x)$ est impair,

-4. $T_n(x)$ est un polynôme de degré n car $T_n(x) = 2^{n-1}x^n +$ polynômes de degré $\leq n-1$. En effet, le coefficient de x^n est $\sum_k C_n^{2k}$ or $(1+1)^{n-1} = \sum_{l=0}^{n-1} C_{n-1}^l = 2^{n-1} = \sum_{k=0} C_n^{2k}$ en utilisant la formule

1. **Pafnouti Tchebychev** (1821 - 1894) : Mathématicien russe.

$C_{n-1}^{2k-1} + C_{n-1}^{2k1} = C_n^2$.

-5. Relations de récurence entre T_{n+1}, T_n, T_{n-1}. On a :

$$cos(n+m)\theta + cos(n-m)\theta = 2cosn\theta cosm\theta$$

pour $m = 1$, on obtient :

$$cos(n+1)\theta + cos(n-1)\theta = 2cosn\theta cos\theta$$

soit :

$$T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0 \tag{8.21}$$

On a : $T_0(x) = 1$ et $T_1(x) = x$.

-6. Les zéros de $T_n(x)$:

$$T_n(x) = 0 \Leftrightarrow cos(nArccos(x)) = 0 \Leftrightarrow nArccos(x) = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k = 0,1,2,..,n-1$$

$$\Leftrightarrow Arccos(x) = (2k+1)\frac{\pi}{2n} \Leftrightarrow x = cos((2k+1)\frac{\pi}{2n})$$

-7. Les maximums et minimums de T_n sont +1 et -1 pour $x'_k = cos(\frac{k\pi}{n})$, pour $k = 0,1,...,n$. En effet :

$$\forall x \in [-1,+1],\ T'_n(x) = \frac{n}{\sqrt{1-x^2}} sin(nArccosx) \tag{8.22}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} T'_n(x'_k) = \frac{n}{\sqrt{1-x_k'^2}} sin(nArccosx'_k) &= \frac{n}{\sqrt{1-cos^2(\frac{k\pi}{n})}} sin(nArccos\,cos(\frac{k\pi}{n})) \\ &= \frac{n}{\sqrt{1-cos^2(\frac{k\pi}{n})}} sin(k\pi) = 0 \end{aligned} \tag{8.23}$$

Calculons $T_n(x'_k) = cos(nArccosx'_k) = cos\left(nArccos\,cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) = cos\left(n\frac{k\pi}{n}\right) = cos(k\pi) = (-1)^k$, donc $T_n(x'_k) = \pm 1 \Longrightarrow max_{x\in[-1,+1]}|T_n(x)| = 1$.

-8. L'ensemble des $T_n(x)$ forme un système de polynômes orthogonaux relativement au produit scalaire :

$$< f,g >= \int_{-1}^{1} \frac{f(t)g(t)dt}{\sqrt{1-t^2}} \tag{8.24}$$

On utilise la formule :

$$cosn\theta cosm\theta = T_n(cos\theta)T_m(cos\theta) = \frac{1}{2}(cos(n+m)\theta + cos(n-m)\theta)$$

on a :

$$\int_0^{+\pi} T_n(cos\theta)T_m(cos\theta)d\theta =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{+\pi}(cos(n+m)\theta + cos(n-m)\theta d\theta = \begin{cases} n \neq m; & = 0 \\ n = m \neq 0; & = \pi/2 \\ n = m = 0; & = \pi \end{cases} \tag{8.25}$$

Faisons le changement de variables :

$$x = cos\theta \Rightarrow d\theta = \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

L'équation (8.25) devient :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{T_n(x)T_m(x)dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} si\, n \neq m; & = 0 \\ si\, n = m \neq 0; & = \pi/2 \\ si\, n = m = 0; & = \pi \end{cases} \tag{8.26}$$

Application : soit f une fonction définie et continue de $[0,1] \to \mathbb{R}$. On veut l'approcher par des $T_n(x)$. Posons :

$$a_n = \frac{1}{\|T_n\|}\int_{-1}^{+1} \frac{f(x)T_n(x)dx}{\sqrt{1-x^2}} \tag{8.27}$$

avec :

$$\|T_n\|^2 = \int_{-1}^{+1} \frac{T_n^2(x)dx}{\sqrt{1-x^2}} \tag{8.28}$$

A f on associe $(a_0, a_1, ..., a_n, ...)$, alors f s'écrit :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n T_n(x) \tag{8.29}$$

La limite est au sens de la norme :

$$\|f\| = \sqrt{\int_{-1}^{+1} \frac{f^2(x)dx}{\sqrt{1-x^2}}}$$

Alors on a une approximation polynômiale de telle que $\|f(x) - \sum_{n=0}^{N} a_n T_n(x)\|$ soit aussi petit.

8.4.2 Meilleure Approximation Uniforme

Théorème 8.4 ***Théorème de Tchebychev*** *: Dans l'ensemble des polynômes de degré n, ayant pour coefficient de terme de plus haut degré 1, c'est* $T_n^* = \frac{T_n}{2^{n-1}}$ *qui réalise la meilleure approximation de la fonction nulle sur [-1,1].*

Soit $\varphi : [-1,1] \to \mathbb{R}$ avec $\|\varphi\| = Sup_{x\in[0,1]}|\varphi(x)|$ et $\mathscr{P}_n = \left\{x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0\right\}$.

Alors, on a :

$$\|T_n^*\| = \frac{1}{2^{n-1}} = min_{R_n \in \mathscr{P}_n} \|R_n\| = min_{R_n \in \mathscr{P}_n} Sup_{x\in[-1,1]} |R_n(x)| \tag{8.30}$$

Raisonnons par l'absurde, il existe un $R_n \in \mathscr{P}_n \quad \|R_n\| < \|T_n^*\|$. Or :

$$R_n - T_n^* = P_{n-1}$$

de degré $n-1$ et on a :

$$\forall k = 0,1,...,n, \quad P_{n-1}(x'_k) = R_n(x'_k) - T_n^*(x'_k) = R_n(x'_k) - \frac{(-1)^k}{2^{n-1}}$$

. Pour k est pair, on a :

$$(R_n - T_n^*)(x'_k) = R_n(x'_k) - \frac{(-1)^k}{2^{n-1}} < \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^{n-1}} = 0 \tag{8.31}$$

Si k est impair :

$$(R_n - T_n^*)(x'_k) = R_n(x'_k) - \frac{(-1)^k}{2^{n-1}} > -\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{-1}{2^{n-1}} = 0 \tag{8.32}$$

Au final :

$$(R_n - T_n^*)(x'_k)(R_n - T_n^*)(x'_{k+1}) < 0, \forall k = 0,1,...,n-1 \tag{8.33}$$

Cela veut donc dire qu'il y a n changements de signe pour l'application $(R_n - T_n^*)$, par suite $(R_n - T_n^*)$ admet n racines, or $(R_n - T_n^*)$ est de degré $n-1$, donc :

$$R_n - T_n^* = 0 \Longrightarrow R_n = T_n^* \tag{8.34}$$

Donc :

$$sup_{x\in[-1,+1]} |R_n(x)| = sup_{x\in[-1,+1]} |T_n^*(x)| = \frac{1}{2^{n-1}} \Longrightarrow \|R_n\| = \|T_n^*\| \tag{8.35}$$

d'où la contradiction car $\|R_n\| \leq \|T_n^*\|$.

8.4.3 Choix des points d'interpolation

D'aprés le corollaire 8.2, pour obtenir la meilleure estimation possible pour une fonction f donnée, il faut choisir les $n+1$ points d'interpolation $x_0, \cdots, x_n$ de manière à minimiser le maximum sur $[a,b]$ de la fonction $|(x-x_0)\cdots(x-x_n)|$. Si on appelle $\mathscr{E}_{n+1}([a,b])$ l'ensemble des polynomes de degré $n+1$ unitaires, le meilleur choix des x_i est donné par le polynôme $Q \in E_{n+1}([a,b])$ tel que $\forall p \in E_{n+1}([a,b]), sup_{x\in[a,b]}|Q(x)| \leq sup_{x\in[a,b]}|p(x)|$. Il faudra de plus s'assurer que le polynôme Q trouvé admet bien $n+1$ racines distinctes sur l'intervalle $[a,b]$.

Faisant le changement de variables

$$t = \frac{2}{b-a}x - \frac{b+a}{b-a} \Longleftrightarrow x = \frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}$$

On se ramene à une étude sur l'intervalle $[-1,1]$. Nous avons vu que si $f \in C^{([a,b])}$ et $x \in [a,b]$, on a d'après le corollaire 8.2 :

$$\forall x \in [a,b], |f(x)-P(x)| = |e(x)| \leq \frac{|(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)|}{(n+1)!} sup_{x\in[a,b]}|f^{(n+1)}(x)|$$

L'objectif est de déterminer les points d'interpolation $(x_k)_{k=0,1,\ldots,n}$ de telle manière que :

$$sup_{x\in[a,b]}|(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)| \leq sup_{x\in[a,b]}|Q(x)| \tag{8.36}$$

pour tout polynôme $Q(x)$ normalisé de degré $(n+1)$. Utilisant le changement de variable cité précédemment, il est équivalent de résoudre le problème suivant :

$$sup_{x\in[-1,+1]}|(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)| \leq sup_{x\in[-1,+1]}|Q(x)| \tag{8.37}$$

Nous allons montrer que les points d'interpolation qui vérifient cette propriété sont exactement les racines du polynôme normalisé de Tchebyhev de degré $(n+1)$ soit T^*_{n+1}.

En effet, les racines de $T^*_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}} T_{n+1}$ sont les racines de T_{n+1} qui sont données par :

$$x_k = cos\left(\frac{2k+1}{2(n+1)}\pi\right), \quad k = 0,1,\cdots,n \tag{8.38}$$

Or d'après l'équation (8.30), on a :

$$\begin{aligned} \|T^*_{n+1}\| = min_{Q\in\mathscr{P}_{n+1}} Sup_{x\in[-1,1]}|Q(x)| \Longrightarrow \\ Sup_{x\in[-1,1]}|T^*_{n+1}| = min_{Q\in\mathscr{P}_{n+1}} Sup_{x\in[-1,1]}|Q(x)| \\ Sup_{x\in[-1,1]}|T^*_{n+1}| \leq Sup_{x\in[-1,1]}|Q(x)| \end{aligned} \tag{8.39}$$

On a donc résolu le problème (8.37). On a alors la majoration suivante de l'erreur :

$$|e(x)| \leq \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!} sup_{x\in[a,b]}|f^{(n+1)}(x)| \tag{8.40}$$

8.4.4 *Exercices*

Exercice n°1 :

Soient les points d'interpolation suivants : $(-1,-1),(0,1),(1,0)$ et $(2,0)$. Trouvez le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré 3 passant par ces points.

Exercice n°2 :

Soit la fonction définie par $f(x) = \sqrt[3]{x}$, avec les données $(x_i, f(x_i)); i = 0,1,\ldots,4$ avec $x_0 = 0; x_1 = 1; x_2 = 8; x_3 = 27; x_4 = 64$.

1. Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange $P(x)$ pour la fonction $f(x)$ pour les points x_i précédents.

2. Donner une majoration de l'erreur $e(20) = f(20) - P(20)$.

Exercice n°3 :

1. Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange $P(x)$ pour la fonction $y = sin\pi x$ pour les points $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{6}, x_2 = \frac{1}{2}$ sur l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$.

2. Construire respectivement les graphiques de y et $P(x)$ sur l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$.

3. Evaluer l'erreur de l'interpolation.

Exercice n°4 :

1. Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange $P(x)$ pour la fonction $y = xsin\pi x$ pour les points $x_i = -1 + \frac{i}{2}, i = 0, 1, 2, 3, 4$ sur l'intervalle $[-1, +1]$.

2. Construire respectivement les graphiques de y et $P(x)$ sur l'intervalle $[-1, +1]$.

3. Evaluer l'erreur de l'interpolation.

CHAPITRE 9

Théorie Elémentaire de l'Approximation

9.1 Introduction

Le problème de l'approximation pose les questions suivantes :

- le choix de l'espace dans lequel on se place pour faire une approximation ; exemple l'ensemble $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de l'intervalle [0,1] vers l'ensemble des réels $\mathbb{R}$.

- le choix de la notion de proximité(de distance). Deux fonctions f et g sont proches si :

$$sup_{x\in[0,1]}|f(x)-g(x)| \leq \varepsilon \tag{9.1}$$

pour $\varepsilon > 0$ donné,

- le choix des fonctions de bases. Exemple : $1, x, ..., x^n, ..$ de $[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$. On a comme donnée $f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$. Le problème posé est considérer les composantes linéaires $\sum_{p=0}^{n} a_p x^p$ de façon que :

$$sup_{x\in[0,1]}|\sum_{p=0}^{n} a_p x^p - f(x)| \leq \varepsilon \tag{9.2}$$

Application : remplacement dans les calculs la fonction par le réel $\sum_{p=0}^{n} a_p x^p$.

9.2 NOTIONS D'APPROXIMATION

1. Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, déterminer un polynôme P tel que $sup_{x\in[a,b]}|f(x)-P(x)|$ soit le plus petit possible.

2. Même problème avec P de degré donné N : $P(x)=\sum_{i=0}^{i=N} a_i x^i$.

3. $\int_{-\pi}^{+\pi}|f(x)-\sum_{k=-n}^{k=n} a_k e^{-ikx}|^2 dx \leq \varepsilon$ donné, trouver les a_k.

4. Trouver un polynôme $P(x)$ d'interpolation tel que :

$$P(x_i) = y_i \tag{9.3}$$
$$P'(x_i) = y_{i1} \tag{9.4}$$
$$P^{(n)}(x_i) = y_{in} \tag{9.5}$$

9.3 MEILLEURE APPROXIMATION DANS UN ESPACE MÉTRIQUE

Définition : *Soit E un espace métrique muni d'une distance d. d est une application de $E\times E \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $\forall x,y,z \in E$:*

$$d(x,y) = d(y,x) \tag{9.6}$$
$$d(x,z) \leq d(x,y)+d(y,z) \tag{9.7}$$
$$d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y \tag{9.8}$$

Exemples :

- $E=R^3, \quad d(x,y)=\|x-y\|$,

- $E=\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R}), \quad d(f,g)=sup_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|$,

- $E=\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R}), \quad d(f,g)=\sqrt{\int_a^b|f(x)-g(x)|^2dx}$,

- E est l'ensemble des fonctions de carré intégrable, $d(f,g)=\sqrt{\int_a^b|f(x)-g(x)|^2dx}$,

- $E=\mathscr{C}^p([a,b],\mathbb{R})$ p fois continûement dérivables, $d(f,g)=sup_{x\in[a,b]}sup_{j\in N}|f(x)^{(j)}-g(x)^{(j)}|$.

Problème Posé : Soit $f\in E$ un espace métrique et $F\subset E$, F un sous ensemble, déterminer $\Phi^*\in F$ telque $d(f,\Phi^*)=\min_{\Phi\in F} d(f,\Phi)$.

Soit E un espace vectoriel muni d'une application $\|\,\|$ de $E\longrightarrow \mathbb{R}^+$:

$$x \longrightarrow \|x\| \begin{cases} \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \\ \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \end{cases} \tag{9.9}$$

L'application $\| \|$ est appelée norme et l'espace vectoriel E est dit espace vectoriel normé.

Théorème 1. : *Si F est un sous espace vectoriel de dimension finie dans l'espace normé E, alors pour toute fonction $f \in E$, il existe $\Phi^* \in F$ qui réalise la meilleure approximation de f.*

$$\|f - \Phi^*\| = min_{\Phi \in F} \|f - \Phi\| \tag{9.10}$$

9.4 APPROXIMATION UNIFORME

Soient $E = \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$, $f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un ensemble dénombrable de $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$.

Problème : Chercher les $a_i \in \mathbb{R}$ tels que $sup_{x\in[a,b]}|f(x) - \sum_{n=0}^{N} a_n f_n(x)|$ plus petit possible ?

Soit F le sous espace vectoriel engendré par les f_n pour $n \leq N$. Soit $\Phi^* \in F$, alors Φ^* s'écrit :

$$\Phi^* = \sum_{n=0}^{n=N} a_n f_n$$

avec $lim_{N\to+\infty} sup_{x\in[a,b]}|f(x) - \sum_{n=0}^{N} a_n f_n(x)| = 0$.

Soit A un sous ensemble de E. On dit que A sépare les points de $[a,b]$ si pour tout $(x,y) \in [a,b] \times [a,b] \quad \exists f \in A$ telle que $f(x) \neq f(y)$ pour $x \neq y$.

Exemple : $E = \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ et $A =$ l'ensemble des polynômes définis dans E.

Théorème 2. : *Si l'espace vectoriel $A \subset \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ sépare les points et telque $f \in A$ et $g \in A \Rightarrow fg \in A$ et contient les constantes, alors toute $f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ s'approche uniformément par une suite φ_n de A avec :*

$$lim_{p\to+\infty} sup_{x\in[a,b]}|f(x) - \varphi_p(x)| = 0 \tag{9.11}$$

Si $p_0, p_1, ..., p_n$ les polynômes et A l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires finies de polynômes, on a :

$$lim_{N\to+\infty} sup_x |f(x) - \sum_{n=0}^{N} a_n p_n(x)| = 0 \tag{9.12}$$

9.5 APPROXIMATION UNIFORME POLYNÔMIALE D'UNE FONCTION CONTINUE

Soit $\mathscr{P}_n = \{$ensemble de tous les polynômes de degré $\leq n\}$; p_n^* la meilleure approximation uniforme polynômiale d'une fonction $f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$, on a alors :

$$\|f - p_n^*\| = Min_{p_n \in \mathscr{P}_n} \|f - p_n\| \tag{9.13}$$

On admet l'existance de p_n^*.

Théorème 4. : *Si $p_n \in \mathscr{P}_n$ est tel que la fonction $\varepsilon_n(x) = f(x) - p_n(x)$ atteint des valeurs absolues extrêmes alternées $M, -M, M, \ldots$ avec $M = \|\varepsilon_n\|$ en $n+2$ points alternés, alors p_n est la meilleure approximation uniforme polynômiale de f sur $[a,b]$.*

Démonstration par l'absurde : $\exists q_n \in \mathscr{P}_n$ avec

$$\|f - q_n\| < \|f - p_n\| = \|\varepsilon_n\| = M$$

Soit $r_n = q_n - p_n$, il est de degré $\leq n$, il change $n+1$ fois de signe dans l'intervalle $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$ où $\varepsilon_n = \pm M$ et :

$$r_n(x_0) = q_n(x_0) - p_n(x_0) = q_n(x_0) - f(x_0) + f(x_0) - p_n(x_0)$$

Or $|q_n(x_0) - f(x_0)| < M$ et $f(x_0) - p_n(x_0) = \pm M$ donc $r_n(x_0)$ est < 0 ou > 0, change $n+1$ fois de signe a $n+1$ racines $\Rightarrow r_n \equiv 0$.

La reciproque est vraie.

Unicité de p_n^* : Soit p_{n1}^* et p_{n2}^* 2 meilleures approximations polynômiales.

$$\|f - p_{n1}^*\| = \|f - p_{n2}^*\| = \rho_n^*$$

alors :

$$\rho_n^* \leq \|f - \frac{p_{n1}^* + p_{n2}^*}{2}\| \leq \frac{1}{2}\|f - p_{n1}^*\| + \frac{1}{2}\|f - p_{n2}^*\| = \rho_n^* \tag{9.14}$$

En posons :

$$s_n = \frac{p_{n1}^* + p_{n2}^*}{2} \tag{9.15}$$

on a :

$$\rho_n^* = \|f - s_n\| \tag{9.16}$$

Donc $f - s_n$ atteint son maximum en $n+2$ points de façon alternée en appliquant la reciproque du théorème 3. avec $s_n = \frac{p_{n1}^* + p_{n2}^*}{2}$, il existe $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$ tels que :

$$\rho_n^* = |f(x_i) - s_n(x_i)| \leq \frac{1}{2}|f(x_i) - p_{n1}^*(x_i)| + \frac{1}{2}|f(x_i) - p_{n2}^*(x_i)| \leq \rho_n^* \tag{9.17}$$

car :

$$|f(x_i) - s_n(x_i)| = |f(x_i) - p_{n1}^*(x_i)| = |f(x_i) - p_{n2}^*(x_i)|$$

Les points extrêmaux de $f - s_n, f - p^*_{n1}, p^*_{n2}$ sont les mêmes et :

$$|f(x_i) - p^*_{n1}(x_i)| = |f(x_i) - p^*_{n2}(x_i)| = \frac{1}{2}|f(x_i) - p^*_{n1}(x_i) + f(x_i) - p^*_{n2}(x_i)| \tag{9.18}$$

et utilisant :

$$|a| = |b| = \frac{1}{2}|a+b| \Rightarrow a = b \tag{9.19}$$

Alors :

$$p^*_{n1}(x_i) = p^*_{n2}(x_i) \Rightarrow p^*_{n1} = p^*_{n2} \tag{9.20}$$

9.5.1 Calcul de p^*_n

On peut toujours ramener $[a,b]$ à $[-1,+1]$. Soit $f \in \mathscr{C}([-1,+1],\mathbb{R})$, on suppose que f est un polynôme quelconque de degré $\leq n+1$, soit :

$$P_{n+1}(x) = f(x) = a_{n+1}x^{n+1} + a_n x^n + \ldots + a_0 \quad \text{avec}\, a_{n+1} \neq 0$$

Posons :

$$p_n(x) = P_{n+1}(x) - \frac{a_{n+1}}{2^n} T^*_{n+1}(x) \quad \text{degré} \leq n \tag{9.21}$$

$$\varepsilon_n(x) = f(x) - p_n(x) = P_{n+1}(x) - (P_{n+1}(x) - \frac{a_{n+1}}{2^n} T^*_{n+1}(x)) = \frac{a_{n+1}}{2^n} T^*_{n+1}(x) \tag{9.22}$$

or T_{n+1} atteint en $n+2$ points des valeurs extrémales alternées $\pm\frac{a_{n+1}}{2^n}$.

Cas général : f fonction continûement dérivable. f s'écrit :

$$f(x) = \sum_{r=0}^{+\infty} a_r T_r(x) \tag{9.23}$$

avec :

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx \tag{9.24}$$

$$a_r = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{f(x)T_r(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx \tag{9.25}$$

La convergence est uniforme.

$$f(x) - \sum_{r=n+2}^{+\infty} a_r T_r(x) - \sum_{r=0}^{n} a_r T_r(x) = a_{n+1}T_{n+1} \tag{9.26}$$

Alors :

$$q^*_n(x) = \sum_{r=0}^{n} a_r T_r(x) \tag{9.27}$$

est meilleure approximation de la fonction $f - \sum_{r=n+2}^{+\infty} a_r T_r(x)$.

9.6 MEILLEURE APPROXIMATION EN QUADRATIQUE

Définition 1 : *Un espace de Hilbert H est un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) tel qu'il existe une application de $H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ qui à $(x,y) \in H \times H \longrightarrow < x,y >$ vérifiant* :

$$< x,y >= 0 \Leftrightarrow x = 0 \tag{9.28}$$
$$< x,x > > 0 \text{ si } x \neq 0 \tag{9.29}$$
$$< x, \alpha y + \beta z >= \bar{\alpha} < x,y > + \bar{\beta} < x,z > \text{ bilinéaire} \tag{9.30}$$
$$< x,y >= \overline{< y,x >} \tag{9.31}$$

Définition 2 : *La norme d'un vecteur x est* :

$$\|x\| = \sqrt{< x,x >} \tag{9.32}$$

Théorème 5. : *Toute suite de Cauchy dans un espace de Hilbert H converge. soit :*

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall p \geq n_0 \forall q \geq n_{0\,,} \|x_p - x_q\| \leq \varepsilon \\ &\text{et} \quad \exists y \in H \text{ tel que } lim_{n \to +\infty} \|x_n - y\| = 0 \end{aligned} \tag{9.33}$$

Exemples :

- $H = \mathbb{R}$ avec $< x,y >= x.y$

- $H = \mathbb{R}^3$ avec $< x,y >= \sum_i x_i.y_i$

- L'ensemble de toutes les fonctions f de carrés intégrables à valeurs complexes est un espace de Hilbert :

$$f : \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{C} \qquad < f,g >= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}dx \tag{9.34}$$

Théorème 6. : *L'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les fonctions à variables réelles :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)dx \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \tag{9.35}$$

Notons que si f et g sont orthogonaux, alors $< f,g >= 0$, et on a le théorème de Pythagore :

Théorème 7. : *Si f et g sont deux fonctions orthogonaux avec le produit scalaire défini par (9.34), on a :*

$$\|f+g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 \tag{9.36}$$

Propriété : *Si H est un espace de Hilbert et K un convexe de H, alors toute suite de Cauchy dans K converge dans K, soit pour tout $w \in H$ $\exists$ un unique $x^* \in K$ tel que $\|w - x^*\| = min_{x \in K} \|w - x\|$.*

Cas particulier : Si K est un sous espace vectoriel tel que toute suite de Cauchy dans K converge dans K, alors $\exists$ un unique $x^* \in K$ tel que $\|w - x^*\| = min_{x \in K} \|w - x\|$.

Si K est un sous espace vectoriel de dimension finie, la condition que toute suite de Cauchy dans K converge dans K n'est pas nécessaire, et pour tout $w \in H \exists$ un unique $x^* \in K$ tel que $\|w - x^*\| = min_{x \in K} \|w - x\|$.

9.7 MEILLEURE APPROXIMATION DANS UN ESPACE HILBERTIEN

Théorème 8. : *Soit E un espace de Hilbert et F un sous espace vectoriel de E de dimension finie, alors la meilleure approximation $\Phi^* \in F$ de $f \in E$ existe et unique :*

$$\|f - \Phi^*\| = min_{\Phi \in F} \|f - \Phi\| \tag{9.37}$$

Théorème 9. : *Une condition nécessaire et suffisante pour que $\Phi^* \in F$ soit meilleure approximation est que :*

$$< f - \Phi^*, \Phi >= 0 \forall \Phi \in F$$

Démonstration :

Soit $\Phi^* \in F,\ \exists \Phi_1 \neq 0 \in F / < f - \Phi^*, \Phi_1 >= \alpha \neq 0$.

Soit :

$$\Phi_2 = \Phi^* + \frac{\alpha}{\|\Phi_1\|^2} \Phi_1 \tag{9.38}$$

d'où :

$$\begin{gathered} \|f - \Phi_2\|^2 =< f - \Phi_2, f - \Phi_2 >=< f - \Phi^* - \frac{\alpha}{\|\Phi_1\|^2} \Phi_1, f - \Phi^* - \frac{\alpha}{\|\Phi_1\|^2} \Phi_1 >= \\ \|f - \Phi^*\|^2 + \frac{\alpha^2}{\|\Phi_1\|^2} + 2 < f - \Phi^*, \frac{-\alpha}{\|\Phi_1\|^2} \Phi_1 >= \|f - \Phi^*\|^2 + \frac{\alpha^2}{\|\Phi_1\|^2} - 2\frac{\alpha^2}{\|\Phi_1\|^2} = \\ \|f - \Phi^*\|^2 - \frac{\alpha^2}{\|\Phi_1\|^2} \leq +\|f - \Phi^*\|^2 \end{gathered} \tag{9.39}$$

D'où la contradiction. Reciproquement, soit $\Phi_1 \in F / < f - \Phi_1, \Phi >= 0,\ \forall \Phi \in F$, alors :

$$\begin{gathered} \|f - \Phi\|^2 =< f - \Phi, f - \Phi >=< f - \Phi_1 + \Phi_1 - \Phi, f - \Phi_1 + \Phi - 1 - \Phi >= \\ \|f - \Phi_1\|^2 + \|\Phi_1 - \Phi\|^2 + 2 < f - \Phi_1, \Phi_1 - \Phi >= \\ \|f - \Phi_1\|^2 + \|\Phi_1 - \Phi\|^2 \Rightarrow \|f - \Phi_1\| \leq \|f - \Phi\| \quad \forall \Phi \in F \end{gathered} \tag{9.40}$$

Donc Φ_1 est la meilleure approximation de $f \in E$.

Unicité : soient Φ_1^*, Φ_2^* deux meilleures approximations :

$$< f - \Phi_1^*, \Phi >= 0 \,\forall \Phi \in F$$

$$< f - \Phi_2^*, \Phi >= 0 \,\forall \Phi \in F$$

En prenant $\Phi = \Phi_1^* - \Phi_2^*$, on obtient :

$$< f - \Phi_1^*, \Phi_1^* - \Phi_2^* >= 0$$

$$< f - \Phi_2^*, \Phi_1^* - \Phi_2^* >= 0$$

Par soustraction, on a :

$$< \Phi_1^* - \Phi_2^*, \Phi_1^* - \Phi_2^* >= 0 \Rightarrow \|\Phi_1^* - \Phi_2^*\|^2 = 0 \Rightarrow \Phi_1^* = \Phi_2^* \tag{9.41}$$

CQFD

9.7.1 Procédé de calcul de Φ^*

Soient $\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_n, ..$ une base orthonormée de E c'est-à-dire :

$$< \varphi_i, \varphi_j >= \delta_{ij} = \begin{cases} +1 \; i = j \\ 0 \; i \neq j \end{cases} \tag{9.42}$$

$$f = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \varphi_k \quad \text{pour tout } f \in E \tag{9.43}$$

Soit F l'espace vectoriel engendré par $(\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_n)$ et $\Phi^* \in F$, on a alors :

$$\Phi^* = \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k \tag{9.44}$$

Calculer les a_k. On utilise $< f - \Phi^*, \varphi >= 0 \forall \phi \in F$, soit :

$$< f - \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k, \Phi_h >= 0 \Rightarrow < f, \varphi_h >= a_h \tag{9.45}$$

9.8 EVALUATION DE $\|f - \Phi^*\|$

On connaît f et Φ^* d'où $\|f - \Phi^*\|$.

Application : Approximation polynômiale c'est trouver un choix judicieux de polynômes de façon à minimiser $\|f - \Phi^*\|$. Alors, on a :

$$\|f - \Phi^*\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} a_k^2 \tag{9.46}$$

Donnons ci-dessous des exemples.

9.8.1 Les Polynômes de Tchybechev

Soit E :

$$E = \left\{ f : [-1,+1] \to \mathbb{R} / \int_{-1}^{+1} \frac{f(t)^2}{\sqrt{1-t^2}} dt < +\infty \right\}$$

muni du produit scalaire défini par :

$$< f,g >= \int_{-1}^{+1} \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \tag{9.47}$$

alors, E est un espace vectoriel de Hilbert et soit F telque :

$$F = \left\{ \text{le sous espace vectoriel de } E \text{ engendré par } \tilde{T}_0, \tilde{T}_1, ..., \tilde{T}_n \right\}$$

avec :

$$\tilde{T}_k = \frac{T_k}{\|T_k\|}$$

et T_k le polynôme de Tchybechev de degré k, alors Φ^* s'écrit :

$$\Phi^*(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \tilde{T}_k(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\int_{-1}^{+1} \frac{f(t)T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \right) \tilde{T}_k(x) \tag{9.48}$$

9.8.2 Polynômes de Hermite

Soit E :

$$E = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)^2 e^{-t^2} dt < +\infty \right\}$$

muni du produit scalaire défini par :

$$< f,g >= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t^2} dt \tag{9.49}$$

alors, c'est un espace vectoriel de Hilbert.

Soit la fonction :

$$\Psi(x,t) = e^{-t^2+2tx} = e^{x^2} e^{-(t-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!} \tag{9.50}$$

$H_n(x)$ est le n ème polynôme de Hermite de degré n. Il est défini aussi par :

$$H_n(x) = \left(\frac{\partial^n \Psi(x,t)}{\partial t^n} \right)_{t=0} = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n} \tag{9.51}$$

On a aussi :

$$\frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = 2(x-t)\Psi(x,t) \tag{9.52}$$

$$\frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial x} = 2t\Psi(x,t) \tag{9.53}$$

D'où :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} H_n'(x)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} 2H_n(x)\frac{t^{n+1}}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2H_{n-1}(x)t^n}{(n-1)!} \Rightarrow H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x) \tag{9.54}$$

9.8.3 Relations d'orthogonalité

Soit $m < n$, calculons :

$$< H_n, H_m >= I_{n,m} = \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(t)H_m(t)e^{-t^2}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n H_m(t)\frac{d^n e^{-t^2}}{dt^n}dt =$$
$$\left[(-1)^n H_m(t)\frac{d^{n-1}e^{-t^2}}{dt^{n-1}}\right]_{-\infty}^{+\infty} + (-1)^{n-1}\int_{-\infty}^{+\infty} H_m'(t)\frac{d^{n-1}e^{-t^2}}{dt^{n-1}}dt \tag{9.55}$$

En tenant compte de l'équation (9.54) et $H_0(t) = 1$, on a :

$$I_{n,m} = 2(-1)^{n-1}m\int_{-\infty}^{+\infty} H_{m-1}(t)\frac{d^{n-1}e^{-t^2}}{dt^{n-1}}dt = 2(-1)^{n-1}mI_{n-1,m-1} =$$
$$2^n(-1)^{n-m}m!\int_{-\infty}^{+\infty} H_0(t)\frac{d^{n-m}e^{-t^2}}{dt^{n-m}}dt = 0 \tag{9.56}$$

Donc pour $m < n$, on a $< H_n, H_m >= 0$ c'est-à-dire les H_m sont orthogonaux. Si $m = n$, on a :

$$< H_n, H_n >= I_{n,n} = 2^n n!\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = 2^n n!\sqrt{\pi} \tag{9.57}$$

Donc les fonctions polynômes $\dfrac{H_n}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}$ sont orthonormées. On choisit alors la base φ_k pour $k = 0, n$ avec :

$$\varphi_k(x) = \frac{H_k e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2^k k!\sqrt{\pi}}} \tag{9.58}$$

Soit $f \in E$, elle est estimée par Φ^* telle que :

$$\Phi^*(x) = \sum_{k=0}^{k=n} a_k\varphi_k(x) \text{ avec } \quad a_k = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi_k(t)dt \tag{9.59}$$

CHAPITRE 10

L'Interpolation par les Fonctions Splines

10.1 INTRODUCTION

On considère maintenant sur le segment $[a,b]$ de la droite réelle $\mathbb{R}$, le réseau $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ et soit $f(x)$ une fonction définie sur $[a,b]$ à valeurs $(f_k = f(x_k))_{k=0,1,\ldots,n}$ données aux points (x_k). Le problème est de construire une courbe d'un type donné, qui dans un sens qui sera précisé, passe par les points $(x_k, f(x_k))$. Il s'agit d'un problème d'interpolation.

La courbe choisie est appelée communément *fonction spline*. Cette fonction est une fonction polynômiale par morceaux définie dans un domaine $\mathscr{D}$, c'est-à-dire c'est une fonction telle qu'on peut partager $\mathscr{D}$ en des domaines partiels de façon qu'elle soit dans chacun un polynôme de degré m, continue ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre $m-1$ et possède une dérivée $m-$ième de carré intégrable (c'est-à-dire qui vérifie : $\int_a^b |f^{(m)}(t)|^2 dt < +\infty$).

La fonction qui sera étudiée est la fonction spline d'ordre 3 : soit un polynôme cubique.

10.2 RECHERCHE DE LA FONCTION SPLINE

Le problème d'interpolation cubique par morceaux s'énonce de la façon suivante : on cherche sur l'intervalle $[a,b]$ une fonction $g(x)$ ayant les propriétés :

1. g(x) est de classe $C^2(a,b)$, à savoir continue ainsi que ses dérivées première et seconde ;
2. sur chaque $[x_{k-1}, x_k]$, elle est un polynôme du troisième degré de la forme :

$$g(x) = g_k(x) = \sum_{l=0}^{3} a_l^{(k)}(x_k - x)^l, \quad k = 1,2,...,n \tag{10.1}$$

3. On a aux points (x_k) :
$$g(x_k) = f_k, \quad k = 1,2,...,n \tag{10.2}$$

4. $g"(x)$ vérifie les conditions aux limites :
$$g"(a) = g"(b) = 0 \tag{10.3}$$

On ne peut apprécier les mérites de cette interpolation qu'après avoir établi concrètement la propriété extrémale naturelle de $g(x)$. On montre l'unicité de la fonction $g(x)$ en utilisant les conditions (10.1-10.2-10.3-10.4). On pose :

$$h_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1,2,...,n$$
$$m_k = g"(x_k) \quad k = 0,1,...,n$$

Etant données la continuité et la linéarité sur chaque intervalle $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1,2,...,n$, de la dérivée seconde de $g(x)$, on écrit pour $x_{i-1} \leq x \leq x_i$:

$$g"(x) = m_{i-1}\frac{x_i - x}{h_i} + m_i\frac{x - x_{i-1}}{h_i} \tag{10.4}$$

En intégrant l'équation précédente deux fois, on obtient :

$$g(x) = m_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + m_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + \alpha x + \beta \tag{10.5}$$

avec α, β les deux constantes d'intégration. Pour garder la symétrie de l'écriture de la fonction $g(x)$; on écrit $\alpha x + \beta$ sous la forme :

$$\alpha x + \beta = A_i\frac{x_i - x}{h_i} + B_i\frac{x - x_{i-1}}{h_i}$$

Alors l'équation (10.5) s'écrit :

$$g(x) = m_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + m_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + A_i\frac{x_i - x}{h_i} + B_i\frac{x - x_{i-1}}{h_i} \tag{10.6}$$

Déterminons les constantes A_i, B_i en utilisant les conditions $g(x_{i-1}) = f_{i-1}, g(x_i) = f_i$, on obtient en portant $x = x_i$ et $x = x_{i-1}$ dans (10.6) :

$$m_{i-1}\frac{h_i^2}{6} + A_i = f_{i-1} \tag{10.7}$$
$$m_i\frac{h_i^2}{6} + B_i = f_i \tag{10.8}$$

Finalement :

$$g(x) = m_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + m_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + \left(f_{i-1} - \frac{m_{i-1}h_i^2}{6}\right)\frac{x_i - x}{h_i} + \left(f_i - \frac{m_i h_i^2}{6}\right)\frac{x - x_{i-1}}{h_i} \tag{10.9}$$

$$g'(x) = -m_{i-1}\frac{(x_i-x)^2}{2h_i} + m_i\frac{(x-x_{i-1})^2}{2h_i} + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{m_i - m_{i-1}}{6}h_i \tag{10.10}$$

L'expression de $g'(x)$ fournit les limites à droite et à gauche aux points $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ telle que :

$$g'(x_i^-) = m_{i-1}\frac{h_i}{6} + m_i\frac{h_i}{3} + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}$$
$$g'(x_i^+) = -m_i\frac{h_{i+1}}{3} - m_{i+1}\frac{h_{i+1}}{6} + \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}}$$

Selon (10.1) $g"(x)$ et $g'(x)$ sont continues sur $[a,b]$. La continuité de $g'(x)$ en $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ donne, compte tenu de (10.10), $n-1$ équations dues à $g'(x_i^-) = g'(x_i^+)$ pour $i = 1, 2, ..., n-1$:

$$m_{i-1}\frac{h_i}{6} + m_i\frac{h_i + h_{i+1}}{3} + m_{i+1}\frac{h_{i+1}}{6} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} \tag{10.11}$$

Ajoutons à ce système les deux conditions de (10.3) $m_0 = m_n$, on obtient le système linéaire suivant pour déterminer les inconnues $m_1, m_2, ..., m_{n-1}$:

$$A.m = L \tag{10.12}$$

avec :

$$m = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-1} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \frac{h_1+h_2}{3} & \frac{h_2}{6} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{h_2}{6} & \frac{h_2+h_3}{3} & \frac{h_3}{6} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h_3}{6} & \frac{h_3+h_4}{3} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{h_{n-1}}{6} & \frac{h_n+h_{n-1}}{3} \end{pmatrix} \tag{10.13}$$

et :

$$L = \begin{pmatrix} \frac{f_1}{h_1} - \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}\right) f_2 + \frac{1}{h_2} f_3 \\ \frac{f_2}{h_2} - \left(\frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}\right) f_3 + \frac{1}{h_3} f_4 \\ \vdots \\ -\left(\frac{1}{h_{n-2}} + \frac{1}{h_{n-1}}\right) f_{n-1} + \frac{1}{h_{n-1}} f_n \end{pmatrix} \tag{10.14}$$

La matrice A est carré symétrique tridiagonale à coefficients positifs, d'après un théorème de Gerschgorin, elle est définie positive donc inversible. Le système (10.12) admet une solution unique. La fonction spline $g(x)$ est donc reconstituée de façon unique par les formules (10.9) d'où l'unicité pour le problème proposé.

10.2.1 Propriété remarquable des fonctions splines

Les fonctions splines du troisième degré jouissent d'une propriété remarquable qui garantie l'efficacité de l'interpolation à l'aide de splines.

Considérons sur le segment $[a,b]$ l'ensemble $W^2[a,b]$ des fonctions de classe C^2 à dérivées secondes de carré sommable. On demande la fonction d'interpolation $u \in W^2[a,b]$ avec :

$$u(x_k) = f_k, \quad k = 0,1,...,n \tag{10.15}$$

telle qu'elle minimise la fonctionnelle :

$$\Phi(u) = \int_a^b u"^2(x)dx \tag{10.16}$$

sur l'ensemble $W^2[a,b]$, D'où le théorème :

Théorème 10.1 *Soit $W^2[a,b]$ l'ensemble des fonctions de classe C^2 sur $[a,b]$, à dérivées secondes de carré sommable, alors la fonction qui minimise la fonctionnelle :*

$$\Phi(u) = \int_a^b u"^2(x)dx$$

telle que $u(x_k) = f_k, \quad k = 0,1,...,n$, est la fonction définie par $u(x) = g(x)$ où $g(x)$ est la fonction spline donnée par (10.9).

Démonstration. Soit :

$$\Phi(u-g) = \int_a^b (u"-g")^2(x)dx \tag{10.17}$$

Intégrons par parties et utilisons les propriétés de g et $u \in W^2[a,b]$, il vient :

$$\begin{aligned}\Phi(u-g) &= \Phi(u) - \Phi(g) - 2\left[(u'(x)-g'(x))g"(x)\right]_{x=a}^{x=b} - 2\int_a^b (u'(t)-g'(t))g'''(t)dt \\ &= \Phi(u) - \Phi(g) - 2\sum_{k=1}^{k=n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} (u'(t)-g'(t))g'''(t)dt\end{aligned}$$

Mais $g'''(x) = c_k = constante$ sur $[x_{k-1}, x_k]$, donc :

$$\Phi(u-g) = \Phi(u) - \Phi(g) - 2\sum_{k=1}^{k=n} c_k[u(x)-g(x)]_{x=x_{k-1}}^{x=x_k} = \Phi(u) - \Phi(g) \geq 0$$

D'où :

$$\Phi(g) = \Phi(u) - \Phi(u-g) \leq \Phi(u) \tag{10.18}$$

car $\Phi(u-g) \geq 0$, donc pour toute $u \in W^2$, avec $u(x_k) = f_k$, $k = 0,1,...,n$. Ainsi la fonction spline $g(x)$ réalise le minimum de la fonctionnelle (10.16).

10.2.2 Exercices

Exercice n°1 :

On considère la distribution cumulée N des nouveaux-nés de mères bulgares en fonction de leur âge :

Age	15	20	25	30	35	40	45
N	0.000	7.442	26.703	41.635	49.785	50.209	50.226

Trouver la fonction spline cubique f qui interpole ces données et qui vérifie les conditions $f'(15) = f'(50) = 0$.

Exercice n°2 :

Soit une fonction f que l'on cherche à interpoler sur l'intervalle $[0,6]$.

1. Calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange $P(x)$ sur les données suivantes $x = 0,2,4,6$ et $f(x) = 0.5,-1.7903,3.3900,-1.2795$.

2. Sachant que la fonction f est égale à : $f(x) = 3sin(2x)+\frac{1}{2}cos(3x)$, calculer l'erreur d'interpolation que vous avez faite en $x = 3$ et en $x = 5$. Les résultats sont-ils satisfaisants ? Justifier-les (éventuellement en traçant f).

3. On cherche à améliorer les résultats en interpolant avec une spline cubique, notée s. On pose $x_i = i; i = 0,1,...5$ et $m_i = s"(x_i); i = 0,1,...5$ avec m_0 et m_5 fixés. On notera A la matrice du système obtenu. Déterminer la fonction spline s.

4. Pensez-vous que les résultats de l'interpolation avec s ainsi calculé seront meilleurs ?

Littérature

1. **G. Marchouk**. 1980. *Méthodes de Calcul Numérique*. Editions Mir, Moscou. Traduction française Editions Mir 1980. 430 p.
2. **P.G. Ciarlet**. 1982. *Introduction à l'Analyse Numérique Matricielle et à l'Optimisation*. Collection Mathématiques appliquées pour la maîtrise. Edition Masson. 280p.

Liste des figures

Liste des tables