

REPUBLIQUE TUNISIENNE  
MINISTERE DE L'EQUIPEMENT  
OFFICE DE LA TOPOGRAPHIE ET DU CADASTRE

**EQUILIBRIUM FIGURES IN GEODESY AND  
GEOPHYSICS**

Par

**Helmut MORITZ**

**- 1988 -**

TECHNICAL UNIVERSITY, GRAZ, AUSTRIA  
Traduit Par

**Abdelmajid BEN HADJ SALEM**

Ingénieur Général à l'Office de la Topographie et du Cadastre

AOÛT 2011

VERSION 1.

OFFICE DE LA TOPOGRAPHIE ET DU CADASTRE

**Table des matières**

1	INTRODUCTION . . . . .	2
2	L'ÉQUATION DE CLAIRAUT . . . . .	3
3	LA MÉTHODE DES EQUATIONS INTÉGRALES . . . . .	5
4	LA GÉOMÉTRIE DES SURFACES D'EQUILIBRE . . . . .	9
4.1	Stratification des Equi-surfaces . . . . .	10
4.2	Le Théorème de Wavre . . . . .	12
4.3	la Stratification Sphérique Comme Exception . . . . .	13
4.4	L'Impossibilité d'une Stratification Ellipsoïdale Pure . . . . .	13
4.5	Une Autre Méthode de la Détermination de l'Equation de Clairaut . . . . .	14
4.6	Les Remarques en Conclusion . . . . .	15
5	ENERGIE DE POTENTIEL STATIONNAIRE . . . . .	16
5.1	L'Energie de Potentiel . . . . .	17
5.2	Les fonctions de Dirac et Heaviside . . . . .	18
5.3	Une Remarquable Expression de la Densité . . . . .	18
5.4	Variation de l'Energie de Potentiel . . . . .	19
5.5	Une Equation Intégrale Générale . . . . .	21
6	LA THÉORIE DU DEUXIÈME ORDRE . . . . .	22
6.1	Le Potentiel Intérieur . . . . .	23
6.2	Ellipsoïde et Sphéroïde . . . . .	26
6.3	L'Equilibre Hydrostatique . . . . .	28
7	LA TERRE RÉELLE ET L'ELLIPSOÏDE DE RÉFÉRENCE . . . . .	29

# EQUILIBRIUM FIGURES IN GEODESY AND GEOPHYSICS

PROF. HELMUT MORITZ

UNIVERSITÉ TECHNIQUE, GRAZ, AUTRICHE

## Résumé

Ce papier représente la traduction de la communication du Professeur Helmut Moritz (1988) intitulée " EQUILIBRIUM FIGURES IN GEODESY AND GEOPHYSICS " .

## 1 INTRODUCTION

Actuellement, l'intérêt aux figures d'équilibre terrestre est vraiment très lent. Le dernier ouvrage important de géodésie physique qui a extensivement traité les figures d'équilibre était (Ledersteger, 1969), alors que (Moritz, 1980) ne le mentionne pas.

La raison est que l'un des premiers résultats de la géodésie satellitaire, aux alentours de 1960, était la valeur de  $f$  l'aplatissement de la terre ( $\cong 1/298.25$ ) qui était incompatible avec celle de l'hydrostatique  $1/297.34$  (Bullard, 1948); cf. aussi (Heiskanen and Moritz, 1967, pp. 340-341). Cette différence montre que la terre ne peut pas être en équilibre hydrostatique.

L'ellipsoïde équipotentiel, que souligne la définition moderne du système de référence géodésique, à partir de la formule internationale de gravité de 1930 au Système de Référence Géodésique de 1980 (Moritz, 1984), est non plus une figure d'équilibre.

De l'autre côté, un modèle hydrostatique de la terre continue d'être une référence pour la géophysique théorique de la rotation de la terre et d'une terre élastique oscillante; cf. (Melchior, 1983, sec.6.2; Moritz and Muller, 1987, sec. 4.2).

Ici, nous avons trois faits non liés : la terre non en équilibre hydrostatique, une référence géodésique non hydrostatique, une référence géophysique hydrostatique, qui appellent à une inter-relation; et les bases de ce-ci continuent

d'être une théorie précise pour une terre hydrostatique.

Depuis le temps où Clairaut publiait sa fondamentale équation en 1743 jusqu'aux dernières vingt années passées, le problème des figures d'équilibre hydrostatique terrestre a fasciné l'attention des mathématiciens, des géophysiciens, des astronomes et de la même façon les géodésiens, produisant des résultats théoriques hautement intéressants et pratiques très utiles. Là, il reste le fait curieux est que ces travaux n'ont toujours été inter-relatés. L'anglais la littérature pratiquement orientée a fréquemment peu tenu en compte des avances théoriques très grandes publiées en français, allemand, italien ou russe.

Le présent papier essaye une revue des approches variées. Il n'a pas l'attention de compléter quoi que ce soit et devrait être considéré comme seulement une première approximation.

## 2 L'EQUATION DE CLAIRAUT

La théorie de l'équilibre d'une figure sphéroïde est gouvernée par la fameuse équation différentielle de Clairaut publiée en 1743 :

$$\frac{d^2f}{dr^2} + \frac{6\rho}{rD} \frac{df}{dr} + \frac{6}{r^2} \left( \frac{\rho}{D} - 1 \right) = 0 \quad (1)$$

On considère ici que la Terre est un corps symétrique rotatif, les surfaces de densité constante  $\rho$  (qui sont en même temps les surfaces de potentiel de pesanteur  $W$  constant) sont légèrement des sphéroïdes aplatis avec en première approximation des ellipsoïdes de demi-grand axe  $a$  et de demi-petit axe  $b$  et de rayon moyen  $r$  telque :

$$f = \frac{a-b}{a} = f(r) \quad (2)$$

représentant l'applatissage. Le rayon moyen  $r$  est telque :

$$\rho = \rho(r) \quad (3)$$

et enfin :

$$D = \frac{3}{r^3} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' = D(r) \quad (4)$$

désigne la densité moyenne à l'intérieur de la surface  $\rho = \rho(r)$ , laquelle pour le présent sujet peut être considérée comme une sphère. Comme variable d'intégration,  $r$  est noté par  $r'$ , une notation qu'on va remplacer plus tard par  $r$  où pas de risque de confusion.

L'équation de Clairaut est une approximation linéaire en  $f$ ; les termes d'ordre  $f^2$  sont négligés. Pour plus de précision, les termes du deuxième ordre seront retenus menant à la théorie du second ordre qui sera discutée dans le

section (29.6).

La dérivation standard de (1) est celle donnée dans (Jeffreys, 1970, sec.4.03). Elle sera utilisée aussi dans la section (29.6). de façon que nous nous limitons ici à un bref rappel.

L'équation fondamentale de l'équilibre hydrostatique est :

$$dp = \rho dW \quad (5)$$

où  $p$  est la pression,  $\rho$  la densité et  $W$  le potentiel de pesanteur. Une conséquence immédiate de (5) est que :

$$W = W(\rho) \quad (6)$$

le potentiel est une fonction de la densité seulement de façon que les surfaces de densité constante,  $\rho = \text{constante}$ , sont aussi les surfaces équipotentielles  $W = \text{constante}$ . Dans la suite, nous parlons des équi-surfaces.

Maintenant nous décomposons le potentiel de pesanteur interne sous la forme :

$$W(r, \theta) = W_0(r) + W_2(r)P_2(\cos\theta) \quad (7)$$

où  $\theta$  est la colatitude sphérique (la distance polaire sphérique), à cause de la symétrie rotationnelle, il n'y a pas de dépendance de la longitude  $\lambda$ . Notons que  $r$  désigne le rayon moyen comme ci-dessus.

Comme  $\rho = \rho(r)$ , il ensuit de (6) que  $W$  aussi doit dépendre seulement de  $r$  telque :

$$W_2(r) = 0 \quad (8)$$

$P_2(\cos\theta)$  désigne l'usuel polynôme de Legendre du deuxième degré. La condition (8) entraîne que :

$$-\frac{f(r)}{r} \int_0^r \rho r^2 dr + \frac{1}{5r^3} \int_0^r \rho \frac{d(fr^5)}{dr} dr + \frac{1}{5} r^2 \int_r^R \rho \frac{df}{dr} dr + \frac{\omega^2 r^2}{8\pi G} = 0 \quad (9)$$

Ici "r" sous l'intégrale désigne la variable d'intégration qu'on aurait noté correctement par  $r'$ . Le symbole  $R$  désigne le rayon moyen de la Terre  $R = 6371$  km,  $\omega$  est la vitesse de rotation de la terre et  $G$  la constante de gravitation usuelle.

Avec des manipulations de (9), on arrive à l'équation (1) en différentiant les intégrales.

Pour plus de traitement de (1) par la transformation classique de Radau,

on arrive au résultat connu :

$$J_2 = \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{2}{5} \sqrt{\frac{5m}{2f} - 1} \right) H \quad (10)$$

qui tenant compte des termes du second ordre ; permet le calcul du coefficient zonal du deuxième degré :

$$J_2 = \frac{C - A}{Ma^2} \quad (11)$$

à partir de la quantité :

$$H = \frac{C - A}{C} \quad (12)$$

très bien connue à partir de la précession astronomique. Les notations sont standard :  $C$  et  $A$  sont les moments d'inertie principaux (polaire et équatorial),  $M$  désigne la masse de la terre et  $a$  son rayon équatorial moyen.

Maintenant  $J_2$  est directement lié à l'aplatissement par :

$$f = \frac{3}{2} J_2 + \frac{1}{2} m + O(f^2) \quad (13)$$

$O(f^2)$  désigne les termes d'ordre  $f^2$  et plus et :

$$m = \frac{\omega^2 a}{\gamma_e} \quad (14)$$

le plus petit rapport de la force centrifuge à l'équateur par la gravité normale à l'équateur  $\gamma_e$ .

Avant l'arrivée des satellites artificiels, l'aplatissement  $f$  était calculé en combinant les équations (10) et (13), sachant que  $J_2$  peut être calculé indirectement à partir de  $H$  par (10), en supposant l'équilibre hydrostatique.

Les satellites artificiels ont fait que  $J_2$  est directement observable, qui mène à la différence mentionnée dans le paragraphe 1., et en conséquence de l'intérêt des géodésiens à l'équilibre des figures, malgré les papiers telsque (Khan,1968, 1969 ; Nakiboglu, 1979 ; Denis and Ibrahim, 1981).

### 3 LA MÉTHODE DES EQUATIONS INTÉGRALES

Le traitement mathématique rigoureux de l'équilibre des figures revenait au mathématicien Français Poincaré (1885) et à son contemporain le mathématicien Russe Liapounov. Alors que Poincaré a concentré ses recherches sur l'équilibre homogène des figures ( $\rho = const.$ ), Liapunov (1904) étudiait des figures hétérogènes donnant une rigoureuse justification de la théorie de Clairaut.

Lichtenstein (1933) continuait le travail de Liapunov et essayait de le simplifier, mais son essai d'achever une rigueur mathématique fait son livre extrêmement difficile à lire, ainsi son travail, aussi parcequ'il est écrit en allemand, a partagé le destin des recherches de Liapunov d'être largement ignorées par la communauté géodésique et géophysique.

Leur résultat peut être décrit comme suit : considérer une masse hétérogène non tournante en équilibre hydrostatique de densité de distribution arbitraire en absence de forces externes. La densité est sujet seulement à la condition naturelle d'être positive et non décroissante vers l'intérieur. Dans ce cas, il peut être prouvé que la configuration doit être d'une symétrie sphérique :  $\rho = \rho(r)$  est une fonction (dans le sens ci-dessus) arbitraire du rayon  $r$  des équi-surfaces sphériques.

Si cette configuration est sujet à une rotation "suffisamment lente", alors une figure sphérique d'équilibre existe qui est fermée à la configuration sphérique originale et possède la même loi de densité  $\rho(r)$ ,  $r$  est maintenant désigne le rayon moyen des équi-surfaces. En d'autres mots, Liapunov et Lichtenstein ont prouvé l'existence et l'unicité d'une figure d'équilibre "au voisinage" d'une configuration sphérique de masse donnée.

Pour être sûr "la petitesse" de la vitesse angulaire  $\omega$  est à considérer mathématiquement, sans entraîner que la vitesse de rotation actuelle de la terre est "suffisamment petite" dans ce sens. L'auteur ne sait pas si les estimations extrêmement laborieuses de cette tâche ont été traitées numériquement.

D'une manière, Liapunov et Lichtenstein ont achevé essentiellement le problème de Clairaut comme l'a fait Hormander en 1976 pour le problème des valeurs à la frontière gravimétrique de Molodensky (cf. Moritz, 1980, sec.51) : une démonstration de l'existence et de l'unicité sous certaines restrictions mathématiques.

Il serait présomptueux de donner même une description mathématique de la démonstration dans cette note, le lecteur se réfère au livre de Lichtenstein.

Cependant, les bases de la démonstration, est une équation intégrale linéaire, qui a une certaine analogie avec la célèbre équation intégrale de Molodensky et peut, alors, intéresser le lecteur géodésien. Par suite, nous essayons de donner une simple dérivation de l'équation intégrale fondamentale de Lichtenstein.

Considérons une masse sphérique symétrique non tournante  $\Sigma$  et on la

soumet à tourner avec la vitesse angulaire  $\omega$  qui la déforme en un sphéroïde  $S$ . Notons par  $\zeta = QP$  la distance de la "nouvelle" équi-surface à partir de celle "ancienne". La déviation  $\zeta$  satisfait une équation intégrale qui est déterminée comme suit (Fig.1).

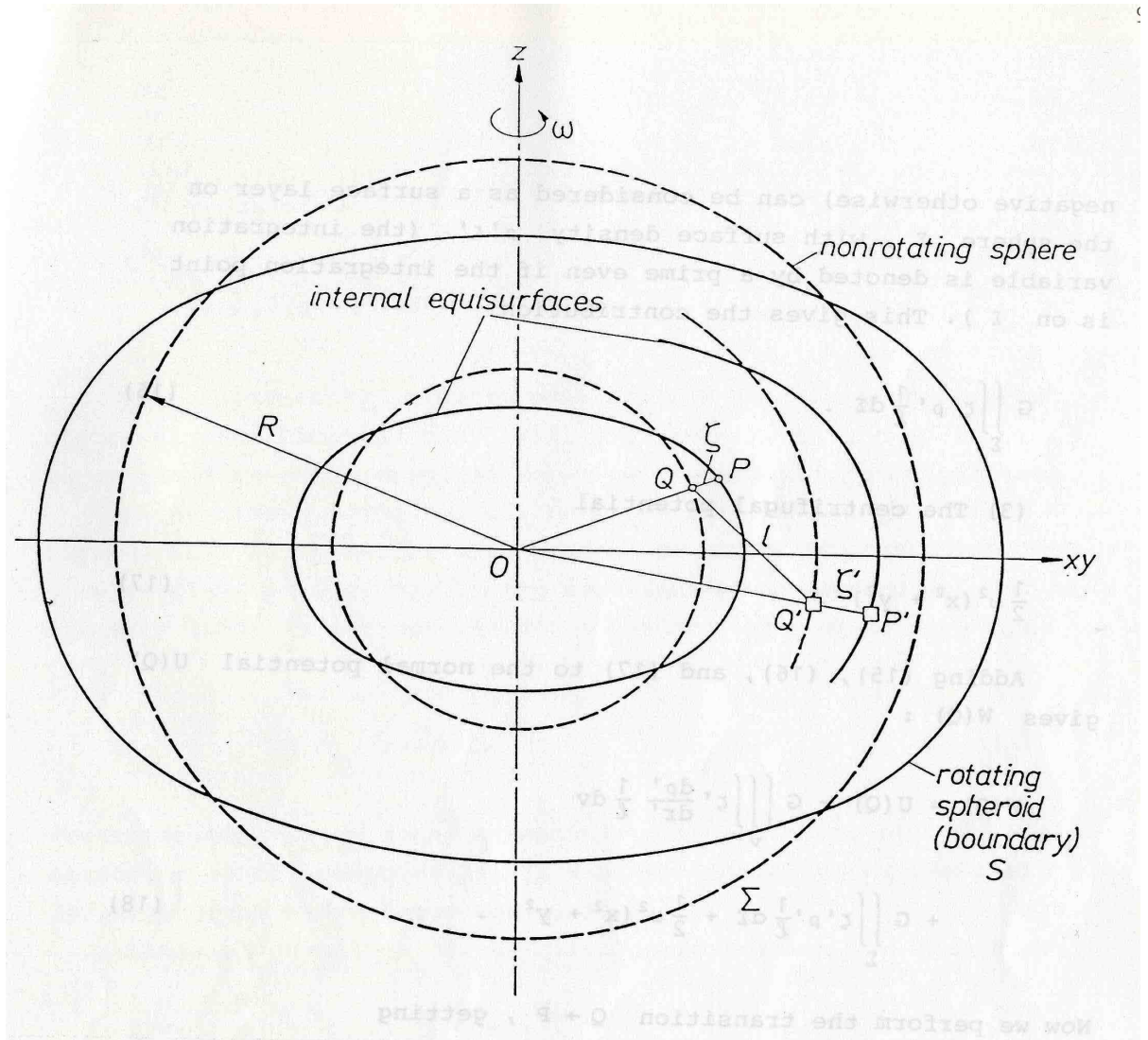


Fig. 1: La Rotation déforme une sphère en un sphéroïde

Soient  $U$  le potentiel de pesanteur "normal" de la configuration sphérique et  $W$  celui de la configuration actuelle. Le potentiel  $U$  est purement gravitationnel (non rotationnel), alors que  $W$  inclut la force centrifuge.

L'effet de changement de la configuration sphérique à celle de sphéroïde consiste en trois parties :

- (1) L'élément de volume  $dv$ , contenant la densité  $\rho' = \rho(r')$  est déplacé de



$Q'$  à  $P'$ . Alors  $\rho'$  est maintenant à  $P$  alors que la nouvelle densité au point  $Q'$  est :

$$\rho' - \frac{\partial \rho'}{\partial r'} \zeta'$$

alors l'effet total du changement du potentiel au point  $Q$  est :

$$- G \iiint_v \zeta' \frac{\partial \rho'}{\partial r'} \frac{1}{l} dv \quad (15)$$

Voir la Fig.1 pour le sens de  $l$ ,  $r'$  et  $\zeta'$ ,  $G$  désigne la constante gravitationnelle et  $v$  le volume de  $\Sigma$ .

(2) L'effet du "gonflement" (positif si  $S$  est au dessus de  $\Sigma$ , négatif autrement) peut être considéré comme une surface couche sur la sphère  $\Sigma$ , avec une densité surfacique  $\rho' \zeta'$  (la variable d'intégration est notée par prime même si le point d'intégration est sur  $\Sigma$ ). Ce-ci donne la contribution :

$$- G \iint_{\Sigma} \zeta' \rho' \frac{1}{l} d\Sigma \quad (16)$$

(3) Le potentiel centrifuge :

$$\frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) \quad (17)$$

Ajoutant (15), (16), et (17) au potentiel normal  $U(Q)$  donne  $W(Q)$  :

$$W(Q) = U(Q) - G \iiint_v \zeta' \frac{\partial \rho'}{\partial r'} \frac{1}{l} dv + G \iint_{\Sigma} \zeta' \rho' \frac{1}{l} d\Sigma + \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) \quad (18)$$

Maintenant, nous faisons le passage de  $Q \rightarrow P$ , en obtenant :

$$W(P) = W(Q) + \frac{\partial W}{\partial \zeta} \zeta = W(Q) - g\zeta \quad (19)$$

Avec la définition des équi-surfaces,  $W(P)$  et  $U(Q)$  sont des fonctions de  $r$ , le rayon vecteur de la sphère passant par  $Q$ , qui est identique au rayon vecteur moyen de l'équi-surface passant par  $P$ . Alors :

$$W(P) - U(Q) = v(r) \quad (20)$$

est une petite fonction de  $r$  seulement, dont on peut supposer qu'elle est stable.

Combinant toutes ces équations, nous obtenons :

$$- g\zeta - G \iiint_v \zeta' \frac{\partial \rho'}{\partial r'} \frac{1}{l} dv + G \iint_{\Sigma} \zeta' \rho' \frac{1}{l} d\Sigma + \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) - v(r) = 0 \quad (21)$$

Cette équation intégrale fondamentale en  $\zeta$  a été obtenue rigoureusement dans

(Lichtenstein, 1933, pp.97-101). Notons que ce-ci étend la configuration sphérique symétrique originale.

Lichtenstein (1933, p. 22) a aussi montré que les figures d'équilibre doivent être symétriques par rapport au plan équatorial ( le plan  $xy$  de la Fig.1). Si de plus, on assume la symétrie rotationnelle (ce qui n'est pas nécessaire mais naturel),  $\zeta$  doit avoir la forme :

$$\zeta = \sum_0^{+\infty} \zeta_{2n} P_{2n}(\cos\theta) \quad (22)$$

contenant seulement les termes zonaux harmoniques pairs. (L'existence des zonaux harmoniques impairs dans le potentiel est une autre indication de la déviation de la terre d'un équilibre hydrostatique!).

Limitons nous à la première approximation, nous avons alors :

$$\zeta = \zeta_0(r) + \zeta_2(r) P_2(\cos\theta)$$

Celle-ci est substituée dans (21). Maintenant les intégrations peuvent être faites, prenant en compte l'orthogonalité des harmoniques sphériques. Nous trouvons alors que  $\zeta_0(r)$  peut être choisi nul en prenant :

$$\zeta_0(r) = \frac{1}{3} \omega^2 r^2 \quad (23)$$

Alors que pour  $\zeta_2$  nous obtenons l'équation intégrale :

$$4\pi G \frac{\zeta_2(r)}{r^2} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' - \frac{4\pi G}{5r^3} \int_0^r \rho(r') d [r'^4 \zeta_2(r')] + \\ - \frac{4\pi G r^2}{5} \int_r^R \rho(r') d \left[ \frac{\zeta_2(r')}{r'} \right] + \frac{1}{3} \omega^2 r^2 = 0$$

qui est facilement visiblement pour être identique à (9). Ce-ci donne une autre méthode de la détermination de l'équation de Clairaut.

#### 4 LA GÉOMÉTRIE DES SURFACES D'ÉQUILIBRE

L'équation (1) de Clairaut en  $f$  l'aplatissement le paramètre géométrique de base est une équation différentielle homogène.

Les équations différentielles homogènes (avec second membre nul) avec variable indépendante  $t$ , le temps, correspondent au mouvement libre, à l'opposé du mouvement forcé. Dans notre cas, la variable indépendante est le rayon  $r$  plutôt que le temps, mais l'argument peut indiquer que la géométrie des équi-surfaces pour les figures d'équilibres semble avoir une autonomie

considérable.

Cette idée a été complètement investie dans le livre fondamental (Wavre, 1932). Depuis elle était un peu connue par la communauté scientifique anglophone, nous présentons brièvement les grandes lignes de la théorie de Wavre de la stratification des figures d'équilibre.

#### 4.1 Stratification des Equi-surfaces

Soit  $S(t)$  désignant l'ensemble des équi-surfaces (surfaces de densité constante et de potentiel comme constant) fonction d'un paramètre  $t$  (il n'y a pas de danger de confusion avec le temps!).

Le paramètre  $t$  paramètre les équi-surfaces individuelles et peut, en principe, être sélectionné de plusieurs manières. Précédemment, nous avons paramétré les équi-surfaces par son rayon moyen  $r$ , mais dans la théorie de Wavre, il est plus convenient de prendre comme paramètre  $t$  le demi-petit axe de l'équi-surface sphéroïdale en considération. (Ce-ci est bien connu puisque la coordonnée ellipsoïdale  $u$  a aussi cette propriété, voir (Heiskanen and Moritz, 1967, p.40)). Pour la surface limite "libre"  $S$  on prend  $t = 1$  telque  $S = S(1)$ .

Nous assumons aussi la symétrie rotationnelle autour l'axe  $z$ , sachant aussi que la stratification doit être aussi symétrique par rapport au plan équatorial (invariance pour  $z \rightarrow -z$ ). Alors ; nous n'avons pas de dépendance en longitude  $\lambda$ , comme coordonnée longitudinale, nous prenons comme paramètre  $\theta$  qui paramètre les lignes verticales comme indiqué dans la Fig.(2). Comme les équi-surfaces  $t = cont.$  ne sont pas parallèles, leur distance infinitésimale  $dn$  diffère en général de  $dt$ . Nous posons :

$$\frac{dn}{dt} = N(t, \theta) \quad (24)$$

où la fonction  $N$  est inconnue *a priori*. Notons que  $N$  est toujours positive (de la géométrie), sans dimensions (par notre choix des unités) et égale à 1 sur l'axe  $\theta = 0$ .

Comme par définition, le potentiel  $W$  dépend de  $t$  seulement, nous avons pour la pesanteur :

$$g = -\frac{\partial W}{\partial n} = -\frac{dW}{dt} \frac{dt}{dn} = -\frac{1}{N} \frac{dW}{dt} \quad (25)$$

Alors :

$$\frac{dW}{dt} = -gN = W'(t) \quad (26)$$

est aussi fonction seulement de  $t$ , même si  $g$  et  $N$  dépendent aussi de  $\theta$ . En

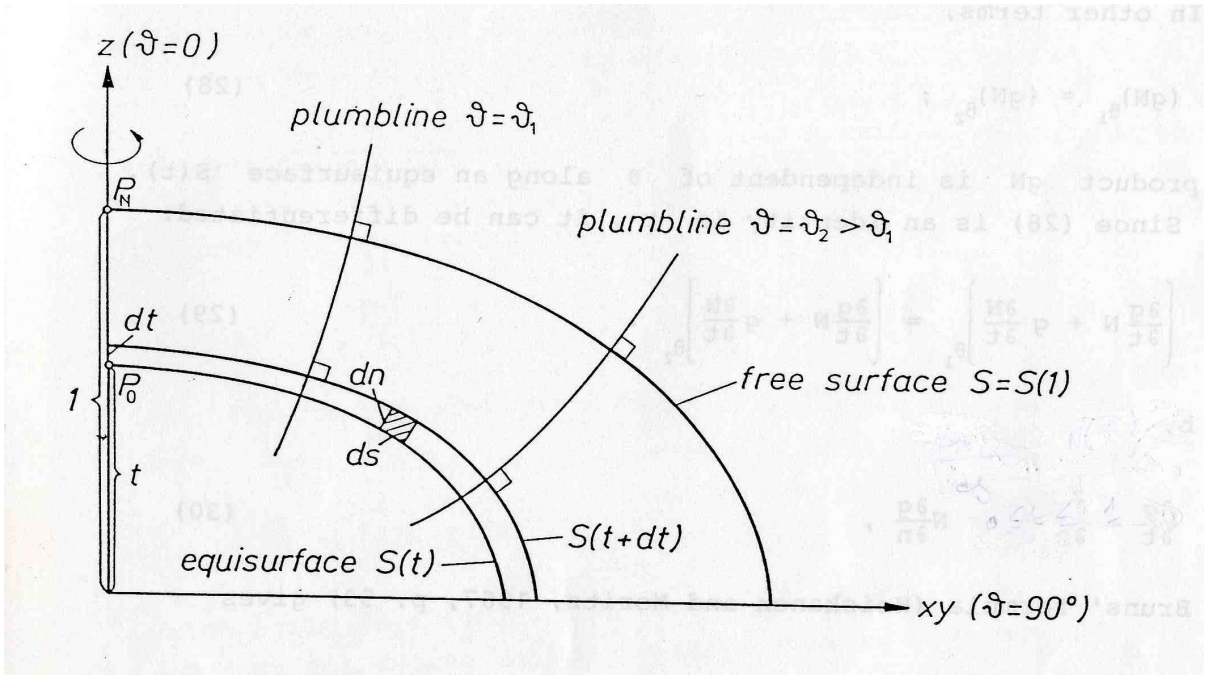


Fig. 2: La Géométrie de stratification

d'autres termes :

$$(gN)_{\theta_1} = (gN)_{\theta_2} \quad (27)$$

le produit  $gN$  est indépendant de  $\theta$  sur l'équi-surface  $S(t)$ .

Comme (27) est une identité en  $t$ , elle peut être différenciée :

$$\left( \frac{\partial g}{\partial t} N + g \frac{\partial N}{\partial t} \right)_{\theta_1} = \left( \frac{\partial g}{\partial t} N + g \frac{\partial N}{\partial t} \right)_{\theta_2} \quad (28)$$

Maintenant avec (24) :

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial n} \frac{dn}{dt} = N \frac{\partial g}{\partial n} \quad (29)$$

et la formule de Bruns (Heiskanen and Moritz, 1967, p.53) donne :

$$\frac{\partial g}{\partial n} = -2Jg + 4\pi G\rho - 2\omega^2 = -2Jg - f \quad (30)$$

appelant avec Wavre :

$$f = -4\pi G\rho + 2\omega^2 \quad (\equiv \Delta W!) \quad (31)$$

la "densité transformée"; ce n'est autre que l'application de l'opérateur de Laplace au potentiel de la pesanteur  $W$ , et le lecteur reconnaîtra l'équation de Poisson ( $\Delta W = -4\pi G\rho + 2\omega^2$ ). Dans (30),  $J$  désigne la courbure moyenne des équi-surfaces.

Substituant (30) dans (29) et le résultat dans (28), nous obtenons après quelques calculs élémentaires, en utilisant aussi (25), la formule fondamentale de Wavre :

$$\frac{f(t)}{W'(t)} = \frac{\left(2JN - \frac{\partial \text{Log}N}{\partial t}\right)_{\theta_2} - \left(2JN - \frac{\partial \text{Log}N}{\partial t}\right)_{\theta_1}}{(N^2)_{\theta_2} - (N^2)_{\theta_1}} \quad (32)$$

Cette équation est remarquable du fait qu'elle donne une nette séparation entre la géométrie et la physique de l'équilibre des surfaces : le membre de gauche, contenant les quantités physiques comme la densité  $\rho$  et le potentiel  $W$ , dépend seulement de  $t$ , alors que le membre de droite dépend seulement de la géométrie de la stratification ( $J, N$ ) et il est indépendant de la distribution de la densité !

## 4.2 Le Théorème de Wavre

Soit pour le membre à gauche de (32) :

$$\Psi(t) = \frac{f(t)}{W'(t)} \quad (33)$$

Alors (29), utilisant (30) et (33), peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial t} = -2JN + \Psi N^2 \quad (34)$$

qui est encore une fonction seulement de la géométrie de stratification et ne dépend pas de la densité ! Ce-ci est une directe conséquence de la définition (33) et de la remarquable propriété de (32) toute juste citée.

L'équation (34) est vérifiée pour tout  $\theta$ , et en particulier pour  $\theta = 0$ , sur l'axe de rotation. Alors on peut l'intégrer le long de cet axe de  $P_N$  à  $P_0$  (2) :

$$\int_{P_N}^{P_0} \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial t} dt = \int_1^t (-2JN + \Psi N^2) dt = \text{Log}g_0 - \text{Log}g_N \quad (35)$$

de façon que :

$$g_0 = g_N \exp \left[ \int_1^t (-2JN + \Psi N^2) dt \right] = g(t, 0) \quad (36)$$

où  $g_N = g(1, 0)$  désigne la pesanteur au pôle.

Maintenant (27), avec  $\theta_1 = 0$  et  $\theta_2 = \theta$ , ensemble avec (36) donnent :

$$g(t, \theta) = \frac{1}{N(t, \theta)} g(t, 0) = \frac{g_N}{N(t, \theta)} \exp \left[ \int_1^t (-2JN + \Psi N^2) dt \right] \quad (37)$$

Notons que  $N(t, 0) = 1$  comme nous l'avons remarqué. Finalement (33) et (26)

donnent :

$$f(t) = -\Psi(t)N(t, \theta)g(t, \theta) \quad (38)$$

et aussi la densité  $\rho(t)$  par (31).

Notons la vraie remarquable structure logique de ces formules : la physique, spécialement la distribution de la densité  $\rho(t)$ , est déterminée uniquement par la géométrie de la stratification. En effet, étant donné la géométrie  $(J, N)$ , on peut calculer  $\Psi(t)$  par (32) et (33). Alors la pesanteur  $g(t, \theta)$  est obtenue par (37), et finalement la densité  $\rho$  par (38) et (31). Les seules constantes qu'il faut donner en addition à l'ensemble des surfaces  $S(t)$  sont la vitesse angulaire  $\omega$  et la valeur de la pesanteur au pôle  $g_P$  qui cependant est déterminée par  $\omega$  et la masse totale  $M$  (éléments de Stokes), utilisant la théorie du champ du potentiel extérieur.

Alors nous avons :

**Le théorème de Wavre :** *La physique de l'équilibre des figures (la densité  $\rho$ , la pesanteur  $g$ ) est complètement déterminée par la géométrie de la stratification, c'est-à-dire, l'ensemble des équi-surfaces  $S(t)$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) ensemble avec la masse totale  $M$  et la vitesse angulaire  $\omega$ .*

### 4.3 la Stratification Sphérique Comme Exception

Pour la stratification sphérique, le théorème de Wavre ne peut pas s'appliquer vu que le membre à droite de (32) devient  $0/0$ , telque  $\Psi(t)$  est non définie.

En effet, nous avons vu que une configuration d'équilibre sphérique non rotative admet des lois de densité arbitraires ( $\rho$  positive et non décroissante vers le centre). La terre actuelle est proche à une stratification sphérique telle que le théorème de Wavre, bien que théoriquement applicable, n'est pas "stable" : une petite variation de la configuration géométrique peut entraîner un large changement de la loi de densité.

Cependant, la distribution de la densité de la terre peut être déterminée seulement empiriquement à partir de la séismologie, les oscillations libres, etc...

### 4.4 L'Impossibilité d'une Stratification Ellipsoïdale Pure

Wavre (1932, p.60) a donné aussi une élégante version de la démonstration de Pizzetti (1913 ; p. 193) qu'une famille d'équi-surfaces strictement ellipsoïdiques  $S(t)$  est impossible, pouvu que la distribution de densité soit hétérogène (ça revient à Hamy en 1887). Les figures d'équilibre d'ellipsoïdes homo-

gènes - ellipsoïdes de Mac Lauren et Jacobi - le sont bien sûr, mais sans intérêt géodésique.

Dans le paragraphe 6., nous verrons que même les ellipsoïdes équipotentielles (Heiskanen et Moritz, 1967, sec. 2-7) ne peuvent pas être des figures d'équilibre. Ce-ci a été mentionné par Karl Ledersteger. En effet, il faudrait noter ici que Ledersteger était le dernier grand géodésien qui s'était occupé lui-même sérieusement et profondément de la théorie de Wavre, ce-ci devrait être reconnu même si on n'est pas préparé de lui suivre sur tout le chemin.

#### 4.5 Une Autre Méthode de la Détermination de l'Equation de Clairaut

Bien que rigoureusement, les équi-surfaces sphéroïdes ne sont pas des ellipsoïdes, ils le sont en approximation linéaire (en  $f$ ). Ainsi l'équation de Wavre (32) peut être utilisée pour une détermination élégante de l'équation de Clairaut. Choisissons  $\theta_1 = 0, \theta_2 = 90^\circ$  et écrivons en notant que  $N(t, 0) = 1$

$$g(t, 0) = g_P(t), \quad N(t, 90^\circ) = N_E(t) \quad (39)$$

$$J(t, 0) = J_P(t), \quad J(t, 90^\circ) = J_E(t)$$

Les équi-surfaces sont (approximativement) des ellipsoïdes de demis axes  $a(t)$  et  $b(t) = t$ , telsque :

$$a(t) = \frac{1}{1-f} \cong 1 + f(t) \quad (40)$$

Nous avons aussi :

$$N_E(t) = \frac{da}{dt} = a'(t) \cong f'(t) \quad (41)$$

et les formules de l'ellipsoïde conventionnel donnent pour la courbure moyenne en approximation linéaire :

$$J_P = \frac{1}{t}(1-2f), \quad J_E = \frac{1}{t} \quad (42)$$

telle que (32), avec (31), devient facilement :

$$\frac{4\pi G\rho - 2\omega^2}{g_P(t)} = \frac{-t^2 f'' + 6f}{2t^2 f' + 2tf}$$

ou

$$(2t^2 f' + 2tf)(4\pi G\rho - 2\omega^2) = (-t^2 f'' + 6f)g_P(t) \quad (43)$$

Correspondant à notre approximation, nous négligeons le produit  $f\omega^2$  (ce-ci élimine  $\omega^2$  de nos prochains calculs) et prenons  $g_P(t)$  sphérique :

$$g_P(t) = \frac{4\pi}{3} GtD(t) \quad (44)$$

une formule bien connue, égale à  $Gm(t)/t^2$ , où  $m(t)$  désigne la masse à l'intérieur de la sphère de rayon  $t$ ,  $D(t)$  est la densité moyenne équation (4). Alors (43) se réduit à :

$$3\rho(2t^2 f' + 2tf) = tD(-t^2 f'' + 6f) \quad (45)$$

à partir de laquelle la formule de Clairaut (1) ensuit immédiatement (avec  $t \cong r$  dans notre approximation).

## 4.6 Les Remarques en Conclusion

L'équation (32) est vérifiée pour  $\theta_1$  et  $\theta_2$  arbitraires. Si nous remplaçons  $\theta_2$  par  $\theta_3$ , nous obtenons la relation géométrique pure :

$$\begin{aligned} & \frac{\left(2JN - \frac{\partial \text{Log}N}{\partial t}\right)_{\theta_3} - \left(2JN - \frac{\partial \text{Log}N}{\partial t}\right)_{\theta_1}}{(N^2)_{\theta_3} - (N^2)_{\theta_1}} \\ &= \frac{\left(2JN - \frac{\partial \text{Log}N}{\partial t}\right)_{\theta_2} - \left(2JN - \frac{\partial \text{Log}N}{\partial t}\right)_{\theta_1}}{(N^2)_{\theta_2} - (N^2)_{\theta_1}} \end{aligned} \quad (46)$$

qui est une condition nécessaire pour toutes les stratifications des figures d'équilibre.

Est-ce que cette relation est aussi suffisante ? Si c'est vrai, alors on pouvait détacher la couche supérieure de toute équi-surface interne  $S(t)$ , voir Fig.2. Pour la figure "réduite" restante limitée par  $S(t)$ , l'équation (46) continue d'être vérifiée pour toute équi-surface de ses équi-surfaces internes et la figure réduite pourrait être aussi une possible figure d'équilibre.

C'est le "prinzip der Entblätterung" de Ledersteger (1969, p.536) (principe de détachement des couches délimitées par deux équi-surfaces). Pour des figures d'équilibre homogènes (ellipsoïdes de Mac Laurin), ce principe est vérifié même dans ce cas, de telles couches sont délimitées par des ellipsoïdes géométriquement similaires et il est connu qu'un tel "ellipsoïde homeoid" n'exerce pas d'attraction dans son intérieur ; voir (Kellogg, 1929, p.22) ou (Chandrasekhar, 1969, p.39).

Pour des figures hétérogènes, cependant ce principe ne tient pas (Voss, 1965). Ce-ci montre que (46) est seulement nécessaire mais non suffisante. Alors, avant d'appliquer la procédure de Wavre décrite par (37) et (38), on doit premièrement être sûr que la stratification donnée correspond réellement à une possible figure d'équilibre, ce qui n'est pas chose évidente.

La raison profonde qui fait que la théorie de Wavre est "incomplète" dans ce sens semble être de fait qu'il utilise seulement l'équation de Poisson "locale"



(31) mais non la condition globale que le potentiel gravitationnel  $V$  (potentiel de pesanteur  $W$  moins le potentiel centrifuge) doit être harmonique en tout lieu à l'extérieur de la surface limite et tend vers zéro comme  $GM/r$  pour  $r \rightarrow +\infty$ . Alors la théorie de Wavre continue de tenir bon si  $S$  est délimitée par une configuration de masse symétrique rotationnelle (comme type un anneau équatorial de Saturne). Alors, cependant, nous ne parlons plus de figures libres d'équilibre. (En effet, la couche entre  $S(t)$  et  $S(1)$  est une telle configuration de masse symétrique rotationnelle externe pour la figure limitée par  $S(t)$ !).

Un dernier mot de la relation entre l'approche de Wavre et celle de Clairaut - Liapunov - Lichtenstein décrite dans le paragraphe 3. En un sens, les deux approches sont "dialectiquement opposées". Wavre part à partir d'une stratification (la géométrie) et détermine la distribution de densité correspondante (la physique), tandis que Lichtenstein commence à partir de la donnée d'une distribution de densité (qui est initialement sphérique) et détermine la configuration ou la stratification qui résulte d'une "petite" rotation  $\omega$ . Et Wavre détermine la physique du problème, alors que Lichtenstein détermine la géométrie à partir de la physique. Aussi, pour Lichtenstein, la configuration sphérique est le point de départ, alors pour Wavre c'est une singularité 0/0!

L'approche de Wavre est aussi décrite dans les livres (Baeschlin, 1948) et (Ledersteger, 1969) tandis que le livre de base en anglais (Jardetzky, 1958) ne la présente pas, même s'il montre une méthode d'approximation due aussi à Wavre ("procédé uniforme") qui étend, par un astuce ingénieux mais compliqué, à éviter le problème de convergence pour certaines séries de harmoniques sphériques. Nous n'allons pas traiter ce-ci maintenant parceque l'auteur pense que ce problème peut être attaqué par une méthode assez simple comme nous allons le voir dans la section (29.6).

## 5 ENERGIE DE POTENTIEL STATIONNAIRE

Dans des domaines variés de la physique, l'équilibre est associé avec une valeur stationnaire de l'énergie du potentiel (maximum ou minimum, suivant le signe). Liapunov et Poincaré ont traité de ce point de vue des figures d'équilibre homogènes; un traitement moderne est trouvable dans le livre (Macke; 1967, p.543). L'approche de Macke a été généralisée à des figures d'équilibre hétérogènes (terrestres) (Macke et al., 1964; Voss, 1965, 1966). Cette approche est intéressante parcequ'elle reflète la pensée typicale et les méthodes mathématiques des théories modernes de la physique.

## 5.1 L'Energie de Potentiel

L'énergie gravitationnelle d'une particule matérielle de masse  $m$  dans un champ de potentiel  $V$  est  $mV$ , et pour un système de particules c'est :

$$E = \sum m_i V_i \quad (47)$$

le signe (+ ou -) est conventionnel.

Ce-ci est vérifié pour un champ de potentiel externe. Si le champ est produit par l'attraction gravitationnelle mutuelle des particules elles-mêmes :

$$V_i = G \sum_j \frac{m_j}{l_{ij}} \quad (j \neq i) \quad (48)$$

alors (47) donne :

$$G \sum_{i,j} \frac{m_i m_j}{l_{ij}}$$

Chaque terme est compté deux fois, cependant (intervenant  $i$  et  $j$ ), tel que on doit diviser par 2, en obtenant :

$$E_V = \frac{1}{2} G \sum_i \sum_j \frac{m_i m_j}{l_{ij}} \quad (j \neq i) \quad (49)$$

voir aussi (Kellogg, 1929 ; pp. 79-81) ou (Poincaré, 1903, pp. 7-8).

L'analogie continu de (49) est :

$$E_V = \frac{1}{2} G \iiint_V \iiint_V \frac{\rho(\underline{x}) \rho'(\underline{x}')}{\|\underline{x} - \underline{x}'\|} dv dv' \quad (50)$$

avec les notations habituelles  $\underline{x}, \underline{x}'$  les vecteurs positions ;  $dv, dv'$  les éléments volumes, et  $l = \|\underline{x} - \underline{x}'\|$ . Une autre forme de (50) est :

$$E_V = \frac{1}{2} \iiint_V V \rho dv \quad (51)$$

où  $V$  est le potentiel gravitationnel usuel. En comparant avec (47), on note le facteur  $1/2$  reflétant le fait que  $E_V$  est produit par un champ interne créé par les éléments de masse  $dm = \rho dv$  elles mêmes.

Pour la partie centrifuge, nous obtenons :

$$E_\Phi = \sum_i m_i \Phi_i = \iiint_V \Phi \rho dv \quad (52)$$

en accord avec (47), dès que le potentiel centrifuge  $\Phi$  agit comme un champ

extérieur.

L'énergie potentielle du potentiel de pesanteur  $W = V + \Phi$  est alors la somme de (51) et (52) :

$$E_W = \int \left( \frac{1}{2}V + \Phi \right) \rho dv \quad (53)$$

utilisant une simple intégrale pour la convenance des notations.

## 5.2 Les fonctions de Dirac et Heaviside

Rappelons les définitions de base de la fonction delta de Dirac :

$$\begin{aligned} \delta(x) &= 0 \quad \text{excepté pour } x = 0 \\ \delta(0) &= 1 \quad \text{de telle manière que} \end{aligned} \quad (54)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (55)$$

C'est une étrange fonction mais elle est très utile et très connue en physique.

Son intégrale est la fonction escalier de Heaviside :

$$\theta(x) = \int_{-\infty}^x \delta(x') dx' \quad (56)$$

De (54) et (55), on déduit immédiatement que :

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x < 0 \end{cases} \quad (57)$$

Pour  $\theta(0)$  on prendra la valeur 1/2.

De (56), on déduit la relation de base :

$$\theta(x) = \frac{d\theta(x)}{dx} = \theta'(x) \quad (58)$$

## 5.3 Une Remarquable Expression de la Densité

Assumons que le corps consiste en  $n$  couches délimitées par les surfaces  $S_k$  et  $S_{k+1}$  Fig.(3). La densité pour chaque couche est constante, qu'on note dans notre cas par  $\rho_{k+1}$ . Supposons que la surface  $S_k$  a pour équation :

$$f_k(\underline{x}) = 0 \quad (59)$$

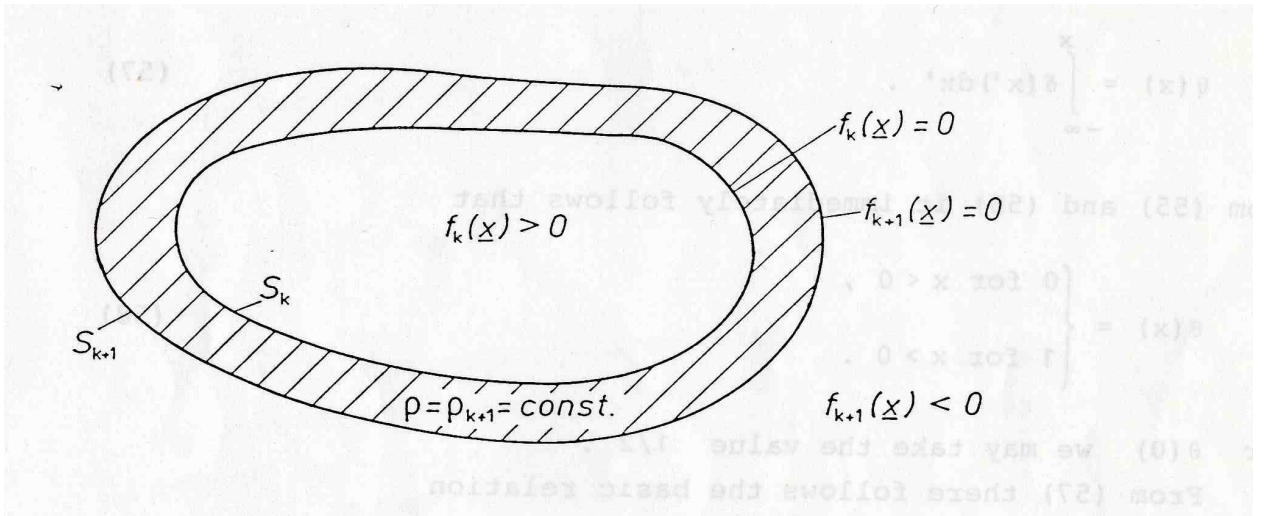


Fig. 3: Une couche à densité constante

et que  $f_k$  soit une fonction monotone avec :

$$f_k(\underline{x}) > 0 \quad \text{à l'intérieur de } S_k \quad (60)$$

(sinon on change de signe de  $f_k$  !).

Alors la densité en tout point avec la stratification du corps peut être décrite par une seule expression :

$$\rho(\underline{x}) = \sum_{k=1}^n (\rho_k - \rho_{k+1}) \theta[f_k(\underline{x})] \quad (61)$$

Le lecteur est invité à vérifier ce-ci sur la base de (57) et (60). L'équation (61) est vérifiée en tenant compte que  $\rho_{n+1} = 0$  sachant que la densité est nulle à l'extérieur de la surface  $S = S_n$ .

## 5.4 Variation de l'Energie de Potentiel

Cherchons l'extrémum de l'énergie du potentiel  $E = E_W$  telle qu'est donnée par (53) :

$$E = \int \left( \frac{1}{2} V + \Phi \right) \rho dv \quad (62)$$

où  $\rho$  est donnée par (61). La condition de bord est que le volume compris entre les surfaces  $S_k$  (Fig.29.3) reste inchangé :

$$v_k = \int_{S_k} dv = const. \quad (63)$$

Cette équation reste constante en la multipliant par  $\rho_k - \rho_{k+1}$  ce qui donne :

$$M_k = \int_{S_k} (\rho_k - \rho_{k+1}) dv = \int (\rho_k - \rho_{k+1}) \theta[f_k(\underline{x})] dv = \text{const.} \quad (64)$$

Cette expression a la dimension d'une masse mais sans aucun sens physique. Notons cependant que le facteur  $\theta[f_k(\underline{x})]$  nous a permis d'étendre formellement le volume d'intégration à l'espace entier parceque l'intrégrant s'annule à l'extérieur de  $S_k$  car on a là  $f_k < 0$ .

Introduisant les multiplicateurs de Lagrange  $\lambda_k$ , on doit alors minimiser (ou maximiser) :

$$E - \sum_{k=1}^n \lambda_k M_k$$

Ce-ci mène à la condition variationnelle :

$$\delta \left[ E - \sum_{k=1}^n \lambda_k M_k \right] = 0 \quad (65)$$

$$\int (V + \Phi) \delta \rho dv - \sum_k \lambda_k \delta M_k = 0 \quad (66)$$

Notons que nous avons varié la densité  $\rho$  par  $\delta \rho$  et que, comparé à (62), le facteur 1/2 semble être oublié. Cependant par (50),  $E_V$  est une fonction quadratique de  $\rho$ , qui introduit en différentiant le facteur usuel 2, lequel combiné avec 1/2 donne 1. Avec le potentiel de pesanteur  $W = V + \Phi$  ce-ci se réduit à :

$$\int W \delta \rho dv - \sum_{k=1}^n \lambda_k \delta M_k = 0 \quad (67)$$

Maintenant on doit exprimer les variations de la densité  $\delta \rho$  par  $\delta f_k(\underline{x})$  dès que  $\delta \rho$  est causé par un changement dans les coordonnées de la surface seulement. Maintenant notre expression (61) vient à portée, nous avons :

$$\delta \theta[f_k(\underline{x})] = \theta'[f_k(\underline{x})] \delta f_k(\underline{x}) \quad (68)$$

où  $\theta'(x) = \delta(x)$  est la fonction delta par (58) ; on préfère la notation  $\theta'$  afin d'éviter la confusion avec la variation  $\delta$ .

Avec (68) tout est prêt : (61) donne  $\delta \rho$  et (64) donne  $\delta M_k$ . Alors (67) devient :

$$\int \left\{ \sum_{k=1}^n (\rho_k - \rho_{k+1}) (W(\underline{x}) - \lambda_k) \theta'[f_k(\underline{x})] \right\} \delta f_k(\underline{x}) dv = 0 \quad (69)$$

Les petites variations  $\delta f_k(\underline{x})$  sont arbitraires, alors l'intégrant entre les  $\{ \}$  doit

s'annuler :

$$\sum_{k=1}^n (\rho_k - \rho_{k+1})(W(\underline{x}) - \lambda_k)\theta'[f_k(\underline{x})] = 0 \quad (70)$$

Maintenant, il n'y a pas un danger de confusion, donc on peut utiliser le symbole standard  $\delta$  au lieu de  $\theta'$  pour la fonction delta de Dirac.

Par la définition (54),  $\delta[f_k(\underline{x})]$  s'annule partout sauf sur la surface  $S_k$ , où il est différent de zéro. Alors  $\delta[f_k(\underline{x})] \neq 0$  sur  $S_k$ , on doit avoir :

$$W(\underline{x}) = \lambda_k = \text{constant sur } S_k \quad (71)$$

ce qui signifie que les surfaces frontières  $S_k$  des régions de densité constante doivent être des surfaces équipotentielles.

Dans la limite  $n \rightarrow +\infty$  en densité continue nous recouvrons alors le fait de base que les surfaces de densité constante doivent être des surfaces de potentiel constant. Ce-ci est notre bien connue condition pour l'équilibre des figures.

Quoi de nouveau ? Précédemment, au paragraphe 2. nous avons obtenu cette condition de (5) à l'aide de la pression  $p$ , une quantité que nous n'avons jamais utilisée par la suite. Pour le goût de certains, il n'est pas très élégant d'introduire un concept auxiliaire qui joue le rôle de deus ex machina et disparaît de nouveau. Ici, nous avons déduit notre condition de base  $\rho = \text{const.} \iff W = \text{const.}$  du principe de l'énergie stationnaire, lequel est logiquement plus satisfaisant pour beaucoup de gens, spécialement en vue du fait que le principe du maximum ou du minimum joue un rôle fondamental en physique.

Un autre admirable fait : le multiplicateur de Lagrange  $\lambda_k$  admet une interprétation physique naturelle ; ce n'est rien que la valeur constante du potentiel  $W$  sur la surface  $S_k$ , voir (71).

## 5.5 Une Equation Intégrale Générale

Maintenant nous sommes aussi en position de donner une expression explicite des fonctions  $f_k(\underline{x})$  qui caractérisent les surfaces  $S_k$  : nous devons simplement poser :

$$f_k(\underline{x}) = W(\underline{x}) - \lambda_k \quad (72)$$

En effet, sur  $S_k$  nous avons  $f_k(\underline{x}) = 0$  utilisant (71), et à l'intérieur de  $S_k$  on a  $f_k(\underline{x}) > 0$  puisque  $W$  croît monotonement vers le centre. Alors (59) et (60) sont satisfaites.

Maintenant dans :

$$W(\underline{x}) = G \int \frac{\rho}{l} dv + \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) \quad (= V + \Phi) \quad (73)$$

on doit substituer (61) ensemble avec (72), en obtenant :

$$W(\underline{x}) = G \int \frac{dv}{l} \sum_{k=1}^n (\rho_k - \rho_{k+1}) \theta[W(\underline{x}') - \lambda_k] + \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) \quad (74)$$

avec  $l = \|\underline{x} - \underline{x}'\|$ . Ce-ci est une équation intégrale non linéaire en  $W(\underline{x})$  ; les multiplicateurs de Lagrange  $\lambda_k$  sont déterminés par (63) la condition de volume constant :

$$v_k = \int \theta[W(\underline{x}) - \lambda_k] dv \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (75)$$

Il est immédiat de faire  $n \rightarrow +\infty$  et performer la transition vers une distribution de masse continue, alors l'index  $k$  devient une variable continue  $u$  :

$$W(\underline{x}) = G \int \frac{dv}{l} \int_{u=0}^{+\infty} d\rho(u) \theta[W(\underline{x}') - \lambda(u)] + \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) \quad (76)$$

$$v(u) = \int \theta[W(\underline{x}) - \lambda(u)] dv \quad (77)$$

Sans doute, cette formulation de l'équilibre hydrostatique des figures est extrêmement élégante et générale. Voss( 1965, 1966) a essayé de résoudre cette équation par une expression en séries en termes de  $f$ ,  $f^2$ , etc. ( $f$  est l'applatissage). Les termes linéaires donnent encore une fois la théorie de Clairaut, essentiellement l'équation intégrale linéaire (21). Voss a aussi calculé les termes du second ordre, mais les détails sont très compliqués et ces termes peuvent être calculés plus directement comme nous allons le voir dans la prochaine section. Une autre application de l'approche de l'énergie de potentiel est trouvée dans (Chandrasekher et Roberts, 1963).

Donc l'importance capitale de la méthode décrite dans cette section est le concept et la théorie, mais c'est grand quand même.

## 6 LA THÉORIE DU DEUXIÈME ORDRE

Il est relativement simple à améliorer la théorie de Clairaut par les termes du second ordre, c'est-à-dire, de l'ordre de  $f^2$ , avec  $f$  l'applatissage. Ce-ci a été fait par plusieurs auteurs ; nous mentionnons seulement (Darwin, 1899), Wavre (1932), Kopal (1960), et (Lanzano ; 1982, ch2 à l'ordre trois), les précurseurs étant Airy en 1826 et Callandreau en 1889. Les formules données, par de Sitter (1924), sans corrections par Jeffreys (1953) sont maintenant considérées standards, voir (Jones, 1954) et seront aussi utilisées ici.

Une difficulté théorique réside dans l'usage de la série de Legendre pour  $1/l$ , voir ci-dessous les équations (80) et (90) qui ne peuvent pas être convergentes. Ce-ci a amené Wavre (1932) à introduire une méthode ingénieuse (procédé uniforme, déjà mentionné ci-dessus) qui marche uniquement avec les séries convergentes. Cette procédure compliquée n'est pas réellement nécessaire comme on va le voir ci-dessous. Notre approche, basée sur les développements récents de la compréhension de la continuité analytique (Moritz, 1980, secs. 6 et 7), est extrêmement simple et peut être nouvelle.

## 6.1 Le Potentiel Intérieur

Le potentiel gravitationnel en un point  $P$  à l'intérieur d'un corps limité par une surface  $S$  (Fig.4) est :

$$V(P) = \iiint G \frac{\rho}{l} dv = \iiint_{I_P} G \frac{\rho}{l} dv + \iiint_{E_P} G \frac{\rho}{l} dv = V_i(P) + V_e(P) \quad (78)$$

où  $I_P$  désigne l'intérieur de la surface  $S_P$  de densité constante (non nécessairement de potentiel constant!) passant par  $P$ , et  $E_P$  désigne son extérieur, soit la couche entre  $S_P$  et  $S$ .

Considérons premièrement :

$$V_i(P) = G \iiint_{I_P} \frac{\rho}{l} dv \quad (79)$$

Alors nous avons la série très connue de Legendre, voir (Heiskanen and Moritz, 1967, p. 33) :

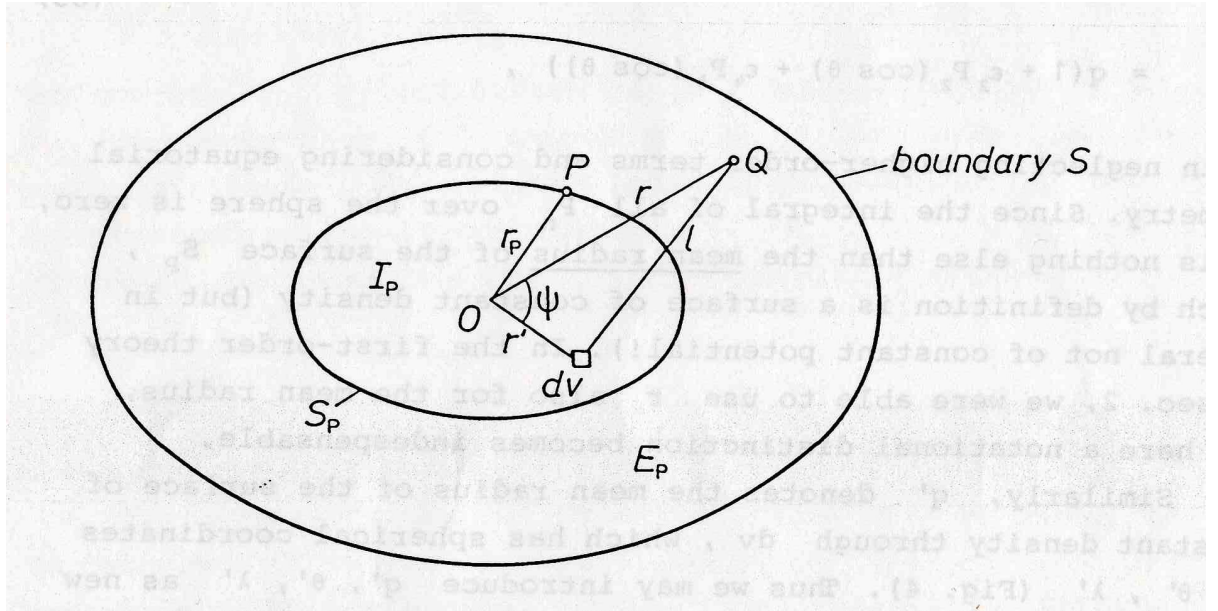
$$\frac{1}{l} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{r'^n}{r^{n+1}} P_n(\cos\psi) \quad (80)$$

qui converge si  $r' < r$ . Le problème est que pour  $r = r_P$  Fig.(4), cette condition de convergence peut être violée :  $r'$  doit être plus grand que  $r$ . La ruse est de quitter  $I_P$  et  $E_P$  mais de calculer  $V$  premièrement au point  $Q$  à l'extérieur de  $S_P$  pour laquelle  $r' < r$  est certainement toujours satisfaite. Alors nous calculons :

$$\begin{aligned} V_i(Q) &= G \iiint_{I_P} \frac{\rho}{l} dv = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{r^{n+1}} G \iiint_{I_P} \rho r'^n P_n(\cos\psi) dv \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{K_n}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta) = \frac{K_0}{r} + \frac{K_2}{r^3} P_2(\cos\theta) + \frac{K_4}{r^5} P_4(\cos\theta) \end{aligned} \quad (81)$$

en négligeant les termes de degré élevé. Ici  $r, \theta, \lambda$  sont les coordonnées sphériques usuelles (rayon vecteur, distance polaire et la longitude) du point  $Q$ .



Fig. 4: Illustration du calcul de  $V(P)$ 

Due à la symétrie rotationnelle, il n'a pas de dépendance explicite en longitude  $\lambda$ .

La surface  $S_P$  peut être écrite sous la forme :

$$\begin{aligned} r &= q \left( 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \epsilon_n P_n(\cos\theta) \right) = r(q, \theta) \\ &= q \left( 1 + \epsilon_2 P_2(\cos\theta) + \epsilon_4 P_4(\cos\theta) \right) \end{aligned} \quad (82)$$

de même négligeant les termes de haut degré et considérant la symétrie équatoriale. Comme l'intégrale de tous les  $P_n$  sur la sphère vaut zéro,  $q$  n'est autre que le rayon moyen de la surface  $S_P$ , qui par définition est une surface de densité constante (mais en général non de potentiel constant). Dans la théorie du premier ordre de la section 2., on avait la possibilité d'utiliser  $r$  aussi pour le rayon moyen, mais ici une notation distincte devient indispensable.

Similairement  $q'$  désigne le rayon moyen de la surface de densité constante passant par  $dv$ , qui a les coordonnées sphériques  $r', \theta', \lambda'$  Fig.(4). Alors nous devons introduire  $q', \theta', \lambda'$  comme nouvelles variables d'intégration. Ce-ci a l'avantage que :

$$\iiint_{I_P} = \iiint_{\sigma} \int_{r'=0}^r = \iiint_{\sigma} \int_{q'=0}^q \quad (83)$$

où  $q$ , correspondant à  $S_P$  par (82), est maintenant constante ;  $\sigma$  désigne comme usuelle la sphère unité.

Pour l'élément de volume, nous avons :

$$dv = r'^2 \sin\theta' dr' d\theta' d\lambda' = r'^2 dr' d\sigma \quad (84)$$

en introduisant l'élément  $d\sigma$  de la sphère unité comme indiqué. On a alors :

$$dr' d\theta' d\lambda' = J dq' d\theta' d\lambda' = \frac{\partial r'}{\partial q'} dq' d\theta' d\lambda' \quad (85)$$

en évaluant le déterminant jacobien  $J$ , utilisant aussi la forme (82) pour la relation :

$$r' = r(q', \theta') \quad (86)$$

Alors, par (83) et (85) :

$$G \iiint_{I_P} \rho r'^n P_n(\cos\psi) dv = G \int_{q'=0}^q dq' \rho(q') \iint_{\sigma} r'^n P_n(\cos\psi) \frac{\partial r'}{\partial q'} d\sigma \quad (87)$$

La densité  $\rho$ , par définition de  $q$ , dépend seulement de  $q$  (ou de  $q'$ ).

Nous développons maintenant  $r'^n$  en séries de la forme (82) (ce-ci est possible parce que les puissances des polynômes de Legendre  $P_n$  peuvent être exprimées comme combinaisons linéaires de  $P_k$ , cf (101) et on utilise les relations d'orthogonalité des  $P_n$ . Le résultat est (81) où :

$$K_n = K_n(q) \quad (88)$$

sont des fonctions seulement de  $q$ , le rayon moyen des  $S_P$ .

L'astuce logique qui fait que (81) est rigoureusement possible était de calculer  $V$  en un point  $Q$  "externe" Fig.(4). Il va par suite que  $V(Q)$  est une fonction analytique (harmonique) à l'extérieur et sur  $S_P$ . Par suite, l'expression (81) continue d'être vérifiée si nous

faisons le passage de  $Q$  à  $P$ . Alors aussi :

$$V_i(P) = \frac{K_0(q)}{r} + \frac{K_2(q)}{r^3} P_2(\cos\theta) + \frac{K_4(q)}{r^5} P_4(\cos\theta) \quad (89)$$

si maintenant  $r = r_P$ ,  $\theta = \theta_P$ .

Cet argument est basé sur la continuation analytique des séries harmoniques sphériques, cf (Moritz, 1980 ; pp.54-55). Le problème de convergence ne se pose pas puisque nous travaillons avec seulement des séries tronquées. Si le lecteur insiste, nous devons recourir au théorème de Runge (ibid., pp. 64-65) ; à n'importe quelle vitesse, regardant la convergence nous sommes maintenant dans le même bateau que Wavre (1932) avec son considérable très compliqué "pro-

cédé uniforme".

Maintenant nous appliquons le même astuce avec  $V_e(P)$  dans (78) : premièrement on évalue  $V(Q)$ , le potentiel gravitationnel de la couche entre  $S_P$  et  $S$  Fig.(4) au point  $Q$  vraiment à l'intérieur de la couche, telque toujours  $r' > r$  et les séries correspondantes à (80) :

$$\frac{1}{l} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{r^n}{r'^{n+1}} P_n(\cos\psi) \quad (90)$$

convergent toujours. Alors, on réalise la continuation analytique  $Q \rightarrow P$  avec le résultat :

$$V_e(P) = L_0(q) + r^2 L_2(q) P_2(\cos\theta) + r^4 L_4(q) P_4(\cos\theta) \quad (91)$$

analogue à (89).

Le champ potentiel gravitationnel total  $V$  en un point  $P$  avec les coordonnées  $r, \theta$  est la somme de (89) et (91), et le potentiel de pesanteur  $W$  est trouvé en ajoutant le potentiel centrifuge. Le résultat, en notation standard de Sitter (1924), doit être écrit :

$$W = \frac{4\pi}{3} q^3 G \rho_m \left[ D \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{2} \mu \frac{r^2}{q^3} \sin^2 \theta \right) - \frac{2}{5} \left( S \frac{q^2}{r^3} + T \frac{r^2}{q^3} \right) P_2(\cos\theta) \right] + \frac{4\pi}{3} q^3 G \rho_m \left[ \frac{12}{35} \left( P \frac{q^4}{r^5} + \frac{8}{9} Q \frac{r^4}{q^5} \right) P_4(\cos\theta) \right] \quad (92)$$

où :

$$\mu = \frac{\omega^2 R^3}{GMD} \quad (93)$$

est un paramètre sans dimensions et  $\rho_m$  désigne la densité moyenne de la terre. Les fonctions  $D = D(q)$ ,  $S = S(q)$ , ...,  $Q = Q(q)$  seront considérées plus tard.

## 6.2 Ellipsoïde et Sphéroïde

C'est un exercice élémentaire de calculer l'équation suivante, précise à l'ordre  $f^2$ , pour un ellipsoïde :

$$r = a \left( 1 - f \cos^2 \theta - \frac{3}{8} f^2 \sin^2 2\theta \right) \quad (94)$$

$a$  et  $f$  sont respectivement son demi-grand axe et son aplatissement. Pour un sphéroïde général on doit écrire :

$$r = a \left[ 1 - f \cos^2 \theta - \left( \frac{3}{8} f^2 + \kappa \right) \sin^2 2\theta \right] \quad (95)$$

telque  $\kappa$  désigne la déviation maximum (pour  $\theta = 45^\circ$ ) du sphéroïde par rapport à l'ellipsoïde qui a les mêmes demi-axes  $a$  et  $b$ . Allant de  $a$  au rayon moyen  $\beta$ , nous obtenons de (95) après un peu d'algèbre :

$$r = q \left[ 1 - \frac{2}{3} \left( f + \frac{23}{42} f^2 + \frac{4}{7} \kappa \right) P_2(\cos\theta) + \frac{4}{35} (3f^2 + 8\kappa) P_4(\cos\theta) \right] \quad (96)$$

qui représente (82) exprimée en termes de l'aplatissement  $f$  et du paramètre  $\kappa$  caractérisant la déviation du sphéroïde de l'ellipsoïde équiaxial. Avec de Sitter, nous trouvons que c'est plus pratique d'introduire "l'aplatissement réduit" :

$$f^* = f - \frac{5}{42} f^2 + \frac{4}{7} \kappa \quad (97)$$

qui se différencie de  $f$  seulement par les termes du second ordre tels qu'on peut écrire  $f^{*2} = f^2$ . Alors nous avons les expressions désirées :

$$\begin{aligned} D &= \beta^{-3} \int_0^\beta \delta \frac{d}{d\beta} \left[ \left( 1 + \frac{4}{15} f^2 \right) \beta^3 \right] d\beta \\ S &= \beta^{-5} \int_0^\beta \delta \frac{d}{d\beta} \left[ \left( f^* + \frac{2}{7} f^2 \right) \beta^5 \right] d\beta \\ T &= \int_\beta^1 \delta \frac{d}{d\beta} \left[ f^* + \frac{16}{21} f^2 \right] d\beta \\ P &= \beta^{-7} \int_0^\beta \delta \frac{d}{d\beta} \left[ \left( f^2 + \frac{8}{9} \kappa \right) \beta^7 \right] d\beta \\ Q &= \beta^2 \int_\beta^1 \delta \frac{d}{d\beta} [\kappa \beta^{-2}] d\beta \end{aligned} \quad (98)$$

où :

$$\delta = \frac{\rho}{\rho_m} = \frac{\text{densité}}{\text{densité moyenne de la terre}} \quad (99)$$

et :

$$\beta = \frac{q}{R} = \frac{\text{rayon moyen de } S_P}{\text{rayon moyen de la terre}} \quad (100)$$

sont des quantités sans dimensions ; en d'autres termes nous avons exprimé le rayon moyen  $\beta$  utilisant  $R$  le rayon moyen de la terre comme unité. Notant la variable d'intégration  $\beta'$  par  $\beta$  pour simplifier les notations avec pas de risque de confusion.

Utilisant le théorème du binôme, nous devons exprimer dans (92) les différentes puissances de  $r$  par (96) utilisant la formule très connue (à vérifier !) :

$$[P_2(\cos\theta)]^2 = \frac{1}{5} + \frac{2}{7} P_2(\cos\theta) + \frac{18}{35} P_4(\cos\theta) \quad (101)$$

Alors (92) devient (avec  $R$  comme unité) :

$$W = \frac{4\pi}{3}\beta^2 G\rho_m [A_0(\beta) + A_2(\beta)P_2(\cos\theta) + A_4(\beta)P_4(\cos\theta)] \quad (102)$$

où :

$$\begin{aligned} A_0(\beta) &= D \left(1 + \frac{1}{3}\mu + \frac{4}{45}f^2 + \frac{4}{45}f\mu\right) - \frac{4}{25}fS + \frac{8}{75}fT \quad (103) \\ A_2(\beta) &= -\frac{2}{3} \left[-D \left(f^* + \frac{6}{7}f^2\right) + \frac{3}{5}S \left(1 + \frac{4}{7}f\right) + \frac{3}{5} \left(1 - \frac{8}{21}f\right) + \frac{1}{2}D\mu \left(1 + \frac{20}{21}f\right)\right] \\ A_4(\beta) &= \frac{8}{35} \left[\left(-\frac{1}{2}f^2 - 4\kappa\right) D - \frac{9}{5}fS + \frac{6}{5}fT + \frac{3}{2}P + \frac{4}{3}Q + f\mu D\right] \end{aligned}$$

L'équation (102) avec (103) expriment le potentiel sur la surface de densité constante,  $\beta = \text{const.}$ , comme fonction de son rayon moyen  $\beta$  et de la distance polaire  $\theta$ .

Pour une référence future, nous calculons aussi :

$$A_4 + \frac{24}{35}fA_2 = \frac{8}{35} \left[\left(\frac{3}{2}f^2 - 4\kappa\right) D - 3fS + \frac{3}{2}P + \frac{4}{3}Q\right] \quad (104)$$

### 6.3 L'Equilibre Hydrostatique

Comme nous l'avons remarqué plusieurs fois, les précédents développements ne supposent pas que les surfaces de densité constante  $\rho$ ,  $\beta = \text{const.}$ , doivent être des surfaces de potentiel  $W$  constant, c'est-à-dire l'équilibre hydrostatique n'est pas présupposé. La seule supposition est la symétrie rotationnelle et la symétrie équatoriale de la stratification des surfaces  $\beta = \text{const.}$ , qui dévient légèrement de la stratification ellipsoïdique (le paramètre  $\kappa$  est supposé du second ordre  $f^2$ ).

Finalement maintenant, nous introduisons la condition d'équilibre hydrostatique. Alors  $W$  doit être constant sur les surfaces  $\beta = \text{const.}$ , qui implique que dans (102),  $A_2(\beta)$  et  $A_4(\beta)$  doivent être identiquement nuls car ils sont multipliés par une fonction de  $\theta$  :  $W$  doit être indépendant de  $\theta$ . Ce-ci donne :

$$A_2^H = 0 \quad (105)$$

et :

$$A_4^H = 0 \quad (106)$$

$A_2^H$  et  $A_4^H$  désignent  $A_2$  et  $A_4$  donnés par (103) pour le cas de l'équilibre hydrostatique.

L'équation (105) est essentiellement identique à (8) ou (9), mais en plus les termes du second ordre. Elle est traitée de la même manière, en arrivant à une équation différentielle du deuxième ordre en  $f$  (ou plus précisément  $f^*$ ), ce qui n'est autre que l'équation de Clairaut (1) complétée par les corrections du

second ordre.

L'équation (106) est nouvelle. En la traitant, ou mieux l'équation (104), comme nous avons traité (105), nous arrivons à une équation différentielle du second ordre en  $\kappa$ . C'est l'équation de Darwin qui, suivant (Jones, 1954, p. 12) peut s'écrire :

$$\beta^2 \frac{d^2 \kappa}{d\beta^2} + 6 \frac{\delta}{D} \frac{d\kappa}{d\beta} - \left( 20 - 6 \frac{\delta}{D} \right) \kappa = f^2 \left[ 3 \left( 1 - \frac{\delta}{D} \right) + \left( 1 - \frac{9}{2} \frac{\delta}{D} \right) \eta - \frac{1}{4} \left( 1 + 9 \frac{\delta}{D} \eta^2 \right) \right] \quad (107)$$

Ici  $D$  est une quantité sans dimensions définie par (98), qui est la densité moyenne à l'intérieur de l'équi-surface  $\beta = \text{const.}$  (notée par  $D$  dans (4)) divisée par  $\rho_m$  la densité moyenne de la terre, et :

$$\eta = \frac{\beta}{f} \frac{df}{d\beta} \quad (108)$$

est la fameuse variable de Radau utilisée pour obtenir (10) de (1).

Maintenant (107), à l'opposée de (1), est une équation différentielle non homogène si  $\rho \neq 0$ , de façon que la solution  $\kappa \equiv 0$  est impossible. Ce-ci confirme l'impossibilité pour une stratification ellipsoïdique pure (sec.29.4.4).

On peut aussi montrer (Wavre, 1932, p. 109) que  $\kappa$  (l'équivalent de  $E$  de Wavre) ne peut pas être nul sur la surface libre : sinon il serait identiquement nul à son intérieur, chose que nous avons vue juste être impossible. Alors, l'ellipsoïde équipotentiel de référence ne peut pas être une figure d'équilibre.

Pour une figure d'équilibre terrestre,  $\kappa$  doit être positif et décroissant vers le centre. Sur la surface de la terre, on a la valeur de Bullard (1948) :

$$\kappa = \kappa^H \cong 0.000\,000\,68 \quad (109)$$

voir aussi (Jones, 1954, p. 13). Ce-ci signifie que le sphéroïde d'équilibre se trouve sous l'ellipsoïde à une distance qui atteint son maximum  $a_\kappa \cong 4.3\,m$  à la latitude  $45^\circ$ . Ce effet est extrêmement petit mais néanmoins essentiel !.

## 7 LA TERRE RÉELLE ET L'ELLIPSOÏDE DE RÉFÉRENCE

Ni la terre ni l'ellipsoïde de référence (considérée comme équipotentielle ou ellipsoïde de niveau) est en équilibre hydrostatique. Pourtant, les équations du second ordre (102) et (103) se tiennent aussi dans ces cas, puisqu'elles ont été déterminées sans présupposer un équilibre hydrostatique.

Cependant, il est possible de trouver deux distributions de masse correspondantes, l'une pour l'équilibre et l'autre pour l'ellipsoïde de niveau ; pour lesquelles les valeurs de  $f^*$  sont égales pour chaque  $\beta$  :

$$f^* = f^{*H} \quad (110)$$

En d'autres termes, les coefficients de  $P_2$  dans (96), avec (97) :

$$-\frac{2}{3}(f^* + \frac{2}{3}f^{*2}) \cong -\frac{2}{3}(f^{*H} + \frac{2}{3}f^{*H2})$$

sont égaux.

Ce-ci se suit tout de suite du fait que  $A_2$  suivant (103) est identique pour les cas hydrostatique et ellipsoïdique puisque  $D, S, T$  et  $\mu$  dépendent seulement de la densité  $\rho$  comme fonction de  $\beta$  et comme dans les termes du second ordre,  $f$  peut être remplacé par  $f^*$ , de façon que  $\kappa$  ne se présente pas (Moritz, 1973).

Il faudrait signaler, cependant, comme :

$$\kappa \neq \kappa^H \quad (111)$$

et aussi :

$$f \neq f^H \quad (112)$$

excepté pour les termes du second ordre  $f$  doit être prise égale à  $f^H$ . Alors, nous avons le :

**Théorème :** *Pout toute distribution de masse en équilibre hydrostatique, il lui correspond une distribution de masse pour l'ellipsoïde équipotentiel de manière que la densité  $\rho$  est la même fonction de  $\beta$  et que les valeurs de l'aplatissement réduit  $f^*$  sont les mêmes pour tout couple de surfaces correspondantes à la même valeur  $\beta$ .*

Dans la suite, nous supposons toujours que  $f^*$  est choisie de cette manière. Nous obtenons alors une configuration de masse ellipsoïdale qui dévie très légèrement de celle de la configuration d'équilibre.

Avec cette hypothèse, (102) se réduit à :

$$W = W_0(\beta) + W_4(\beta)P_4(\cos\theta) \quad (113)$$

puisque nous avons la possibilité de prendre  $A_2 = A_2^H = 0$ .

Les expressions de  $W_0(\beta)$  et  $W_4(\beta)$  sont immédiatement trouvées en com-

parant (113) avec (102) en utilisant (103). Pour  $W_4$  nous obtenons une expression particulièrement simple en soustrayant la valeur hydrostatique  $W^H$ , qui est trouvée en mettant  $\kappa = \kappa^H$  dans (103) et qui est nulle par (106) :

$$W_4(\beta) = \frac{4}{3}\pi G\beta^2 \rho_m \frac{32}{105} \left[ -3(\kappa - \kappa^H)D + \frac{8}{9}(P - P^H) + (Q - Q^H) \right] \quad (114)$$

où par (98) :

$$\begin{aligned} \frac{9}{8}(P - P^H) &= \beta^{-7} \int_0^\beta \delta \frac{d}{d\beta} [(\kappa - \kappa^H)\beta^7] d\beta \\ Q - Q^H &= \beta^2 \int_\beta^1 \delta \frac{d}{d\beta} [(\kappa - \kappa^H)\beta^{-2}] d\beta \end{aligned} \quad (115)$$

Pour la déviation  $\zeta$  de toute surface de potentiel constant de la surface correspondante de densité constante, nous trouvons facilement (théorème de Bruns !) :

$$\zeta = \frac{1}{g} W_4(\beta) P_4(\cos\theta) \quad (116)$$

où  $g$  désigne la gravité du point intérieur en considération.

Pour l'ellipsoïde, nous avons  $\kappa = 0$  sur la surface. Pour la terre réelle, les observations satellitaires de  $J_4$  donnent la valeur à la surface :

$$\kappa = -0.000\,000\,84 \quad (117)$$

(Moritz, 1973, p.48), qui est même plus lointaine de la valeur hydrostatique (109) : notez la différence de signe ! Autrement, les précédentes formules se tiennent aussi pour ce cas, utilisant (117).

Le problème est que  $\kappa$  décroît monotonement vers le centre seulement dans le cas hydrostatique (109). Pour les deux  $\kappa = 0$  et (117) ; il s'accroît premièrement en valeur absolue avant de décroître, ce qui n'est très satisfaisant de point de vue esthétique.

Plus de détails peuvent être trouvés dans (Moritz, 1973). Le problème de la relation des modèles d'ellipsoïdes de densité avec les figures d'équilibre hydrostatique est particulièrement adressée dans la courte note (Marussi et al., 1974).

Un problème non résolu est de trouver une distribution "optimale" de  $\kappa$  pour l'ellipsoïde de niveau, c'est-à-dire par une condition de la stationnarité de l'énergie de potentiel comme discutée dans la section (29.5).



## Références

1. **Baeschlin, C.F.** (1948) : Lehrbuch der Geodäsie, Orell Füssli Verlag, Zürich.
2. **Bullard, E.C.** (1948) : The figure of the earth, Monthly Not. Roy. Astr. Soc., Suppl., 5, 186-192.
3. **Chandrasekhar, S.** (1969) : Ellipsoidal figures of Equilibrium, Yale Univ. Press, New Haven.
4. **Chandrasekhar, S., and Roberts, P.H.** (1963) : the ellipticity of a slowly rotating configuration, Astrophys. J., 138, 801-808.
5. **Darwin, G.H.** (1899) : The theory of the figure of the earth carried to the second order of small quantities, Monthly Not. Roy. Astr. Soc., 60, 82-124.
6. **Denis, C., and Ibrahim, A.** (1981) : On a self-consistent representation of earth models, with an application to the computing of internal flattening, Bull. Géod., 55, 179-195.
7. **de Sitter, W.** (1924) : On the flattening and the constitution of the earth, Bull. Astron. Inst. Netherlands, II (55), 97-108.
8. **Heiskanen, W.A., and Moritz, H.** (1967) : Physical Geodesy, Freeman, San Francisco (reprint by Section of Physical Geodesy, Techn. Univ., Steyrergasse 17, A-8010 Graz).
9. **Jardetzky, W.S.** (1958) : Theories of Figures of Celestial Bodies, Interscience Publ., New York.
10. **Jeffreys, H.** (1953) : The figures of rotating planets, Monthly Not. Roy. Astr. Soc., Geophys. Suppl., 113, 97-105.
11. **Jeffreys, H.** (1970) : The Earth, 5th ed., Cambridge Univ. Press.
12. **Jones, H. Spencer.** (1954) : Dimensions and rotation, in : The Earth as a Planet (G.P. Kuiper, ed.), 1-41, Univ. of Chicago Press.
13. **Kellogg, O.D.** (1929) : Foundations of Potential Theory, Springer, Berlin (reprinted 1967).

14. **Khan, M.A.** (1968) : A re-evaluation of the theory for the hydrostatic figure of the earth, *J. Geophys. Res.*, 73, 5335-5342.
15. **Khan, M.A.** (1969) : General solution of the problem of hydrostatic equilibrium of the earth , *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.*, 18, 177-188.
16. **Kopal, Z.** (1960) : *Figures of Equilibrium of Celestial Bodies*, Univ. of Wisconsin Press, Madison.
17. **Lanzano, P.** (1982) : *Deformations of an Elastic Earth*, Academic Press, New York .
18. **Ledersteger, K.** (1969) : *Astronomische und physikalische Geodäsie (Erdmessung)*, v. V of Jordan/Eggert/kneissl, *Handbuch der Vermessungskunde*, J.B, Melzler, Stuttgart.
19. **Liapounoff, A.** (1904) : Sur l'équation de Clairaut et les équations plus générales de la théorie de la figure des planètes, *Mém. de l'Acad. des Sciences de Pétersbourg*, ser. 8, 15 (10), 1-66.
20. **Lichtenstein, L.** (1933) : *Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten*, Springer, Berlin.
21. **Macke, W.** (1967) : *Mechanik der Teilchen, Systeme und Kontinua*, Geest & Portig, Leipzig.
22. **Macke, W., Rennert, P., Rieger, F., and Voss, K.** (1964) : Über die Gestalt und das Schwerfeld der Erde, *Z. Geophys.*, 30, 21-28.
23. **Marussi, A., Moritz, H., Rapp, R.H., and Vicente, R.O.** (1974) : Ellipsoidal density models and hydrostatic equilibrium : interim report, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 9, 4-6.
24. **Melchior, P.** (1983) : *The Tides of The Planet Earth*, 2nd. ed., Pergamon Press, Oxford.
25. **Moritz, H.** (1973) : *Computation of ellipsoidal mass distributions*, Report 206, Dept. of Geodet. Sci., Ohio State Univ., Columbus.
26. **Moritz, H.** (1980) : *Advanced Physical Geodesy*, Herbert Wichmann,

Karlsruhe, and Abacus Press, Tunbridge Wells, Kent.

27. **Moritz, H.** (1984) : The Geodetic Reference System 1980 ; Bull. Géo. 58 (3) ("The Geodesist's Handbook 1984"), 388-398.

28. **Moritz, H. and Mueller, I.I.** (1987) : Earth Rotation : Theory and Observation, Ungar, New York.

29. **Nakiboglu, S.M.** (1979) : Hydrostatic Figure and related properties of the earth, Geophys. J. Roy. Astr. Soc., 57, 639-648.

30. **Pizzetti, P.** (1913) : Principii della Teoria Meccanica della Figura dei Pianeti, Enrico Spoerri, Pisa.

31. **Poincaré, H.** (1885) : Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation, Acta Math., 7; 259-380 (reprinted in vol. VII of his Oeuvres).

32. **Poincaré, H.** (1903) : Figures d'Equilibre d'une Masse Fluide, Gauthiers-Villars, Paris.

33. **Voss, K.** (1965) : Über die Gestalt und das Schwerefeld der II, Z. Geophys. ; 31, 313-326.

34. **Voss, K.** (1966) : Über die Gestalt und das Schwerefeld der Erde III, Z. Geophys., 32, 216-231.

35. **Wavre, R.** (1932) : Figures Planétaires et Géodésie, Gauthier-Villars, Paris.

The collected works of Liapunov are :

А.М. Ляпунов (1954-1965) : Собрание Сочинений в 6-ти томах, Издательство Академии Наук СССР, Москва.

The review monograph :

Итоги науки и техники, Астрономия, Том 10 : Равновесие и устойчивость гравитирующих систем, ред. И.С. Щербина-Самойлова, Всесоюзный институт научной и технической информации АН СССР, Москва 1975.

gives many references in Russian.

The author is indebted to Prof. K. Bretterbauer, Prof. E. Grafarend, Dr. M.S. Petrovskaya and Prof. L. Stange for help with the references. Mr. K. Rautz has carefully checked the formulas and the text, and also drawn the figures.

After finishing this paper, the report :

Denis, C. (1985) : The hydrostatic figure of the earth, Geophys. Rep. Publ. No. 85/002, Department of Astronomy and Astrophysics, University of Liège.

came to my attention. It is almost exactly complementary to the present paper, containing detailed numerical studies, geophysical discussions, and additional references.

I also was delighted to see the recent paper :

Молоденский, М.С. (1988) : зависимость гравитационного поля земли от изменения скорости ее вращения, Геодезия и Картография No 5 ,11-13,  
in which M.S Molodensky occupies himself with the integral equation of Lichtenstein !