Новый способ получения волнового уравнения и физическое обоснование принципа Гюйгенса

Ф. Ф. Менде

В современной радиотехнике вопросы распространения электрических потенциалов и токов в длинных линиях решается при помощи телеграфных уравнений, в которых используются вторые производные указанных параметров. Однако существуют такие случаи, когда такие производные отсутствуют. Это случай, когда к линии подключен источник постоянного напряжения, или когда это напряжение меняется по линейному закону. В работе представлен новый способ получения волнового уравнений, который решает указанные проблемы. Он заключается в использовании понятия параметрической реактивной самоиндукции. Приведено также физическое обоснование принципа Гюйгенса, который ранее вводился как постулат.
Ключевые слова: Законы самоиндукции, волновое уравнение, реактивная самоиндукция, волновое сопротивление, принцип Гюйгенса.

1. Законы реактивной самоиндукции

Уточним понятие реактивной самоиндукции. Под реактивной самоиндукцией будем понимать реакцию ёмкостей и индуктивностей с неизменными параметрами на подключение к ним источников питания. К реактивной самоиндукции отнесём также случай, когда при наличии подключенного к ёмкости или индуктивности источника питания или накопленной в этих элементах энергией могут изменяться их параметры. Такую самоиндукцию будем называть параметрической.

В дальнейшем будем использовать такие понятия как генератор тока и напряжения. Под идеальным генератором напряжения будем понимать такой генератор, который обеспечивает на любой нагрузке заданное напряжение, внутреннее сопротивление у такого генератора равно нулю. Под идеальным генератором тока будем понимать такой генератор, который обеспечивает в любой нагрузке заданный ток, внутреннее сопротивление у такого генератора равно бесконечности. Идеальных генераторов тока и напряжения в природе не существует, поскольку и генераторы тока и генераторы напряжения имеют конечное внутреннее сопротивление, что и ограничивает их возможности.

2. Ёмкостная самоиндукция

Если ёмкость C заряжена до разности потенциалов U, то заряд Q, накопленный в ней, определяется соотношением

$$Q = CU . \tag{2.1}$$

Если величина емкости или разности потенциалов зависят от времени, то величина тока определяется соотношением

$$I = \frac{dQ}{dt} = C\frac{dU}{dt} + U\frac{dC}{dt} .$$

Это выражение определяет закон ёмкостной самоиндукции. Ток в цепи, содержащей конденсатор, можно получить двумя способами: изменяя напряжение на конденсаторе при постоянной ёмкости, или изменяя величину ёмкости при неизменном напряжении на ней, или производить изменение обоих параметров одновременно.

Для случая, когда емкость C_1 постоянна, получаем известное выражение для тока, текущего через емкость:

$$I = C_1\frac{dU}{dt} . \tag{2.2}$$

В том случае, когда изменяется емкость, и на ней поддерживается постоянное напряжение U_1, имеем:

$$I = U_1\frac{dC}{dt} . \tag{2.3}$$

Этот случай относиться к параметрической ёмкостной самоиндукции, поскольку величина тока связан с изменением величины ёмкости.

Если к емкости подключить генератор постоянного тока I_0, то напряжение на ней будет изменяться по закону:

$$U = \frac{I_0 t}{C_1} . \tag{2.4}$$

Следовательно, емкость, подключенная к источнику постоянного тока, представляет для него активное сопротивление

$$R = \frac{t}{C_1} , \tag{2.5}$$

которое увеличивается со временем по линейному закону. Следует отметить, что полученный результат является очевидным, однако такие свойства ёмкости, которую принято считать реактивным элементом, впервые были отмечены в работе [1]. С физической точки зрения такое свойство ёмкости понятно, заряжая емкость, источник расходует энергию.

В этом случае мощность, отдаваемая источником тока, определяется соотношением

$$P(t) = \frac{I_0^{\,2} t}{C_1} . \tag{2.6}$$

Энергию, накопленную емкостью за время t, получим, проинтегрировав соотношение (2.6):

$$W_C = \frac{I_0^{\,2} t^2}{2C_1}.$$

Подставляя сюда значение тока из соотношения (2.4), получаем зависимость величины энергии, накопленной в емкости от текущего значения напряжения на ней:

$$W_C = \frac{1}{2} C_1 U^2.$$

Если поддерживать на емкости постоянное напряжение U_1, а изменять саму ёмкость, тогда

$$I = U_1 \frac{dC}{dt}. \tag{2.7}$$

Величина

$$\left(\frac{dC}{dt}\right)^{-1} = R_C \tag{2.8}$$

в соотношении (2.7) играет роль активного сопротивления. Этот результат тоже понятен, т.к. при увеличении емкости увеличивается накопленная в ней энергия, и ёмкость отбирает у источника напряжения энергию, представляя для него активную нагрузку. Мощность, расходуемая при этом источником, определяется соотношением:

$$P(t) = \frac{dC}{dt} U_1^{\,2}. \tag{2.9}$$

Из соотношения (2.9) видно, что в зависимости от знака производной расходуемая генератором мощность может иметь разные знаки. Когда производная положительная, расходуемая мощность идёт на совершение внешней работы. Если производная отрицательная, работу над внешними цепями совершает ёмкость.

Рассмотрим еще один процесс, который подпадает под определение ёмкостной самоиндукции. Из соотношения (2.1) видно, что если заряд, накопленный в ёмкости, остаётся неизменным, то напряжение на ней можно изменять путем изменения ёмкости. В этом случае выполняется соотношение

$$CU = C_0 U_0 = const,$$

где C и U - текущие значения, а C_0 и U_0 - начальные значения этих параметров.

Напряжение на емкости и энергия, накопленная в ней, будут определяться соотношениями:

$$U = \frac{C_0 U_0}{C}, \tag{2.10}$$

$$W_C = \frac{1}{2}\ \frac{\left(C_0 U_0\right)^2}{C}\ .$$

Данный процесс самоиндукции связан с изменением ёмкости, поэтому к нему относится определение параметрической самоиндукции.

§ 3. Индуктивная самоиндукция.

Введем понятие потока индуктивной   самоиндукции

$$\varPhi = LI\ .$$

Напряжение на индуктивности, равно производной этого потока по времени:

$$U = \frac{d\varPhi}{dt} = L\frac{dI}{dt} + I\,\frac{dL}{dt}.$$

Рассмотрим случай, когда индуктивность L_1 постоянна, тогда

$$U = L_1\frac{dI}{dt}. \qquad (3.1)$$

Проинтегрировав выражение (3.1) по времени, получим:

$$I = \frac{Ut}{L_1}. \qquad (3.2)$$

Таким образом, индуктивность, подключенная к источнику постоянного напряжения, представляет для него активное сопротивление

$$R = \frac{L_1}{t}, \qquad (3.3)$$

которое уменьшается обратно пропорционально времени. Следует отметить, что полученный результат является очевидным, однако такие свойства индуктивности, которую принято считать реактивным элементом, впервые были отмечены в работе [1].

Мощность, расходуемая при этом источником питания, определится соотношением:

$$P\left(t\right) = \frac{U^2 t}{L_1}\ . \qquad (3.4)$$

Эта мощность линейно зависит от времени. Проинтегрировав соотношение (3.4) по времени, получим энергию, накопленную в индуктивности

$$W_L = \frac{1}{2}\frac{U^2 t^2}{L_1}. \qquad (3.5)$$

Подставив в выражение (3.5) значение напряжения из соотношения (3.2), получаем:

$$W_L = \frac{1}{2} L_1 I^2 .$$

Теперь рассмотрим случай, когда ток I_1, текущий через индуктивность, постоянен, а сама индуктивность может изменяться. В этом случае получаем соотношение

$$U = I_1 \frac{dL}{dt} . \tag{3.6}$$

Таким образом, величина

$$R(t) = \frac{dL}{dt} \tag{3.7}$$

играет роль активного сопротивления. Это сопротивление может быть (в зависимости от знака производной), как положительным, так и отрицательным. Это означает, что изменяющаяся во времени индуктивность может получать энергию извне, или отдавать её во внешние цепи.

Если индуктивность выполнена из сверхпроводника и закорочена, то

$$\Phi = L_1 I_1 = const ,$$

где L_1 и I_1- начальные значения этих параметров, которые имеются в момент короткого замыкания индуктивности.

Этот режим будем называть режимом замороженного тока. При этом выполняется соотношение:

$$I = \frac{I_1 L_1}{L} , \tag{3.8}$$

где I и L - текущие значения соответствующих параметров.

В рассмотренном режиме поток остается неизменным, однако, в связи с тем, что ток в индуктивности может изменяться при ее изменении, такой процесс подпадает под определение параметрической самоиндукции. Энергия, накопленная в индуктивности, при этом будет определяться соотношением

$$W_L = \frac{1}{2} \frac{(L_1 I_1)^2}{L} .$$

.

4. Новый способ получения волнового уравнения

В радиотехнике вопросы распространения электрических потенциалов и токов в длинных линиях решается при помощи телеграфных уравнений

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -L_0 \frac{\partial I}{\partial t}$$
$$\frac{\partial I}{\partial z} = -C_0 \frac{\partial U}{\partial t},$$

где L_0 - погонная индуктивность (running inductance) и C_0 - погонная ёмкость (linear capacitance).

Из этих уравнений получают волновые уравнения для напряжений и токов

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$
$$\frac{\partial^2 I}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 I}{\partial t^2},$$

где $v = \dfrac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$ - скорость распространения волн в длинной линии.

но в данном случае требуется знание вторых производных напряжений и токов.

Но как поступать, когда на вход линии подаётся напряжение, у которого вторая производная равна нулю, когда напряжение источника меняется по линейному закону или когда к линии подключён источник постоянного напряжения. Ответа на этот вопрос приведенные волновые уравнения не дают.

Процессы, рассмотренные в трёх предыдущих параграфах, касаются цепей с сосредоточенными параметрами, когда распределение разностей потенциалов и токов можно считать однородным. Однако имеются цепи, например длинные линии, в которых это условие не соблюдается.

Воспользуемся результатами, полученными в предыдущих параграфах для рассмотрения процессов, происходящих в длинных линиях.

Рассмотрим линию, которая имеет погонную индуктивность (running inductance) L_0 и погонную ёмкость (linear capacitance) C_0.

Если к такой линии подключить источник постоянного напряжения U_1, то его фронт будет распространяться в линии с какой-то скоростью v, и текущая координата этого фронта определится соотношением $z = vt$. При этом суммарная величина заряженной ёмкости и суммарной индуктивности, по которой течёт ток, отсчитываемые от начала линии до места нахождения фронта напряжения, будут изменяться по закону:

$$C(t) = zC_0 = vt\ C_0,$$

$$L(t) = zL_0 = vt\ L_0 .$$

Источник напряжения U будет при этом заряжать увеличивающуюся емкость линии, расходуя свою энергию, для чего от источника в заряжаемую линию в соответствии с соотношением (2.7) будет течь ток:

$$I = U\frac{dC(t)}{dt} = vUC_0 . \tag{4.1}$$

Этот ток будет течь через проводники линии, обладающие индуктивностью, на что также будет расходоваться энергия источника напряжения. Но, поскольку индуктивность линии в связи с движением фронта напряжения, тоже увеличивается, то в соответствии с соотношением (3.6), на ней будет наблюдаться падение напряжения:

$$U_L = I\frac{dL(t)}{dt} = vIL_0 = v^2 UC_0 L_0 .$$

Но падение напряжения на проводниках линии по абсолютной величине равно напряжению, приложенному к её входу, поэтому в последнем выражении следует положить $U_L = U$. С учетом этого сразу находим, что скорость движения фронта напряжения должна составлять

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} . \tag{4.2}$$

Это выражение соответствует скорости распространения волновых процессов в длинной линии, полученной из телеграфных уравнений. Но для получения соотношения (4.2) нам не нужно знать никаких производных потенциалов или токов. Пользуясь этой методикой легко показать, что любое изменение напряжения источника, подключённого к входу длинной линии будет распространяться по ней со скоростью, определяемой соотношением (4.2). Следовательно, если к бесконечно длинной линии подключить источник напряжения, то в ней будет иметь место саморасширение и электрических потенциалов и токов, заполняющих линию энергией. Скорость фронта постоянного напряжения и тока при этом будет равна скорости распространения электромагнитных колебаний в линии. Такую волну будем называть электротоковой.

Интересно отметить, что полученный результат не зависит от вида функции U, т.е. к линии может быть подключен как источник постоянного напряжения, так и источник, напряжение которого меняется по любому закону. Во всех этих случаях величина локального значения напряжения на входе линии будет распространяться вдоль неё со скоростью, определяемому соотношением (4.2) . Такой результат мог быть до сих пор получен только из волновых уравнений, полученных путём решения телеграфных уравнений, для чего необходимо знать вторые производные потенциалов и токов в линии. Приведенное рассмотрение указывает на физическую причину такого распространения, и даёт физическую картину самого процесса. Он показывает, что сам процесс распространения связан с энергетическими процессами заполнения линии двумя видами энергии и происходит таким образом, что фронт волны, распространяясь со скоростью v, оставляет за собой линию, заряженную до разности потенциалов U, что соответствует заполнению линии электростатической энергией электрического поля. На участке же линии от источника напряжения и до фронта волны течет ток I , что соответствует заполнению линии на этом участке энергией, которая связана с токами, текущими через индуктивность линии.

Величину тока в линии можно получить, подставив значения скорости распространения фронта волны, определяемого соотношением (4.2), в соотношение (4.1). Сделав эту подстановку, получим

$$I = U\sqrt{\frac{C_0}{L_0}},$$

где $Z = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$ - волновое сопротивление линии.

Таким образом, процессы распространения разности потенциалов вдоль проводников длинной линии и постоянного тока в ней являются связанными и взаимно дополняющими друг друга, и существовать друг без друга не могут. Такой процесс можно называть электротоковой самопроизвольной параметрической самоиндукцией. Такое название связано с тем, что расширение электрических полей и токов происходят самопроизвольно и характеризует скорость процесса заполнения линии энергией.

5. Физическое обоснование принципа Гюйгенса и теорема взаимности приёмных и передающих антенн

Принцип Гюйгенса гласит, что каждый элемент волнового фронта можно рассматривать, как центр вторичного возмущения, порождающего вторичные сферические волны, а результирующее световое поле в каждой точке пространства будет определяться интерференцией этих волн. Этот принцип является основным постулатом геометрической оптики, дающего прекрасное совпадение с экспериментом, однако он не раскрывает физической природы этого явления. Из геометрической оптики известно, что любой пучок света является расходящимся и что площадь его сечения в процессе распространения всё время увеличивается, т.е. поля электромагнитной волны двигаясь в направлении распространения, с такой же скоростью расширяются в поперечном направлении. Поперечное расширение пучка электромагнитных волн также является следствием принципа Гюйгенса.

Но существует ли какое-либо физическое объяснение этого принципа? Оказывается, существует.

Рассмотрим плоскую монохроматическую ТЕМ волну, проходящую через щель, ширина которой значительно больше длины волны (рис. 1).

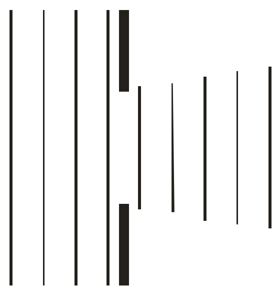

Рис. 1. Прохождение плоской волны через щель.

После прохождения через щель волна начинает расширяться в поперечном направлении. При этом в расширяющейся волне концы линий постоянной фазы в процессе их движения двигаются со скоростью света ещё и в поперечном направлении. Но поскольку при таком расширении увеличивается и сечение пучка, то начинает уменьшаться вектор Пойнтинга, что означает уменьшение электрического и магнитного поля на линиях постоянной фазы. Этот процесс поперечного саморасширения электрических векторов на линиях постоянной фазы подобен электротоковой самопроизвольной параметрической самоиндукции, описанной в четвёртом параграфе.

Отличием является лишь то, что в линии распространяется волна поперечного электрического поля, и саморасширение происходит в направлении распространения. В данном же случае происходит саморасширение электрического поля ещё и в поперечном направлении. В длинной линии такого расширения нет, поскольку волну в поперечном направлении ограничиваю проводники линии. Поперечная трансформация волны сопровождается тем, что, начиная от центра линии постоянной фазы вдоль неё начинает течь ток смещения. Этот процесс очень похож на расширение сжатого резинового шнура, когда все его участки начинают равномерно расширяться. При этом плотность энергии электромагнитной волны начинает уменьшаться, равномерно распределяясь в возрастающем объёме, занимаемом расширяющейся волной.

Это простое рассмотрение, указывает на физические причины постулата Гюйгенса и по сути дела является новым физическим законом.

1. Менде Ф. Ф. Великие заблуждения и ошибки физиков XIX-XX столетий. Революция в современной физике. Харьков, НТМТ, 2010, – 176 с.