Симметризация уравнений индукции и материальных уравнений Максвелла

Ф. Ф. Менде

Физико-технический институт низких температур имени Б. И. Веркина НАН Украины

Уравнения индукции и уравнения Максвелла играют очень важную роль в электродинамике. Однако пока отсутствует полная система уравнений, которая способна решать весь спектр электродинамических задач в материальных средах. В статье показано, что уравнения индукции могут быть симметризированы путём использования субстанциональной производной. Это даёт возможность получить преобразования полей, в первом приближении совпадающие с преобразованиями Лоренца. Уравнения Максвелла тоже могут быть представлены в симметричной форме, однако для этого требуется введение нового понятия кинетической ёмкости. Это понятие описывает энергетические процессы, связанные с прецессионным движением магнитных моментов атомов в намагниченных средах. Вводятся понятия электрокинетических и магнитопотенциальных волны, которые описывают волновые процессы в немагнитных и намагниченных материальных средах. Показано, что уравнения электродинамики могут быть записаны множественным образом с использованием различных потенциалов и токов.

Ключевые слова: уравнения Максвелла, уравнения Лондонов, кинетическая индуктивность, кинетическая ёмкость, векторный потенциал, электрокинетические волны, магнитопотенциальные волны.

1. Введение

Законы классической электродинамики отражают экспериментальные факты и являются феноменологическими. Основными уравнениями современной электродинамики являются уравнения Максвелла. Для вакуума они записываются следующим образом:

$$rot\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\ , \tag{1.1}$$

$$rot\ \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \tag{1.2}$$

$$div\ \vec{D} = 0, \tag{1.3}$$

$$div\ \vec{B} = 0\ , \tag{1.4}$$

где $\vec{E}$ и $\vec{H}$ - напряженность электрического и магнитного поля, $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$ и $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ - электрическая и магнитная индукция, μ_0 и ε_0 - магнитная и диэлектрическая проницаемость вакуума. Из этих уравнений следуют волновые уравнения:

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \tag{1.5}$$

$$\nabla^2 \vec{H} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}, \tag{1.6}$$

из которых следует, что в вакууме могут распространяться плоские электромагнитные волны, скорость распространения которых равна скорости света

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}. \tag{1.7}$$

Для материальных сред уравнения Максвелла имеют следующий вид:

$$rot\ \vec{E} = -\tilde{\mu}\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (1.8)$$

$$rot\ \vec{H} = ne\vec{v} + \tilde{\varepsilon}\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = ne\vec{v} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (1.9)$$

$$div\ \vec{D} = ne, \quad (1.10)$$

$$div\ \vec{B} = 0, \quad (1.11)$$

где $\tilde{\mu}$ и $\tilde{\varepsilon}$ - относительные магнитная и диэлектрическая проницаемости среды, а n, e и $\vec{v}$ - плотность, величина и скорость зарядов.

Уравнения (1.8) и (1.9) указывают на то, что уравнения Максвелла для материальных сред являются несимметричными.

2. Плазмоподобные среды

Запишем уравнения Максвелла для плазмоподобных сред, в которых активными потерями можно пренебречь. К таким средам могут быть отнесены сверхпроводники и свободные электроны в вакууме. Уравнение движения электрона в этом случае имеет вид:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = e\vec{E}, \quad (2.1)$$

где m и e – масса и заряд электрона, $\vec{E}$– напряженность электрического поля, $\vec{v}$ – скорость движения заряда.

В работе [1] показано, что это уравнение может быть использовано и для описания движения электронов в горячей плазме.

Используя выражение для плотности тока

$$\vec{j} = ne\vec{v}, \quad (2.2)$$

из (2.1) получаем плотность тока проводимости

$$\vec{j}_L = \frac{ne^2}{m}\int \vec{E}\, dt\ . \tag{2.3}$$

В соотношении (2.2) и (2.3) n - плотность электронов. Введя обозначение

$$L_k = \frac{m}{ne^2}\ , \tag{2.4}$$

находим

$$\vec{j}_L = \frac{1}{L_k}\int \vec{E}\, dt\ . \tag{2.5}$$

Величина L_k представляет кинетическую индуктивность носителей заряда [2]. Ее существование связано с тем, что заряд, имея массу, обладает инерционными свойствами. Для случая гармонических полей $\vec{E} = \vec{E}_0 \sin \omega t$ соотношение (2.5) запишется:

$$\vec{j}_L = -\frac{1}{\omega L_k}\vec{E}_0 \cos \omega t\ . \tag{2.6}$$

Из соотношения (2.5) и (2.6) видно, что $\vec{j}_L$ представляет индуктивный ток, т.к. его фаза запаздывает по отношению к напряжённости электрического поля на угол $\frac{\pi}{2}$.

Если заряды находятся в вакууме, то при нахождении суммарной плотности тока нужно учитывать и ток смещения

$$\vec{j}_\varepsilon = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \varepsilon_0 \vec{E}_0 \cos \omega t\ .$$

Этот ток носит ёмкостной характер, т.к. его фаза на $\frac{\pi}{2}$ опережает фазу напряжённости электрического поля. Суммарная плотность тока запишется [3-6]:

$$\vec{j}_\Sigma = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{L_k}\int \vec{E}\, dt\ ,$$

или

$$\vec{j}_\Sigma = \left(\omega\varepsilon_0 - \frac{1}{\omega L_k} \right) \vec{E}_0 \cos \omega t \,. \qquad (2.7)$$

В соотношении (2.7) величина, стоящая в скобках, представляет суммарную реактивную проводимость σ_Σ, она состоит из емкостной σ_C и индуктивной σ_L проводимости

$$\sigma_\Sigma = \sigma_C + \sigma_L = \omega\varepsilon_0 - \frac{1}{\omega L_k}.$$

Соотношение (2.7) можно переписать в других обозначениях:

$$\vec{j}_\Sigma = \omega\varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) \vec{E}_0 \cos \omega t \,,$$

где $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{1}{L_k \varepsilon_0}}$ - плазменная частота.

Величину

$$\varepsilon^*(\omega) = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) = \varepsilon_0 - \frac{1}{\omega^2 L_k}$$

принято называть зависящей от частоты диэлектрической проницаемостью. В неё входят два не зависящие от частоты параметра: диэлектрическая проницаемость вакуума и кинетическая индуктивность зарядов.

Плотность тока для рассматриваемой среды определяться тремя составляющими, зависящими от электрического поля:

$$\vec{j}_\Sigma = \sigma \vec{E} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{L_k} \int \vec{E}\, dt \,,$$

где σ - проводимость.

Уравнения Максвелла для этого случая имеют вид:

$$rot\ \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t},$$
$$rot\ \vec{H} = \sigma\vec{E} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{L_k}\int \vec{E}\, dt, \tag{2.8}$$

Система уравнений (2.8) полностью описывает все свойства рассмотренной среды. Уравнения этой системы являются не симметричными. В случае отсутствия активных потерь из (2.8) следует уравнение [7]

$$rot\ rot\ \vec{H} + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} + \frac{\mu_0}{L_k}\vec{H} = 0. \tag{2.9}$$

Для случая полей, не зависящих от времени, уравнение (2.9) переходит в уравнение Лондонов

$$rot\ rot\ \vec{H} + \frac{\mu_0}{L_k}\vec{H} = 0\ ,$$

где $\lambda_L{}^2 = \dfrac{L_k}{\mu_0}$ – лондоновская глубина проникновения.

Можно заключить, что уравнения Лондонов являясь частным случаем уравнения (2.9), т.к. не учитывает токов смещения в среде. Поэтому уравнения Лондонов не дают возможности получить волновые уравнения, описывающие процессы распространения электромагнитных волн в идеальных проводниках..

3. Диэлектрики

Рассмотрим наиболее простой случай, когда колебательные процессы в атомах или молекулах диэлектрика подчиняются законам механического осциллятора [5]:

$$\left(\frac{\beta}{m} - \omega^2\right)\vec{r}_m = \frac{e}{m}\vec{E}, \tag{3.1}$$

где $\vec{r}_m$ - отклонение зарядов от положения равновесия, а β - коэффициент упругости, характеризующий упругость электрических сил связи зарядов в атомах и молекулах. Вводя резонансную частоту связанных зарядов

$$\omega_0 = \frac{\beta}{m},$$

из (3.1) получаем

$$r_m = -\frac{e\ E}{m(\omega^2 - \omega_o^2)}. \qquad (3.2)$$

Видно, что в соотношении (3.2) в качестве параметра присутствует частота собственных колебаний, в которую входит масса заряда. Это говорит о том, что инерционные свойства колеблющихся зарядов будут влиять на колебательные процессы в атомах и молекулах.

Поскольку общая плотность тока в среде состоит из тока смещения и тока проводимости

$$rot\vec{H} = \vec{j}_\Sigma = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + ne\vec{v},$$

то, находя скорость носителей зарядов в диэлектрике как производную их смещения по координате

$$\vec{v} = \frac{\partial r_m}{\partial t} = -\frac{e}{m(\omega^2 - \omega_o^2)} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

из соотношения (3.2) находим

$$rot\vec{H} = \vec{j}_\Sigma = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{1}{L_{kd}(\omega^2 - \omega_0^2)} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \qquad (3.3)$$

Но величина

$$L_{kd} = \frac{m}{ne^2}$$

представляет кинетическую индуктивность зарядов, входящих в состав атомов или молекул диэлектриков. Поэтому соотношение (3.3) можно переписать

$$rot\vec{H} = \vec{j}_\Sigma = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_0 L_{kd}(\omega^2 - \omega_0^2)}\right) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \qquad (3.4)$$

Так как величина

$$\frac{1}{\varepsilon_0 L_{kd}} = \omega_{pd}{}^2$$

представляет плазменную частоту зарядов в атомах и молекулах диэлектрика, соотношение (3.4) принимает вид:

$$rot\vec{H} = \vec{j}_{\Sigma} = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega^2{}_{pd}}{(\omega^2 - \omega_0{}^2)} \right) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \tag{3.5}$$

Величину

$$\varepsilon^*(\omega) = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega^2{}_{pd}}{(\omega^2 - \omega_0{}^2)} \right) \tag{3.6}$$

принято называть зависящей от частоты диэлектрической проницаемостью диэлектрика.

Уравнения Максвелла для рассмотренного случая имеют вид:

$$\begin{gathered} rot\vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ rot\vec{H} = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega^2{}_{pd}}{(\omega^2 - \omega_0{}^2)} \right) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{gathered} \tag{3.7}$$

откуда находим волновое уравнение:

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_{pd}{}^2}{\omega^2 - \omega_0{}^2} \right) \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Уравнения Максвелла (3.7) для диэлектриков также являются несимметричными.

4. Симметризация уравнений индукции

Максвелл в своём знаменитом трактате [1] при записи уравнений электродинамики использовал субстанциональную (полную) производную, которая включает не только локальные производные по времени, но и содержит конвективную составляющую. Конвективная составляющая учитывает возможность движения системы отсчёта, в которой определяются поля по отношению к неподвижной системе отсчёта, в которой поля заданы. Поскольку при записи уравнений Максвелл учитывал и вращательные движения системы отсчёта, он использовал кватернионную запись четырехмерной алгебры над вещественными числами. Позже Герц и Хевисайд исключили из уравнений индукции конвективную составляющую и записали их в частных производных [2]. В таком виде мы и пользуемся сейчас этими уравнениями, называя их уравнениями Максвелла. Такие уравнения не дают возможности записать поля в движущихся системах отсчёта, если известны поля в неподвижной системе. В общем виде это дают возможность сделать преобразования Лоренца, однако, эти преобразования из законов индукции не следуют. Возникает вопрос, могут ли принципы классической электродинамики дать правильные результаты по определению полей в движущихся системах отсчёта хотя бы в каком-то приближении, и если да, то, как должны выглядеть при этом уравнения электромагнитной индукции и какова их связь с преобразованиями Лоренца.

Записывая сила Лоренца

$$\vec{F}' = e\,\vec{E} + e\left[\vec{V} \times \vec{B}\right] \tag{4.1}$$

штрихом будем отмечать поля и силы, возникающие в движущейся системе отсчёта.

Указания на то, каким образом могут быть записаны поля в движущейся системе координат, если они известны в неподвижной, имеются уже в законе Фарадея, который записывается с использованием субстанциональной производной [3]. Для рассмотрения этого вопроса перепишем закон Фарадея в уточненном виде:

$$\oint \vec{E}' d\,\vec{l}' = -\frac{d\,\Phi_B}{d\,t} \quad . \tag{4.2}$$

Уточнение записи закона, касается лишь того обстоятельства, что если мы определяем интеграл в движущейся (штрихованной) системе отсчёта, то около $\vec{E}$ и $d\vec{l}$ должны стоять штрихи. Если же интеграл определяется в неподвижной системе координат, то штрихи около $\vec{E}$ и $d\vec{l}$ отсутствуют, но при этом справа в выражении (4.2) должна стоять частная производная по времени. Обычно это обстоятельство в литературе, касающейся данного вопроса, не оговаривается.

Полная производная по времени в соотношении (4.2) означает независимость конечного результата появления э.д.с. в контуре от способа изменения потока, т.е. поток может изменяться как за счет локальной производной по времени, так и за счет того, что система, в которой измеряется $\oint \vec{E}' d\,\vec{l}'$, двигается в пространственно меняющемся поле $\vec{B}$. В соотношении (4.2) поток определяется из следующего соотношения

$$\Phi_B = \int \vec{B}\; d\;\vec{S}' , \tag{4.3}$$

где магнитная индукция $\vec{B} = \mu \vec{H}$ определена в неподвижной системе отсчёта, а элемент $d\;\vec{S}'$ – в движущейся системе. Учитывая (4.3), из (4.2) получаем

$$\oint \vec{E}' d\,\vec{l}' = -\frac{d}{d\,t} \int \vec{B}\; d\;\vec{S}' , \tag{4.4}$$

и далее, поскольку $\frac{d}{d\,t} = \frac{\partial}{\partial\,t} + \vec{V}\,grad$, запишем

$$\oint \vec{E}' d\,\vec{l}\,' = -\int \frac{\partial\,\vec{B}}{\partial\,t}\,d\,\vec{S} - \int \left[\vec{B}\times\vec{V}\right] d\,\vec{l}\,' - \int \vec{V}\,div\,\vec{B}\,d\,\vec{S}'\,. \tag{4.5}$$

Дальнейшее изложение будет вестись в предположении справедливости преобразований Галилея, когда $d\,\vec{l}\,' = d\,\vec{l}$ и $d\,\vec{S}' = d\,\vec{S}$. Из (1.5) следует известный результат:

$$\vec{E}' = \vec{E} + \left[\vec{V}\times\vec{B}\right], \tag{4.6}$$

из которого следует, что при движении в магнитном поле возникает дополнительное электрическое поле, определяемое последним слагаемым соотношения (4.6). Заметим, что это соотношение мы получили не из преобразований Лоренца, а всего лишь уточнив закон Фарадея. Таким образом, сила Лоренца является следствием такого закона.

Из соотношения (4.6) следует, что при движении в магнитном поле на заряд действует сила нормальная к направлению движения. Однако, физическая природа этой силы нигде не рассматривается. Следует отметить, что сила Лоренца противоречит существующим законам механики, т.к. в механике не известна такая сила, которая при равномерном и прямолинейном движении тела направлена нормально к направлению его движения.

Для выяснения физической природы магнитной части силы Лоренца в соотношении (4.6) запишем $\vec{B}$ и $\vec{E}$ через магнитный векторный потенциал $\vec{A}_B$:

$$\vec{B} = rot\,\vec{A}_B, \qquad \vec{E} = -\frac{\partial\,\vec{A}_B}{\partial\,t}\,. \tag{4.7}$$

Тогда соотношение (4.6) можно переписать

$$\vec{E}' = -\frac{\partial \vec{A}_B}{\partial t} + \left[\vec{V} \times rot\, \vec{A}_B\right], \tag{4.8}$$

и далее:

$$\vec{E}' = -\frac{\partial \vec{A}_B}{\partial t} - \left(\vec{V}\ \nabla\right)\vec{A}_B + grad\left(\vec{V}\,\vec{A}_B\right). \tag{4.9}$$

Первые два члена правой части равенства (4.9) можно собрать в полную производную векторного потенциала по времени, а именно:

$$\vec{E}' = -\frac{d\,\vec{A}_B}{d\,t} + grad\left(\vec{V}\,\vec{A}_B\right). \tag{4.10}$$

Из соотношения (4.9) видно, что напряженность электрического поля, а, следовательно и сила, действующая на заряд, состоит из трех частей.

Первая из них обязана локальной производной магнитного векторного потенциала по времени. Смысл второго слагаемого правой части соотношения (4.9) тоже понятен. Оно связано с изменением векторного потенциала, но уже за счет того, что заряд движется в пространственно меняющемся поле этого потенциала. Иная природа последнего слагаемого правой части соотношения (4.9). Оно связано с наличием потенциальных сил, т.к. потенциальная энергия заряда, движущегося в поле потенциала $\vec{A}_B$ со скоростью $\vec{V}$, равна $e\left(\vec{V}\,\vec{A}_\mathbf{B}\right)$ [4]. Величина $e\ grad\left(\vec{V}\,\vec{A}_B\right)$ дает силу, точно так же, как дает силу градиент скалярного потенциала зарпяда.

Соотношение (4.9) дает возможность физически объяснить все составляющие напряженности электрического поля, возникающего в неподвижной и движущейся систем отсчёта. Если речь идет о возникновении электрических полей вне длинного соленоида, где нет магнитных полей, то в этом случае работает первое слагаемое правой части равенства (4.9). В случае униполярного генератора в формировании силы, действующей на заряд, принимают участие два последних слагаемых правой части равенства (4.9), внося одинаковые вклады.

Таким образом, говорить об униполярном генераторе как об исключении из правила потока, как это делается в работе [4], нельзя, т.к. правило потока, как мы видим, это совокупность всех трех составляющих. Беря ротор от обеих частей равенства (1.10) и учитывая, что $rot\ grad \equiv 0$, получаем

$$rot\,\vec{E}' = -\frac{d\,\vec{B}}{d\,t}\ . \tag{4.11}$$

Если движения нет, то соотношение (4.11) превращается в первое уравнение Максвелла. Конечно, по своей информативности соотношение (4.11) сильно уступает соотношению (4.2), т.к. в связи с тем, что $rot\ grad \equiv 0$, в нем отсутствует информация о потенциальных силах, обозначенных через $e\ grad\left(\vec{V}\,\vec{A}_B\right)$. Поэтому, если нас интересуют все составляющие электрических полей, действующих на заряд, как в неподвижной, так и в движущейся системе отсчёта, мы должны пользоваться соотношением (4.2).

Таким образом, мы должны заключить, что движущийся или неподвижный заряд взаимодействует не с магнитным полем, а с полем магнитного векторного потенциала, и только знание этого потенциала и его эволюции дают возможность вычислить все составляющие сил, действующих на заряды. Магнитное же поле является всего лишь пространственной производной такого векторного поля.

Из сказанного следует, что запись силы Лоренца в терминах магнитного векторного потенциала:

$$\vec{F}^{\,\prime} = e\,\vec{E} + e\,[\vec{V}\times rot\,\vec{A}_B] = e\,\vec{E} - e(\vec{V}\,\nabla)\vec{A}_B + egrad\,(\vec{V}\,\vec{A}_B) \tag{4.12}$$

более предпочтительна, т.к. дает возможность понять полную структуру такой силы.

Закон Фарадея (4.2) называется законом электромагнитной индукции в связи с тем, что он показывает каким образом изменение магнитных полей приводит к появлению электрических полей. Однако, в классической электродинамике отсутствует закон магнитоэлектрической индукции, который бы показывал, каким образом изменение электрических полей приводит к появлению магнитных полей. Развитие классической электродинамики в этой части следовало по другому пути. Сначала был записан закон Ампера

$$\oint \vec{H}\, d\,\vec{l} = I \;, \tag{4.13}$$

где I – ток, пересекающий площадку, охватываемую контуром интегрирования. В дифференциальной форме соотношение (4.13) имеет вид:

$$rot\,\vec{H} = \vec{j}_{\sigma} \;, \tag{4.14}$$

где $\vec{j}_{\sigma}$ – плотность тока проводимости.

Максвелл дополнил соотношение (4.14) током смещения

$$rot\,\vec{H} = \vec{j}_{\sigma} + \frac{\partial\,\vec{D}}{\partial\,t} \;. \tag{4.15}$$

Но по аналогии с законом электромагнитной индукции (4.2) должен существовать и закон магнитоэлектрической индукции

$$\oint \vec{H}' d\,\vec{l}\,' = \frac{d\,\Phi_D}{d\,t} \;, \tag{4.16}$$

где $\Phi_D = \int \vec{D}\, d\, S'$ поток электрической индукции, и далее:

$$\oint \vec{H}' d\,\vec{l}\,' = \int \frac{\partial\,\vec{D}}{\partial\,t} d\,\vec{S} + \oint [\vec{D} \times \vec{V}] d\,\vec{l}\,' + \int \vec{V}\, div\,\vec{D}\, d\,\vec{S}' \,. \tag{4.17}$$

В отличие от магнитных полей, когда $div\,\vec{B} = 0$, для электрических полей $div\,\vec{D} = \rho$ и последнее слагаемое в правой части соотношения (4.17) дает ток проводимости I, т.е. из соотношения (4.16) сразу следует закон Ампера. Из соотношения (4.17) следует также и равенство:

$$\vec{H}' = \vec{H} - [\vec{V} \times \vec{D}]\,, \tag{4.18}$$

которое ранее можно было получить только из преобразований Лоренца.

Более того, как показано в работе [4], из соотношения (4.18) следует и закон Био-Савара, если для вычисления магнитных полей взять только электрические поля движущихся зарядов. В этом случае последний член правой части соотношения (4.17) можно просто опустить, и оба закона индукции приобретают симметричную форму:

$$\begin{gathered} \oint \vec{E}' d\,\vec{l}\,' = -\int \frac{\partial\,\vec{B}}{\partial\,t} d\,S - \oint [\vec{B} \times \vec{V}] d\,\vec{l}\,' \ , \\ \oint \vec{H}' d\,\vec{l}\,' = \int \frac{\partial\,\vec{D}}{\partial\,t} d\,S + \oint [\vec{D} \times \vec{V}] d\,\vec{l}\,' \ . \end{gathered} \tag{4.19}$$

Таким образом, использование субстанциональной производной в уравнениях индукции позволяет сммметризировать эти уравнения, и, как показывают соотношения (4.6) и (4.18), получить преобразования полей, которые в первом приближении совпадают с преобразованиями Лоренца.

5. Симметризация уравнений Максвелла

Чтобы уравнения Максвелла стали симметричными, первое уравнение должно иметь следующий вид [12]:

$$rot\vec{E} = -\sigma_H \vec{H} - \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \frac{1}{C_k} \int \vec{H} dt \tag{5.1}$$

где σ_H - проводимость магнитных токов.

По сравнению с традиционной записью первого уравнения Максвелла в правой части уравнения содержаться два дополнительных члена. Первый член правой части описывает активные потери в магнетиках при наложении на них переменных магнитных полей. Рассмотрим физический смысл последнего члена правой части уравнения (5.1), который ранее в первом уравнении Максвелла не присутствовал.

Известно, что атом, обладающий магнитным моментом $\vec{m}$, помещённый в магнитное поле, и осуществляющий в нём прецессионное движение, имеет потенциальную энергию $U_m = -\mu \vec{m} \vec{H}$. Поэтому потенциальная энергия может накапливаться не только в электрических полях, а и в прецессионном движении магнитных моментов, которое не обладает инерцией. Аналогичный случай имеется и в механике, когда гироскоп, прецессирующий в поле внешних сил, накапливает потенциальную энергию. По определению механическое прецессионное движение является также безинерционным и сразу же прекращается после снятия внешних сил. Такая же ситуация имеет место и для прецессирующего магнитного момента. Его прецессия является безинерционной и прекращается в момент снятия магнитного поля.

При описании прецессионного движения магнитного момента во внешнем магнитном поле в правой части соотношения (5.3) появляется слагаемое того же типа, что и в уравнении

$$rot\vec{H} = \sigma \vec{E} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{L_k} \int \vec{E}\, dt$$

Только вместо L_k присутствует C_k, т.е. кинетическая ёмкость, характеризующая потенциальную энергию, которую имеет прецессирующий магнитный момент в магнитном поле.

Резонансные процессы в плазме и диэлектриках характеризуются тем, что в процессе колебаний происходит попеременное преобразование электростатической энергии в кинетическую энергию движения зарядов и наоборот. Такой процесс может быть назван электрокинетическим и все устройства: лазеры, мазеры, фильтры и т.д., которые используют этот процесс, могут быть названы электрокинетическими. Наряду с этим существует и другой тип резонанса – магнитный. Если пользоваться существующими представлениями о зависимости магнитной проницаемости от частоты, то не трудно показать, что такая зависимость связана с наличием магнитного резонанса. Чтобы показать это, рассмотрим конкретный пример ферромагнитного резонанса. Если намагнитить феррит, приложив постоянное поле H_0 параллельно оси z, то по отношению к внешнему переменному полю среда будет представлять анизотропный магнетик с комплексной проницаемостью в виде тензора [13]

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_T{}^*(\omega) & -i\,\alpha & 0 \\ i\,\alpha & \mu_T{}^*(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & \mu_L \end{pmatrix},$$

где

$$\mu_T{}^*(\omega) = 1 - \frac{\Omega\ |\gamma|\ M_0}{\mu_0(\omega^2 - \Omega^2)}, \qquad \alpha = \frac{\omega\ |\gamma|\ M_0}{\mu_0(\omega^2 - \Omega^2)}, \qquad \mu_L = 1,$$

причем

$$\Omega = |\gamma|\, H_0 \qquad (5.2)$$

есть собственная частота прецессии, а

$$M_0 = \mu_0(\mu - 1)H_0 \qquad (5.3)$$

есть намагниченность среды. Учитывая (5.2) и (5.3) для $\mu_T{}^*(\omega)$, можно записать

$$\mu_T{}^*(\omega) = 1 - \frac{\Omega^2(\mu - 1)}{\omega^2 - \Omega^2}. \qquad (5.4)$$

Эту величину принято называть зависящей от частоты иагнитной проницаемостью магнетика.

Если считать, что электромагнитная волна распространяется вдоль оси x и имеются компоненты полей H_y и H_z, то первое уравнение Максвелла примет вид:

$$rot\ \vec{E} = \frac{\partial\ \vec{E}_Z}{\partial\ x} = \mu_0 \mu_T \frac{\partial\ \vec{H}_y}{\partial\ t}.$$

Учитывая (5.4), получим

$$rot\ \vec{E} = \mu_0 \left[1 - \frac{\Omega^2(\mu - 1)}{\omega^2 - \Omega^2} \right] \frac{\partial\ \vec{H}_y}{\partial\ t}.$$

Для случая ω>>Ω имеем

$$rot\ \vec{E} = \mu_0 \left[1 - \frac{\Omega^2(\mu - 1)}{\omega^2} \right] \frac{\partial\ \vec{H}_y}{\partial\ t}. \qquad (5.5)$$

Полагая $H_y = H_{y0} \sin \omega t$ и учитывая, что в этом случае

$$\frac{\partial\ \vec{H}_y}{\partial\ t} = -\omega^2 \int \vec{H}_y\ d\ t,$$

из (5.5) получим

$$rot\ \vec{E} = \mu_0 \frac{\partial\ \vec{H}_y}{\partial\ t} + \mu_0\ \Omega^2(\mu - 1) \int \vec{H}_y\ d\ t,$$

или

$$rot\ \vec{E} = \mu_0 \frac{\partial\ \vec{H}_y}{\partial\ t} + \frac{1}{C_k} \int \vec{H}_y\ d\ t. \qquad (5.6)$$

Для случая ω<< Ω находим

$$rot\ \vec{E} = \mu_0 \mu \frac{\partial\ \vec{H}_y}{\partial\ t}.$$

Величину

$$C_k = \frac{1}{\mu_0\ \Omega^2 (\mu - 1)},$$

которая введена в соотношении (5.6), назовем кинетической емкостью [12].

Подобным же образом может быть описан и электронный парамагнитный резонанс.

С чем связано существование кинетической ёмкости, и каков её физический смысл? Если направление магнитного момента не совпадает с направлением внешнего магнитного поля, то вектор такого момента начинает прецессировать вокруг вектора магнитного поля с частотой Ω. Магнитный момент $\vec{m}$ обладает при этом потенциальной энергией $U_m = -\vec{m} \cdot \vec{B}$. Эта энергия подобно энергии заряженного конденсатора является потенциальной, потому что прецессионное движение, хотя и является механическим, однако, оно не инерционно и мгновенно прекращается при снятии магнитного поля. При наличии же магнитного поля прецессионное движение продолжается до тех пор, пока не будет израсходована накопленная потенциальная энергия, и вектор магнитного момента не совпадёт с вектором магнитного поля.

Волновые процессы и волны, которые определяются уравнением (5.6) могут быть названы магнитопотенциальными.

Представление первого уравнения Максвелла соотношением (5.1) в сочетании с вторым симметричным уравнением Максвелла даёт возможность представить при помощи этих уравнений весь спектр электродинамических процессов в материальных средах.

6. Множественность форм записи электродинамических законов

Магнитные и электрические поля могут быть выражены через векторный потенциал магнитного поля и векторный потенциал электрического поля [14]

$$\vec{H} = rot\ \vec{A}_H\,, \tag{6.1}$$

$$\vec{E} = rot\ \vec{A}_E\,, \tag{6.2}$$

Следовательно, уравнения Максвелла можно записать в терминах этих потенциалов:

$$rot\ \vec{A}_E = -\mu \frac{\partial \vec{A}_H}{\partial t}, \tag{6.3}$$

$$rot\ \vec{A}_H = \varepsilon \frac{\partial \vec{A}_E}{\partial t}. \tag{6.4}$$

Для каждого из введённых потенциалов можно получить волновое уравнение, в частности

$$rot\ rot\ \vec{A}_E = -\varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{A}_E}{\partial t^2} \tag{6.5}$$

и считать, что в пространстве распространяются не магнитные и электрические поля, а поле электрического векторного потенциала.

При этом, как легко видеть из соотношений (6.1 – 6.4), магнитное и электрическое поле определятся через этот потенциал соотношениями:

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \varepsilon \frac{\partial \vec{A}_E}{\partial t} \\ \vec{E} &= rot\ \vec{A}_E \end{aligned} . \tag{6.6}$$

Пространственная производная $rot\ \vec{A}_E$ и локальная производная по времени $\frac{\partial \vec{A}_E}{\partial t}$ связаны волновым уравнением (6.5).

Таким образом, использование только одного электрического векторного потенциала позволяет полностью решить задачу о распространении электрического и магнитного полей. Учитывая (6.6), теперь вектор Пойнтинга можно записать только через вектор $\vec{A}_E$:

$$\vec{P} = \varepsilon\left[\frac{\partial \vec{A}_E}{\partial t} \times rot\ \vec{A}_E\right].$$

Характерным является то, что при таком подходе обязательным условием распространения является наличие в данной точке пространства, как временных, так и пространственных производных одного и того же потенциала.

Данную задачу можно решить и по-другому, записав волновое уравнение для магнитного векторного потенциала:

$$rot\ rot\ \vec{A}_H = -\varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{A}_H}{\partial t^2}. \qquad (6.7)$$

При этом магнитное и электрическое поля будут определяться соотношениями

$$\vec{H} = rot\ \vec{A}_H$$

$$\vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{A}_H}{\partial t}.$$

Вектор Пойнтинга в данном случае может быть найден из следующего соотношения:

$$\vec{P} = -\mu\left[\frac{\partial \vec{A}_H}{\partial t} \times rot\ \vec{A}_H\right].$$

Пространственная производная $rot\ \vec{A}_H$ и производная по времени $\frac{\partial \vec{A}_H}{\partial t}$ связаны волновым уравнением (6.7).

Но можно поступить и по-другому, введя, например, электрические и магнитные токи

$$\vec{j}_E = rot\ \vec{H},$$

$$\vec{j}_H = rot\ \vec{E}.$$

Для этих токов тоже могут быть записаны уравнения:

$$rot\ \vec{j}_H = -\mu \frac{\partial \vec{j}_E}{\partial t},$$

$$rot\ \vec{j}_E = \varepsilon \frac{\partial \vec{j}_H}{\partial t}.$$

Эта система по своему виду и заключенной в ней информации ничем не отличается от уравнений Максвелла, и можно считать, что в пространстве распространяются магнитные или электрические токи. И решение задачи распространения при помощи данного метода опять будет содержать в себе полную информацию о процессах распространения.

Рассмотренный процесс введения новых векторных полей можно распространять в обе стороны до бесконечности, вводя все новые векторные поля. Естественно при этом следует вводить и дополнительные калибровки, Таким образом, существует бесконечное множество возможных записей электродинамических законов, но все они равноценны по заключенной в них информации. Такой подход был продемонстрирован в работе [7].

7. Краткие выводы.

Уравнения индукции и уравнения Максвелла играют очень важную роль в электродинамике. Однако пока отсутствует полная система уравнений, которая способна решать весь спектр электродинамических задач в материальных средах. В статье показано, что уравнения индукции могут быть симметризированы путём использования субстанциональной производной. Это даёт возможность получить преобразования полей в первом приближении совпадающие с преобразованиями Лоренца. Уравнения Максвелла тоже могут быть представлены в симметричной форме, однако для этого требуется введение нового понятия кинетической ёмкости. Это понятие описывает энергетические процессы, связанные с прецессионным движением магнитных моментов атомов в намагниченных средах. Вводятся понятия электрокинетических и магнитопотенциальных волы, которые описывают волновые процессы в немагнитных и намагниченных материальных средах. Показано, что уравнения электродинамики могут быть записаны множественным образом с использованием различных потенциалов и токов.

.

Список литературы

1. Арцимович Л А Что каждый физик должен знать о плазме (М.: Атомиздат, 1976)

2. Менде Ф Ф, Спицын А И Поверхностный импеданс сверхпроводников (Киев, Наукова думка, 1985)

3. Mende F F arXiv: physics/0402084

4. Mende F F arXiv: physics/0506083

5. Менде Ф Ф *Инженерная физика* (11) 10 (2012)

6. Mende F F *Global Journal of Researches in Engineering: J General Engineering* **3** (5) 51 (2014)

7. Менде Ф Ф *Инженерная физика* (2) 3 (2013)

8. Джемс Клерк Максвелл *Избранные сочинения по теории электрического поля* (Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва, 1954)

9. Генрих Герц *Электрическая сила* (С. Петербург, 1894)

10. Дж. Джексон *Классическая электродинамика* (Мир, Москва, 1965)

11. Фейнман Р, Лейтон Р, Сэндс М *Фейнмановские лекции по физике* (М: Мир, 1977)

12. Менде Ф Ф *Инженерная физика* (3) 49 (2013)

13. Никольский В В, Никольская Т И *Электродинамика и распространение радиоволн* (М: Наука, 1989)

14. Менде Ф Ф ВИНИТИ №774-В88 Деп. (1988)