Análise Termodinâmica da aceleração de uma massa

Rodrigo de Abreu
Centro de Electrodinâmica e Departamento de Física
do IST

Abstract

We analyse the acceleration of a mass with a simple structure taking into account Thermodynamics. Two situations are analysed. The first one for the application of a localized force to a point of the mass. The second one for the application of a force to the entire mass. The two situations are not equivalent. For the first situation we have an increase of temperature of the mass, resulting from an internal damping, during a transient.

Resumo

A necessidade de considerar a termodinâmica em problemas geralmente tratados como puramente mecânicos tem dado origem a diversos artigos. A análise termodinâmica da aceleração de uma massa é sobre esta mesma matéria. Através de duas análises, mostra-se em que condições a aceleração de uma massa extensa, uma caixa com um gás no seu interior, que parte do repouso, necessita de um tratamento termodinâmico. Numa 1ª análise, a aceleração é provocada por uma força aplicada num ponto. A acção desta força altera a distribuição da densidade do gás e origina um aumento de temperatura. Prova-se que este aumento de temperatura dá origem a um aumento de massa do gás. Na 2ª análise considera-se que a aceleração é devida a um campo gravitacional constante. Mostra-se que neste caso a temperatura não varia e desta forma as duas situações analisadas não são equivalentes. Da 1ª análise conclui-se que uma massa submetida a uma força variável no tempo dissipa constantemente energia no seu interior, com aumento de entropia, como se existisse uma força de atrito interno. A necessidade de considerar a termodinãmica

Introdução

A síntese entre mecânica e termodinâmica tem vindo a ser feita em diversos artigos [1-13]. As duas análises que são aqui apresentadas pretendem contribuir para esclarecer, aplicadas a um modelo concreto, aspectos conceptuais delicados: o problema da validade da mecânica do ponto aplicada a um corpo extenso [1]; o problema do significado de massa [14] e o problema da variação da massa própria, apenas como resultado da acção de uma força - sem emissão ou absorção de partículas [15].

Considera-se, em ambas as análises, uma massa acelerada, no vácuo, por uma força F constante. Esta massa é constituída pela massa M de um invólucro rígido, uma caixa, que contém um gás, com N partículas, cada uma das quais com massa m.

Demonstra-se que embora a força que actua sobre a caixa e o gás tenha igual módulo, F, o resultado da acção desta força difere. No 1º caso, a força está aplicada num ponto da caixa, e no 2º a força actua simultaneamente sobre todas as massas que constituem a caixa e o gás.

Na 1ª análise, a caixa é acelerada a partir do repouso por uma força que actua longitudinalmente, aplicada a uma das suas bases (Fig.1). Esta força que é aplicada instantaneamente, acelera a caixa e altera a distribuição da densidade de partículas no interior que, inicialmente, era uniforme. Determina-se em 1. a distribuição final de equilíbrio que se estabelece no interior da caixa e, em 1.1, calcula-se o aumento de temperatura do gás resultante da aceleração. Este aumento de temperatura está associado a um aumento de energia interna e também, mostra-se em 1.2, a um aumento de massa. Deste modo se a massa for submetida a uma força que varia constantemente e bruscamente de sentido, como quando se agita um tubo de ensaio que contém no seu interior um liquido, dissipa constantemente energia no seu interior, com aumento de entropia e com aumento de massa - existe uma força de atrito interno resultante das colisões das partículas do gás nas bases da caixa. Esta análise mostra que só durante a deformação do gás é que o conjunto caixa-gás não é equivalente a um ponto material [1].

Em 2., numa 2ª análise, considera-se que a mesma caixa está agora suspensa por um fio, na presença de um campo gravitacional constante. O módulo da força exercida pelo fio no estado de equilíbrio inicial é F, e portanto o peso da caixa e do gás tem também módulo F. A distribuição do gás no interior da caixa no estado de equilíbrio inicial é a mesma que no estado final da 1ª análise. Cortado o fio, a caixa e o gás sofrem a aceleração do campo gravitacional. Mostra-se que neste caso a temperatura do gás não varia e desta forma as duas situações analisadas não são equivalentes. Neste segundo caso, tudo se passa como se de um ponto material se tratasse. Embora exista deformação, o centro de massa do conjunto comporta-se como um ponto material dado o trabalho da força resultante ser a soma dos trabalhos das forças que actuam nos centros de massa dos sub-sistemas gás e caixa [1].

Estas duas análises contradizem algumas ideias correntes, e.g. as expostas em [1].

1. A 1ª Análise

Consideremos uma massa submetida a uma força $F = const.$ de acordo com a Fig. 1. A massa da caixa é M e o gás é constituído por N partículas em que cada uma tem massa m. A caixa inicialmente está em repouso e o gás está distribuído uniformemente no seu interior. O exterior da caixa é vácuo.

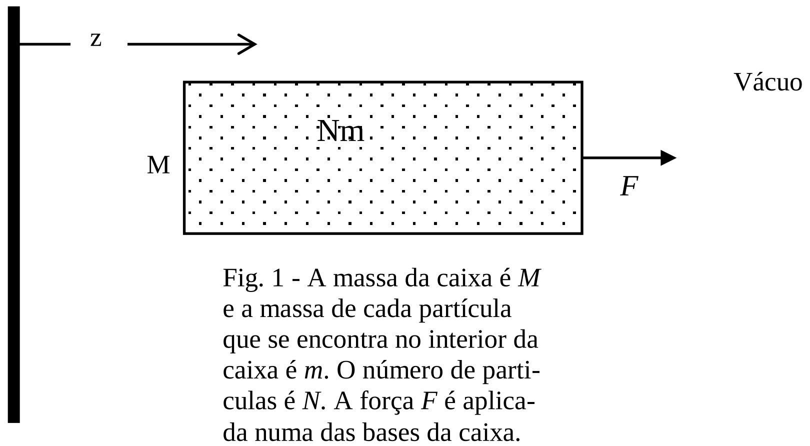

Fig. 1 - A massa da caixa é M e a massa de cada partícula que se encontra no interior da caixa é m. O número de partículas é N. A força F é aplicada numa das bases da caixa.

Quando se aplica a força F o módulo da aceleração a_{CM} do centro de massa do conjunto caixa - gás satisfaz a equação, em qualquer instante,

$$a_{CM} = \frac{F}{(Nm + M)} \qquad (1)$$

De (1)

$$F\Delta z_{CM} = \frac{1}{2}(M + Nm)v_{CM}^2 \qquad (2)$$

em que z_{CM} e v_{CM} são respectivamente a posição e a componente da velocidade do centro de massa. Para um ponto material o centro de massa coincide com o próprio ponto. Se o ponto tiver massa (M+Nm), da equação (1), deriva-se, como é bem conhecido, que o trabalho da força que actua sobre o ponto é igual á variação da energia cinética, eq. (2), e, portanto, para o centro de massa de um conjunto de pontos materiais, deriva-se relação idêntica, embora neste caso o produto da força pelo deslocamento do centro de massa não seja o trabalho da força, como se verá adiante.

O produto da força pelo deslocamento do centro de massa não é igual ao trabalho da força F, porque o gás no interior da caixa deforma-se e, consequentemente, o centro de massa desloca-se no interior da caixa. Desta forma o deslocamento do centro de massa não coincide com o deslocamento da caixa e portanto o produto da força pelo deslocamento do centro de massa não é igual ao trabalho da força. Este trabalho da força F é o produto da força pelo deslocamento da caixa, Δz_{CX} .

Por outro lado o trabalho da força F é igual à variação da energia cinética da caixa e do gás

$$F\Delta z_{CX} = \frac{1}{2}(M + Nm)v_{CM}^2 + \Delta U_{gás}^{\mathrm{int}} \qquad (3)$$

dado estarmos a admitir que a variação da energia interna U do gás é apenas cinética.

Quando o gás atinge um novo estado de equilíbrio o centro de massa permanece numa posição constante no interior da caixa, passamos a ter

$$F\Delta z_{CX} = \frac{1}{2}(M + Nm)v_{CX}^2 = F\Delta z_{CM} = \frac{1}{2}(M + Nm)v_{CM}^2 . \qquad (4)$$

A variação de energia interna do gás apenas se dá durante o regime transitório em que há deformação, ou seja durante o intervalo de tempo em que o centro de massa se desloca no interior da caixa.

Das equações (2) e (3) temos que

$$F(\Delta z_{CX} - \Delta z_{CM}) = Fd' = \Delta U_{gás}^{\mathrm{int}} \qquad (5)$$

em que d'é a distância percorrida pelo centro de massa durante a deformação no referencial da caixa (Fig.2)

$$d' = (\frac{L}{2} - z_{CM0}). \qquad (6)$$

L/2 é a posição do centro de massa antes da deformação e z_{CM0} é a posição do centro de massa depois da deformação, no referencial da caixa.

(Note-se que se o corpo estiver em movimento rectilíneo e uniforme e se o gás estiver inicialmente com uma distribuição uniforme e se for aplicada à caixa uma força de módulo *F*, mas com sentido contrário ao movimento, o centro de massa desloca-se de *d´* mas no mesmo sentido do movimento. Deste modo conclui-se que se a força *F* inverter periódicamente de sentido, o centro de massa desloca-se simétricamente em relação ao centro da caixa com aumento de energia interna do gás.)

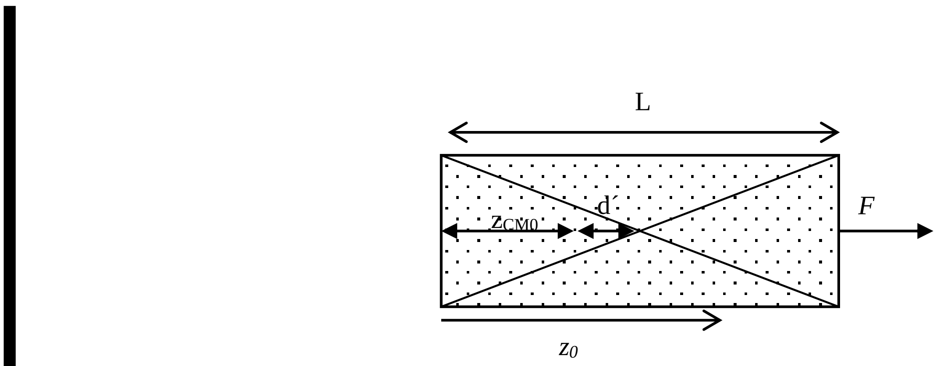

Fig.2 - O centro de massa do gás desloca-se no sentido contrário ao movimento até atingir uma posição de equilíbrio. O centro de massa da caixa que é rígida está fixo em relação ás paredes da caixa e coincide com o centro geométrico, dado estarmos a admitir que a distribuição de massa da caixa é uniforme. z_{CM0} é a ordenada do centro de massa, do conjunto caixa-gás, no referencial da caixa . z_0 é a ordenada no referencial da caixa.

A posição do centro de massa no interior da caixa é

$$z_{CM0} = \frac{M\frac{L}{2} + Nmz_{g0}}{M + Nm} \qquad (7)$$

em que z_{g0} é a posição do centro de massa do gás no referencial da caixa. De (6) e (7) temos

$$d' = \frac{Nm}{Nm + M}(\frac{L}{2} - z_{g0}). \qquad (8)$$

Se considerarmos que o gás é monoatómico, de (5), temos

$$F(\Delta z_{CX} - \Delta z_{CM}) = Fd' = \Delta U^{\text{int}}_{gás} = N\frac{3}{2}k(T_2 - T_1) \qquad (9)$$

em que k é a constante de Boltzmann e T_1 e T_2 são respectivamente as temperaturas inicial e final do gás. Da equação (9) temos que a determinação de d' em função da temperatura final T_2 permite calcular essa mesma temperatura, o que faremos a seguir.

1.1 Determinação da temperatura final do gás

O gás no referencial do centro de massa está submetido a uma aceleração constante de módulo a_{CM} que resulta do centro de massa ter uma aceleração constante de módulo a_{CM}. Mas no referencial do centro de massa a aceleração tem sentido contrário ao movimento. É como se o gás estivesse submetido a um campo gravitacional de aceleração $g = a_{CM}$. Desta forma a densidade de partículas do gás no interior da caixa, após o centro de massa deixar de se deslocar em relação á caixa, é dada por

$$n(z_0) = n(0)e^{-\frac{mg}{kT_2}z_0} \qquad (10)$$

em que z_0 é a "altura" medida em relação á base da caixa e $n(0)$ é a densidade de partículas para $z_0 = 0$. De (10) determinamos o valor de $n(0)$, dado que o número de partículas no interior da caixa é N

$$\int_0^L n(z_0)dz_0 = N = \int_0^L n(0)e^{-\frac{mg}{kT_2}z_0}dz_0 = n(0)\int_0^L e^{-\frac{mg}{kT_2}z_0}dz_0 \qquad (11)$$

$$n(0) = \frac{N}{\int_0^L e^{-\frac{mg}{kT_2}z_0}dz_0} = \frac{N}{(1 - e^{-\frac{mg}{kT_2}L})} \times \frac{mg}{kT_2} \qquad (12)$$

O centro de massa do gás no referencial da caixa é dado por

$$z_{g0} = \frac{\int_0^L z_0 \times m \times n(z_0)dz_0}{Nm} \qquad (13)$$

e de (10) e (12), vem

$$z_{g0} = \frac{Le^{-\frac{mgL}{kT_2}}}{e^{-\frac{mgL}{kT_2}} - 1} + \frac{kT_2}{mg} \qquad (14)$$

De (8), (9) e (14) temos

$$F \times \frac{Nm}{Nm+M}\left(\frac{L}{2} - \frac{Le^{-\frac{mgL}{kT_2}}}{e^{-\frac{mgL}{kT_2}} - 1} - \frac{kT_2}{mg}\right) = N\frac{3}{2}k(T_2 - T_1) \qquad (15)$$

De (15), finalmente, determina-se o valor de T_2. Para *N* e *m* conhecidos, a temperatura T_2 é tanto maior quanto maior for *F* e *L* e menor *M*. Este efeito de aumento de temperatura também se verifica se o corpo estiver em movimento e for travado por uma força *F*. Neste caso também podemos ter acelerações muito elevadas se o corpo tender para o repouso num curto intervalo de tempo, numa distância muito pequena. Por exemplo se a velocidade da caixa for 300 km/h ou seja 83,3 m/s e variar para zero num centésimo de segundo a aceleração é 833 m/s^2. Se variar para zero num milésimo de segundo passa a ser 8330 m/s^2 que é uma aceleração da mesma ordem de grandeza da que é necessária para imprimir uma velocidade de 8 km/s num segundo, velocidade necessária para colocar uma massa em órbita da terra, a baixa altitude.

1.2 A variação de massa

Nas condições desta 1ª análise vamos demonstrar que a acção da força *F* implica necessariamente uma variação de massa do gás e portanto uma variação de massa do conjunto gás-caixa. De facto, a teoria da relatividade mostra que a energia e a massa estão associadas através da fórmula de Einstein $E = m\,c^2$. Para baixas velocidades, esta fórmula é uma boa aproximação do resultado que se obtém através da análise clássica, que na 1ª análise deu o resultado expresso na equação (3). Essa equação pode portanto ser escrita na forma

$$F\Delta z_{CX} = m_2c^2 - m_1c^2 = \frac{m_{02}}{(1-\frac{v_{CM}^2}{c^2})^{\frac{1}{2}}}c^2 - m_{01}c^2 \cong \frac{1}{2}(M+Nm)v_{CM}^2 + \Delta U_{gás}^{\text{int}} \qquad (16)$$

em que m_{02} e m_{01} representam, respectivamente, a massa do conjunto caixa - gás, em dois estados: após o centro de massa do gás ter atingido a posição de equilíbrio dada por (14) e, portanto, quando as velocidades dos centros de massa da caixa e do gás forem $v_{CM;}$ no início da actuação da força *F* em que a velocidade do centro de massa era zero e portanto $m_1 = m_{01}$. Por outro lado se a velocidade do centro de massa for muito inferior a *c* podemos escrever

$$F\Delta z_{CX} = \frac{m_{02}}{(1-\frac{v_{CM}^2}{c^2})^{\frac{1}{2}}}c^2 - m_{01}c^2 = \frac{1}{2}m_{02}v_{CM}^2 + m_{02}c^2 - m_{01}c^2. \qquad (17)$$

Comparando, (17) e (16), pode-se afirmar que darão valores numéricos aproximados se

$$m_{02}c^2 - m_{01}c^2 = \Delta U_{gás}^{\text{int}} \qquad (18)$$

e

$$m_{01} = (M + Nm) \qquad (19)$$

$$m_{02} = (M + Nm + \frac{\Delta U_{gás}^{\text{int}}}{c^2}) \qquad (20)$$

em que

$$(M + Nm) >> \frac{\Delta U_{gás}^{\text{int}}}{c^2} \qquad (21)$$

Da expressão (20) conclui-se que, nas condições da 1ª análise, a acção de uma força sobre a massa deformável do gás faz com que a massa do conjunto gás-caixa varie de $\Delta U_{gás}/c^2$. Esta variação resulta da energia interna da massa deformável variar durante o regime transitório, até que a distribuição de massa do gás atinga um novo estado de equilíbrio, imposto pela aceleração no referencial próprio, no referencial do centro de massa. De facto quando a força actua no instante inicial sobre a caixa, não actua imediatamente na totalidade da massa do gás. As forças exercidas pelo gás sobre as duas bases da caixa ainda são iguais porque o gás ainda está distribuido uniformemente. Só quando o gás atinge a distribuição final de equilíbrio é que a força *F* actua sobre a massa total do gás, "sente" a massa total da caixa-gás. Esta interpretação do conceito de massa é complementar (alternativa) da interpretação electromagnética [14]. Durante esse intervalo de tempo, em que o centro de massa se desloca no interior da caixa, o trabalho realizado pela força *F* em parte vai para energia cinética da caixa, de translação. Em parte para a energia cinética de translação do gás. E em parte para energia interna do gás. Desta forma, para um corpo extenso, a variação de massa resulta do efeito da aceleração, dado que não existe emissão ou absorção de partículas (como é implicitamente admitido num artigo recentemente publicado - "*the term* $c^2\ dm_0$ *keeps track, <u>among other things</u>, of emission and absortion of radiation (or particles)*" - sublinhado nosso [15]). Após o gás atingir a distribuição de equilíbrio o trabalho da força *F* vai integralmente para energia cinética de translação da caixa e do gás. É como se de um ponto material se tratasse.

2. A 2ª Análise

Consideremos que a caixa está suspensa por um fio num campo gravitacional de aceleração de módulo *g* (Fig. 3). O valor de *F*, módulo da força exercida pelo fio, é

$$F = (M + Nm)g \qquad (22)$$

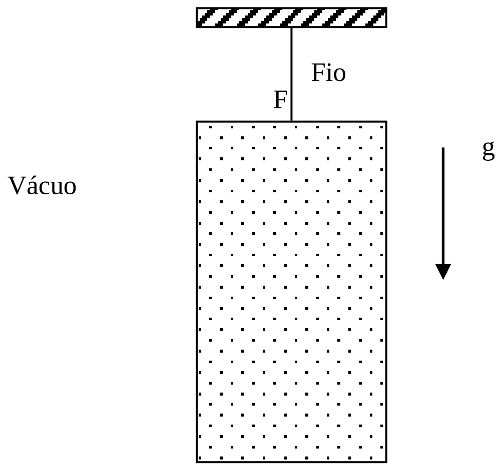

Fig.3 - Uma caixa de massa *M* encontra-se presa por um fio que exerce uma força *(M+Nm)g*. *Nmg* é o peso do gás que se encontra no seu interior.

Neste caso, como é bem conhecido, a força peso de módulo *F*, é equivalente a uma força aplicada no centro de massa. Cortado o fio a aceleração do centro de massa é *g* e o trabalho da força peso é dada por (2). A variação da energia cinética interna do gás é zero. Embora a distribuição da densidade do gás no interior da caixa se altere ficando uniforme, a variação da energia cinética do gás é zero. De facto temos que durante a deformação do gás no interior da caixa as energias cinéticas e potenciais da caixa, E_{cinCX} e E_{potCX} e as energias cinéticas e potenciais do gás, E_{cing} e E_{potg} satisfazem a lei de conservação da energia

$$E_{cinCX} + E_{potCX} + E_{cing} + E_{potg} = const. \qquad (23)$$

ou

$$\Delta E_{cinCX} + \Delta E_{potCX} + \Delta E_{cing} + \Delta E_{potg} = 0. \qquad (24)$$

Como após a deformação as velocidades dos centros de massa da caixa e do gás são iguais à velocidade do centro de massa do conjunto caixa-gás, temos, de (24)

$$\frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} N m v_{CM}^2 + \Delta U_{gás}^{\text{int}} = -(\Delta E_{potCX} + \Delta E_{potg}) \qquad (25)$$

De (25), como se demonstra à frente, temos que

$$\Delta U_{gás}^{\text{int}} = 0 \qquad (26)$$

(26) resulta da definição de centro de massa e da força *F* estar aplicada no centro de massa.

De facto, o centro de massa define-se por

$$z_{CM} = \frac{M z_{CMCX} + N m z_{CMg}}{(M + Nm)} \qquad (27)$$

e, portanto,

$$(M + Nm) g \Delta z_{CM} = M g \Delta z_{CMCX} + N m g \Delta z_{CMg} = -\Delta E_{potcx} - \Delta E_{potg} \qquad (28)$$

Como o trabalho da força *F* é dado por

$$(M + Nm) g \Delta z_{CM} = \frac{1}{2} (M + Nm) v_{CM}^2 = -\Delta E_{potcx} - \Delta E_{potg} \qquad (29)$$

dado a força F estar aplicada no centro de massa e dado (28). Comparando (29) com (25) temos (26). Concluimos que não há variação de energia interna.

A força peso da caixa actua no centro de massa da caixa. A força peso do gás actua no centro de massa do gás. E a força peso resultante actua no centro de massa do conjunto. Neste caso, embora tenhamos um sistema deformável, o trabalho da resultante das forças exteriores é igual à soma dos trabalhos das forças exteriores que estão aplicadas nos centros de massa dos respectivos sub-sistemas. Contrariamente ao que se passa na 1ª análise, o trabalho da força F contribui integralmente para o aumento da energia cinética do conjunto caixa-gás, que, neste sentido, se comporta como se fosse um ponto material.

Conclusão

O estudo da actuação de forças sobre corpos com estrutura exige duas análises distintas, a que se procedeu no presente artigo, e relacionadas com diferentes condições iniciais, a que se encontram associadas ou não regimes transitórios.

Na primeira análise, Análise I, estudou-se a acção duma força aplicada na fronteira exterior dum corpo. Concluiu-se que quando o corpo se põe em movimento a aceleração duma tal força altera a temperatura no interior do corpo, a sua energia interna e a massa. Isto é consequência de a força no início da sua acção estar simplesmente aplicada na fronteira exterior do corpo, e necessitar de um regime transitório para estender a sua acção ao interior do corpo deformando-o. Quando o corpo pára de se deformar, tudo se passa como se a força actuasse sobre a massa total do corpo, como se fosse uma partícula material.

Porém o campo gravítico exige uma análise diversa, aqui exposta na Análise II. Concluiu-se que neste caso não há variação da temperatura do corpo e da sua energia interna, pois como o corpo sempre esteve mergulhado no campo gravítico, a respectiva força-peso actuou sempre sobre todas e cada uma das suas componentes. Este facto mostra a não necessidade de qualquer regime transitório. Tudo se passa como se de uma partícula material se tratasse.

Estas conclusões contradizem algumas ideias correntes, e.g. as expostas em [1]. Assim o conceito de trabalho mecânico tal como é correntemente leccionado tem mais generalidade do que a sua simples aplicação ao ponto material e ao corpo rígido em translação pura.

Na verdade no caso contemplado na análise II, embora o corpo não seja rígido, o trabalho da resultante está bem definido e é igual à variação da energia cinética do corpo. Este comporta-se como um ponto material. Mas mesmo no caso da Análise I o trabalho da resultante F das forças, também está bem definido pois é o produto da força F pelo deslocamento do invólucro. E a partir do corpo estar deformado é igual à variação da energia cinética do corpo globalmente considerado, exactamente como num ponto material, ou um corpo rígido em movimento de translação.

Esta abordagem aplica-se ainda a outras situações com as necessárias adaptações, e.g. um corpo a deslizar ao longo dum plano inclinado e no caso dum automóvel.

No caso dum corpo a deslizar num plano inclinado a força de atrito (na qual se deve incluir a resistência do ar) não conduz a um aumento, mas sim a uma diminuição da energia cinética macroscópica do corpo, em relação à que teria se não houvesse atrito, e a um aumento da energia interna do corpo. Trata-se da combinação da Análise I com a Análise II. Quando o corpo inicia o seu movimento a força de atrito é uma força exterior que ao ser transportada para o interior requer um regime transitório. Se o plano for suficientemente extenso e se o regime transitório for suficientemente curto, quando este termina e deixa de haver deformação a energia interna do corpo é constante, passando o corpo a comportar-se como um ponto material. Então o trabalho da força de atrito é em módulo o produto da força de atrito pelo deslocamento do corpo, igual ao deslocamento do centro de massa. Donde se conclui que o deslocamento efectivo só é menor que o deslocamento do centro de massa durante o regime transitório, pela acção da força de atrito, sem necessitar de quaisquer explicações adicionais.

O caso dos automóveis também é interessante. Quando um automóvel está em movimento rectilíneo e uniforme, isso significa que o seu motor produz uma força que contraria a força de resistência do ar, e a de atrito nas rodas. Donde a força global é nula e a variação de energia cinética é igualmente nula. Neste caso a variação da posição do centro de massa do carro, é igual à variação da posição do carro, e tudo se trata como se fosse um ponto material. Não existe deformação. Porém no caso de existir aceleração constante, e após dar-se a deformação, há que ter em conta não só a alteração da energia interna dos pneus, mas também a variação da energia cinética macroscópica de rotação dos pneus. Não se trata de deformação do corpo em regime estacionário [1], mas sim de um problema de massas aceleradas, em rotação com variação de energia interna, problema este a exigir um tratamento próprio.

O presente artigo mostra de forma clara a importância do estudo de regimes transitórios no estudo da mecânica dos corpos extensos. Mostra ainda que este estudo força a inclusão da termodinâmica nos estudos de mecânica tradicional. Esta combinação, que exige uma reflexão profunda por parte dos formadores, não pode ser escamoteada. Embora pareça mais complexa, poderá revelar-se mais interessante aos olhos dos alunos, por evidenciar fenomenologia insuspeita. Este é o caminho formativo a seguir.

Referências

1. Tremoço, João J. e de Sousa, Célia A. "*Sobre alguns problemas de mecânica do 10º ano*", Gazeta de Física, Vol. 23, Fasc. 4, 10-15 (2000).
2. Abreu, R. http://xxx.lanl.gov/abs/physics/0210124 (2002).
3. Abreu, R. http://xxx.lanl.gov/abs/physics/0210096 (2002).
4. Abreu, R. http://xxx.lanl.gov/abs/physics/0210084 (2002).
5. Abreu, R. http://xxx.lanl.gov/abs/physics/0207022 (2002).
6. Abreu, R. http://xxx.lanl.gov/abs/cond-mat/0205566 (2002).
7. Penchina, C. Am. J. Phys. 46, 295 (1978).
8. Erlichson, H. Am. J. Phys. 45, 769 (1977).
9. Arons, A. B. The Physics Teacher 27, 506 (1989).
10. Sherwood, B. A. e Bernard, W. H. Am. J. Phys. 52, 1001 (1984).
11. Leff, H. S. e Mallinckrodt, A. J. Am. J. Phys. 61, 121 (1993).
12. Mallinckrodt, A. J. e Leff, H. S. Am. J. Phys. 60, 356 (1992).
13. Leff, H. S. Am. J. Phys. 62, 120 (1994).
14. Haisch, B. Rueda, A. Puthoff, H. Phys Rev. A, 49, 678-694 (1994).

15. Antippa, A.F. *On the concept of kinetic energy* Can. J. Phys. 78, 883-899 (2000).

Agradecimentos

Agradeço aos Professores A. A. da Costa e Jorge Loureiro, do IST, as críticas, sugestões e revisão do texto.