Relatividade Especial Virtual - Uma Generalização da Relatividade Especial de Einstein

Edigles Guedes

e-mail: edigles.guedes@gmail.com

24 de junho de 2012.

RESUMO

Nós construímos a Teoria da Relatividade Especial Virtual que é uma generalização a Teoria da Relatividade Especial de Einstein.

Parte I. A Generalização da Transformação de Lorentz e Aplicações

1. GENERALIZAÇÃO DAS TRANSFORMAÇÕES DE LORENTZ

1.1. Primeira experiência imaginária.

Façamos a seguinte experiência de pensamento envolvendo três observadores O, O_1 and O_2. Suponhamos que O_1 se move relativamente a O, com uma velocidade de módulo v_1 no sentido positivo dos eixos x e x_1; por sua vez, O_2 se move relativamente a O, com uma velocidade de módulo v_2 no sentido positivo dos eixos x e x_2. Os planos xy, $x_1 y_1$ e $x_2 y_2$ são sempre coincidentes e as origens de seus sistemas de referência coincidem no instante $t = t_1 = t_2 = 0$. Neste instante O_2 produz uma frente de onda luminosa, que se expande a partir do ponto de emissão com velocidade de módulo c em todas as direções. Portanto, segundo o observador O_2 a frente de onda em um tempo t_2 será uma esfera, com centro em sua origem, de raio $r_2 = ct_2$. As coordenadas de qualquer ponto pertencente à frente de onda, neste instante, vão satisfazer a seguinte equação de uma esfera:

$$x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = c^2 t_2^2. \tag{1.1}$$

Do ponto de vista do observador O_1 a frente de onda em um tempo t_1 também é uma esfera, porém, seu raio é $r_1 = ct_1$, e satisfaz à equação:

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = c^2 t_1^2. \tag{1.2}$$

Além disso, do ponto de vista do observador O, é novamente verdadeiro que a luz se expande de seu ponto de emissão, a origem, com velocidade de módulo c em todas as direções. Assim sendo, a frente de onda em um tempo t, também, é uma esfera, cujo raio é $r = ct$, e satisfazendo à equação:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2. \tag{1.3}$$

É fácil verificar que a seguinte transformação de Lorentz satisfaz a equação (1.3) de acordo com a equação (1.2):

$$x = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} (x_1 - v_1 t_1)$$

$$y = y_1 \tag{1.4}$$

$$z = z_1$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} \left(t_1 - \frac{v_1 x_1}{c^2}\right)$$

e, por sua vez, a transformação de Lorentz, logo abaixo, satisfaz a equação (1.3) de acordo com a equação (1.1):

$$x = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} (x_2 - v_2 t_2)$$

$$y = y_2 \tag{1.5}$$

$$z = z_2$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} \left(t_2 - \frac{v_2 x_2}{c^2}\right).$$

Ao compararmos x, y, z e t em cada sistema de equações (1.4) e (1.5), nós achamos

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} (x_1 - v_1 t_1) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} (x_2 - v_2 t_2)$$

$$y_1 = y_2$$

$$z_1 = z_2$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} \left(t_1 - \frac{v_1 x_1}{c^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} \left(t_2 - \frac{v_2 x_2}{c^2}\right),$$

ou seja,

$$x_1 = \sqrt{\frac{c^2 - v_1^2}{c^2 - v_2^2}} (x_2 - v_2 t_2) + v_1 t_1$$

$$y_1 = y_2$$

$$z_1 = z_2$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{c^2 - v_1^2}{c^2 - v_2^2}} \left(t_2 - \frac{v_2 x_2}{c^2}\right) + \frac{v_1 x_1}{c^2}.$$

Por conveniência de notação, façamos $x_1 = x, y_1 = y, z_1 = z, t_1 = t, v_1 = v, x_2 = x', y_2 = y', z_2 = z', t_2 = t'$ e $v_2 = v'$

$$x = \sqrt{\frac{c^2 - v^2}{c^2 - v'^2}}(x' - v't') + vt$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$t = \sqrt{\frac{c^2 - v^2}{c^2 - v'^2}}\left(t' - \frac{v'x'}{c^2}\right) + \frac{vx}{c^2}.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} x' &= \sqrt{\frac{c^2 - v'^2}{c^2 - v^2}}(x - vt\ ) + v't' \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \sqrt{\frac{c^2 - v'^2}{c^2 - v^2}}\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) + \frac{v'x'}{c^2}, \end{aligned} \tag{1.6}$$

isto é,

$$\begin{aligned} x' &= \sqrt{\frac{c^2 - v'^2}{c^2 - v^2}}\left[\left(\frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2}\right)x - c^2\left(\frac{v - v'}{c^2 - v'^2}\right)t\right] \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \sqrt{\frac{c^2 - v'^2}{c^2 - v^2}}\left[\left(\frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2}\right)t - \left(\frac{v - v'}{c^2 - v'^2}\right)x\right], \end{aligned} \tag{1.7}$$

É interessante observar que, quando $\frac{v\prime}{c}$ tende a zero, as equações tende à transformação de Lorentz; e que, quando ambos, $\frac{v}{c}$ e $\frac{v\prime}{c}$, tendem a zero, surgem às equações de transformação de Galileu. Por conseguinte, estamos diante de uma generalização da transformação de Lorentz.

2. EQUAÇÕES DE TRANSFORMAÇÃO PARA VELOCIDADE

Medido num referencial O o vetor velocidade tem componentes:

$$u_x = \frac{dx}{dt}, \qquad u_y = \frac{dy}{dt}, \qquad u_z = \frac{dz}{dt}.$$

Por outro lado, o vetor velocidade, medido no referencial O' tem componentes

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'}, \qquad u'_y = \frac{dy'}{dt'}, \qquad u'_z = \frac{dz'}{dt'},$$

logo, se tomarmos as diferenciais da transformação de coordenadas em (1.6), lembrando que v e v' são constantes, segue-se

$$\begin{aligned} dx' &= \sqrt{\frac{c^2 - v'^2}{c^2 - v^2}}(dx - vdt) + v'\,dt' \\ dy' &= dy \\ dz' &= dz \\ dt' &= \sqrt{\frac{c^2 - v'^2}{c^2 - v^2}}\left(dt - \frac{vdx}{c^2}\right) + \frac{v'dx'}{c^2}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} dx' &= \sqrt{\frac{c^2 - v'^2}{c^2 - v^2}}\left[\left(\frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2}\right)dx - c^2\left(\frac{v - v'}{c^2 - v'^2}\right)dt\right] \\ dy' &= dy \\ dz' &= dz \\ dt' &= \sqrt{\frac{c^2 - v'^2}{c^2 - v^2}}\left[\left(\frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2}\right)dt - \left(\frac{v - v'}{c^2 - v'^2}\right)dx\right]. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Por conseguinte, nós obtemos

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\sqrt{\frac{c^2 - v'^2}{c^2 - v^2}}\left[\left(\frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2}\right)dx - c^2\left(\frac{v - v'}{c^2 - v'^2}\right)dt\right]}{\sqrt{\frac{c^2 - v'^2}{c^2 - v^2}}\left[\left(\frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2}\right)dt - \left(\frac{v - v'}{c^2 - v'^2}\right)dx\right]}$$

$$= \frac{\left(\frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2}\right)dx - c^2\left(\frac{v - v'}{c^2 - v'^2}\right)dt}{\left(\frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2}\right)dt - \left(\frac{v - v'}{c^2 - v'^2}\right)dx} = \frac{\left(\frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2}\right)\frac{dx}{dt} - c^2\left(\frac{v - v'}{c^2 - v'^2}\right)\frac{dt}{dt}}{\left(\frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2}\right)\frac{dt}{dt} - \left(\frac{v - v'}{c^2 - v'^2}\right)\frac{dx}{dt}}$$

$$= \frac{\left(\frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2}\right)u_x - c^2\left(\frac{v - v'}{c^2 - v'^2}\right)}{\left(\frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2}\right) - \left(\frac{v - v'}{c^2 - v'^2}\right)u_x};$$

$$u'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\sqrt{\frac{c^2 - v'^2}{c^2 - v^2}}\left[\left(\frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2}\right)dt - \left(\frac{v - v'}{c^2 - v'^2}\right)dx\right]}$$

$$= \frac{\frac{dy}{dt}}{\sqrt{\frac{c^2 - v'^2}{c^2 - v^2}}\left[\left(\frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2}\right)\frac{dt}{dt} - \left(\frac{v - v'}{c^2 - v'^2}\right)\frac{dx}{dt}\right]} \qquad (2.3)$$

$$= \frac{u_y}{\sqrt{\frac{c^2 - v'^2}{c^2 - v^2}}\left[\left(\frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2}\right) - \left(\frac{v - v'}{c^2 - v'^2}\right)u_x\right]};$$

$$u'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{\sqrt{\frac{c^2 - v'^2}{c^2 - v^2}}\left[\left(\frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2}\right)dt - \left(\frac{v - v'}{c^2 - v'^2}\right)dx\right]}$$

$$= \frac{\frac{dz}{dt}}{\sqrt{\frac{c^2 - v'^2}{c^2 - v^2}}\left[\left(\frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2}\right)\frac{dt}{dt} - \left(\frac{v - v'}{c^2 - v'^2}\right)\frac{dx}{dt}\right]}$$

$$= \frac{u_z}{\sqrt{\frac{c^2 - v'^2}{c^2 - v^2}}\left[\left(\frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2}\right) - \left(\frac{v - v'}{c^2 - v'^2}\right)u_x\right]}.$$

Note que:

(i) quando v'/c tende a zero, (2.3) tende às equações que seriam obtidas da transformação de Lorentz:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}u_x};$$

$$u'_y = \frac{u_y\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - \frac{v}{c^2}u_x};$$

$$u'_z = \frac{u_z\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - \frac{v}{c^2}u_x}.$$

(ii) entretanto, quando v/c tende a zero, (2.3) tende às seguintes equações:

$$u'_x = \frac{u_x + v'}{1 + \frac{v'}{c^2}u_x};$$

$$u'_y = \frac{u_y\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \frac{v}{c^2}u_x};$$

$$u'_z = \frac{u_z\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \frac{v}{c^2}u_x}.$$

Por outro lado, por simples manipulação algébrica em (2.3), nós encontramos

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\left(\frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2}\right)u'_x + c^2\left(\frac{v - v'}{c^2 - v'^2}\right)}{\left(\frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2}\right) + \left(\frac{v - v'}{c^2 - v'^2}\right)u'_x};$$

$$u_y = \frac{dy}{dt} = \sqrt{\frac{c^2 - v'^2}{c^2 - v^2}}\left[\left(\frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2}\right) - \left(\frac{v - v'}{c^2 - v'^2}\right)u_x\right]u'_y; \tag{2.4}$$

$$u_z = \frac{dz}{dt} = \sqrt{\frac{c^2 - v'^2}{c^2 - v^2}}\left[\left(\frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2}\right) - \left(\frac{v - v'}{c^2 - v'^2}\right)u_x\right]u'_z.$$

Consequentemente,

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\left(\frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2}\right)u'_x + c^2\left(\frac{v - v'}{c^2 - v'^2}\right)}{\left(\frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2}\right) + \left(\frac{v - v'}{c^2 - v'^2}\right)u'_x}$$

$$u_y = \frac{dy}{dt} = \sqrt{\frac{c^2 - v'^2}{c^2 - v^2}}\left\{\left(\frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2}\right) - \left(\frac{v - v'}{c^2 - v'^2}\right)\left[\frac{\left(\frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2}\right)u'_x + c^2\left(\frac{v - v'}{c^2 - v'^2}\right)}{\left(\frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2}\right) + \left(\frac{v - v'}{c^2 - v'^2}\right)u'_x}\right]\right\}u'_y \tag{2.5}$$

$$u_z = \frac{dz}{dt} = \sqrt{\frac{c^2 - v'^2}{c^2 - v^2}}\left\{\left(\frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2}\right) - \left(\frac{v - v'}{c^2 - v'^2}\right)\left[\frac{\left(\frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2}\right)u'_x + c^2\left(\frac{v - v'}{c^2 - v'^2}\right)}{\left(\frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2}\right) + \left(\frac{v - v'}{c^2 - v'^2}\right)u'_x}\right]\right\}u'_z.$$

O módulo da velocidade é dado por

$$u^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2. \tag{2.6}$$

3. A Contração do Espaço e Dilatação do Tempo

Seja $dt = 0$ na primeira equação do sistema (2.2), nós temos

$$dx' = \sqrt{\frac{c^2 - v'^2}{c^2 - v^2}}\left(\frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2}\right)dx. \tag{3.1}$$

Aqui, é salutar observarmos que:

(i) quando $\frac{v'}{c}$ tende a 0 em (3.1), achamos a equação da contração do espaço de Lorentz, isto é,

$$dx' = \frac{dx}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \Leftrightarrow dx = \sqrt{1 - v^2/c^2}\,dx'; \tag{3.2}$$

(ii) quando $\frac{v}{c}$ tende a 0 em (3.1), achamos outra contração do espaço, antes não prevista pela relatividade especial de Einstein, isto é,

$$dx' = \frac{dx}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}} \Leftrightarrow dx = \sqrt{1 - v'^2/c^2}\, dx'. \tag{3.3}$$

Seja $dx' = 0$ na primeira equação do sistema (2.2), então,

$$dx' = \sqrt{\frac{c^2 - v'^2}{c^2 - v^2}} \left[\left(\frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2} \right) dx - c^2 \left(\frac{v - v'}{c^2 - v'^2} \right) dt \right] = 0 \Rightarrow$$

$$dx = c^2 \left(\frac{v - v'}{c^2 - v'v} \right) dt.$$

e substituindo esta na quarta equação do sistema (2.2), achamos

$$dt' = \sqrt{\frac{c^2 - v'^2}{c^2 - v^2}} \left[\left(\frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2} \right) - c^2 \left(\frac{v - v'}{c^2 - v'^2} \right) \left(\frac{v - v'}{c^2 - v'v} \right) \right] dt \Rightarrow$$

$$dt' = \sqrt{\frac{c^2 - v'^2}{c^2 - v^2}} \left(\frac{c^2 - v^2}{c^2 - v'v} \right) dt. \tag{3.4}$$

Logo, é de bom alvitre observar que:

(i) quando $\frac{v'}{c}$ tende a 0 em (3.4), achamos a equação da dilatação do tempo, ou seja,

$$dt' = \sqrt{1 - v^2/c^2}\, dt \Leftrightarrow dt = \frac{dt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \tag{3.5}$$

(ii) quando $\frac{v}{c}$ tende a 0 em (3.4), deparamo-nos com uma dilatação do tempo, antes não prevista pela relatividade especial de Einstein, ou seja,

$$dt' = \sqrt{1 - v'^2/c^2}\, dt \Leftrightarrow dt = \frac{dt'}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}}. \tag{3.6}$$

Por outro lado, percebemos que, ao dividirmos a quarta equação de (2.2) por dt, nós podemos escrever

$$\frac{dt'}{dt} = \sqrt{\frac{c^2 - v'^2}{c^2 - v^2}} \left[\left(\frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2} \right) - \left(\frac{v - v'}{c^2 - v'^2} \right) \frac{dx}{dt} \right]$$

$$= \sqrt{\frac{c^2 - v'^2}{c^2 - v^2}} \left[\left(\frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2} \right) - \left(\frac{v - v'}{c^2 - v'^2} \right) u_x \right]. \tag{3.7}$$

Note que:

(i) quando $\frac{v'}{c}$ tende a 0 em (3.7), achamos

$$\frac{dt'}{dt} = \frac{1 - \frac{v}{c^2} u_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}};$$

(ii) contudo, quando $\frac{v}{c}$ tende a 0 em (3.7), encontramos

$$\frac{dt'}{dt} = \frac{1 + \frac{v'}{c^2} u_x}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}}.$$

Haja vista estas duas contrações do espaço e duas dilatações do tempo, praticamente iguais, distintas apenas por v ou v', e a troca de sinais, nessas duas últimas equações, houvemos por bem de nomear essa teoria de relatividade especial virtual.

Parte II. A Dinâmica de Uma Partícula

4. A MASSA RELATIVÍSTICA VIRTUAL

Para calcularmos a massa relativística virtual, consideremos a seguinte experiência de pensamento, já clássica em mecânica relativística [1, Apêndice A]: Quando medidos pelo referencial x, y, z, t indicado pelas equações de (1.7), os observadores O_1 e O_2 estão se movendo em direções paralelas ao eixo x com velocidades iguais em módulos e com sentidos opostos. Esses observadores carregam consigo partículas idênticas, podemos imaginar duas bolas de bilhar B_1 e B_2, cada qual com massa m_0 medidas quando elas estão em repouso. Na iminência de passarem um pelo outro, cada qual atira sua bola de maneira tal que ela atinja a outra bola com uma velocidade que, de seu próprio ponto de vista, seja perpendicular ao eixo x e tenha módulo u.

Quando observados no referencial x, y, z, t, B_1 e B_2 se aproximarão ao longo da trajetórias paralelas que fazem o ângulo $\theta_{1_i} = \theta_{2_i}$ com o eixo x, e retornam sobre trajetórias fazendo ângulos θ_{1_f} e θ_{2_f} em relação a este eixo. Supondo que o movimento se conserva e a colisão é elástica, é fácil demonstrar que $\theta_{1_f} = \theta_{2_f}$, e que os módulos das velocidades das bolas são os mesmos, tanto antes quanto depois da colisão. O valor real de θ_{1_f} e θ_{2_f} depende do parâmetro de impacto d, que supomos ser tal que $\theta_{1_f} = \theta_{1_i}$.

Consideremos, portanto, o processo como ele é visto do ponto de vista de O_1. Portanto, O_1 atira B_1 ao longo de uma linha paralela a seu eixo y com a velocidade de módulo u, que suporemos muito pequena em comparação com c. Ela retorna ao longo da mesma linha com velocidade de mesmo módulo e com sentido oposto. Ele vê B_2 manter uma componente x da velocidade constante e igual a $v - v'$, a velocidade de O_2 em relação ao O_1, que vamos supor ser comparável a c. De O_1 observa-se que a componente da velocidade de B_2 ao longo do eixo y muda de sinal durante a colisão, permanecendo, contudo, um módulo constante. Para calcularmos este módulo, percebemos que a componente y da velocidade de B_2, quando medida por O_2, é u. Por conseguinte, transformamos isto para o referencial O_1 com auxílio da segunda expressão de (2.3) e obtemos $\frac{u}{\sqrt{\frac{c^2-v'^2}{c^2-v^2}\left(\frac{c^2-v'v}{c^2-v'^2}\right)}}$ para o valor da componente y da velocidade de B_2, quando medida por O_1.

Os momentos na direção y, tanto de B_1 quanto de B_2, medidos no referencial O_1, simplesmente mudam de sinal durante a colisão. Em consequência, o momento total na direção y do sistema isolado de duas bolas que colidem muda de sinal. Se a lei de conservação do momento for válida, ou seja,

$$\left[\sum_{\text{todas as partículas}} \boldsymbol{p}\right]_{\text{inicial}} = \left[\sum_{\text{todas as partículas}} \boldsymbol{p}\right]_{\text{final}},$$

o momento total na direção de y antes da colisão dever ser igual ao momento na direção y depois. Isto pode ser verdade apenas se a componente y total do momento do sistema, medido por O_1 for zero antes da colisão. Calculando as componentes y da velocidade, conforme a definição clássica de momento de uma partícula

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}, \tag{4.1}$$

e igualando sua soma a zero, obtemos uma equação que é obviamente inconsistente, se insistirmos que as duas massas têm o valor m_0, a mesma que elas têm quando as massas são medidas em referenciais nos quais estão em repouso. A razão disto é que segundo O_1 o módulo da componente da velocidade de B_1 na direção y é u, enquanto que o módulo da componente da velocidade de B_2 na direção y é $\frac{u}{\sqrt{\frac{c^2-v'^2}{c^2-v^2}\left(\frac{c^2-v'v}{c^2-v'^2}\right)}}$.

Entretanto, caso façamos com que a massa de uma partícula seja função do módulo de seu vetor velocidade total, podemos satisfazer à lei da conservação do momento. Como u é muito pequeno, quando comparado a $v - v'$, o módulo do vetor velocidade de B_2 medido por O_1 é basicamente $v - v'$. O módulo do vetor velocidade de B_1 visto por O_1 é exatamente u. Por conseguinte, em O_1 escreveríamos a lei da conservação do momento para as componentes y como

$$m(u)u - m(v,v')\frac{u}{\sqrt{\frac{c^2-v'^2}{c^2-v^2}\left(\frac{c^2-v'v}{c^2-v'^2}\right)}} = 0$$

ou

$$m(u) = \frac{m(v,v')}{\sqrt{\frac{c^2-v'^2}{c^2-v^2}\left(\frac{c^2-v'v}{c^2-v'^2}\right)}}.$$

Visto que u é muito pequeno em comparação a c, podemos fazer $m(u) = m_0$ e obter

$$m(v,v') = \sqrt{\frac{c^2-v'^2}{c^2-v^2}}\left(\frac{c^2-v'v}{c^2-v'^2}\right)m_0. \tag{4.2}$$

A massa $m(v,v')$ é chamada massas relativística virtual da partícula, e m_0 é denotada por massa de repouso.

Note que:

(i) quando $\frac{v'}{c}$ tende a 0 em (4.2), achamos

$$m(v)=\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}};$$

(ii) quando $\frac{v}{c}$ tende a 0 em (4.2), encontramos

$$m(v')=\frac{m_0}{\sqrt{1-v'^2/c^2}}.$$

5. A EQUAÇÃ DE TRANSFORMAÇÃO PARA MASSA

De acordo com a equação (4.2) a massa de uma dada partícula será medida diferentemente em diferentes conjuntos de coordenadas, visto que a velocidade é diferente. Nós, facilmente, obtemos para a transformação de massa

$$m=\frac{m'}{\sqrt{\frac{c^2-v'^2}{c^2-v^2}}\left\{\left(\frac{c^2-v'v}{c^2-v'^2}\right)-\left(\frac{v-v'}{c^2-v'^2}\right)\left[\frac{\left(\frac{c^2-v'v}{c^2-v'^2}\right)u'_x+c^2\left(\frac{v-v'}{c^2-v'^2}\right)}{\left(\frac{c^2-v'v}{c^2-v'^2}\right)+\left(\frac{v-v'}{c^2-v'^2}\right)u'_x}\right]\right\}}. \quad (5.1)$$

6. UMA EQUAÇÃO ÚTIL PARA v'

Nós elevamos ao quadrado a equação da massa relativística virtual (8.2), encontrando

$$m^2(v,v')=\frac{c^2-v'^2}{c^2-v^2}\left(\frac{c^2-v'v}{c^2-v'^2}\right)^2 m_0^2,$$

$$\frac{m^2(v,v')}{m_0^2}=\frac{(c^2-v'v)^2}{(c^2-v^2)(c^2-v'^2)},$$

$$m^2(v,v')\left[(c^2-v^2)(c^2-v'^2)\right]=m_0^2(c^2-v'v)^2,$$

$$m^2(v,v')(c^2-v^2)c^2-m^2(v,v')(c^2-v^2)v'^2=m_0^2c^4-2m_0^2c^2vv'+m_0^2v^2v'^2,$$

$$[m_0^2v^2+m^2(v,v')(c^2-v^2)]v'^2-2m_0^2c^2vv'+[m_0^2c^2-m^2(v,v')(c^2-v^2)]c^2=0. \quad (6.1)$$

Usando a fórmula de Bháskara para equação quadrática em (6.1), achamos

$$v'=\frac{m_0^2c^2v\pm c\sqrt{m_0^4c^2v^2-[m_0^2v^2+m^2(v,v')(c^2-v^2)][m_0^2c^2-m^2(v,v')(c^2-v^2)]}}{m_0^2v^2+m^2(v,v')(c^2-v^2)}$$

$$=\frac{m_0^2c^2v\pm c\sqrt{[m^2(v,v')-m_0^2]m^2(v,v')(c^2-v^2)^2}}{m_0^2v^2+m^2(v,v')(c^2-v^2)}$$

$$= \frac{m_0^2 c^2 v \pm c(c^2 - v^2) m(v, v') \sqrt{m^2(v, v') - m_0^2}}{m_0^2 v^2 + m^2(v, v')(c^2 - v^2)}. \tag{6.2}$$

7. GENERALIZAÇÃO DO EFEITO DOPPLER LONGITUDINAL

7.1. Do ponto de vista da Relatividade Especial de Einstein, suponha um processo de aniquilação em um sistema de referência $\mathcal{S}$ no qual o par elétron-pósitron esteja em repouso e os dois fótons resultantes da aniquilação se movam ao longo do eixo x. Agora, considere a mesma aniquilação sendo observada no referencial $\mathcal{S}'$, que se move com velocidade $\boldsymbol{v}$ para a esquerda em relação a $\mathcal{S}$. A questão é: que comprimento de onda este observador (em movimento) mede para os fótons?

O par tem energia total relativística inicial $2mc^2$, onde m é a massa relativística, em fez da energia de repouso $2m_0c^2$, de modo que a conservação de energia no processo de aniquilação nos dá

$$2mc^2 = p'_1 c + p'_2 c \tag{7.1}$$

Ademais, visto que o par se move ao longo do eixo x' com velocidade $\boldsymbol{v}$, de tal maneira que seu momento inicial é $2mv$, a lei de conservação do momento nos dá

$$2mv = p'_1 - p'_2, \tag{7.2}$$

uma vez que os fótons se movem em sentidos opostos do eixo x'. Combinamos essas duas expressões, multiplicando a segunda equação por c e somando-a à primeira, obtemos

$$p'_1 = m(c + v), \tag{7.3}$$

Por outro lado, sabemos que

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{7.4}$$

que substituímos na equação (7.3), encontrando

$$p'_1 = \frac{m_0(c + v)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m_0 c \sqrt{\frac{c + v}{c - v}}, \tag{7.5}$$

contudo, $p'_1 = h/\lambda'_1$, de tal modo que

$$\lambda'_1 = \frac{h}{p'_1} = \frac{h}{m_0 c} \sqrt{\frac{c - v}{c + v}} = \lambda \sqrt{\frac{c - v}{c + v}}, \tag{7.6}$$

Similarmente, se multiplicarmos a equação (7.2) por c e subtraindo-a à (7.1), obtemos

$$\lambda'_2 = \frac{h}{p'_2} = \frac{h}{m_0 c} \sqrt{\frac{c + v}{c - v}} = \lambda \sqrt{\frac{c + v}{c - v}}, \tag{7.7}$$

Sendo assim, os fótons não têm o mesmo comprimento de onda, pois estes são alterados pelo efeito Doppler em relação ao valor λ que possuíam no referencial de repouso. Não é demais dizer que se um observador está no eixo x' de tal forma que a fonte se aproxima dele, ele detectará o fóton 1 com uma frequência maior do que a frequência de repouso. Mas, se o observador está situado no eixo x' de tal forma que a fonte se afasta dele, ele detectará o fóton 2 com uma frequência menor do que a frequência de repouso. Essa é a dedução do efeito Doppler longitudinal da teoria da Relatividade Especial de Einstein.

7.2. Agora, sob o ponto de vista da Relatividade Especial Virtual, façamos a seguinte experiência imaginária: suponha um processo de aniquilação em um sistema de referência $\mathcal{S}$ no qual o par elétron-pósitron esteja em repouso e os dois fótons resultantes da aniquilação se movam ao longo do eixo x. Considere a mesma aniquilação sendo observada por um observador $\mathcal{O}'$ no referencial $\mathcal{S}'$, que se move com velocidade $\boldsymbol{v}$ para a esquerda em relação a $\mathcal{S}$; bem como a mesma aniquilação sendo observada por um observador $\mathcal{O}''$ no referencial $\mathcal{S}''$, que se move com velocidade $\boldsymbol{v}'$, com módulo distinto de $\boldsymbol{v}$, para a esquerda em relação a $\mathcal{S}$; vale ressaltar que tanto $\mathcal{O}'$ quanto $\mathcal{O}''$ movem-se ao longo do eixo x. Duas questões são: qual o comprimento de onda do observador $\mathcal{O}''$ em relação ao observador $\mathcal{O}'$ (ambos em movimentos) mede para os fótons? E qual o comprimento de onda do observador $\mathcal{O}'$ em relação ao observador $\mathcal{O}''$ (ambos em movimentos) mede para os fótons?

7.2.1. Para o referencial $\mathcal{S}'$, o observador $\mathcal{O}'$ observa o seguinte fenômeno:

O par tem energia total relativística inicial $2mc^2$, onde m é a massa relativística, em fez da energia de repouso $2m_0c^2$, de modo que a conservação de energia no processo de aniquilação nos dá

$$2mc^2 = p'_1 c + p'_2 c \tag{7.8}$$

Ademais, visto que o par se move ao longo do eixo x' com velocidade $\boldsymbol{v}$, de tal maneira que seu momento inicial é $2mv$, a lei de conservação do momento nos dá

$$2mv = p'_1 - p'_2, \tag{7.9}$$

uma vez que os fótons se movem em sentidos opostos do eixo x'. Combinamos essas duas expressões, multiplicando a segunda equação por c e somando-a à primeira, obtemos

$$p'_1 = m(c + v), \tag{7.10}$$

Por outro lado, sabemos que

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{7.11}$$

que substituímos na equação (7.10), encontrando

$$p'_1 = \frac{m_0(c + v)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m_0 c \sqrt{\frac{c + v}{c - v}}, \tag{7.12}$$

contudo, $p'_1 = h/\lambda'_1$, de tal modo que

$$\lambda'_1 = \frac{h}{p'_1} = \frac{h}{m_0 c}\sqrt{\frac{c - v}{c + v}} = \lambda\sqrt{\frac{c - v}{c + v}}, \tag{7.13}$$

Similarmente, se multiplicarmos a equação (7.9) por c e subtraindo-a à (7.8), obtemos

$$\lambda'_2 = \frac{h}{p'_2} = \frac{h}{m_0 c}\sqrt{\frac{c+v}{c-v}} = \lambda\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}, \tag{7.14}$$

7.2.2. Para o Referencial S'', o observador O'' observa o seguinte fenômeno:

O par tem energia total relativística inicial $2mc^2$, onde m é a massa relativística, em fez da energia de repouso $2m_0c^2$, de modo que a conservação de energia no processo de aniquilação nos dá

$$2mc^2 = p''_1 c + p''_2 c \tag{7.15}$$

Ademais, visto que o par se move ao longo do eixo x'' com velocidade $\boldsymbol{v}'$, de tal maneira que seu momento inicial é $2mv'$, a lei de conservação do momento nos dá

$$2mv' = p''_1 - p''_2, \tag{7.16}$$

uma vez que os fótons se movem em sentidos opostos do eixo x''. Combinamos essas duas expressões, multiplicando a segunda equação por c e somando-a à primeira, obtemos

$$p''_1 = m(c+v'), \tag{7.17}$$

Por outro lado, sabemos que

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}}, \tag{7.18}$$

que substituímos na equação (7.17), encontrando

$$p''_1 = \frac{m_0(c+v')}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}} = m_0 c\sqrt{\frac{c+v'}{c-v'}}, \tag{7.19}$$

contudo, $p''_1 = h/\lambda''_1$, de tal modo que

$$\lambda''_1 = \frac{h}{p''_1} = \frac{h}{m_0 c}\sqrt{\frac{c-v'}{c+v'}} = \lambda\sqrt{\frac{c-v'}{c+v'}}, \tag{7.20}$$

Similarmente, se multiplicarmos a equação (7.16) por c e subtraindo-a à (7.15), obtemos

$$\lambda''_2 = \frac{h}{p''_2} = \frac{h}{m_0 c}\sqrt{\frac{c+v'}{c-v'}} = \lambda\sqrt{\frac{c+v'}{c-v'}}. \tag{7.21}$$

7.2.3. Ao compararmos o fenômeno observador por ambos os observadores, O' e O'', achamos as seguintes proporções entre os comprimentos de onda:

$$\frac{\lambda'_1}{\lambda''_1} = \frac{\lambda\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}}{\lambda\sqrt{\frac{c-v'}{c+v'}}} = \sqrt{\frac{(c-v)(c+v')}{(c+v)(c-v')}} \Leftrightarrow \lambda'_1 = \sqrt{\frac{(c-v)(c+v')}{(c+v)(c-v')}}\lambda''_1 \tag{7.22}$$

e

$$\frac{\lambda'_2}{\lambda''_2} = \frac{\lambda\sqrt{\dfrac{c+v}{c-v}}}{\lambda\sqrt{\dfrac{c+v'}{c-v'}}} = \sqrt{\frac{(c+v)(c-v')}{(c-v)(c+v')}} \Leftrightarrow \lambda'_2 = \sqrt{\frac{(c+v)(c-v')}{(c-v)(c+v')}}\lambda''_2. \quad (7.23)$$

7.2.4. O comprimento de onda do observador $\mathcal{O}''$ em relação ao observador $\mathcal{O}'$ (ambos em movimentos) mede para os fótons e o comprimento de onda do observador $\mathcal{O}'$ em relação ao observador $\mathcal{O}''$ (ambos em movimentos) mede para os fótons:

As equações (7.22) e (7.23) são os argumentos que utilizamos para construir o efeito Doppler longitudinal da Teoria da Relatividade Especial Virtual.

Agora, se substituirmos a massa relativística de (7.4) pela massa relativística virtual de (4.2) em (7.5), obtemos

$$p'_1 = (c+v)\sqrt{\frac{c^2-v'^2}{c^2-v^2}}\left(\frac{c^2-v'v}{c^2-v'^2}\right)m_0, \quad (7.24)$$

contudo, $p'_1 = h/\lambda'_1$, de tal modo que

$$\lambda'_1 = \frac{h}{p'_1} = \frac{h}{m_0 c\left(1+\frac{v}{c}\right)\sqrt{\frac{c^2-v'^2}{c^2-v^2}}\left(\frac{c^2-v'v}{c^2-v'^2}\right)} = \frac{\lambda}{\left(1+\frac{v}{c}\right)\sqrt{\frac{c^2-v'^2}{c^2-v^2}}\left(\frac{c^2-v'v}{c^2-v'^2}\right)}, \quad (7.25)$$

De maneira análoga, obtemos facilmente

$$\lambda'_2 = \frac{h}{p'_2} = \frac{h}{m_0 c\left(1-\frac{v}{c}\right)\sqrt{\frac{c^2-v'^2}{c^2-v^2}}\left(\frac{c^2-v'v}{c^2-v'^2}\right)} = \frac{\lambda}{\left(1-\frac{v}{c}\right)\sqrt{\frac{c^2-v'^2}{c^2-v^2}}\left(\frac{c^2-v'v}{c^2-v'^2}\right)}. \quad (7.26)$$

Esta é a dedução do efeito Doppler longitudinal da Teoria da Relatividade Especial Virtual. Quando $\frac{v'}{c}$ tende a 0 em (7.25) e (7.26), achamos (7.6) e (7.7).

REFERÊNCIAS

[1] Eisberg, Robert e Resnick, Robert, *Física Quântica, Átomos, Moléculas, Núcleos e Partículas,* 1979, Elsevier Editora Ltda.