

# ***Loop Quantum Gravity (LQG): Sektor Kinematik dan Aplikasinya***

Deden M. Akbar



(Sumber: Special Edition Scientific American – *A Matter of Time*, 2006, pg. 82-92)

## **ABSTRAK**

Sebagai salah satu syarat dalam penelitian dalam studi S3 mengenai *Loop Quantum Gravity* (LQG), Penulis mereview beberapa buku dan jurnal ilmiah terkait topik penelitian tersebut dalam artikel ini. Dalam artikel ini, direview formulasi kanonik LQG secara detail untuk sektor kinematik ([2] – [12]), dimulai dari review singkat mengenai LQG, dilanjutkan dengan formulasi Relativitas Umum dalam formulasi ADM serta masalah yang muncul ketika medan gravitasi dikuantisasi dalam formulasi ini. Kemudian dilanjutkan dengan review formulasi Palatini, hingga formulasi tetrad dalam variabel baru Ashtekar. Formulasi aksi Relativitas Umum dalam berbasis variabel Ashtekar menjadi jalan kuantisasi medan gravitasi dilakukan berdasarkan program kuantisasi Dirac. Hasilnya adalah formulasi kanonik LQG untuk sektor kinematik yang terbukti *well defined*. Prediksi yang diperoleh dari LQG adalah ruang pada skala Planck tidak lagi bersifat mulus dan kontinu tetapi diskrit dan *chaotic*, yang dicirikan dengan nilai eigen operator geometri yaitu operator luas dan operator volume yang bernilai diskrit dalam skala Planck. Bahasan terakhir dalam artikel ini adalah perhitungan Entropi Lubang Hitam berbasis LQG yang sesuai secara eksak dengan perhitungan Entropi Lubang Hitam berdasarkan pendekatan semiklasik ([4] – [5], [7]). Selain itu, direview pula penerapan teknik perhitungan LQG pada level *toy model* yang dikenal sebagai *Loop Quantum Cosmology* (LQC) ([14] – [16]) untuk model kosmologi Friedman-Robertson-Walker (FRW). Hasilnya diperoleh modifikasi persamaan Friedmann untuk model FRW dengan hadirnya suku koreksi dari sifat kuantum untuk medan gravitasi kuantum, dimana diprediksikan bahwa awal alam semesta berupa *Big-Bang* digantikan dengan *Big Bounce* yang berasal dari keruntuhan alam semesta sebelumnya ([9], [14], [39] - [41]).

## DAFTAR ISI

1. Review <i>Loop Quantum Gravity</i> (LQG)	2
1.1 Formulasi ADM dalam Relativitas Umum	3
1.1.1 Metrik ADM	3
1.1.2 Aksi Einstein Hilbert dalam Formulasi ADM	6
1.1.3 Hamiltonian dan Kendala dalam Relativitas Umum	8
1.1.4 Struktur Simplektik dalam Relativitas Umum	13
1.1.5 Program Kuantisasi Dirac dan Persamaan Wheeler-DeWitt	19
1.2 Aksi Palatini, Formulasi Tetrad, Aksi Holst dan Teori BF dalam Relativitas Umum	22
1.2.1 Aksi Palatini	22
1.2.2 Formulasi Tetrad Orde Pertama	24
1.2.3 Aksi Holst dan Teori BF	27
1.3 Kendala Simplitasi Linier ( <i>Linear Simplicity Constraint</i> )	29
1.4 Variabel Ashtekar-Barbero dan Triad dalam Formulasi Holst	33
2. <i>Loop Quantum Gravity</i> (LQG)	44
2.1 Persamaan Hamilton-Jacobi untuk Relativitas Umum	44
2.2 Kuantisasi via Representasi Koneksi	46
2.3 Regulasi Variabel Baru Ashtekar-Barbero	52
2.4 Kuantisasi via <i>Holonomi-Flux Algebra</i> (Aljabar Holonomi-Densitas Triad)	56
2.5 Sektor Kinematik dari <i>Loop Quantum Gravity</i> (LQG)	60
2.5.1 Ruang Hilbert Kinematik ( $\mathcal{H}_{kin}$ ) dan Fungsi Silindrikal ( <i>Cylindrical Functions</i> )	60
2.5.2 Kendala Kuantum Gauss dalam basis Holonomi: <i>Group averaging procedure</i>	67
2.5.3 Ruang Hilbert Kinematik ( $\mathcal{H}_{kin}^0$ ) dan Kendala Gauss: <i>Gauge-invariant Hilbert space</i>	69
2.5.4 <i>Spin-network states</i> : Membangun state untuk spin-network	76
2.5.5 Operator Geometri dalam <i>Loop Quantum Gravity</i> (LQG)	79
2.6 Aplikasi Sektor Kinematik LQG: Entropi Lubang Hitam dan Persamaan Friedmann dalam Model Friedmann-Robertson-Walker (FRW)	89
2.6.1 Penurunan Persamaan Entropi Lubang Hitam Berbasis LQG: Pendekatan Rovelli	89
2.6.2 <i>Loop Quantum Cosmology</i> (LQC) pada Model FRW untuk Kosmologi Awal Alam Semesta: Koreksi Kuantum Persamaan Friedmann	95
3. Rerefensi	
Lampiran A: Persamaan-Persamaan Kurvatur	111
Lampiran B: Formulasi Tetrad Orde Pertama	122
Lampiran C: Definisi Holonomi	126
Lampiran D: Sifat-Sifat Holonomi	129
Lampiran E: Teori Kopling SU(2)	132
Lampiran F: Model Friedmann-Robertson-Walker (FRW)	146

## 1. Review *Loop Quantum Gravity* (LQG)

Permasalahan utama yang luar biasa dalam pencarian kita untuk fisika di luar Einstein adalah penyatuan relativitas umum dan teori kuantum. Einstein menekankan kebutuhan akan perluasan quantum untuk relativitas umum pada tahun 1916 di papernya mengenai gelombang gravitasi [1], dimana ia menyatakan: “... *it appears that quantum theory would have to modify not only Maxwellian electrodynamics, but also the new theory of gravitation.*”

Secara umum, kurangnya data eksperimental yang secara langsung berkaitan dengan aspek kuantum gravitasi. Ini tentu saja merupakan hambatan besar. Namun, ini tidak bisa menjadi cerita keseluruhan. Jika itu saja, kurangnya batasan observasional seharusnya telah mengarah pada banyak teori dan masalah seharusnya adalah mempersempit pilihan. Namun, situasinya justru sebaliknya: Sampai saat ini, kita tidak memiliki satu pun kandidat yang memuaskan. Menurut Abhay Ashtekar [2], hal ini disebabkan karena dalam Relativitas Umum (GR), gravitasi digambarkan dengan sangat memuaskan dalam geometri ruang-waktu itu sendiri.

Untuk membangun relativitas umum, Einstein harus mulai dengan memperkenalkan sintaks baru untuk menjelaskan seluruh fisika klasik: yaitu geometri Riemannian. Dengan demikian, ruang-waktu direpresentasikan sebagai manifold 4-dimensi ( $\mathcal{M}^4$ ) dilengkapi dengan metrik pseudo-Riemannian  $g_{\alpha\beta}$  dan materi direpresentasikan oleh medan tensor. Sehingga dalam membangun teori gravitasi kuantum, diperlukan sintak baru, yaitu versi kuantum geometri Riemannian. Loop Quantum Gravity (LQG) adalah salah satu pendekatan terkemuka menuju hal tersebut.

LQG dirancang secara sistematis membangun suatu teori spesifik mengenai kuantum geometri Riemann Riemannian dan rampung hingga tahun 1990-an (lihat [3]-[8]). Sintaks baru ini muncul dari dua ide pokok: (i) Reformulasi relativitas umum (+ materi) dalam bahasa teori gauge yang berhasil menjelaskan tiga gaya dasar lainnya di Alam, tetapi sekarang tanpa merujuk pada medan latar belakang apa pun, bahkan metrik ruang-waktu itu sendiri; dan, (ii) Langkah selanjutnya menuju teori kuantum untuk gravitasi yaitu menggunakan teknik/pendekatan non-perturbatif dari teori gauge, seperti Wilson loop tanpa merujuk pada latar belakang ruang-waktu apapun (*without any space-time background*). Sekarang ini, pendekatan perturbatif dalam gravitasi kuantum mulai ditinggalkan karena sifat ketidaknormal ulangan medan gravitasi berdasarkan pendekatan perturbatif ini [10].

Jika suatu teori tidak memiliki medan latar belakang seperti ruang-waktu, itu hanya berarti teori tersebut memiliki akses ke manifold yang mendasarinya dan oleh karena itu harus bersifat kovarian terhadap transformasi diffeomorfisme (suatu transformasi yang mempertahankan struktur manifold). Seperti yang akan dijelaskan, kovariansi dalam transformasi diffeomorfisme bersama dengan metode non-perturbatif secara alami menghasilkan diskritisasi mendasar dalam geometri yang menghilangkan keterbatasan ultraviolet yang muncul pendekatan perturbatif. Kontinum ruang-waktu muncul hanya sebagai perkiraan kasar. Kontinum ruang-waktu à la Einstein ini muncul dalam dua definisi. Pertama, dibangun dari beberapa medan yang secara alami muncul dalam teori gauge, tanpa merujuk pada metrik ruang-waktu. Kedua, muncul secara kasar dari struktur diskrit mendasar geometri ruang-waktu yang merupakan kerangka kerja kuantum geometri Riemannian. Sebagai salah kandidat gravitasi kuantum diluar Teori String, LQG didasarkan pada metode kuantisasi Dirac yang diterapkan pada Hamiltonian ruang-waktu dalam relativitas umum.

## 1.1 Formulasi ADM dalam Relativitas Umum

### 1.1.1 Metrik ADM

Formulasi ADM untuk relativitas umum dipelopori oleh Arnowitt, Deser, dan Misner (ADM) serta juga oleh Dirac, Wheeler, dan De Witt, dan lainnya. Formulasi ini bermula dari formulasi kanonik berdasarkan ide dalam kuantisasi kedua (*second quantization*) atau kuantisasi kuantum pada medan. Dalam formulasi ini teori kuantum digambarkan oleh medan kuantum  $\psi[\phi]$  (dengan  $\phi$  dapat berupa medan skalar dan medan kuantum lainnya), yang dinamika memenuhi persamaan Schrodinger:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi[\phi] = \hat{H} \left( \phi, \frac{\delta}{\delta \phi} \right) \psi[\phi] \quad (1)$$

Untuk kasus gravitasi, formulasi ADM bekerja pada aksi Einstein-Hilbert dengan mengasumsikan bahwa ruang-waktu merupakan manifold  $\mathcal{M}$  dengan bentuk topologi yang memenuhi  $\mathcal{M} \cong \mathbb{R} \times \Sigma$ , dengan  $\Sigma$  adalah manifold ruang 3 dimensi dan memiliki tanda spacelike (*spacelike signature*). Manifold ruang-waktu  $\mathcal{M}$  yang digambarkan oleh topologi di atas memiliki sifat globally hyperbolic atau memiliki kausalitas yang kuat.

Manifold ruang-waktu  $\mathcal{M}$  difoliasi menjadi 1 parameter  $\Sigma_t = X_t(\Sigma)$  di hypersurface yang ditanamkan (embedding) pada  $\Sigma$  di  $\mathcal{M}$ . Foliasi ini memberikan kita 1 parameter waktu  $t \in \mathbb{R}$ .

Perlu diperhatikan disini bahwa  $t$  dalam foliasi ruang-waktu ini bukan berarti adanya "waktu absolut" karena keinvarianan diffeomorfisme akan memetakan ( $\varphi \in \text{diff}(\mathcal{M})$ ) kembali  $X$  menuju  $X' = X \circ \varphi$  dengan parameter waktu  $t'$ . Dan sebaliknya diffeomorfisme  $\varphi \in \text{diff}(\mathcal{M})$  akan memenuhi  $\varphi = X' \circ X^{-1}$ , sehingga kita dapat memilih foliasi di koordinat apapun di ruang-waktu secara bebas tetapi kuantitas fisis akan selalu bernilai tetap karena keinvarianan diffeomorfisme akan menjaganya (*the diffeomorphism invariance will guarantee that physical quantities are independent of the foliation choice*). Hal ini merupakan keunikan dari relativitas umum dibandingkan teori ruang-waktu lainnya.

Diberikan foliasi  $X_t$  dan disesuaikan untuk koordinat dalam formulasi ADM  $(t, x)$ , dapat didefinisikan laju vektor waktu (yang dapat diuraikan menjadi bagian normal dan tangensial):

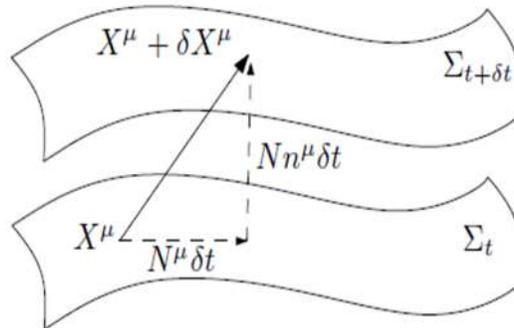
$$t^\mu = \frac{\partial X_t^\mu(x)}{\partial t} = N(x)n^\mu(x) + N^\mu(x) = (1, 0, 0, 0) \quad (2)$$

Dengan  $n^\mu$  adalah unit vektor normal di hyperspace  $\Sigma$  yang memenuhi  $n^\mu = \left(\frac{1}{N}, -\frac{N^a}{N}\right)$ ,  $s^\mu$  adalah vektor singgung,  $N$  adalah fungsi selang (lapse function) dan  $N^\mu$  memenuhi  $N^\mu = (0, N^a)$  dengan  $N^a$  adalah vektor pergeseran (shift vector). Dimana  $a, b = 1, 2, 3$  adalah indeks spasial. Selain itu, vektor  $t^\mu$  memenuhi:

$$g_{\mu\nu}t^\mu t^\nu = g_{00} \quad (3)$$

$$g_{\mu\nu}n^\mu n^\nu = -1 \quad (4)$$

Foliasi ruang-waktu berdasarkan formulasi ADM dapat digambarkan sebagai berikut:



(Sumber: [11])

Untuk setiap lapisan  $\Sigma_t$  terdapat struktur Riemannian dengan metrik yang memenuhi:  $h_{ab} = g_{ab} + n_a n_b$  dan  $h^{ab} = g^{ab} + n^a n^b$  dengan  $h_{ab}$  adalah metrik spasial dari  $g_{ab}$ . Metrik ini dikenal sebagai induced metric yang memenuhi 2 kondisi: (1)  $h_{ab} n^a = 0$  dan (2)  $h_{ab} s^a = g_{ab} s^a$ .

Dengan menggunakan induced metric ini maka fungsi selang dan fungsi geser menjadi:  $N^b = h^{ab} t_a$  dan  $N = -n_a t^a$  serta  $N n^a = t^a - h^{ab} t_b$  ( $n_a = -N N^b h_{ab}$ ). Evolusi vektor waktu  $t^a$  memenuhi:  $t^a \nabla_a t = 1$  sehingga  $t^a \nabla_a = \frac{\partial}{\partial t}$  dan juga  $n^a \nabla_a = \frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial t}$ . Selanjutnya dapat dituliskan metrik ruang waktu untuk formulasi ADM, yaitu:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{00} dt^2 + 2g_{0a} dt dx^a + g_{ab} dx^a dx^b$$

Pertama-tama kita tinjau kontravarian metrik:

$$g^{00} = h^{00} - n^0 n^0 = 0 - \frac{1}{N} \frac{1}{N} = -\frac{1}{N^2} \quad (5)$$

$$g^{0a} = h^{0a} - n^0 n^a = 0 - \frac{1}{N} \left( -\frac{N^a}{N} \right) = \frac{N^a}{N^2} \quad (6)$$

$$g^{ab} = h^{ab} - n^a n^b = h^{ab} - \left( -\frac{N^a}{N} \right) \left( -\frac{N^b}{N} \right) = h^{ab} - \frac{N^a N^b}{N^2} \quad (7)$$

Menggunakan sifat metrik:  $g_{\mu\nu} g^{\nu\beta} = \delta_\mu^\beta$ , sehingga:

$$(1) \mu = \beta = 0$$

$$g_{00} g^{00} + g_{0b} g^{b0} = 1$$

$$g_{00} \left( -\frac{1}{N^2} \right) + g_{0b} \frac{N^b}{N^2} = 1 \quad (8)$$

$$(2) \mu = 0, \beta = a$$

$$g_{00} g^{0a} + g_{0b} g^{ba} = 0$$

$$g_{00} \frac{N^a}{N^2} + g_{0b} \left( h^{ab} - \frac{N^a N^b}{N^2} \right) = 0 \quad (9)$$

$$(3) \mu = \beta = a$$

$$g_{a0} g^{0a} + g_{ab} g^{ba} = 1 \quad (10)$$

Dapat kita eliminasi 2 persamaan (1) dan (2) di atas dengan pengalihan persamaan (1) dengan  $N^a$  lalu dijumlahkan, sehingga didapatkan:

$$g_{0b}h^{ab} = N^a \rightarrow g_{0b}h^{ab}h_{ac} = N^ah_{ac} \rightarrow g_{0b}\delta_a^b = N^bh_{ba} \rightarrow g_{0a} = N_a \quad (11)$$

Relasi (11) di atas bila disubstitusikan ke persamaan (8), maka:

$$\begin{aligned} g_{00} \left( -\frac{1}{N^2} \right) + \frac{N_a N^a}{N^2} &= 1 \\ g_{00} &= \left( \frac{N_a N^a}{N^2} - 1 \right) N^2 \\ g_{00} &= -(N^2 - N_a N^a) \end{aligned} \quad (12)$$

Untuk mencari  $g_{ab}$ , maka substitusikan  $g_{0a} = N_a$  ke persamaan (10), maka:

$$\begin{aligned} g_{a0}g^{0a} + g_{ab}g^{ba} &= 1 \\ N_a \frac{N^a}{N^2} + g_{ab} \left( h^{ab} - \frac{N^a N^b}{N^2} \right) &= 1 \\ g_{ab} &= \frac{1 - \frac{N_a N^a}{N^2}}{h^{ab} - \frac{N^a N^b}{N^2}} = \frac{N^2 - N_a N^a}{N^2 h^{ab} - N^a N^b} \end{aligned} \quad (13)$$

Dapat kita tuliskan metrik ruang-waktu ADM adalah:

$$ds^2 = -(N^2 - N_a N^a) dt^2 + 2N_a dt dx^a + \left( \frac{N^2 - N_a N^a}{N^2 h^{ab} - N^a N^b} \right) dx^a dx^b \quad (14)$$

### 1.1.2 Aksi Einstein Hilbert dalam Formulasi ADM

Seperti telah diketahui bahwa manifold ruang-waktu  $\mathcal{M}$  telah difoliasi menjadi lembaran-lembaran permukaan spasial  $\Sigma$ , sehingga ini berakibat kuantitas geometri seperti kurvatur akan memiliki definis sebagai berikut: kurvatur intrinsik di manifold  $\mathcal{M}$  ( $R_{bcd}^a$ ), kurvatur intrinsik di spacelike hypersurface  $\Sigma$  ( ${}^{(3)}R_{bcd}^a$ ), dan kurvatur ekstrinsik dari  $\Sigma$  dengan memandangnya sebagai submanifold  $\mathcal{M}$  ( $K_{ab}$ ). Hubungan ketiga kurvatur tersebut dapat dituliskan dalam persamaan Gauss:

$${}^{(3)}R_{bcd}^a = h_e^a h_d^f h_c^g h_b^h R_{fgh}^e + (K_d^a K_{bc} - K_c^a K_{bd}) \quad (15)$$

Penurunan persamaan Gauss dan berbagai relasi persamaan kurvatur yang dibutuhkan dapat dilihat pada Lampiran A.

Sekarang kita tuliskan skalar Ricci, yaitu:

$$R = g^{ab}g^{bc}R_{abcd} = (h^{ab} - n^an^b)(h^{cd} - n^cn^d)R_{abcd}$$

$$R = h^{ab}h^{bc}R_{abcd} - h^{ab}n^cn^dR_{abcd} - h^{cd}n^an^bR_{abcd} - n^an^bn^cn^dR_{abcd} \quad (16)$$

Suku terakhir akan lenyap karena sifat antisimetrik tensor Riemann dan menggunakan sifat simetri tensor Riemann, maka:

$$R = h^{ab}h^{bc}R_{abcd} - h^{ab}n^cn^dR_{abcd} - h^{ab}n^cn^dR_{abcd}$$

$$R = h^{ab}h^{bc}R_{abcd} - 2R_{ab}n^an^b \quad (17)$$

Dengan  $h^{ab}h^{bc}R_{abcd}$  dapat dituliskan menjadi:  $h^{ab}h^{bc}R_{abcd} = h^{ef}h^c_a h^b_e h^d_f R^a_{bcd}$ , maka:  $R = h^{ef}h^c_a h^b_e h^d_f R^a_{bcd} - 2R_{ab}n^an^b$ . Menggunakan persamaan Gauss (15) dan persamaan Ricci (17), maka :

$$R = h^{ab}h^{bc}R_{abcd} - 2R_{ab}n^an^b \quad (17)$$

$$R = h^{ef} \left( {}^{(3)}R^a_{eaf} - K^a_f K_{ea} + K^a_a K_{ef} \right) - 2(K^a_a)^2 + 2K^b_a K^a_b - 2\nabla_a(n^b \nabla_b n^a - n^a \nabla_b n^b)$$

$$R = {}^{(3)}R - K^b_a K^a_b + (K^a_a)^2 - 2(K^a_a)^2 + 2K^b_a K^a_b - 2\nabla_a(n^b \nabla_b n^a - n^a \nabla_b n^b)$$

$$R = {}^{(3)}R - (K^a_a)^2 + K^b_a K^a_b - 2\nabla_a(n^b \nabla_b n^a - n^a \nabla_b n^b) \quad (18)$$

Sehingga menggunakan persamaan (18) di atas, kita dapat tuliskan aksi Einstein-Hilbert, yaitu:

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g}R = \int dt L_{gravity} \quad (19)$$

Dengan  $L_{gravity} = \frac{1}{16\pi G} \int d^3x \sqrt{-g}R$ , menjadi:

$$L_{gravity} = \frac{N\sqrt{h}}{8\pi G} \int d^3x \left[ {}^{(3)}R - (K^a_a)^2 + K^b_a K^a_b - 2\nabla_a(n^b \nabla_b n^a - n^a \nabla_b n^b) \right] \quad (20)$$

Akibat teorema Stokes, maka suku yang mengandung turunan/derivatif pada permukaan (boundary) atau disebut suku-suku boundary akan lenyap, maka:

$$L_{gravity} = \frac{N\sqrt{h}}{8\pi G} \int d^3x \left[ {}^{(3)}R - (K_a^a)^2 + K_a^b K_b^a \right] \quad (21)$$

Dalam beberapa kasus suku permukaan (boundary), yaitu suku-suku yang mengandung turunan dapat diabaikan akibat berlakunya teorema Stokes. Namun berdasarkan relativitas umum, suku-suku boundary ini tidak sepenuhnya dihilangkan. Salah satunya dikenal sebagai suku Gibbons-Hawking yang berasal dari variasi Lagrangian  $\delta L_{gravity}$ :

$$\delta L_{gravity} = \frac{1}{16\pi G} \int d^3x \left[ R(\delta\sqrt{-g}) + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} + \sqrt{-g}R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \right] \quad (22)$$

Dengan  $\delta\sqrt{-g} = \delta g^{\mu\nu} = 0$ , sehingga yang memberikan kontribusi adalah suku  $g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}$ . Suku ini dikenal suku Gibbons-Hawking. Namun untuk formulasi ADM akan digunakan asumsi bahwa suku-suku boundary tidak berkontribusi langsung pada dinamika ruang-waktu dalam relativitas umum, sehingga Lagrangian yang digunakan persamaan (20).

Bila diamati suku-suku pada persamaan di atas hanya bergantung pada variabel spasial, seperti yang telah diharapkan. Dengan demikian kini variabel dinamik yang dimiliki ialah metrik proyeksi  $h_{ab}$  dan turunannya terhadap waktu  $\dot{h}_{ab}$  yang telah dibuktikan berhubungan langsung dengan  $K_{ab}$  seperti ditunjukkan pada lampiran A.

### 1.1.3 Hamiltonian dan Kendala dalam Relativitas Umum

Menggunakan transformasi Legendre pada Lagrangian gravitasi di atas, maka dapat diperoleh Hamiltonian untuk relativitas umum:

$$H_{gravity} = \int d^3x \left( \dot{h}_{ab}p^{ab} + \lambda p_N + \mu^a p_a \right) - L_{gravity} \quad (23)$$

Dengan  $p_N$  dan  $p_a$  masing-masing adalah konjugat momentum dari fungsi lapse (lapse function)  $N$  dan vektor pergeseran (shift vector)  $N^a$ . Dan  $\lambda$  dan  $\mu^a$  sebagai pengali Lagrange (Lagrange multiplier). Karena  $N$  dan  $N^a$  merupakan variabel non-dinamik, maka turunan terhadap waktu akan bernilai nol, sehingga  $p_N$  dan  $p_a$  yang didefinisikan sebagai momentum konjugat kedua akan bernilai nol:

$$p_N(x) = \frac{\delta L_{gravity}}{\delta \dot{N}(x)} = 0 \quad (24)$$

$$p_a(x) = \frac{\delta L_{gravity}}{\delta \dot{N}^a(x)} = 0 \quad (25)$$

Kedua konjugat di atas dikenal sebagai 2 kendala utama (primary constraint) dalam relativitas umum. Kedua momentum konjugat di atas dapat dirumuskan dalam momentum konjugat, sebagai berikut:

$$p^{ab}(x) = \frac{\delta L_{gravity}}{\delta \dot{h}_{ab}(x)} = \frac{\delta L_{gravity}}{\delta K_{cd}(x)} \frac{\delta K_{cd}(x)}{\delta \dot{h}_{ab}(x)} \quad (26)$$

Dengan  $K_{cd} = \frac{1}{2N}(\dot{h}_{cd} - D_c N_d - D_d N_c)$ , maka:

$$\frac{\delta K_{cd}(x)}{\delta \dot{h}_{ab}(x)} = \frac{1}{2N} \quad (27)$$

Dan

$$\begin{aligned} \frac{\delta L_{gravity}}{\delta K_{cd}(x)} &= -\frac{N\sqrt{h}}{16\pi G} \frac{\delta}{\delta K_{cd}(x)} \left[ {}^{(3)}R - (K_a^a)^2 + K_a^b K_b^a \right] \\ \frac{\delta L_{gravity}}{\delta K_{cd}(x)} &= -\frac{N\sqrt{h}}{16\pi G} \frac{\delta}{\delta K_{cd}(x)} \left[ {}^{(3)}R - K^{cd} K_{cd} + h^{ac} h_e^d K_a^e K_{cd} \right] \end{aligned} \quad (28)$$

Bila indeks e = a, maka:

$$\begin{aligned} \frac{\delta L_{gravity}}{\delta K_{cd}(x)} &= -\frac{N\sqrt{h}}{16\pi G} \frac{\delta}{\delta K_{cd}(x)} \left[ {}^{(3)}R - K^{cd} K_{cd} + h^{cd} K_a^a K_{cd} \right] \\ \frac{\delta L_{gravity}}{\delta K_{cd}(x)} &= \frac{N\sqrt{h}}{8\pi G} (K^{cd} - h^{cd} K_a^a) \end{aligned} \quad (29)$$

Maka momentum konjugat didapatkan:

$$p^{ab}(x) = \frac{\sqrt{h}}{16\pi G} (K^{ab} - h^{ab} K_c^c) \quad (30)$$

Dan sebaliknya:

$$\begin{aligned} p^{ab}(x) &= \frac{\sqrt{h}}{16\pi G} (K^{ab} - h^{ab} K_c^c) \\ p^{ab} &= \frac{\sqrt{h}}{16\pi G} (K^{ab} - h^{ab} h_{cd} K^{dc}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p^{ab} &= \frac{\sqrt{h}}{16\pi G} (K^{ab} - h^{ab} h_{cd} h^{cd} h_{ab} K^{ab}) \\
p^{ab} &= \frac{\sqrt{h}}{16\pi G} (1 - h^{ab} h_{cd} h^{cd} h_{ab}) K^{ab} \\
\frac{16\pi G}{\sqrt{h}} p^{ab} &= (1 - h^{ab} h_{cd} h^{cd} h_{ab}) K^{ab}
\end{aligned} \tag{31}$$

atau

$$K^{ab} = \frac{16\pi G}{\sqrt{h}} p^{ab} (1 - h_{ab} h^{cd} h_{cd} h^{ab})$$

$$K^{ab} = \frac{16\pi G}{\sqrt{h}} (p^{ab} - h^{ab} h_{cd} p^{cd}) = \frac{16\pi G}{\sqrt{h}} (p^{ab} - h^{ab} p_c^c) \tag{32}$$

Maka menggunakan hasil tersebut:  $K_{cd} = \frac{1}{2N} (\dot{h}_{cd} - D_c N_d - D_d N_c) = \frac{16\pi G}{\sqrt{h}} (p_{cd} - h_{cd} p_a^a)$ , maka persamaan konjugat momentum yaitu  $\dot{h}_{ab}$  dapat diperoleh, sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
p_{ab}(x) &= \frac{\sqrt{h}}{16\pi G} (K_{ab} - h_{ab} K_c^c) \\
\dot{h}_{ab} &= \frac{16\pi GN}{\sqrt{h}} p_{ab} + N h_{ab} K_c^c + D_a N_b + D_b N_a \\
\dot{h}_{ab} &= \frac{16\pi GN}{\sqrt{h}} p_{ab} + \frac{16\pi GN}{\sqrt{h}} (p_{ab} - h_{ab} p_c^c) + D_a N_b + D_b N_a \\
\dot{h}_{ab} &= \frac{16\pi GN}{\sqrt{h}} (2p_{ab} - h_{ab} p_c^c) + D_a N_b + D_b N_a
\end{aligned} \tag{33}$$

Menggunakan hasil di atas dalam formulasi Hamiltonian relativitas umum:

$$\begin{aligned}
H_{gravity} &= \int d^3x (\dot{h}_{ab} p^{ab} + \lambda p_N + \mu^a p_a) - L_{gravity} \\
H_{gravity} &= \int d^3x \left( \frac{16\pi GN}{\sqrt{h}} (2p_{ab} p^{ab} - h_{ab} p_c^c p^{ab}) + p^{ab} D_a N_b + p^{ab} D_b N_a + \lambda p_N + \mu^a p_a \right) \\
&\quad - \frac{N\sqrt{h}}{16\pi G} \int d^3x \left[ {}^{(3)}R - (K_a^a)^2 + K_a^b K_b^a \right]
\end{aligned}$$

$$H_{gravity} = \int d^3x \left( \frac{32\pi GN}{\sqrt{h}} p_{ab} p^{ab} - \frac{16\pi GN}{\sqrt{h}} h_{ab} p_c^c p^{ab} + p^{ab} D_a N_b + p^{ab} D_b N_a - \frac{N\sqrt{h}}{16\pi G} {}^{(3)}R + \frac{N\sqrt{h}}{16\pi G} [(K_a^a)^2 - K_a^b K_b^a] \right) + \int d^3x (\lambda p_N + \mu^a p_a) \quad (34)$$

Sekarang kita akan tinjau suku:  $(K_a^a)^2 - K_a^b K_b^a$ , menggunakan

$p_{ab} = \frac{\sqrt{h}}{16\pi G} (K_{ab} - h_{ab} K_c^c)$  dan  $K_{ab} = \frac{16\pi G}{\sqrt{h}} (p_{ab} - h_{ab} p_c^c)$ , maka:

$$\begin{aligned} \frac{N\sqrt{h}}{16\pi G} [(K_a^a)^2 - K_a^b K_b^a] &= -\frac{16\pi GN}{\sqrt{h}} (p_{ab} - h_{ab} p_c^c) p^{ab} \\ &= -\frac{16\pi GN}{\sqrt{h}} (p_{ab} p^{ab} - h_{ab} p_c^c p^{ab}) \end{aligned} \quad (35)$$

Sehingga Hamilton relativitas umum menjadi:

$$H_{gravity} = \int d^3x \left( \frac{32\pi GN}{\sqrt{h}} p_{ab} p^{ab} - \frac{16\pi GN}{\sqrt{h}} h_{ab} p_c^c p^{ab} + p^{ab} D_a N_b + p^{ab} D_b N_a - \frac{N\sqrt{h}}{16\pi G} {}^{(3)}R - \frac{16\pi GN}{\sqrt{h}} (p_{ab} p^{ab} - h_{ab} p_c^c p^{ab}) \right) + \int d^3x (\lambda p_N + \mu^a p_a)$$

$$H_{gravity} = \int d^3x \left( \frac{16\pi GN}{\sqrt{h}} (p_{ab} p^{ab} - \frac{1}{2} h_{ab} p_c^c p^{ab}) + p^{ab} D_a N_b + p^{ab} D_b N_a - \frac{N\sqrt{h}}{16\pi G} {}^{(3)}R \right) + \int d^3x (\lambda p_N + \mu^a p_a)$$

$$H_{gravity} = \int d^3x \left( \frac{16\pi GN}{\sqrt{h}} (p_{ab} p^{ab} - \frac{1}{2} (p_c^c)^2) + p^{ab} D_a N_b + p^{ab} D_b N_a - \frac{N\sqrt{h}}{16\pi G} {}^{(3)}R \right) + \int d^3x (\lambda p_N + \mu^a p_a) \quad (36)$$

Menggunakan kendala utama dan persamaan Poisson, maka:

$$0 = \dot{p}_N = \{p_N, H_{gravity}\} = \frac{\delta p_N}{\delta N} \frac{\delta H_{gravity}}{\delta t} - \frac{\delta p_N}{\delta t} \frac{\delta H_{gravity}}{\delta N} \quad (37)$$

$$= -\frac{16\pi GN}{\sqrt{h}} \left( p_{ab} p^{ab} - \frac{1}{2} (p^c_c)^2 \right) + \frac{N\sqrt{h}}{16\pi G} {}^{(3)}R := -H^{gravity}$$

$$0 = \dot{p}_{N^a} = \{p_{N^a}, H_{gravity}\} = \frac{\delta p_{N^a}}{\delta N^a} \frac{\delta H_{gravity}}{\delta t} - \frac{\delta p_{N^a}}{\delta t} \frac{\delta H_{gravity}}{\delta N^a} \quad (38)$$

$$= -\frac{\delta}{\delta N^a} [p^{ab} (D_a N_b + D_b N_a)] = \frac{\delta}{\delta N^a} (N_b D_a p^{ab} + N_a D_b p^{ab})$$

$$= \frac{\delta}{\delta N^a} (h^{bc} N_b D_a p^a_c + h^{ad} N_a D_b p^b_d)$$

$$= \frac{\delta}{\delta N^a} (N^b D_a p^a_b + N^a D_b p^b_a) = D_a p^a_b + D_b p^b_a := -H_a^{gravity}$$

Kita dapatkan 2 kendala sekunder (*secondary constraint*):

$$H^{gravity} = \frac{16\pi GN}{\sqrt{h}} \left( p_{ab} p^{ab} - \frac{1}{2} (p^c_c)^2 \right) - \frac{N\sqrt{h}}{16\pi G} {}^{(3)}R = 0 \quad (39)$$

$$H_a^{gravity} = -(D_a p^a_b + D_b p^b_a) = 0 \quad (40)$$

Masing-masing disebut sebagai kendala Hamiltonian ( $H^{gravity}$ ) dan kendala diffeomorfisme ( $H_a^{gravity}$ ). Hasil ini menunjukkan bahwa Hamiltonian relativitas umum dapat dituliskan sebagai kombinasi linier berbagai kendala (tanpa boundary):

$$H_{gravity} = \int d^3x (NH^{gravity} + N^a H_a^{gravity} + \lambda p_N + \mu^a p_a) \quad (41)$$

Kendala sekunder masing-masing bernilai nol, hasil ini membatasi ruang fasa dalam relativitas umum pada permukaan/boundary yang dikenal sebagai on shell. Dari hasil terdapat total 8 kendala dalam koordinat 4 dimensi ruang-waktu, yaitu 4 kendala primer dan 4 kendala sekunder:

1. Kendala primer: 1 dari  $p_N$  dan 3 dari  $p_{N^a}$
2. Kendala sekunder: 1  $H^{gravity}$  dan 3 dari  $H_a^{gravity}$

Kondisi on shell dalam formulasi Hamiltonian relativitas umum mengakibatkan tidak ada dinamika dan evolusi fisik dalam waktu  $t$ . Kehadiran yang membingungkan dari Hamiltonian fisik sebenarnya adalah konsekuensi dari apa yang telah kita diskusikan sebelumnya: invariansi diffeomorfisme dari teori memberi tahu kita bahwa  $t$  hanya merupakan parameter semata tanpa makna fisik mutlak, sehingga tidak ada dinamika fisik dalam  $t$ . Oleh karena seluruh dinamika

ruang-waktu dalam relativitas umum di gambarkan oleh Hamiltonian di atas, maka ini menjadi masalah. Hamiltonian dalam relativitas umum merupakan kendala dan ini adalah akar masalah waktu dalam relativitas umum, yaitu masalah waktu (*problem of time*).

#### 1.1.4 Struktur Simplektik dalam Relativitas Umum

Berdasarkan formulasi Hamiltonian di atas kita dapat mempelajari ruang fasa dalam relativitas umum. Ini diparameterisasi oleh  $(h_{ab}, p^{ab})$  yang memenuhi kurung Poisson:

$$\{h_{cd}, p^{ab}\} = \delta_{(c}^a \delta_{d)}^b \delta(x - x') \quad (42)$$

Dari hubungan  $h_{ab}$  dan  $p^{ab}$  di atas, dapat kita evaluasi hubungan kurung Poisson untuk kendala sekunder sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \{H_a(x), H_b(y)\} &= \frac{\delta H_a(x)}{\delta h_a^b} \frac{\delta H_b(y)}{\delta p_b^a} - \frac{\delta H_b(y)}{\delta h_b^a} \frac{\delta H_a(x)}{\delta p_a^b} \\ \{H_a(x), H_b(y)\} &= \frac{\delta(h_a^b H_b)}{\delta h_a^b} \frac{\delta(2D_{(a} p_{b)})}{\delta p_b^a} - \frac{\delta(h_b^a H_a)}{\delta h_b^a} \frac{\delta(2D_{(b} p_{a)})}{\delta p_a^b} \\ \{H_a(x), H_b(y)\} &= H_a(y) \partial_b \delta(x - y) - H_b(x) \partial'_a \delta(x - y) \end{aligned} \quad (43)$$

Dan hubungan lainnya:

$$\{H_a(x), H(y)\} = H(x) \partial_a \delta(x - y) \quad (44)$$

$$\{H(x), H(y)\} = H^a(y) \partial_a \delta(x - y) - H^a(x) \partial'_a \delta(x - y) \quad (45)$$

Dapat diperhatikan bahwa sisi sebelah kanan persamaan (43) – (45) adalah kendala permukaan yang artinya sisi sebelah kanan akan lenyap/bernilai nol di permukaan hypersurface. Sehingga hubungan Poisson yang dibangun ini mempertahankan kendala pada kendala permukaan (*constraint surface*). Kendala seperti ini dikenal sebagai kendala jenis pertama (*first class constraint*), sebagai pembeda dengan kendala jenis kedua (*second class constraint*) yang tidak lenyap di hypersurface atau tidak lenyap di on-shell. Kendala jenis pertama inilah yang generate transformasi gauge pada kendala permukaan.

Berbagai jenis kendala dalam pembahasan kita ini dapat dirangkumkan sebagai berikut:

- (1) Kendala utama (*primary constraint*) merupakan kendala yang tidak bergantung dengan persamaan dinamika, dan kendala selain definisi ini dikenal sebagai kendala sekunder (*secondary constraint*).

(2) Kendala jenis pertama (*first class constraint*) merupakan kendala yang komut dengan dengan kendala lainnya yang eksis di hypersurface, selain definisi kendala tersebut dikenal sebagai kendala jenis kedua (*second class constraint*).

Berdasarkan klasifikasi tersebut kendala dalam relativitas umum yang ditunjukkan merupakan jenis kendala utama dan kendala jenis pertama. Hal ini akan memberikan transformasi gauge, karena kendala jenis pertama sajalah yang dapat men-generate transformasi gauge.

Untuk melihat bagaimana transformasi gauge bekerja pada kendala permukaan ini, pertama-tama mendefinisikan smearing dari kendala permukaan:

$$H(\vec{N}) = \int_{\Sigma} H^a(x) N_a(x) d^3x \quad (46)$$

$$H(N) = \int_{\Sigma} H(x) N(x) d^3x \quad (47)$$

Dapat ditunjukkan bahwa:

$$\begin{aligned} \{H(\vec{N}), h_{ab}\} &= \frac{\delta H(\vec{N})}{\delta h_{ab}} \frac{\delta h_{ab}}{\delta p^{ab}} - \frac{\delta h_{ab}}{\delta h_{ab}} \frac{\delta H(\vec{N})}{\delta p^{ab}} = - \int d^3x \left( N_a \frac{\delta H^a(x)}{\delta p^{ab}} + H^a(x) \frac{\delta N_a}{\delta p^{ab}} \right) \\ \{H(\vec{N}), h_{ab}\} &= - \int d^3x N_a \frac{\delta H^a(x)}{\delta p^{ab}} = - \int d^3x N_a \frac{\delta}{\delta p^{ab}} (2D_{(b} p^{ab)}) \\ \{H(\vec{N}), h_{ab}\} &= \int d^3x \frac{\delta}{\delta p^{ab}} (2p^{ab} D_{(b} N_{a)}) = 2D_{(a} N_{b)} \end{aligned} \quad (48)$$

Karena turunan Lie dari  $h_{ab}$  adalah:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\vec{N}} h_{ab} &= h_{cb} (D_a N^c) + h_{ac} (D_b N^c) - N^c (D_c h_{ab}) = h_{cb} (D_a N^c) + h_{ac} (D_b N^c) \\ &= 2D_{(a} N_{b)} \end{aligned} \quad (49)$$

Sehingga

$$\{H(\vec{N}), h_{ab}\} = \mathcal{L}_{\vec{N}} h_{ab} \quad (50)$$

Dengan cara yang sama untuk:

$$\{H(\vec{N}), p^{ab}\} = \mathcal{L}_{\vec{N}} p^{ab} \quad (51)$$

$$\{H(N), h_{ab}\} = \mathcal{L}_N p^{ab} \quad (52)$$

$$\{H(N), p^{ab}\} = \mathcal{L}_N p^{ab} + \frac{1}{2} h^{ab} N H - 2N \sqrt{h} h^{c[a} h^{b]d} R_{cd} \quad (53)$$

Persamaan Poisson pertama di atas untuk diffeomorfisme waktu pada  $h_{ab}$  dan yang kedua untuk diffeomorfisme waktu pada  $p^{ab}$ , tetapi terdapat suku tambahan pada persamaan Poisson untuk  $p^{ab}$  di atas. Suku tambahan akan lenyap jika  $H = R_{cd} = 0$  yang dikenal sebagai kendala Hamiltonian di permukaan dan solusi fisis persamaan vakum persamaan Einstein. Sehingga dapat dikatakan bahwa kendala  $H_\mu = H + H_a$  adalah generator group diffeomorfisme ruang-waktu  $\text{Diff}(\mathcal{M})$  dalam konfigurasi fisis.

Hubungan Poisson untuk kendala Hamiltonian dan Diffeomorfisme di atas ( $\{H_a(x), H_b(y)\}$ , etc) dikenal sebagai aljabar Dirac atau aljabar Bargmann-Komar. Karakteristik dari aljabar tersebut adalah tidak membentuk aljabar Lie dan sifatnya tertutup. Jika aljabar tersebut dituliskan dalam bentuk smearing-nya, maka:

$$\{H(N_1), H(N_2)\} = \frac{\delta H(N_1)}{\delta h_{ab}} \frac{\delta H(N_2)}{\delta p^{ab}} - \frac{\delta H(N_2)}{\delta h_{ab}} \frac{\delta H(N_1)}{\delta p^{ab}} \quad (54)$$

Dengan  $H(N_1) = \int_\Sigma H(x) N_1(x) d^3x$  adalah smearing dari kendala Hamiltonian dan untuk variasi terhadap  $h_{ab}$  kita akan tinjau kendala Hamiltonian sebagai berikut:

$$H(x) = H_1 + H_2 \quad (55)$$

Dengan:

$$H_1 = \frac{16\pi G N}{\sqrt{h}} \left( p_{ab} p^{ab} - \frac{1}{2} (p^c_c)^2 \right) \quad (55)$$

$$H_2 = -\frac{N\sqrt{h}}{16\pi G} {}^{(3)}R \quad (56)$$

Sehingga variasi terhadap  $h_{ab}$  untuk kendala Hamiltonian dituliskan sebagai berikut:

$$\frac{\delta H(x)}{\delta h_{ab}} = \frac{\delta H_1}{\delta h_{ab}} + \frac{\delta H_2}{\delta h_{ab}} \quad (57)$$

Untuk masing-masing bagian ditinjau sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta H_1}{\delta h_{ab}} &= 16\pi G \frac{\delta}{\delta h_{ab}} \left( \frac{N}{\sqrt{h}} \left( p_{ab} p^{ab} - \frac{1}{2} (p_c^c)^2 \right) \right) \\
&= 16\pi G \frac{\delta}{\delta h_{ab}} \left( \frac{N}{\sqrt{h}} \left( h_{ac} h_{bd} p^{ab} p^{cd} - \frac{1}{2} h_{ab} h_{cd} p^{ab} p^{cd} \right) \right) \\
\frac{\delta H_1}{\delta h_{ab}} &= \frac{16\pi GN}{\sqrt{h}} \left( h_{cd} p^{ac} p^{bd} - \frac{1}{2} p^{ab} p_c^c \right) - \frac{16\pi GN}{\sqrt{h}} h^{ab} \left( p_{cd} p^{cd} - \frac{1}{2} (p_c^c)^2 \right) \quad (58)
\end{aligned}$$

Dan bagian lainnya:

$$\frac{\delta H_2}{\delta h_{ab}} = \frac{1}{16\pi G} \frac{\delta}{\delta h_{ab}} \left( N\sqrt{h} {}^{(3)}R \right) = \frac{1}{16\pi G} \frac{\delta}{\delta h_{ab}} \left( N\sqrt{h} (D^c G_{dc}^d - D_d G_c^{dc}) \right) \quad (59)$$

Dengan  $G_{ab}^c$  pada persamaan (59) adalah koneksi untuk turunan kovarian  $D_a$ , sehingga variasi  $H_2$  terhadap  $h_{ab}$  adalah

$$\frac{\delta H_2}{\delta h_{ab}} = \frac{N\sqrt{h}}{16\pi G} {}^{(3)}R - \frac{N\sqrt{h}}{32\pi G} h^{ab} {}^{(3)}R + \frac{N\sqrt{h}}{16\pi G} \left( D^c \frac{\delta G_{dc}^d}{\delta h_{ab}} - D_d \frac{\delta G_c^{dc}}{\delta h_{ab}} \right) \quad (60)$$

Kita evaluasi suku berikut pada persamaan (60):

$$\begin{aligned}
&\frac{N\sqrt{h}}{16\pi G} \left( D^c \frac{\delta G_{dc}^d}{\delta h_{ab}} - D_d \frac{\delta G_c^{dc}}{\delta h_{ab}} \right) \\
&= \frac{1}{32\pi G} N\sqrt{h} \left[ D^c \left( h^{de} \left( D_d \left( (\delta_c^a \delta_e^b + \delta_e^a \delta_c^b) \delta(x, y) \right) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + D_c \left( (\delta_d^a \delta_e^b + \delta_e^a \delta_d^b) \delta(x, y) \right) - D_e \left( (\delta_d^a \delta_c^b + \delta_c^a \delta_d^b) \delta(x, y) \right) \right) \right) \right. \\
&\quad \left. + D_d \left( h^{de} h^{cf} \left( D_c \left( (\delta_f^a \delta_e^b + \delta_e^a \delta_f^b) \delta(x, y) \right) + D_f \left( (\delta_c^a \delta_e^b + \delta_e^a \delta_c^b) \delta(x, y) \right) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. - D_e \left( (\delta_c^a \delta_f^b + \delta_f^a \delta_c^b) \delta(x, y) \right) \right) \right) \right] \\
&\frac{N\sqrt{h}}{16\pi G} \left( D^c \frac{\delta G_{dc}^d}{\delta h_{ab}} - D_d \frac{\delta G_c^{dc}}{\delta h_{ab}} \right) \\
&= \frac{1}{32\pi G} \sqrt{h} \left[ -(D^c N) \left( D^{(b} \left( \delta_c^a \right) \delta(x, y) \right) + h^{ab} D_c \delta(x, y) - D^{(a} \left( \delta_c^b \right) \delta(x, y) \right) \right) \\
&\quad \left. + (D^e N) \left( D^{(a} \left( \delta_e^b \right) \delta(x, y) \right) + D^{(a} \left( \delta_e^b \right) \delta(x, y) \right) - h^{ab} D_e \delta(x, y) \right]
\end{aligned}$$

$$\frac{N\sqrt{h}}{16\pi G} \left( D^c \frac{\delta G_{dc}^d}{\delta h_{ab}} - D_d \frac{\delta G_c^{dc}}{\delta h_{ab}} \right) = \frac{1}{32\pi G} \sqrt{h} (h^{ab} D_c D^c N - 2D^a D^b N + h^{ab} D_e D^e N)$$

$$\frac{N\sqrt{h}}{16\pi G} \left( D^c \frac{\delta G_{dc}^d}{\delta h_{ab}} - D_d \frac{\delta G_c^{dc}}{\delta h_{ab}} \right) = \frac{\sqrt{h}}{16\pi G} (h^{ab} D_c D^c N - D^a D^b N) \quad (61)$$

Sehingga kita dapatkan persamaan (57) menjadi:

$$\frac{\delta H(x)}{\delta h_{ab}} = \frac{16\pi GN}{\sqrt{h}} \left( h_{cd} p^{ac} p^{bd} - \frac{1}{2} p^{ab} p_c^c \right) - \frac{16\pi GN}{\sqrt{h}} h^{ab} \left( p_{cd} p^{cd} - \frac{1}{2} (p_c^c)^2 \right) \quad (62)$$

$$+ \frac{\sqrt{h}}{16\pi G} (h^{ab} D_c D^c N - D^a D^b N)$$

Selanjutnya untuk variasi terhadap  $p^{ab}$  untuk kendala Hamiltonian adalah:

$$\frac{\delta H(x)}{\delta p^{ab}} = \frac{\delta H_1}{\delta p^{ab}} + \frac{\delta H_2}{\delta p^{ab}} \quad (63)$$

Untuk masing-masing bagian ditinjau sebagai berikut:

$$\frac{\delta H_1}{\delta p^{ab}} = 16\pi G \frac{\delta}{\delta p^{ab}} \left( \frac{N}{\sqrt{h}} \left( p_{ab} p^{ab} - \frac{1}{2} (p_c^c)^2 \right) \right)$$

$$= 16\pi G \frac{\delta}{\delta p^{ab}} \left( \frac{N}{\sqrt{h}} \left( h_{ac} h_{bd} p^{ab} p^{cd} - \frac{1}{2} h_{ab} h_{cd} p^{ab} p^{cd} \right) \right)$$

$$\frac{\delta H_1}{\delta p^{ab}} = \frac{16\pi GN}{\sqrt{h}} \left( h_{ac} h_{bd} p^{cd} - \frac{1}{2} h_{ab} h_{cd} p^{cd} \right) = \frac{16\pi GN}{\sqrt{h}} \left( p_{ab} - \frac{1}{2} h_{ab} p_c^c \right) \quad (64)$$

Dan untuk bagian selanjutnya:

$$\frac{\delta H_2}{\delta p^{ab}} = \frac{1}{16\pi G} \frac{\delta}{\delta p^{ab}} (N\sqrt{h} {}^{(3)}R) = 0 \quad (65)$$

Sehingga kita dapatkan persamaan (63) menjadi:

$$\frac{\delta H(x)}{\delta p^{ab}} = \frac{16\pi GN}{\sqrt{h}} \left( p_{ab} - \frac{1}{2} h_{ab} p_c^c \right) \quad (66)$$

Sehingga hubungan dalam persamaan Poisson dapat kita tuliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
& \frac{\delta H(N_1)}{\delta h_{ab}} \frac{\delta H(N_2)}{\delta p^{ab}} - \frac{\delta H(N_2)}{\delta h_{ab}} \frac{\delta H(N_1)}{\delta p^{ab}} \\
&= \left( \frac{16\pi G N_1}{\sqrt{h}} \left( h_{cd} p^{ac} p^{bd} - \frac{1}{2} p^{ab} p_c^c \right) - \frac{16\pi G N_1}{\sqrt{h}} h^{ab} \left( p_{cd} p^{cd} - \frac{1}{2} (p_c^c)^2 \right) \right. \\
&+ \left. \frac{\sqrt{h}}{16\pi G} (h^{ab} D_c D^c N_1 - D^a D^b N_1) \right) \left( \frac{16\pi G N_2}{\sqrt{h}} \left( p_{ab} - \frac{1}{2} h_{ab} p_c^c \right) \right) \\
&- \left( \frac{16\pi G N_1}{\sqrt{h}} \left( p_{ab} - \frac{1}{2} h_{ab} p_c^c \right) \right) \left( \frac{16\pi G N_2}{\sqrt{h}} \left( h_{cd} p^{ac} p^{bd} - \frac{1}{2} p^{ab} p_c^c \right) \right. \\
&- \left. \frac{16\pi G N_2}{\sqrt{h}} h^{ab} \left( p_{cd} p^{cd} - \frac{1}{2} (p_c^c)^2 \right) + \frac{\sqrt{h}}{16\pi G} (h^{ab} D_c D^c N_2 - D^a D^b N_2) \right) \\
& \frac{\delta H(N_1)}{\delta h_{ab}} \frac{\delta H(N_2)}{\delta p^{ab}} - \frac{\delta H(N_2)}{\delta h_{ab}} \frac{\delta H(N_1)}{\delta p^{ab}} \tag{67}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \frac{16\pi G N_1}{\sqrt{h}} \left( h_{cd} p^{ac} p^{bd} - \frac{1}{2} p^{ab} p_c^c \right) \right. \\
&- \frac{16\pi G N_1}{\sqrt{h}} h^{ab} \left( p_{cd} p^{cd} - \frac{1}{2} (p_c^c)^2 \right) \\
&+ \left. \frac{\sqrt{h}}{16\pi G} (h^{ab} D_c D^c N_1 - D^a D^b N_1) \right) \left( \frac{16\pi G N_2}{\sqrt{h}} \left( p_{ab} - \frac{1}{2} h_{ab} p_c^c \right) \right) \\
&- \left( \frac{16\pi G N_1}{\sqrt{h}} \left( p_{ab} - \frac{1}{2} h_{ab} p_c^c \right) \right) \left( \frac{16\pi G N_2}{\sqrt{h}} \left( h_{cd} p^{ac} p^{bd} \right. \right. \\
&- \left. \left. \frac{1}{2} p^{ab} p_c^c \right) - \frac{16\pi G N_2}{\sqrt{h}} h^{ab} \left( p_{cd} p^{cd} - \frac{1}{2} (p_c^c)^2 \right) \right. \\
&+ \left. \left. \frac{\sqrt{h}}{16\pi G} (h^{ab} D_c D^c N_2 - D^a D^b N_2) \right) \right)
\end{aligned}$$

Dalam bentuk hubungan persamaan Poisson:

$$\{H(N_1), H(N_2)\} = \int d^3x \left( \frac{\delta H(N_1)}{\delta h_{ab}} \frac{\delta H(N_2)}{\delta p^{ab}} - \frac{\delta H(N_2)}{\delta h_{ab}} \frac{\delta H(N_1)}{\delta p^{ab}} \right) \quad (68)$$

Maka didapatkan:

$$\{H(N_1), H(N_2)\} = H(g^{ab}(N_1 \partial_b N_2 - N_2 \partial_b N_1)) \quad (69)$$

Dan hubungan persamaan Poisson untuk kendala lainnya (kendala diffeomorfisme), sebagai berikut:

$$\{H(\vec{N}_1), H(\vec{N}_2)\} = H[\mathcal{L}_{\vec{N}_1} \vec{N}_2] \quad (70)$$

$$\{H(\vec{N}_1), H(N_2)\} = H[\mathcal{L}_{\vec{N}_1} N_2] \quad (71)$$

Dengan  $\mathcal{L}$  adalah turunan Lie.

Dapat dilihat ketika menggunakan bentuk smearing yang berarti formulasi persamaan Poisson berada di luar permukaan kendala (off shell), hubungan Poisson untuk  $\{H(N_1), H(N_2)\}$  bergantung pada metrik  $g^{ab}$  sehingga tidak bersifat konstan sama sekali. Ini berbeda sekali dengan struktur aljabar Lie. Seluruh persamaan aljabar di atas dikenal sebagai persamaan aljabar Bargmann-Komar tidak dikategorikan sebagai aljabar Lie.

### 1.1.5 Program Kuantisasi Dirac dan Persamaan Wheeler-DeWitt

Dalam relativitas umum seluruh dinamika ruang-waktu dirangkumkan oleh persamaan kendala di atas, oleh karena prosedur kuantisasi yang sesuai untuk relativitas umum harus mampu mengkuantisasi persamaan kendala tersebut. Program kuantisasi untuk sistem kuantum yang memiliki kendala pertama kali diajukan oleh Dirac. Dalam program kuantisasi Dirac, keadaan kuantum dari dinamika sistem akan lenyap ketika dikenakan pada persamaan kendala, dalam konteks relativitas umum ini berarti keadaan kuantum akan lenyap ketika dikenakan pada persamaan kendala Hamiltonian (dan persamaan diffeomorfisme) di atas. Secara umum terdapat 3 langkah dalam program kuantisasi Dirac:

- (1) Menentukan variabel ruang fase dari teori sebagai operator dalam ruang Hilbert kinematik

$\mathcal{H}_{kin}$ , yang memenuhi hubungan komutasi:

$$\{\dots, \dots\} \rightarrow \frac{1}{i\hbar} [\dots, \dots]; \quad (72)$$

- (2) Promosikan operator kendala  $\hat{H}^\mu$  dalam ruang Hilbert kinematik  $\mathcal{H}_{kin}$ ;
- (3) Karakterisasikan ruang solusi dari kendala di ruang Hilbert fisis  $\mathcal{H}_{phys}$ ,

$$\hat{H}^\mu \psi = 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{H}_{phys} \quad (73)$$

3 langkah di atas dilengkapi dengan pemahaman mengenai skalar produk di  $\mathcal{H}_{phys}$  dan interpretasi fisis dari observabel kuantum.

Program kuantisasi Dirac akan lebih umum pada kasus gravitasi, yaitu dapat digunakan untuk sistem yang sepenuhnya terkendala. Sekarang akan kita cobakan program kuantisasi Dirac ini pada formulasi ADM untuk relativitas umum. Hubungan Poisson yang telah dipromosikan dalam representasi hubungan komutasi dalam teori kuantum untuk kasus relativitas umum dituliskan sebagai berikut:

$$[\hat{h}_{ab}, \hat{p}^{cd}] = i\hbar \delta_{(ab)}^{cd} \delta^3(x, y) \quad (74)$$

$$[\hat{h}_{ab}, \hat{h}_{cd}] = 0 \quad (75)$$

$$[\hat{p}^{ab}, \hat{p}^{cd}] = 0 \quad (76)$$

Dari hubungan komutasi diatas maka dalam representasi Schrodinger masing-masing variabel operator tersebut memenuhi:

$$\hat{h}_{ab}(x) = h_{ab}(x) \quad (77)$$

$$\hat{p}^{ab}(x) = -i\hbar \frac{\delta}{\delta h_{ab}(x)} \quad (78)$$

Yang bekerja pada fungsi gelombang  $\psi[h_{ab}(x)]$  pada 3-metrik. Prosedur diatas sangat cocok pada kasus medan skalar, tetapi dalam konteks gravitasi sulit dilakukan. Hal ini disebabkan karena ruang Hilbert kinematik yang secara umum memiliki skalar produk:

$$\int dh \overline{\psi[h]} \psi'[h] \equiv \langle \psi | \psi' \rangle \quad (79)$$

Pada kasus gravitasi tidak terdapat pengukuran Lebesgue untuk ruang metrik moduli diffeomorfisme yang dapat mendefinisikan  $dh$ . Tanpa ini kita tidak dapat menentukan apakah  $\hat{h}_{ab}(x)$  dan  $\hat{p}^{ab}(x)$  bersifat hermitian atau selalu memiliki spektrum positif untuk  $\hat{h}_{ab}(x)$ , seperti yang dibutuhkan pada sign untuk metrik spacelike di hypersurface.

Selain masalah pada level ruang Hilbert kinematik, bila kita beralih ke ruang Hilbert diffeomorfisme  $\mathcal{H}_{diff}$ , yang maka kaitan antara ruang Hilbert kinematik, ruang Hilbert diffeomorfisme dan ruang Hilbert fisis memenuhi:

$$\mathcal{H}_{kin} \quad \hat{H}^a = 0 \quad \mathcal{H}_{diff} \quad \hat{H} = 0 \quad \mathcal{H}_{phys} \quad (80)$$

Yang artinya fungsi gelombang  $\psi[h_{ab}(x)]$  yang cocok untuk menggambarkan dinamika dari gravitasi haruslah merupakan solusi yang memenuhi kendala operator diffeomorfisme ( $\hat{H}^a = 0$ ) sehingga dikatakan memenuhi sebagai anggota dari ruang Hilbert diffeomorfisme begitu juga untuk ruang Hilbert fisis maka harus memenuhi kendala Hamiltonian ( $\hat{H} = 0$ ). Namun setelah dikaji, pada level ruang Hilbert diffeomorfisme terdapat masalah, yaitu:

$$\hat{H}^a \psi[h_{ab}] = 2i\hbar \int_{\Sigma} d^3x D_b N_a \frac{\delta \psi}{\delta h_{ab}} = 0 \quad (81)$$

Yang berimplikasi bahwa

$$\psi[h_{ab}] = \psi[h_{ab} + 2D_{(b} N_{a)}] \quad (82)$$

Yang merupakan solusi untuk operator kendala diffeomorfisme. Solusi ini masih ill-defined walaupun memenuhi operator kendala diffeomorfisme karena tidak adanya pengukuran  $dh$  di level ruang Hilbert kinematik.

Masalah menjadi serius untuk kasus ruang Hilbert fisis karena selain masalah tidak adanya pengukuran Lebesgue untuk ruang metrik moduli diffeomorfisme, persamaan operator kendala Hamiltonian lebih rumit dibandingkan operator kendala diffeomorfisme. Solusi  $\psi[h_{ab}]$  yang merupakan solusi untuk kasus operator kendala diffeomorfisme bukanlah solusi untuk operator kendala Hamiltonian. Operator kendala Hamiltonian relativitas umum dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\hat{H}\psi[h_{ab}] = \left[ \frac{16\pi GN}{\sqrt{\hat{h}}} \left( \hat{p}_{ab} \hat{p}^{ab} - \frac{1}{2} (\hat{p}_c^c)^2 \right) - \frac{N\sqrt{\hat{h}}}{16\pi G} {}^{(3)}R(\hat{h}) \right] \psi[h_{ab}] = 0 \quad (83)$$

Atau

$$\hat{H}\psi[h_{ab}] = \left[ \frac{16\pi GN}{\sqrt{h}} G_{abcd} \hat{p}^{ab} \hat{p}^{cd} - \frac{N\sqrt{h}}{16\pi G} {}^{(3)}R(\hat{h}) \right] \psi[h_{ab}] = 0 \quad (84)$$

Dengan  $G_{abcd} = h_{ac}h_{bd} + h_{ad}h_{bc} - h_{ab}h_{cd}$  dan  $\hat{p}^{ab}\hat{p}^{cd} = -\hbar \frac{\delta^2}{\delta h_{ab}(x)\delta h_{cd}(x)}$ . Persamaan operator kendala Hamiltonian di atas bersama dengan fungsi gelombang  $\psi[h_{ab}]$  dikenal sebagai persamaan Wheeler-deWitt atau persamaan Einstein-Schrodinger. Yang perlu diperhatikan dari

persamaan di atas adalah bahwa solusi  $\psi[h_{ab}]$  yang cocok untuk persamaan operator kendala diffeomorfisme tidak cocok sebagai solusi persamaan Wheeler-deWitt ini. Sehingga hubungan ruang Hilbert diffeomorfisme dan ruang Hilbert fisis masih menjadi kajian penelitian dalam kuantisasi gravitasi berdasarkan persamaan Wheeler-deWitt.

Persamaan Wheeler-deWitt merupakan persamaan yang menggambarkan dinamika ruang-waktu dalam relativitas umum untuk level kuantum, tetapi karena persamaan tersebut merupakan persamaan yang berasal dari kendala Hamiltonian, maka  $\hat{H}\psi[h_{ab}] = 0$ , yang artinya dinamika ruang-waktu “membeku” atau dikenal sebagai masalah waktu (*time problem*) dalam gravitasi kuantum. Hal ini disebabkan dalam relativitas umum, waktu ( $t$ ) merupakan koordinat yang dapat digantikan variabel lainnya asalkan memenuhi keinvarianan diffeomorfisme, tetapi dalam teori kuantum, waktu merupakan variabel eksternal yang evolusinya menggambarkan dinamika sistem.

Untuk menyelesaikan berbagai masalah dalam kuantisasi gravitasi pada formulasi ADM untuk relativitas umum ini, fisikawan memikirkan ulang bagaimana menuliskan relativitas umum dalam variabel lainnya selain  $h_{ab}$  dan  $p^{ab}$ , yaitu menggunakan variabel yang berhubungan dengan koneksi dalam relativitas umum. Variabel koneksi ini dikenal sebagai variabel Ashtekar-Barbero dan program kuantisasi berdasarkan variabel Ashtekar-Barbero dengan basis program kuantisasi Dirac di atas melahirkan teori yang dikenal sebagai Loop Quantum Gravity. Dalam loop quantum gravity masalah-masalah yang dihadapi dalam mengkuantisasi gravitasi berdasarkan formulasi ADM dapat dijawab dan secara signifikan memberikan kemajuan dalam memahami gravitasi dan ruang-waktu pada level kuantum.

## 1.2 Aksi Palatini, Formulasi Tetrad, Aksi Holst dan Teori BF dalam Relativitas Umum

### 1.2.1 Aksi Palatini

Setelah Einstein merampungkan persamaan medan untuk gravitasi, Hilbert menuliskan persamaan medan yang serupa menggunakan prinsip aksi. Aksi ini dikenal sebagai aksi Einstein-Hilbert, yang dituliskan sebagai berikut:

$$S[g] = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R[g] \quad (85)$$

Formulasi ini dikenal sebagai formulisme orde kedua. Beberapa tahun kemudian, Palatini merealisasikan cara lain dalam menuliskan aksi Einstein-Hilbert di atas. Aksi Einstein-Hilbert merupakan fungsional dari metrik  $S[g]$  dengan terdapat hubungan langsung antara metrik  $g_{\mu\nu}$

dengan koneksi  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ , tetapi Palatini meninjau metrik  $g_{\mu\nu}$  dan koneksi  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$  sebagai 2 variabel yang independen. Aksi yang diajukan Palatini adalah:

$$S[g, \Gamma] = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\alpha\nu}^\alpha[\Gamma] \quad (86)$$

Yang mana bila divariasikan terhadap  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ , maka akan didapat hubungan antara metrik  $g_{\mu\nu}$  dan koneksi  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ , sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \delta(S[g, \Gamma]) &= 0 = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \delta(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\alpha\nu}^\alpha[\Gamma]) \\ \delta(S[g, \Gamma]) &= \frac{1}{16\pi G} \int d^4x [(\delta\sqrt{-g})g^{\mu\nu} R_{\mu\alpha\nu}^\alpha[\Gamma] + \sqrt{-g}(\delta g^{\mu\nu})R_{\mu\alpha\nu}^\alpha[\Gamma] \\ &\quad + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}(\delta R_{\mu\alpha\nu}^\alpha[\Gamma])] \end{aligned} \quad (87)$$

Dengan meninjau masing-masing suku di atas, maka:

a. Untuk variasi  $\delta\sqrt{-g}$ , maka:

$$\frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g} \frac{\delta g}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{2\sqrt{-g}} g g_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \quad (88)$$

Maka

$$(\delta\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (89)$$

b. Untuk variasi  $\delta g^{\mu\nu}$  secara langsung mendapatkan

$$\sqrt{-g}(\delta g^{\mu\nu})R_{\mu\alpha\nu}^\alpha[\Gamma] = \sqrt{-g}(\delta g^{\mu\nu})R_{\mu\nu}[\Gamma] \quad (90)$$

c. Untuk variasi  $\delta R_{\mu\alpha\nu}^\alpha[\Gamma]$ , maka:

$$\begin{aligned} \delta R_{\mu\alpha\nu}^\alpha[\Gamma] &= \delta R_{\mu\nu}[\Gamma] = \delta(\partial_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha) - \delta(\partial_\mu \Gamma_{\alpha\nu}^\alpha) + \delta(\Gamma_{\mu\nu}^\alpha \Gamma_{\beta\alpha}^\beta) - \delta(\Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta) \\ \delta R_{\mu\nu} &= \delta(\partial_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha) - \delta(\partial_\mu \Gamma_{\alpha\nu}^\alpha) + (\delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha) \Gamma_{\beta\alpha}^\beta + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha (\delta\Gamma_{\beta\alpha}^\beta) - (\delta\Gamma_{\mu\beta}^\alpha) \Gamma_{\alpha\nu}^\beta - \Gamma_{\mu\beta}^\alpha (\delta\Gamma_{\alpha\nu}^\beta) \\ \delta R_{\mu\nu} &= [\delta(\partial_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha) - (\delta\Gamma_{\mu\beta}^\alpha) \Gamma_{\alpha\nu}^\beta - \Gamma_{\mu\beta}^\alpha (\delta\Gamma_{\alpha\nu}^\beta)] - [\delta(\partial_\mu \Gamma_{\alpha\nu}^\alpha) - (\delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha) \Gamma_{\beta\alpha}^\beta - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha (\delta\Gamma_{\beta\alpha}^\beta)] \\ \delta R_{\mu\nu} &= \delta(\nabla_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha) - \delta(\nabla_\mu \Gamma_{\alpha\nu}^\alpha) \end{aligned} \quad (91)$$

Yang dikenal sebagai identitas Palatini, sehingga didapat:

$$\sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\delta R_{\mu\alpha\nu}^\alpha[\Gamma]) = \sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\delta(\nabla_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha) - \delta(\nabla_\mu \Gamma_{\alpha\nu}^\alpha))$$

$$\sqrt{-g}g^{\mu\nu}(\delta R_{\mu\alpha\nu}^{\alpha}[\Gamma]) = \sqrt{-g}\left(\nabla_{\alpha}(g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}) - \nabla_{\alpha}(g^{\alpha\nu}\delta\Gamma_{\beta\nu}^{\beta})\right)$$

$$\sqrt{-g}g^{\mu\nu}(\delta R_{\mu\alpha\nu}^{\alpha}[\Gamma]) = \sqrt{-g}\nabla_{\alpha}A^{\alpha} \quad (92)$$

$$\text{Dengan } A^{\alpha} = g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} - g^{\alpha\nu}\delta\Gamma_{\beta\nu}^{\beta},$$

Setelah didapat seluruhnya suku di atas maka:

$$\delta(S[g, \Gamma]) = 0 = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x [(\delta\sqrt{-g})g^{\mu\nu}R_{\mu\alpha\nu}^{\alpha} + \sqrt{-g}(\delta g^{\mu\nu})R_{\mu\alpha\nu}^{\alpha} + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}(\delta R_{\mu\alpha\nu}^{\alpha})]$$

$$0 = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \left[ \left( -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \right) g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + \sqrt{-g}(\delta g^{\mu\nu})R_{\mu\nu} + \sqrt{-g}\nabla_{\alpha}A^{\alpha} \right]$$

$$0 = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} [G_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \nabla_{\alpha}A^{\alpha}] \quad (93)$$

Persamaan terakhir ini menghubungkan metrik  $g_{\mu\nu}$  dengan koneksi  $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$ . Bila diperhatikan suku pertama dalam persamaan di atas merupakan tensor Einstein:  $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$  dan suku kedua karena mengandung suku derivatif kovarian akan lenyap berdasarkan teorema Stokes.

Adapun aksi Palatini di atas akan menghasilkan persamaan medan Einstein bila yang divariasikan hanya terhadap metrik saja. Formulasi Palatini dikenal ini dikenal sebagai formulasi orde pertama untuk membedakan dengan formulasi aksi Einstein-Hilbert. Kita akan gunakan formulasi Palatini ini dalam meninjau relativitas umum tetapi variabel metrik dan koneksi digantikan oleh tetrad (pengganti metrik) dan spin koneksi (pengganti koneksi) dalam formulasi tetrad.

### 1.2.2 Formulasi Tetrad Orde Pertama

Dalam formulasi tetrad yang ditinjau disini (membedakan dengan formulasi tetrad yang original diajukan oleh Cartan dan Weyl disingkat formulasi tetrad) akan digunakan langkah-langkah yang serupa dalam formulasi Palatini. Dibandingkan menggunakan metrik  $g_{\mu\nu}$  yang menggambarkan dinamika ruang-waktu, justru dalam fomulasi tetrad digunakan medan tetrad  $e_{\mu}^I(x)$  dengan indeks yang berjalan memiliki:  $I, \mu = 0,1,2,3$ , tetapi indeks  $I$  adalah indeks untuk ruang datar dalam ruang datar Minkowski:  $\eta = (1, -1, -1, -1)$ . Formulasi tetrad ini menganggap ruang-waktu secara lokal merupakan ruang Minkowski sesuai prinsip ekuivalensi sehingga secara lokal ruang-waktu merupakan ruang inersia. Hubungan antara metrik  $g_{\mu\nu}$  dan medan tetrad  $e_{\mu}^I(x)$  dituliskan sebagai berikut:

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{IJ} e_\mu^I(x) e_\nu^J(x) \quad (94)$$

Medan tetrad juga memenuhi transformasi Lorentz:

$$e_\mu^I(x) \rightarrow \Lambda_J^I(x) e_\mu^J(x) \quad (95)$$

Dengan  $\Lambda_J^I(x)$  merupakan elemen dari grup Lorentz orthocronous:  $\Lambda_J^I(x) \in SO(3,1)$  dan  $\|\Lambda_J^I\| \gg 1$ . Disini istilah grup Lorentz orthocronous disingkat menjadi grup Lorentz saja. Oleh karena itu, dalam formulasi tetrad terdapat tambahan simetri gauge yaitu local gauge invariance yang berasal dari grup Lorentz. Kita dapat merotasikan setiap titik di ruang-waktu ke dalam kerangka inersial 4D. Hal ini lebih mendasar dibandingkan formulasi relativitas umum menggunakan aksi Einstein-Hilbert, karena dengan formulasi ini kopling dengan materi fermionik dapat dilakukan.

Selanjutnya dapat diproyeksikan vektor pada *tangen space*  $M$  ke ruang internal dan sebaliknya dari vektor dari ruang internal ke manifold  $M$  dengan menggunakan medan tetrad:

$$e_\mu^I V^\mu = V^I ; \quad e_I^\mu V^I = V^\mu \quad (96)$$

Sehingga  $V$  bertransformasi dalam grup Lorentz. Hal sama dapat pula berlaku untuk tensor dan dual vektor. Seperti halnya turunan kovarian di manifold  $M$  yang didefinisikan menggunakan koneksi  $\Gamma$ , maka pada tangen space  $M$  yang bersifat inersial ini untuk mendefinisikan turunan kovarian diperkenalkan koneksi yang dikenal sebagai koneksi spin (spin connection)  $\omega$ :

$$D_\mu V^I = \partial_\mu V^I + \omega_{\mu J}^I V^J \quad (97)$$

Dan dapat bercampur dengan turunan kovarian di manifold jika indeks yang digunakan adalah indeks ruang-waktu di manifold ( $\mu, \alpha = 0,1,2,3$ ):

$$D_\mu V_\alpha^I = \partial_\mu V_\alpha^I + \omega_{\mu J}^I V_\alpha^J - \Gamma_{\alpha\mu}^\beta V_\beta^I \quad (98)$$

Selain itu, koneksi spin bersifat antisimetrik atau kondisi metriksiti (*metricity condition*):

$$\omega_\mu^{IJ} = -\omega_\mu^{JI} \quad (99)$$

Spin koneksi merupakan koneksi di spinor bundle tangen space  $M$  yang dapat didefinisikan seperti halnya koneksi  $\Gamma$ , yaitu:

$$\omega_{\mu}^{IJ} = \frac{1}{2} e^{\alpha I} (\partial_{\mu} e_{\alpha}^J - \partial_{\alpha} e_{\mu}^J + e^{\beta J} e_{\mu}^K \partial_{\beta} e_{\alpha K}) \quad (100)$$

$$- \frac{1}{2} e^{\alpha J} (\partial_{\mu} e_{\alpha}^I - \partial_{\alpha} e_{\mu}^I + e^{\beta I} e_{\mu}^K \partial_{\beta} e_{\alpha K})$$

Dan hubungan koneksi spin dan koneksi, dituliskan sebagai berikut (yang memenuhi kondisi torsion free/torsionless):

$$\omega_{\mu}^{IJ} = -e^{\alpha J} \partial_{\mu} e_{\alpha}^I + e_{\alpha}^I \Gamma_{\beta\mu}^{\alpha} e^{\beta J} = e_{\alpha}^I (\partial_{\mu} e^{\alpha J} + \Gamma_{\beta\mu}^{\alpha} e^{\beta J}) = e_{\alpha}^I \nabla_{\mu} e^{\alpha J} \quad (101)$$

Karena sifat kompatibilitas:  $D_{\mu} e_{\alpha}^I = 0$  dan  $\partial_{\mu} (e_{\alpha}^I e^{\alpha J}) = 0$ , maka berimplikasi pada:  $e^{\alpha J} \partial_{\mu} e_{\alpha}^I = -e_{\alpha}^I \partial_{\mu} e^{\alpha J}$  dan menjadi syarat untuk medan koneksi spin yang bersifat torsion free/torsionless yang menyerupai geometri ruang-waktu relativitas umum. Dengan demikian, formulasi tetrad dapat tereduksi menjadi geometri ruang-waktu (pseudo) Riemannian relativitas umum dengan adanya tambahan simetri gauge, yaitu local gauge invariance.

Sekarang dapat kita bangun tensor kelengkungan seperti halnya di relativitas umum dalam formulasi tetrad. Tensor kelengkungan ini disebut kurvatur 2-form  $F^{IJ}$  yang didefinisikan sebagai berikut:

$$F^{IJ} = d\omega^{IJ} + \omega_K^I \wedge \omega^{KJ} \quad (102)$$

Persamaan di atas dikenal sebagai persamaan struktur Cartan jenis pertama, dengan  $d$  adalah turunan eksterior dan  $\wedge$  adalah wedge product. Kurvatur 2-form  $F^{IJ}$  dapat diuraikan dalam komponennya sebagai berikut:

$$F^{IJ} = d\omega^{IJ} + \omega_K^I \wedge \omega^{KJ} = (\partial_{\mu} \omega_{\nu}^{IJ} + \omega_{\mu K}^I \omega_{\nu}^{KJ}) dx^{\mu} \wedge dx^{\nu} \quad (103)$$

$$F^{IJ} = F_{\mu\nu}^{IJ} dx^{\mu} \wedge dx^{\nu} = (\partial_{\mu} \omega_{\nu}^{IJ} - \partial_{\nu} \omega_{\mu}^{IJ} + \omega_{\mu K}^I \omega_{\nu}^{KJ} - \omega_{\nu K}^I \omega_{\mu}^{KJ}) dx^{\mu} \wedge dx^{\nu} \quad (104)$$

Dimana  $F_{\mu\nu}^{IJ} = \partial_{\mu} \omega_{\nu}^{IJ} - \partial_{\nu} \omega_{\mu}^{IJ} + \omega_{\mu K}^I \omega_{\nu}^{KJ} - \omega_{\nu K}^I \omega_{\mu}^{KJ}$ . Dalam teori medan kuantum  $F^{IJ}$  dikenal sebagai strenght gauge field yang merupakan tensor kuat medan interaksi. Hal ini mengidentifikasin bahwa relativitas umum dapat dituliskan dalam formulasi yang serupa dengan teori medan gauge, seperti halnya medan elektromagnetik.

Kemudian, jika kita menggunakan  $\omega(e)$  yang didefinisikan pada persamaan (101) pada definisi  $F_{\mu\nu}^{IJ}$ , dapat kita tunjukkan bahwa kurvatur 2-form  $F_{\mu\nu}^{IJ}$  diatas berhubungan langsung dengan tensor kelengkungan Riemann via tetrad:

$$F_{\mu\nu}^{IJ}[\omega(e)] = e^{I\alpha} e^{J\beta} R_{\mu\nu\alpha\beta}[e] \quad (105)$$

Persamaan di atas dikenal juga sebagai persamaan struktur Cartan jenis kedua. Pembuktian hubungan di atas dapat dilihat pada Lampiran B.

Sehingga dapat kita aksi Einstein-Hilbert dalam formulasi tetrad dapat dituliskan sebagai berikut (digunakan unit alami:  $16\pi G = 1$  dan hubungan determinan metrik dan determinan tetrad):

$$S[e] = \int d^4x \sqrt{-g} R[e] = \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} R_{\mu\alpha\nu\beta} \quad (106)$$

$$S[e, \omega] = \int d^4x \sqrt{-(-e^2)} e_i^\mu e_j^\alpha e^{vi} e^{\beta j} R_{\mu\alpha\nu\beta} = \int d^4x e e_i^\mu e_j^\alpha F_{\mu\alpha}^{IJ}(\omega(e)) \quad (107)$$

$$S[e, \omega] = \frac{1}{4} \int d^4x \varepsilon_{IJKL} \varepsilon^{\mu\alpha\nu\beta} e_\nu^K e_\beta^L F_{\mu\alpha}^{IJ}(\omega(e)) = \frac{1}{2} \varepsilon_{IJKL} \int d^4x e^K \wedge e^L \wedge F^{IJ}(\omega) \quad (107)$$

Persamaan aksi Einstein-Hilbert di atas menyatakan bahwa spin koneksi dan tetrad masing-masing merupakan variabel bebas seperti hanya formulasi Palatini:

$$S[e, \omega] = \frac{1}{2} \varepsilon_{IJKL} \int d^4x e^K \wedge e^L \wedge F^{IJ}(\omega) \quad (108)$$

Menggunakan formulasi di atas kemudian divariasikan terhadap tetrad ( $e$ ), maka diperoleh persamaan gerak atau persamaan medan Einstein untuk kasus vakum seperti yang diperoleh pula dari aksi Einstein-Hilbert dalam formulasi metrik (Lihat lampiran B). Hal ini disebabkan karena variasi terhadap medan tetrad tidak menambahkan medan baru karena medan tetrad sendiri yang merupakan spinor dari tangen space manifold  $M$ . Dalam formulasi ini relativitas umum memiliki formulasi yang lebih umum dan dapat kembali pula ke bentuk originalnya.

### 1.2.3 Aksi Holst dan Teori BF

Ashtekar pertama kali menemukan transformasi kanonik yang sangat menarik dan membuat penasaran untuk ruang fasa dalam relativitas umum. Transformasi kanonik biasanya berhubungan dengan penjumlahan suatu suku tertentu dalam aksi, salah satunya yang diperkenalkan oleh Holst, yaitu:

$$S[e, \omega] = \frac{1}{2} \varepsilon_{IJKL} \int d^4x e^K \wedge e^L \wedge F^{IJ}(\omega) + \frac{1}{2\gamma} \delta_{IJKL} \int d^4x e^K \wedge e^L \wedge F^{IJ}(\omega) \quad (109)$$

Dengan  $\gamma$  merupakan konstanta yang dikenal sebagai konstanta Barbero-Immirzi dan  $\delta_{IJKL} \equiv \delta_{I[K}\delta_{L]J} = \delta_{IK}\delta_{LJ} - \delta_{IL}\delta_{KJ}$ , dengan formulasi ini maka berlaku:

$$\delta_{IJKL} e^K \wedge e^L \wedge F_{\mu\alpha}^{IJ}(\omega(e)) = \varepsilon^{\mu\alpha\nu\beta} R_{\mu\alpha\nu\beta}(e) \equiv 0 \quad (110)$$

Ketika spin koneksi memenuhi definisi  $\omega_\mu^{IJ} = e_\alpha^I \nabla_\mu e^{\alpha J}$  atau disebut sebagai kondisi non-degenerate (non-degenerate pada tetrad berarti tetrad memiliki invers dan sebaliknya jika tidak memiliki invers ketika tetrad tidak memiliki invers). Menggunakan syarat di atas, aksi Holst akan dapat menghasilkan persamaan medan Einstein (Lihat Lampiran B). Selain itu, pada level vakum aksi Holst ekuivalen dengan relativitas umum dan menghasilkan struktur ruang fasa dalam teori gauge SU(2), sehingga kuantisasi teori Yang-Mills sesuai prosedur Dirac dapat dilakukan. Gauge SU(2) akan menjadi basis dalam memkontruksi ruang Hilbert dalam formulasi loop quantum gravity.

Kembali ke aksi Holst (109), dapat kita tuliskan:

$$S[e, \omega] = \left( \frac{1}{2} \varepsilon_{IJKL} + \frac{1}{2\gamma} \delta_{IJKL} \right) \int d^4x e^K \wedge e^L \wedge F^{IJ}(\omega) \quad (111)$$

Dalam buku Rovelli [4] didefinisikan dual Hodge untuk kurvatur 2-form  $F^{IJ}$  di ruang Minkowski, yaitu:  $*F_{KL} := \frac{1}{2} \varepsilon_{IJKL} F^{IJ}$  sehingga aksi Holst kembali dituliskan menjadi:

$$S[e, \omega] = \left( \frac{1}{2} \varepsilon_{IJKL} + \frac{1}{2\gamma} \delta_{IJKL} \right) \int d^4x e^K \wedge e^L \wedge F^{IJ}(\omega) \quad (112)$$

$$S[e, \omega] = \int d^4x \left( *e^K \wedge e^L + \frac{1}{\gamma} e^K \wedge e^L \right) \wedge F^{IJ}(\omega) \quad (113)$$

Bila dilakukan variasi terhadap aksi Holst  $\delta S$  pada persamaan (113) terhadap  $\delta e$  dan  $\delta \omega$ , maka masing-masing akan diperoleh persamaan berikut:

$$\left( \frac{1}{2} \varepsilon_{IJKL} + \frac{1}{2\gamma} \delta_{IJKL} \right) e^J \wedge F^{KL}(\omega) = 0 \quad (114)$$

$$\left( \frac{1}{2} \varepsilon_{IJKL} + \frac{1}{2\gamma} \delta_{IJKL} \right) e^I \wedge d_D e^J = 0 \quad (115)$$

Persamaan (114) dan (115) dikenal sebagai persamaan dinamik dari aksi Holst dan persamaan (114) setara dengan persamaan medan Einstein (lihat di Lampiran B) ketika medan tetrad tidak bersifat non-degenerate atau memiliki invers atau  $e^I \neq 0$ .

Dan didefinisikan medan 2-form  $B^{KL}$ , yaitu:  $B^{KL} = * e^K \wedge e^L + \frac{1}{\gamma} e^K \wedge e^L$ , maka:

$$S[e, \omega] = \int d^4x B^{KL} \wedge F^{IJ} \quad (116)$$

Dalam notasi tanpa komponen (116) dituliskan sebagai berikut:

$$S[e, \omega] = \int d^4x B \wedge F \quad (117)$$

Teori relativitas umum yang dituliskan dalam aksi ini dikenal sebagai teori BF. Rumusan covariant atau spin foam dari loop quantum gravity akan berfokus pada teori ini dimana medan  $B$  akan berperan penting dalam kuantisasi medan gravitasi dalam formulasi kuantum versi path integral yang diperkenalkan oleh Feynman.

### 1.3 Kendala Simplitasi Linier (*Linear Simplicity Constraint*)

Berdasarkan formulasi dalam teori BF, dapat kita konstruksi amplitudo transisi dinamik dalam loop quantum gravity. Amplitudo transisi dinamik merupakan probabilitas peluang terjadi transisi dari 1 keadaan (state) ke keadaan lainnya (anoter state). Amplitudo ini terkadang disebut juga sebagai lintasan kuantum dalam formulasi kuantum path integral Feynman. Dalam konteks loop quantum gravity, amplitudo transisi dinamik akan menggambarkan amplitudo probabilitas transisi dari evolusi state spin network ke state spin network lainnya, sehingga amplitudo probabilitas transisi ini menjelaskan dinamika dari spin network atau yang dikenala sebagai spin foam.

Menggunakan teori BF, akan kita perhatikan terdapat suatu persamaan mendasar bagi relativitas umum yang dikenal sebagai kendala simplitasi linier, yang dituliskan sebagai berikut:

$$\vec{K} = \gamma \vec{L} \quad (118)$$

Persamaan kendala di atas (118), mirip sekali dengan persamaan yang menghubungkan medan listrik dan medan magnet dalam elektromagnetik:  $\vec{E} = c\vec{B}$ , sehingga untuk kuantitas  $\vec{K}$  dan  $\vec{L}$ , masing-masing akan disebut sebagai medan listrik gravitasi dan medan magnet gravitasi serta  $\gamma$  merupakan konstanta Barbero-Immirzi yang penting dalam loop quantum gravity.

Sekarang kita menurunkan hubungan kendala di atas dari relativitas umum berdasarkan teori BF. Dalam formulasi tetrad, kita memiliki suatu wilayah ruang-waktu kompak 4D yang dibatasi oleh permukaan hypersurface 3 dimensi  $\Sigma$ . Formulasi tetrad menyatakan bahwa setiap tetrad memiliki

batas bawah dan batas atas dalam wilayah ruang-waktu kompak tersebut, masing-masing adalah  $e_a^{in}$  (batas bawah) dan  $e_a^{fin}$  (batas atas). Dalam formalisme metrik dapat dipilih hypersurface dengan nilai waktu  $t$  yang berbeda-beda (tetapi menggambarkan peristiwa fisika yang tetap sama) atau dikenal sebagai time gauge dan untuk formulasi tetrad kita tuliskan sebagai berikut:

$$e_a^I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e_a^i \end{pmatrix} \quad (119)$$

Dengan  $a, i = 1, 2, 3$  dan  $e_a^I$  adalah medan tetrad yang berhubungan dengan induced metrik  $g_{ab}$  di permukaan hypersurface untuk metrik 4D. time gauge dalam formulasi tetrad lebih baik dibandingkan formulasi ADM yang menggunakan fungsi lapse dan vektor pergeseran (shift vector) karena disini fungsi lapse bernilai 1 dan vektor pergeseran bernilai 0 tetapi tetap memiliki orientasi dalam kerangka Lorentzian.

Selain itu, karena yang ditinjau adalah permukaan hypersurface 3D, dimana diambil nilai  $t$  yang tetap, maka setiap titik  $\sigma$  di hypersurface  $\Sigma$  terpetakan dengan tangen space di  $M$  yaitu di titik  $\sigma$  yang merupakan titik di sub ruang 3 dimensi spacelike Minkowski. Hal ini menjadikan keinvarianan grup Lorentz  $SO(3,1)$  di hypersurface rusak (breaking) menjadi keinvarianan sub grupnya yaitu grup rotasi  $SO(3)$ :

$$SO(3,1) \rightarrow SO(3) \quad (120)$$

Dan secara aljabar menjadi:

$$SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow SU(2) \quad (121)$$

Pengrusakan simetri ini merupakan karakteristik ketika yang kita tinjau adalah hypersurface dari wilayah ruang-waktu 4D.

Jika di ruang-waktu 4D, kita memiliki permukaan 3 dimensi yang digambarkan dalam koordinat  $(\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$ , maka dapat kita tuliskan covektor normal  $n_\mu$  untuk setiap titik di permukaan tersebut:

$$n_\mu = \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \frac{dx^\nu dx^\alpha dx^\beta}{d\sigma^1 d\sigma^2 d\sigma^3} \quad (122)$$

Dengan  $x^\mu(\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$  adalah hasil pemetaan dari permukaan 3 dimensi dengan permukaan 3 dimensi lain di ruang-waktu. Jika kita ambil waktu  $t$  konstan, maka  $(x^1, x^2, x^3) = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$ , sehingga covektor normal menjadi  $n_\mu = (1, 0, 0, 0)$  dan dalam formulasi tetrad dapat kita petakan

via tetrad antara titik  $\sigma$  di hypersurface  $\Sigma$  dengan  $x^\mu(\sigma)$  yang merupakan suatu permukaan 3 dimensi di hypersurface  $\Sigma$ , yang dituliskan sebagai berikut:

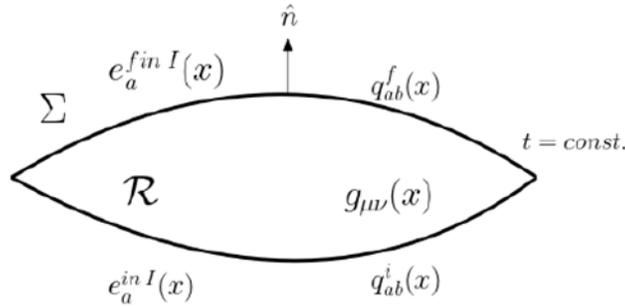
$$n_\mu \rightarrow n_I = e_I^\mu n_\mu = \varepsilon_{IJKL} e_\nu^J e_\alpha^K e_\beta^L \frac{dx^\nu}{d\sigma^1} \frac{dx^\alpha}{d\sigma^2} \frac{dx^\beta}{d\sigma^3} \quad (123)$$

Sehingga kita dapat gunakan  $n_I$  untuk mempertahankan gauge fixing dari grup Lorentz  $SO(3,1)$  menjadi sub grupnya  $SO(3)$  dan orientasi kerangka Lorentz di permukaan ruang-waktu secara lokal ditinjau sebagai waktu tetap (fixed-time surface), serta berlaku  $n_I = (1,0,0,0)$ .

Kembali kita tinjau medan 2-form  $B^{IJ}$  yang didefinisikan sebagai berikut:

$$B^{IJ} = * e^I \wedge e^J + \frac{1}{\gamma} e^I \wedge e^J \quad (124)$$

Yang mana dapat didekomposisi menjadi suku medan listrik ( $K^I = n_J B^{IJ}$ ) dan medan magnet ( $L^I = n_J (* B)^{IJ}$ ) seperti yang telah disampaikan di awal dan hal ini mirip dengan dekomposisi tensor kuat medan elektromagnetik  $F^{IJ}$  menjadi medan listrik dan medan magnet. Karena sifat medan 2-form  $B^{IJ}$  yang bersifat antisimetrik, maka  $K^I$  dan  $L^I$  tidak memiliki komponen normal di  $\Sigma$ , sehingga:  $n_I K^I = n_I L^I = 0$  dan akan didapat vektor di 3D. Secara geometri dapat kita interpretasikan sebagai berikut:



Gambar 1: Interpretasi Geometri (Sumber: [5])

Medan 2-form di hypersurface  $\Sigma$  dapat dituliskan sebagai berikut:

$$B^{IJ} = \begin{cases} n_J B^{IJ} = K^I \\ n_J (* B)^{IJ} = L^I \end{cases} \quad (125)$$

Menggunakan koordinat  $n_I = (1,0,0,0)$  dan time gauge, dengan koordinat  $(x^1, x^2, x^3) = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$ , maka kita dapatkan:

$$K^I = B^{I0} = (0, \vec{K}) = \begin{cases} K^0 = 0 \\ K^i = \varepsilon_{jk}^i e^j \wedge e^k \end{cases} \quad (126)$$

$$L^I = (*B)^{I0} = \frac{1}{2} \varepsilon_{KLO}^I B^{KL} = (0, \vec{L}) = \begin{cases} L^0 = 0 \\ L^i = \frac{1}{\gamma} \varepsilon_{jk}^i e^j \wedge e^k \end{cases} \quad (127)$$

Disini  $\vec{K} = \{K^I\}$  dan  $\vec{L} = \{L^I\}$  dan  $B^{IJ}$  merupakan matrik 4 x 4 yang dituliskan dalam  $\vec{K}$  dan  $\vec{L}$ , hal yang sama dilakukan dalam kasus tensor medan elektromagnetik  $F^{\mu\nu}$  dituliskan medan magnet listrik  $\vec{E}$  dan medan magnet  $\vec{B}$ . Sehingga ketika rusak simetri Lorentz rusak maka, medan 2-form  $B^{IJ}$  akan menjadi bagian listrik  $\vec{K}$  dan bagian magnet  $\vec{L}$ . Rusaknya simetri Lorentz karena kita memilih kerangka acuan di permukaan hypersurface 3 dimensi. Di kerangka lainnya, 2 bagian ini bergabung secara umum.

Ekspresi  $B \wedge F$  dengan  $F = d\omega + \omega \wedge \omega$ , sehingga konjugat untuk  $\omega$  berhubungan dengan medan  $B$ . Dalam teori Yang-Mills, variabel konjugat terhadap koneksi berada dalam aljabar. Kurung Poisson-nya memberikan aljabar tersebut, sehingga  $B^{IJ}$  menghasilkan transformasi  $SL(2,C)$ . Oleh karena itu, dalam teori kanonik, medan  $B^{IJ}$  akan menjadi generator transformasi  $SL(2,C)$ , sementara  $\vec{K}$  dan  $\vec{L}$  berperan sebagai generator rotasi dan boost. Perlu diingat sekali lagi bahwa ini terjadi dalam suatu kerangka yang telah ditentukan karena umumnya tidak mungkin untuk memisahkan rotasi dari boost.

Selanjutnya kita akan memperoleh hasil yang sangat penting untuk teori kuantum bagi gravitasi berdasarkan definisi medan 2-form  $B^{IJ}$ , sebagai berikut:

$$K^I = n_J B^{IJ} = n_J \left( *e^I \wedge e^J + \frac{1}{\gamma} e^I \wedge e^J \right) = n_J \left( \varepsilon_{KL}^{IJ} e^K \wedge e^L + \frac{1}{\gamma} e^I \wedge e^J \right) \quad (128)$$

Di hypersurface  $\Sigma$ , maka  $n_J \varepsilon^J_{| \Sigma} = 0$  untuk setiap definisi  $n$ , oleh karena itu:

$$K^I = n_J *e^I \wedge e^J = n_J \varepsilon_{KL}^{IJ} e^K \wedge e^L \quad (129)$$

Dengan cara yang sama, maka:

$$\begin{aligned}
L^I &= n_J (*B)^{IJ} = n_J \left( * \left( * e^I \wedge e^J + \frac{1}{\gamma} e^I \wedge e^J \right) \right) = \frac{1}{\gamma} n_J * e^I \wedge e^J \\
&= \frac{1}{\gamma} n_J \varepsilon^{IJ}_{KL} e^K \wedge e^L
\end{aligned} \tag{130}$$

Maka kita dapatkan persamaan yang dikenal sebagai kendala simplisitas linier (118):

$$K^I = \gamma L^I \tag{118}$$

Dapat dilihat bahwa bagian medan listrik dan medan magnet:  $K^I$  dan  $L^I$  dari medan 2-form  $B^{IJ}$  yang sebanding satu dengan lainnya, dan kesebandingan ini dihubungkan oleh konstan Barbero-Immirzi ( $\gamma$ ). Hubungan ini adalah hubungan terpenting dalam rumusan covariant loop quantum gravity.

#### 1.4 Variabel Ashtekar-Barbero dan Triad dalam Formulasi Holst

Menuju kuantisasi gravitasi, langkah selanjutnya adalah memformulasikan rumusan Hamiltonian relativitas umum dalam bentuk koneksi yang dikenal sebagai koneksi Ashtekar kemudian prosedur kuantisasi yang diajukan oleh Dirac. Salah satu keunggulan dari variabel Ashtekar adalah dapat kita tuliskan formulasi relativitas umum yang mirip dengan teori Yang-Mills, sehingga program kuantisasi Yang-Mills dapat dilakukan pada teori relativitas umum. Aksi Holst dapat kita tuliskan dalam komponen spasial (indeks a,b = 1,2,3 dan indeks i,j = 1,2,3 serta I,J = 0,1,2,3) sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
S[e, \omega] &= \left( \frac{1}{2} \varepsilon_{IJKL} + \frac{1}{2\gamma} \delta_{IJKL} \right) \int d^4x e^K \wedge e^L \wedge F^{IJ}(\omega) \\
S[e, \omega] &= \frac{1}{2} \int d^4x \left[ e e_i^a e_j^b F_{ab}^{IJ} + \frac{1}{\gamma} e e_i^a e_j^b \varepsilon_{KL}^{IJ} F_{ab}^{KL} \right] \\
S[e, \omega] &= \frac{1}{2} \int d^4x e e_i^a e_j^b \left[ F_{ab}^{IJ} + \frac{1}{\gamma} \varepsilon_{KL}^{IJ} F_{ab}^{KL} \right]
\end{aligned} \tag{131}$$

Dengan  $e_i^a$  adalah bagian spasial dari tetrad ruang-waktu atau dikenal sebagai triad dan  $F_{ab}^{IJ} = 2\partial_{[a}\omega_{b]}^{IJ} + 2\eta_{KL}\omega_{[a}^{IK}\omega_{b]}^{LJ}$  adalah tensor kurvatur dimana  $\omega_b^L$  adalah koneksi 1-form di grup SO(1,3). Menggunakan formulasi Palatini antara medan gravitasi (metrik/tetrad) dan koneksi, maka dalam formulasi Holst ini terdapat ketidakbergantungan antara  $e_i^a$  dan  $\omega_b^L$  disini.

Dalam formulasi kanonik atau ADM, kita telah melakukan foliasi ruang-waktu dengan memperkenalkan metrik spasial  $h_{ab}$ , sekarang kita perkenalkan medan tensor baru (dengan menggunakan skala alami:  $8\pi G = 1$ ):

$$\tilde{E}_I^a := \frac{E_I^a}{\gamma} = e_I^a + n^a n_I \quad (132)$$

Dengan  $n_I = e_I^a n_a$  dan  $n^a$  adalah unit normal dari spasial “slice” foliasi. Medan tensor  $\tilde{E}_I^a$  ini memenuhi:  $\tilde{E}_I^a n_a = \tilde{E}_I^a n^I = 0$  yang didapat didefinisikan sebagai spasial triad. Cara paling sederhana dengan menggunakan kondisi gauge fixing pada transformasi SO(3,1) yang disebut time gauge, dengan pemilihan vektor waktu internal:  $n^I = \delta_0^I$ . Sehingga  $e_I^a$  menjadi kerangka inersial lokal dan transformasi pada ruang Minkowski (transformasi Lorentz) direduksi menjadi rotasi 3 dimensi.

Dalam komponen unit normal  $n^a = \frac{1}{N}(t^a - N^a)$  dan  $t^a$  adalah vektor alir waktu ( $t^a = Nn^a + N^a$ ) dalam formulasi ADM, dapat kita dekomposisi aksi Holst sebagai berikut:

$$S[e, \omega] = \frac{\gamma}{2} \int d^4x e e_I^a e_J^b \left[ F_{ab}^{IJ} + \frac{1}{2\gamma} \varepsilon_{KL}^{IJ} F_{ab}^{KL} \right] (N \tilde{E}_I^a + 2N^a n_I - 2t^a n_I) \tilde{E}_J^b \quad (133)$$

Dengan menggunakan  $e = \sqrt{-g} = N\sqrt{h}$ , sehingga aksi Holst menjadi:

$$S[e, \omega] = \frac{\gamma}{2} \int d^4x N\sqrt{h} \left( F_{ab}^{IJ} + \frac{1}{2\gamma} \varepsilon_{KL}^{IJ} F_{ab}^{KL} \right) (N \tilde{E}_I^a + 2N^a n_I - 2t^a n_I) \tilde{E}_J^b$$

$$S[e, \omega] = \frac{\gamma}{2} \int d^4x N\sqrt{h} \tilde{F}_{ab}^{IJ} (N \tilde{E}_I^a + 2N^a n_I - 2t^a n_I) \tilde{E}_J^b \quad (134)$$

Dengan  $\tilde{F}_{ab}^{IJ} := F_{ab}^{IJ} + \frac{1}{2\gamma} \varepsilon_{KL}^{IJ} F_{ab}^{KL}$ . Bentuk aksi diatas dapat dijabarkan seperti halnya aksi Einstein-Hilbert dalam formulasi ADM: suku pertama menunjukkan kendala Hamiltonian, suku kedua adalah kendala diffeomorfisme, dan suku ketiga adalah tambahan akibat formulasi tetrad. Suku ketiga ini menghasilkan simetri baru dalam aksi, yaitu keinvarianan gauge lokal (*local gauge invariance*)

Sekarang kita akan tinjau masing-masing suku di atas:

(1) Suku ketiga (menggunakan time gauge:  $n_I = \eta_{IJ} n^J = \eta_{I0} = -\delta_I^0$ )

$$-\frac{\gamma}{2} \int d^4x N\sqrt{h} 2t^a n_I \tilde{F}_{ab}^{IJ} \tilde{E}_J^b = \gamma \int d^4x N\sqrt{h} t^a \delta_I^0 \left( F_{ab}^{0j} + \frac{1}{2\gamma} \varepsilon_{KL}^{0i} F_{ab}^{KL} \right) \tilde{E}_j^b$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\gamma}{2} \int d^4x N\sqrt{\hbar} 2t^a n_I \tilde{F}_{ab}^{IJ} \tilde{E}_j^b \\
& \quad = \gamma \int d^4x N\sqrt{\hbar} t^a \tilde{E}_j^b \left( \partial_a \omega_b^{0j} - \partial_b \omega_a^{0j} + 2\omega_{[a}{}^{0k} \omega_{b]k}{}^j \right. \\
& \quad \quad \left. + \frac{1}{2\gamma} \varepsilon^j{}_{kl} (\partial_a \omega_b^{kl} - \partial_b \omega_a^{kl} + 2\omega_{[a}{}^{kM} \omega_{b]M}{}^l) \right) \\
& -\frac{\gamma}{2} \int d^4x N\sqrt{\hbar} 2t^a n_I \tilde{F}_{ab}^{IJ} \tilde{E}_j^b \\
& \quad = \gamma \int d^4x N\sqrt{\hbar} t^a \left( \tilde{E}_j^b \partial_a \omega_b^{0j} - \tilde{E}_j^b \partial_b \omega_a^{0j} + \tilde{E}_j^b \omega_a{}^{0k} \omega_{bk}{}^j - \tilde{E}_k^b \omega_b{}^{0k} \omega_{ak}{}^j \right. \\
& \quad \quad \left. + \frac{1}{2\gamma} \varepsilon^j{}_{kl} (\tilde{E}_j^b \partial_a \omega_b^{kl} - \tilde{E}_j^b \partial_b \omega_a^{kl} + \tilde{E}_j^b \omega_a{}^{kM} \omega_{bM}{}^l - \tilde{E}_j^b \omega_b{}^{kM} \omega_{aM}{}^l) \right) \\
& -\frac{\gamma}{2} \int d^4x N\sqrt{\hbar} 2t^a n_I \tilde{F}_{ab}^{IJ} \tilde{E}_j^b \\
& \quad = \gamma \int d^4x N\sqrt{\hbar} t^a \left( \tilde{E}_j^b \partial_a \omega_b^{0j} + \tilde{E}_k^b \omega_a{}^{0j} \omega_{bj}{}^k - \tilde{E}_j^b (\partial_b \omega_a^{0j} + \omega_b{}^{0k} \omega_{ak}{}^j) \right. \\
& \quad \quad \left. + \frac{1}{2\gamma} \varepsilon^j{}_{kl} (\tilde{E}_j^b \partial_a \omega_b^{kl} + \tilde{E}_j^b \omega_a{}^{kM} \omega_{bM}{}^l - \tilde{E}_j^b (\partial_b \omega_a^{kl} + \omega_b{}^{kM} \omega_{aM}{}^l)) \right) \\
& -\frac{\gamma}{2} \int d^4x N\sqrt{\hbar} 2t^a n_I \tilde{F}_{ab}^{IJ} \tilde{E}_j^b \tag{135} \\
& \quad = \gamma \int d^4x N\sqrt{\hbar} t^a \left( \tilde{E}_j^b \partial_a \omega_b^{0j} + \tilde{E}_k^b \omega_a{}^{0j} \omega_{bj}{}^k \right. \\
& \quad \quad - \frac{1}{2\gamma} \varepsilon^j{}_{kl} \tilde{E}_j^b (\partial_b \omega_a^{kl} + \omega_b{}^{kM} \omega_{aM}{}^l) \\
& \quad \quad \left. + \frac{1}{2\gamma} \varepsilon^j{}_{kl} (\tilde{E}_j^b \partial_a \omega_b^{kl} - \tilde{E}_j^b \omega_b{}^{kM} \omega_{aM}{}^l) - \tilde{E}_j^b (\partial_b \omega_a^{0j} + \omega_b{}^{0k} \omega_{ak}{}^j) \right)
\end{aligned}$$

Menggunakan turunan kovarian:

$$\partial_b \omega_a^{kl} + \omega_b{}^{kM} \omega_{aM}{}^l = \omega_{b0}{}^l \omega_a{}^{0k} \tag{136}$$

$$\partial_b \omega_a^{0j} + \omega_b{}^{0k} \omega_{ak}{}^j = \omega_{bk}{}^j \omega_a{}^{0k} \tag{137}$$

sehingga

$$\begin{aligned}
& -\frac{\gamma}{2} \int d^4x N\sqrt{h} 2t^a n_I \tilde{F}_{ab}^{IJ} \tilde{E}_J^b \tag{138} \\
& = \gamma \int d^4x N\sqrt{h} t^a \left( \tilde{E}_j^b \partial_a \omega_b^{0j} + \tilde{E}_k^b \omega_a^{0j} \omega_{bj}{}^k \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{2\gamma} \varepsilon^j{}_{kl} \tilde{E}_j^b \omega_{b0}{}^l \omega_a^{0k} + \frac{1}{2\gamma} \varepsilon^j{}_{kl} (\tilde{E}_j^b \partial_a \omega_b^{kl} - \tilde{E}_j^b \omega_b{}^{kM} \omega_{aM}{}^l) \right. \\
& \quad \left. - \tilde{E}_j^b \omega_{bk}{}^j \omega_a^{0k} \right)
\end{aligned}$$

Dengan menggunakan:  $\tilde{E}_j^b \partial_a \omega_b^{0j} = \omega_a^{0j} \partial_b \tilde{E}_j^b$ , maka:

$$\begin{aligned}
& -\frac{\gamma}{2} \int d^4x N\sqrt{h} 2t^a n_I \tilde{F}_{ab}^{IJ} \tilde{E}_J^b \tag{139} \\
& = \int d^4x N\sqrt{h} t^a \left[ \gamma \omega_a^{0j} \left( \partial_b \tilde{E}_j^b + \omega_{bj}{}^k \tilde{E}_k^b - \frac{1}{2\gamma} \varepsilon^j{}_{kl} \omega_{b0}{}^l \tilde{E}_j^b \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} \varepsilon^j{}_{kl} \omega_a{}^{kl} \left( \partial_b \tilde{E}_j^b - \frac{1}{2} \varepsilon_J{}^{nm} \varepsilon_{npq} \omega_b{}^{qp} \tilde{E}_m^b - \gamma \varepsilon_{nj}{}^m \omega_b{}^{0n} \tilde{E}_j^b \right) \right]
\end{aligned}$$

Menggunakan  $\frac{1}{2} \varepsilon_{kj}{}^n \varepsilon_{qp}{}^j \omega_a{}^{qp} \tilde{E}_n^b = -\omega_{ak}{}^j \tilde{E}_j^b$ , maka kita dapatkan:

$$\begin{aligned}
& -\frac{\gamma}{2} \int d^4x N\sqrt{h} 2t^a n_I \tilde{F}_{ab}^{IJ} \tilde{E}_J^b \\
& = \int d^4x N\sqrt{h} t^a \left[ \omega_a^{0j} \left( \gamma (\partial_b \tilde{E}_j^b + \omega_{bj}{}^k \tilde{E}_k^b) - \frac{1}{2\gamma} \varepsilon^j{}_{kl} \omega_{b0}{}^l \tilde{E}_j^b \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} \varepsilon^j{}_{kl} \omega_a{}^{kl} (\partial_b \tilde{E}_j^b + \omega_{ak}{}^j \tilde{E}_j^b - \gamma \varepsilon_{nj}{}^m \omega_b{}^{0n} \tilde{E}_j^b) \right] \\
& -\frac{\gamma}{2} \int d^4x N\sqrt{h} 2t^a n_I \tilde{F}_{ab}^{IJ} \tilde{E}_J^b \tag{140} \\
& = \int d^4x N\sqrt{h} t^a \left[ \left( \gamma \omega_a^{0j} + \frac{1}{2} \varepsilon^j{}_{kl} \omega_a{}^{kl} \right) (\partial_b \tilde{E}_j^b + \omega_{bj}{}^k \tilde{E}_k^b) \right. \\
& \quad \left. - \left( \frac{\gamma}{2} \varepsilon^j{}_{kl} \omega_a{}^{kl} \varepsilon_{nj}{}^m \omega_b{}^{0n} \tilde{E}_j^b + \frac{1}{2\gamma} \varepsilon^j{}_{kl} \omega_{b0}{}^l \tilde{E}_j^b \right) \right]
\end{aligned}$$

Diperkenalkan suatu variabel yang dikenal sebagai variabel kanonik Ashtekar-Barbero:

$$A_a^i := \gamma \omega_a^{0i} + \frac{1}{2} \varepsilon^i{}_{jk} \omega_a^{jk} \tag{141}$$

Dimana didefinisikan:  $\Gamma_a^i := \frac{1}{2} \varepsilon^i{}_{jk} \omega_a^{jk}$  sebagai spin koneksi dan  $K_a^i := \omega_a^{0i}$  yang berhubungan dengan kurvatur ekstrinsik:  $K_{ab} := K_a^i \tilde{E}_{ib}$ , sehingga variabel Ashtekar-Barbero dapat dituliskan menjadi:

$$A_a^i = \gamma K_a^i + \Gamma_a^i \quad (142)$$

Selanjutnya didefinisikan turunan kovarian menggunakan spin koneksi  $\Gamma_a^i$  yaitu:

$$\mathcal{D}_b \tilde{E}_j^b = \partial_b \tilde{E}_j^b + \omega_{bj}{}^k \tilde{E}_k^b = \partial_b \tilde{E}_j^b - \varepsilon^i{}_{jk} \Gamma_b^k \tilde{E}_i^b \quad (143)$$

Sehingga

$$\begin{aligned} -\frac{\gamma}{2} \int d^4x N \sqrt{h} 2t^a n_l \tilde{F}_{ab}^{lj} \tilde{E}_j^b \\ = \int d^4x N \sqrt{h} \left[ A_a^j \mathcal{D}_b \tilde{E}_j^b - \frac{1}{2} (1 + \gamma^2) \varepsilon_{nm}{}^j \omega_a{}^{0m} \omega_b{}^{0n} \tilde{E}_j^b \right] \end{aligned} \quad (144)$$

Dimana indeks  $a = t = 0$  (time gauge) dan bagian  $\varepsilon_{nm}{}^j \omega_a{}^{0m} \omega_b{}^{0n} \tilde{E}_j^b$ , dapat didefinisikan:

$$S_m := -\frac{1}{2} \varepsilon_{nm}{}^j \omega_a{}^{0m} \omega_b{}^{0n} \tilde{E}_j^b = -\frac{1}{2} \varepsilon_{nm}{}^j \omega_b{}^{0n} \tilde{E}_j^b = -\frac{1}{2} \varepsilon_{nm}{}^j K_b^n \tilde{E}_j^b \quad (145)$$

Dengan  $K_b^n \tilde{E}_{an}$  merupakan kurvatur ekstrinsik:  $K_{ab} := K_b^n \tilde{E}_{an}$ , maka:

$$S_m = -\frac{1}{2} \varepsilon_{nm}{}^j K_{ab} \tilde{E}^{an} \tilde{E}_j^b = -\frac{1}{2} \varepsilon_m{}^{ij} K_{ab} \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b \quad (146)$$

Yang mana karena sifat simetrik  $K_{ab} = K_{ba}$ , maka tentunya  $S_m = 0$ .

$$-\frac{\gamma}{2} \int d^4x N \sqrt{h} 2t^a n_l \tilde{F}_{ab}^{lj} \tilde{E}_j^b = \int d^4x N \sqrt{h} [\Lambda^j \mathcal{D}_b \tilde{E}_j^b + (1 + \gamma^2) S_a] \quad (147)$$

Dengan  $A_t^i = \Lambda^j$  dan dapat diperhatikan bahwa  $A_a^j$  dan  $\omega_a{}^{0m}$  bukan merupakan turunan terhadap waktu sehingga mereka dapat didefinisikan sebagai momenta/pengali Lagrange dari kendala sekunder. Kendaa sekunder ini dikenal sebagai kendala Gauss:

$$G_j := \mathcal{D}_b \tilde{E}_j^b = \partial_b \tilde{E}_j^b + \omega_{bj}{}^k \tilde{E}_k^b = \partial_b \tilde{E}_j^b - \varepsilon^i{}_{jk} \Gamma_b^k \tilde{E}_i^b = \partial_b \tilde{E}_j^b + \varepsilon_{ijk} A_b^j \tilde{E}^{kl} = 0 \quad (148)$$

Akan dilihat bahwa kendala Gauss ini memiliki peranan dalam membangun ruang Hilbert kinematik untuk loop quantum gravity. Hasil di atas menunjukkan bahwa terdapat transformasi variabel ruang fasa relativitas umum dari  $(\omega, e) \rightarrow (A, \tilde{E})$ . Dengan demikian,

karena terdapat konjugat sama lain, maka dapat dibangun hubungan Poisson untuk kedua variabel baru ini  $(A, \tilde{E})$ .

(2) Suku kesatu: Kendala Hamiltonian

Pertama kita definisikan komponen spasial dari kurvatur  $F_{ab}^{ij}$ , yang dapat dituliskan dalam koneksi spin ( $\Gamma$ ) sebagai berikut:

$$F_{ab}^i := \frac{1}{2} \varepsilon^i{}_{jk} F_{ab}^{jk} = 2\partial_{[a} \Gamma_{b]}^i + \varepsilon^i{}_{jk} \varepsilon^j{}_{lm} \varepsilon^{lk} \Gamma_{[a}^m \Gamma_{b]}^n = 2\partial_{[a} \Gamma_{b]}^i - \varepsilon^i{}_{jk} \Gamma_{[a}^j \Gamma_{b]}^k \quad (149)$$

Telah kita kenalkan variabel Ashtker-Barbero ( $A_a^i$ ) di persamaan (142), sehingga kurvatur di atas dapat dituliskan menjadi:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{ab}^i &:= 2\partial_{[a} (\Gamma_{b]}^i + \gamma K_{b]}^i) - \varepsilon^i{}_{jk} (\Gamma_{[a}^j + \gamma K_{[a}^j) (\Gamma_{b]}^k + \gamma K_{b]}^k) = 2\partial_{[a} A_{b]}^i - \varepsilon^i{}_{jk} A_{[a}^j A_{b]}^k \\ \mathcal{F}_{ab}^i &= F_{ab}^i + 2\gamma \mathcal{D}_{[a} K_{b]}^i - \gamma^2 \varepsilon^i{}_{jk} K_a^j K_b^k \end{aligned} \quad (150)$$

Selanjutnya kita tinjau kendala Hamiltonian dalam bentuk variabel Ashtekar-Barbero:

$$\begin{aligned} H^{gravity} &= -\gamma^2 \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b \tilde{F}_{ab}^{ij} = -\gamma^2 \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b \left( F_{ab}^{ij} + \frac{1}{2\gamma} \varepsilon^{ij}{}_{KL} F_{ab}^{KL} \right) \\ H^{gravity} &= -\gamma^2 \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b \left( \partial_a \omega_b^{ij} - \partial_b \omega_a^{ij} + 2\omega_{[a}^{iK} \omega_{b]}^{Lj} \eta_{KL} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{\gamma} \varepsilon^{ij}{}_{k} (\partial_a \omega_b^{k0} - \partial_b \omega_a^{k0} + 2\omega_{[a}^{kM} \omega_{b]M}{}^0) \right) \end{aligned} \quad (151)$$

Menggunakan definisi ekstrinsik kurvatur ( $K_a^i = \omega_a^{0i}$ ), kurvatur ( $F_{ab}^{ij}$ ) dan turunan dalam koneksi spin, yaitu:

$$\partial_a \omega_b^{ij} - \partial_b \omega_a^{ij} + 2\omega_{[a}^{iK} \omega_{b]}^{Lj} \eta_{KL} = F_{ab}^{ij} \quad (152)$$

$$\frac{2}{\gamma} \varepsilon^{ij}{}_{k} (\partial_a \omega_b^{k0} - \partial_b \omega_a^{k0} + 2\omega_{[a}^{kM} \omega_{b]M}{}^0) = 2K_{[a}^i K_{b]}^j - \frac{2}{\gamma} \varepsilon^{ij}{}_{k} \mathcal{D}_{[a} K_{b]}^k \quad (153)$$

Sehingga:

$$H^{gravity} = -\gamma^2 \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b \left( F_{ab}^{ij} + 2K_{[a}^i K_{b]}^j - \frac{2}{\gamma} \varepsilon^{ij}{}_{k} \mathcal{D}_{[a} K_{b]}^k \right) \quad (154)$$

Kemudian menggunakan definisi kurvatur  $\mathcal{F}_{ab}^i$  di atas, maka:

$$\begin{aligned}
H^{gravity} &= -\gamma^2 \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b \varepsilon^{ij} \varepsilon^k{}_{ij} \left( F_{ab}^{ij} + 2K_{[a}^i K_{b]}^j - \frac{2}{\gamma} \varepsilon^{ij}{}_{kl} \mathcal{D}_{[a} K_{b]}^k \right) = \\
H^{gravity} &= -\gamma^2 \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b \varepsilon^{ij}{}_{kl} \left( F_{ab}^k + \varepsilon^k{}_{ij} K_a^i K_b^j - \frac{2}{\gamma} \varepsilon^k{}_{ij} \varepsilon^{ij}{}_{kl} \mathcal{D}_{[a} K_{b]}^l \right) \\
H^{gravity} &= -\gamma^2 \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b \varepsilon^{ij}{}_{kl} \left( \mathcal{F}_{ab}^k - 2\gamma \mathcal{D}_{[a} K_{b]}^k + \gamma^2 \varepsilon^k{}_{ij} K_a^i K_b^j + \varepsilon^k{}_{ij} K_a^i K_b^j \right. \\
&\quad \left. - \frac{2}{\gamma} \mathcal{D}_{[a} K_{b]}^k \right) \tag{155}
\end{aligned}$$

Sehingga kita peroleh persamaan kendala Hamiltonian dalam variabel Ashtekar-Barbero, yaitu:

$$H^{gravity} = -\gamma^2 \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b \varepsilon^{ij}{}_{kl} \left( \mathcal{F}_{ab}^k + (1 + \gamma^2) \varepsilon^k{}_{ij} K_a^i K_b^j - \frac{2(1 + \gamma^2)}{\gamma} \mathcal{D}_{[a} K_{b]}^k \right) \tag{156}$$

### (3) Suku kedua: Kendala Diffeomorfisme

Kendala diffeomorfisme dapat dituliskan dalam bentuk variabel Ashtekar-Barbero, sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
H_a^{gravity} &= -\gamma n_I N^a \tilde{E}_j^b \tilde{F}_{ab}^{IJ} = \gamma N^a \tilde{E}_j^b \left( F_{ab}^{0j} + \frac{1}{2\gamma} \varepsilon^{0j}{}_{kl} F_{ab}^{kl} \right) \\
H_a^{gravity} &= 2\gamma N^a \tilde{E}_j^b \left( \partial_a \omega_b^{0j} - \partial_b \omega_a^{0j} + 2\omega_{[a}^{0k} \omega_{b]k}^j + \frac{1}{2\gamma} \left( 2\partial_{[a} \Gamma_{b]}^j + \varepsilon^j{}_{kl} \omega_{[a}^{kl} \omega_{b]L}^l \right) \right) \\
H_a^{gravity} &= N^a \tilde{E}_j^b \left( \partial_a A_b^j - \partial_b A_a^j - \gamma \varepsilon^j{}_{kl} \Gamma_{[a}^k \Gamma_{b]}^l - \frac{1}{2} \varepsilon^j{}_{kl} (\Gamma_{[a}^k \Gamma_{b]}^l - K_{[a}^k K_{b]}^l) \right) \tag{157}
\end{aligned}$$

Sehingga kita dapatkan kendala diffeomorfisme, sebagai berikut:

$$H_a^{gravity} = N^a \tilde{E}_j^b (\mathcal{F}_{ab}^j + (1 + \gamma^2) \varepsilon^j{}_{kl} K_{[a}^k K_{b]}^l) \tag{158}$$

Dapat kita tuliskan kembali Hamiltonian relativitas umum sebagai jumlah dari kendala-kendala yang didapatkan: Persamaan (148), (155), (158):

$$\begin{aligned}
H_{gravity} [A_a^i, \tilde{E}_i^a] & \\
&= \int d^3x \left( -\Lambda^i \mathcal{D}_a \tilde{E}_i^a - (1 + \gamma^2) S_t + N^a H_a^{gravity} + N H^{gravity} \right) \tag{159}
\end{aligned}$$

Dengan:

$$\mathcal{D}_a \tilde{E}_i^a = \partial_a \tilde{E}_i^a + \varepsilon_{ijk} A_a^j \tilde{E}^{ak} \quad (148)$$

$$H_a^{gravity} = \mathcal{F}_{ab}^j \tilde{E}_j^b + (1 + \gamma^2) \varepsilon_{kl}^j K_{[a}^k K_{b]}^l \tilde{E}_j^b \quad (155)$$

$$H^{gravity} = -\gamma^2 \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b \varepsilon^{ij}_k \left( \mathcal{F}_{ab}^k + (1 + \gamma^2) \varepsilon_{ij}^k K_a^i K_b^j - \frac{2(1 + \gamma^2)}{\gamma} \mathcal{D}_{[a} K_{b]}^k \right) \quad (158)$$

Seluruh kendala di atas dapat diklasifikasikan sebagai kendala kelas pertama. Oleh karena  $S_a = 0$ , maka Hamiltonian di atas akan terdiri atas 3 kendala utama: (1) kendala Gauss yang men-generate transformasi gauge dimana variabel  $(A_a^j, \tilde{E}_j^b)$  masing-masing akan bertransformasi sebagai vektor dan koneksi dalam grup SU(2) atau memenuhi hubungan aljabar grup SU(2), (2) dan kendala diffeomorfisme serta kendala Hamiltonian akan men-generate diffeomorfisme.

Dari kendala Gauss di atas kita akan ketahui bahwa hubungan variabel ruang fasa  $(A_a^j, \tilde{E}_j^b)$  akan saling berkonjugat mirip dengan hubungan antara  $(h, p)$  dan membentuk struktur grup gauge SU(2):

$$A_a^i := \frac{1}{2} \varepsilon^i_{jk} \omega_a^{jk} + \gamma \omega_a^{0i} \in SU(2) \quad (160)$$

Dengan  $\frac{1}{2} \varepsilon^i_{jk} \omega_a^{jk}$  adalah dual Hodge dual dari  $\omega_a^{0i}$  dan turunan terhadap “waktu: untuk koneksi:  $A_t^j = \dot{A}_a^j = \frac{dA_a^j}{dt} = \Lambda^j$  berhubungan dengan konjugat momentum yang tepat dibuktikan sebagai densitas triad:

$$\frac{\delta S[e, \omega]}{\delta \dot{A}_a^i} = \tilde{E}_i^a = e e_i^a = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \varepsilon^{abc} e_b^j e_c^k \quad (161)$$

Hubungan simplektik antara koneksi dan konjugat momentum/densitas triad dimana  $\tilde{E}_i^a = \frac{E_i^a}{\gamma}$  dituliskan melalui hubungan Poisson:

$$\{A_a^i(x), \tilde{E}_j^b(y)\} = \delta_j^i \delta_a^b \delta^3(x, y) \quad (162)$$

$$\{\tilde{E}_i^a(x), \tilde{E}_j^b(y)\} = \{A_a^i(x), A_b^j(y)\} = 0 \quad (163)$$

Bila kita ambil konstanta Immirzi  $\gamma = \pm i$  atau dikenal sebagai formulasi selfdual, maka masing-masing kendala (148), (155), (158) dituliskan menjadi:

$$\mathcal{D}_b \tilde{E}_j^b = \partial_b \tilde{E}_j^b + \varepsilon_{jkl} A_b^k \tilde{E}^{bl} \quad (164)$$

$$H_a^{gravity} = \mathcal{F}_{ab}^j \tilde{E}_j^b \quad (165)$$

$$H^{gravity} = -\tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b \varepsilon^{ij} \mathcal{F}_{ab}^k \quad (166)$$

Kendala di atas regulasi melalui smearing, namun smearing yang dilakukan tidak seperti smearing dalam standar teori medan kuantum, yang mana menggunakan 3-dimensional smearing pada manifold  $M$ . Hal ini disebabkan menggunakan regulasi smearing seperti diperlukan kerangka khusus sebagai latar belakang metrik, biasanya ruang Minkowski. Untuk kasus relativitas umum kita akan menggunakan regulasi smearing yang berbeda, yang secara memperhatikan sifat ketidakbergantungan terhadap setiap metrik latar belakang dan memandu pada variabel dasar yang mirip dengan teori gauge lattice.

Kendala Gauss melalui smearing akan men-generate hubungan aljabar grup  $SU(2)$ . Didefinisikan regulasi smearing untuk kendala Gauss sebagai berikut:

$$G(\Lambda) = \int d^3x G_i(x) \Lambda^i(x) \quad (167)$$

Dengan kendala Gauss:  $G_i \equiv \mathcal{D}_a \tilde{E}_i^a = \partial_a \tilde{E}_i^a + \varepsilon_{ijk} A_a^j \tilde{E}^{ak}$  dan  $\Lambda^i$  adalah medan smearing dari grup Lie. Menggunakan hubungan Poisson untuk smearing kendala Gauss di atas dengan variabel kanonik  $(A_a^j, \tilde{E}_j^b)$ , maka:

$$\begin{aligned} \{G(\Lambda), \tilde{E}_j^b\} &= \left\{ \int d^3x G_i(x) \Lambda^i(x), \tilde{E}_j^b \right\} = \int d^3x \Lambda^i(x) \{ \partial_a \tilde{E}_i^a + \varepsilon_{imn} A_a^m \tilde{E}^{an}, \tilde{E}_j^b \} \\ \{G(\Lambda), \tilde{E}_j^b\} &= \int d^3x \Lambda^i(x) \varepsilon_{imn} \tilde{E}^{an} \{A_a^m, \tilde{E}_j^b\} = \int d^3x \Lambda^i(x) \varepsilon_{imn} \tilde{E}^{an} \left( \frac{\delta A_a^m}{\delta A_b^m} \frac{\delta \tilde{E}_j^b}{\delta \tilde{E}_k^b} - \frac{\delta \tilde{E}_j^b}{\delta A_b^m} \frac{\delta A_a^m}{\delta \tilde{E}_k^b} \right) \\ \{G(\Lambda), \tilde{E}_j^b\} &= \varepsilon^j_{mn} \Lambda^i(x) \tilde{E}_b^c \delta_c^n \delta_i^m = \varepsilon^j_{mn} \Lambda^m(x) \tilde{E}_b^n \end{aligned} \quad (168)$$

Dan

$$\begin{aligned} \{G(\Lambda), A_b^j\} &= \left\{ \int d^3x G_i(x) \Lambda^i(x), A_b^j \right\} = \int d^3x \Lambda^i(x) \{ \partial_a \tilde{E}_i^a + \varepsilon_{imn} A_a^m \tilde{E}^{an}, A_b^j \} \\ \{G(\Lambda), A_b^j\} &= \int d^3x \Lambda^i(x) [\{ \partial_a \tilde{E}_i^a, A_b^j \} + \{ \varepsilon_{imn} A_a^m \tilde{E}^{an}, A_b^j \}] \\ &= - \int d^3x [\{ \tilde{E}_i^a \partial_a \Lambda^i(x), A_b^j \} + \{ \varepsilon_{imn} \Lambda^i(x) A_a^m \tilde{E}^{an}, A_b^j \}] \end{aligned} \quad (169)$$

$$\{G(\Lambda), A_b^j\} = - \int d^3x \Lambda^i(x) \left[ \left( \partial_a \Lambda^i(x) \frac{\delta \tilde{E}_i^a}{\delta A_b^m} \frac{\delta A_b^j}{\delta \tilde{E}_k^b} - \partial_a \Lambda^i(x) \frac{\delta A_b^j}{\delta A_b^m} \frac{\delta \tilde{E}_i^a}{\delta \tilde{E}_k^b} \right) \right. \quad (170)$$

$$\left. + \left( \varepsilon_{imn} \Lambda^i(x) A_a^m \frac{\delta \tilde{E}^{an}}{\delta A_b^m} \frac{\delta A_b^j}{\delta \tilde{E}_k^b} - \varepsilon_{imn} \Lambda^i(x) A_a^m \frac{\delta A_b^j}{\delta A_b^m} \frac{\delta \tilde{E}^{an}}{\delta \tilde{E}_k^b} \right) \right]$$

$$\begin{aligned} \{G(\Lambda), A_b^j\} &= -[-\partial_a \Lambda^i(x) \delta_b^a \delta_i^j - \varepsilon^j{}_{mn} \Lambda^i(x) A_b^c \delta_c^n \delta_i^m] \\ &= \partial_b \Lambda^j(x) + \varepsilon^j{}_{mn} \Lambda^m(x) A_b^n \end{aligned} \quad (171)$$

Sehingga:

$$\{G(\Lambda), \partial_b \tilde{E}_j^b(x) + \varepsilon^m{}_{jn} A_b^n(x) \tilde{E}_m^b(x)\} = \{G(\Lambda), \partial_b \tilde{E}_j^b(x)\} + \{G(\Lambda), \varepsilon^m{}_{jn} A_b^n(x) \tilde{E}_m^b(x)\}$$

$$\begin{aligned} &\{G(\Lambda), \partial_b \tilde{E}_j^b(x) + \varepsilon^m{}_{jn} A_b^n(x) \tilde{E}_m^b(x)\} \\ &= \varepsilon^m{}_{jn} \left( \partial_b \Lambda^n(x) \tilde{E}_m^b(x) \right) - \varepsilon^k{}_{jl} A_b^l(x) \varepsilon^m{}_{kn} \Lambda^n(x) \tilde{E}_m^b \\ &+ \varepsilon^m{}_{jn} \tilde{E}_m^b (\partial_b \Lambda^n(x) + \varepsilon^n{}_{mk} \Lambda^m(x) A_b^k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\{G(\Lambda), \partial_b \tilde{E}_j^b(x) + \varepsilon^m{}_{jn} A_b^n(x) \tilde{E}_m^b(x)\} \\ &= -\varepsilon^m{}_{jn} \tilde{E}_m^b(x) \partial_b \Lambda^n(x) + \varepsilon^m{}_{jn} \Lambda^n(x) \partial_b \tilde{E}_m^b(x) - \varepsilon^k{}_{jl} \varepsilon^m{}_{kn} \Lambda^n(x) \tilde{E}_m^b A_b^l(x) \\ &+ \varepsilon^m{}_{jn} \tilde{E}_m^b \partial_b \Lambda^n(x) + \varepsilon^m{}_{jn} \varepsilon^n{}_{mk} \tilde{E}_m^b \Lambda^m(x) A_b^k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\{G(\Lambda), \partial_b \tilde{E}_j^b(x) + \varepsilon^m{}_{jn} A_b^n(x) \tilde{E}_m^b(x)\} \\ &= \varepsilon^m{}_{jn} \Lambda^n(x) \partial_b \tilde{E}_m^b(x) + (\varepsilon^k{}_{kl} \varepsilon^m{}_{jn} - \varepsilon^k{}_{jl} \varepsilon^m{}_{kn}) \Lambda^n(x) \tilde{E}_m^b A_b^l(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{G(\Lambda), \partial_b \tilde{E}_j^b(x) + \varepsilon^m{}_{jn} A_b^n(x) \tilde{E}_m^b(x)\} &= \varepsilon^m{}_{jn} \Lambda^n(x) \partial_b \tilde{E}_m^b(x) + \varepsilon^m{}_{jn} \Lambda^n(x) \varepsilon^k{}_{ml} \tilde{E}_k^b A_b^l(x) \\ &= \varepsilon^m{}_{jn} \Lambda^n(x) \partial_b \tilde{E}_m^b(x) + \varepsilon^m{}_{jn} \Lambda^n(x) \varepsilon^k{}_{ml} \tilde{E}_k^b A_b^l(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{G(\Lambda), \partial_b \tilde{E}_j^b(x) + \varepsilon^m{}_{jn} A_b^n(x) \tilde{E}_m^b(x)\} &= \varepsilon^m{}_{jn} \Lambda^n(x) \left( \partial_b \tilde{E}_m^b(x) + \varepsilon^k{}_{ml} \tilde{E}_k^b A_b^l(x) \right) \quad (171) \\ &= \varepsilon^m{}_{jn} \Lambda^n(x) G_m(x) \end{aligned}$$

Dengan  $G_m(x)$  adalah kendala Gauss dan  $\tilde{E}_i^a = \frac{E_i^a}{\gamma}$ , sehingga dapatkan hubungan komutasi antara

2 smearing kendala Gauss, yaitu:

$$\{G(\Lambda_1), G(\Lambda_2)\} = \gamma G([\Lambda_1, \Lambda_2]) \quad (172)$$

Struktur aljabar di atas merupakan struktur aljabar untuk grup SU(2). Hal ini menunjukkan bahwa kendala Gauss di atas men-generate grup SU(2) untuk gravitasi, sehingga gravitasi dapat dikuantisasi seperti halnya medan kuantum lainnya.

Adapun bentuk smearing untuk kendala diffeomorfisme dan kendala Hamiltonian dituliskan sebagai berikut:

$$H(\vec{N}) = \int d^3x N^a H_a^{gravity} \quad (173)$$

$$H(N) = \int d^3x NH^{gravity} \quad (174)$$

Dengan  $N^a$  dan  $N$  masing-masing adalah vektor lapse dan vektor pergeseran (shift vector). Maka dapat kita tuliskan seluruh aljabar kendala (constraint algebra) untuk seluruh kendala dalam relativitas umum (termasuk kendala Gauss di atas) sebagai berikut:

$$\{G(\Lambda_1), G(\Lambda_2)\} = \gamma G([\Lambda_1, \Lambda_2]) \quad (175)$$

$$\{H(\vec{N}_2), H(\vec{N}_2)\} = H(\mathcal{L}_{\vec{N}} \vec{N}_2) \quad (176)$$

$$\{H(N_2), H(N_2)\} = H(\vec{S}) - H(\Lambda_a^i S^a) \quad (177)$$

$$\{G(\Lambda), H(\vec{N})\} = -G(\mathcal{L}_{\vec{N}} \Lambda) \quad (178)$$

$$\{G(\Lambda), H(N)\} = 0 \quad (179)$$

Dengan  $S^a := \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b \eta^{ij} (N_1 \partial_b N_2 - N_2 \partial_b N_1) = \frac{1}{\gamma^2} E_i^a E_j^b \eta^{ij} (N_1 \partial_b N_2 - N_2 \partial_b N_1)$ . Struktur aljabar di atas, tidak membentuk aljabar Lie karena disisi kanan persamaan tidak hadir struktur konstan. Oleh karena itu, dengan pembatasan oleh kendala di hypersurface (on shell), dimana  $G(\Lambda) \approx 0$ ,  $H(\vec{N}) \approx 0$ , dan  $H(N) \approx 0$ , yang mana seluruhnya adalah kendala utama, maka seluruhnya akan komut di hypersurface. Ini berarti seluruh kendala dalam formulasi variabel Ashtekar-Barbero adalah kendala utama kelas utama (primary first class constraint). Konsekuensinya adalah: kendala Gauss men-generate transformasi gauge SU(2), kendala diffeomorfisme men-generate evolusi dalam ruang, dan kendala Hamiltonian men-generate evolusi dalam waktu. Namun karena kendala ini lenyap di hypersurface, maka yang dimaksud evolusi bukanlah evolusi secara fisis tetapi menunjukkan bahwa seluruh kendala di atas diinterpretasikan sebagai transformasi gauge [8].

Pada bagian selanjutnya di bahas LQG untuk sektor kinemati melalui regulasi kedua variabel baru di atas berbasis smearing dilanjutkan program kuantisasi Dirac.

## 2. Loop Quantum Gravity (LQG)

### 2.1 Persamaan Hamilton-Jacobi untuk Relativitas Umum

Formulisme Hamilton-Jacobi itu elegan dan general karena formalisme ini terhubung langsung dengan teori kuantum (karena limit klasik persamaan Schrodinger adalah persamaan Hamilton-Jacobi) dan secara konsep sangat jelas. Bentuk persamaan Hamilton-Jacobi versi non-relativistik dituliskan sebagai berikut:

$$\frac{\partial S(q^i, t)}{\partial t} + H_0\left(q^i, \frac{\partial S(q^i, t)}{\partial q^i}\right) = 0 \quad (180)$$

Dengan  $S(q^i, t)$  memiliki bentuk:

$$S(q^i, t) = Et - W(q^i, Q^i) \quad (181)$$

Dan

$$H_0\left(q^i, \frac{\partial W(q^i, Q^i)}{\partial q^i}\right) = E \quad (182)$$

Yang mana  $p^i, q^i, P^i$  dan  $Q^i$  adalah variabel kanonik lama ( $p^i, q^i$ ) dan variabel kanonik baru ( $P^i, Q^i$ ) melalui transformasi koordinat. Dan fungsi  $S(q^i, t)$  dikenal sebagai fungsi Hamilton-Jacobi dan  $W(q^i, Q^i)$  fungsi karakteristik Hamilton-Jacobi

Untuk kasus relativistik, formalisme Hamilton-Jacobi memiliki bentuk yang lebih sederhana dibandingkan versi non-relativistik-nya. Hal ini mengindikasikan bahwa formulasi relativistik lebih alami dan memiliki struktur yang lebih umum ketika diterapkan pada sistem mekanik. Formalisme relativistik untuk persamaan Hamilton-Jacobi diberikan oleh persamaan diferensial berikut:

$$H\left(q^a, \frac{\partial S(q^a)}{\partial q^a}\right) = 0 \quad (183)$$

Formalisme Hamilton-Jacobi dapat pula dituliskan untuk kasus teori medan, yaitu dengan menuliskan persamaan dengan syarat batas yang sesuai yang ditentukan oleh fungsi Hamilton.

Untuk kasus gravitasi, persamaan Hamilton-Jacobi dapat diekspresikan dalam variabel Ashtekar-Barbero yang telah diperkenalkan sebelumnya  $A_a^i$  dan “momentum konjugatnya”  $E_i^a$  yang didefinisikan di permukaan 3 dimensi dan memenuhi kondisi berikut:

$$A_a^i + \overline{A}_a^i = \Gamma_a^i[E] \quad (184)$$

Dengan  $\overline{A}_a^i$  adalah selfdual dari  $A_a^i$  ketika variabel Immirzi didefinisikan sebagai bilangan imajiner:  $\gamma = \pm i$  (yang merupakan formulasi awal yang diajukan oleh Ashtekar karena akan sangat menyederhanakan bentuk Hamiltonian relativitas umum ketika diambil  $\gamma = \pm i$ ), sehingga

$$\begin{aligned} A_a^i &= \gamma \omega_a^{0i} + \frac{1}{2} \varepsilon^i{}_{jk} \omega_a^{jk} \rightarrow A_a^i = \pm i \omega_a^{0i} + \frac{1}{2} \varepsilon^i{}_{jk} \omega_a^{jk} \quad \text{dan} \quad \overline{A}_a^i \\ &= \mp i \omega_a^{0i} + \frac{1}{2} \varepsilon^i{}_{jk} \omega_a^{jk} \end{aligned} \quad (185)$$

Dalam kajian terbaru untuk LQG untuk sektor semiklasik variabel Immirzi akan lebih sesuai ketika didefinisikan bernilai riil. Dan  $\Gamma_a^i$  adalah spin koneksi, yang didefinisikan sebagai:

$$\Gamma_{ab}^i = \frac{1}{2} e_b^j (\partial_a e_j^i - \partial_j e_a^i + e^{ci} e_{aa} \partial_j e_c^d) \quad (186)$$

Bentuk persamaan Hamilton-Jacobi dalam formulasi selfdual ini menggunakan bentuk persamaan Hamilton-Jacobi relativistik dimana Hamiltoniannya adalah kendala Hamiltonian:

$$H\left(q^a, \frac{\partial S(q^a)}{\partial q^a}\right) = H^{gravity}\left(A_a^i, \frac{\partial S(A)}{\partial A_a^i}\right) \quad (187)$$

Kendala Hamiltonian (187) dituliskan dalam bentuk selfdual ( $\gamma = i$ ) menjadi lebih sederhana, yaitu:

$$H^{gravity} = \varepsilon^{ij}{}_k E_i^a E_j^b \mathcal{F}_{ab}^k = 0 \quad (188)$$

Dengan 2-form kurvatur:  $\mathcal{F}_{ab}^k = 2\partial_{[a} A_{b]}^k - \varepsilon^k{}_{ij} A_{[a}^i A_{b]}^j$  dan densiti triad  $E_i^a$  yang didefinisikan sebagai:

$$E_i^a = \frac{\delta S(A)}{\delta A_a^i} = \frac{\delta \mathcal{L}_H}{\delta A_a^i} = e e_i^a = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \varepsilon^{abc} e_b^j e_c^k \quad (189)$$

Sehingga adalah persamaan Hamilton-Jacobi untuk gravitasi dalam bentuk variabel Ashtekar-Barbero adalah sebagai berikut:

$$H^{gravity}\left(A_a^i, \frac{\partial S(A)}{\partial A_a^i}\right) = F_{ab}^{ij} \frac{\delta S(A)}{\delta A_a^i} \frac{\delta S(A)}{\delta A_b^j} = 0 \quad (190)$$

Dimana  $S(A)$  merupakan fungsi Hamilton dan  $F_{ab}^{ij} = \varepsilon^{ij} \mathcal{F}_{ab}^k$ . Persamaan Hamilton-Jacobi diatas dikenal pula sebagai persamaan Wheeler-de Witt ketika dituliskan dalam formulasi ADM. Seluruh dinamika ruang-waktu dalam relativitas umum ditentukan persamaan ini.

## 2.2 Kuantisasi via Representasi Koneksi

Mengikuti program kuantisasi Dirac yang telah ditelaah sebelumnya, maka variabel konjugat baru  $(A_a^j, \tilde{E}_j^b)$  yang telah dikenalkan sebelumnya, selanjutnya kita promosikan variabel kanonik ini menjadi operator dan mengkuantisasi ruang fasa melalui hubungan hubungan komutasi yang sebelumnya adalah persamaan Poisson:

$$\{A_a^i(x), \tilde{E}_j^b(y)\} = \delta_j^i \delta_a^b \delta^3(x, y) \rightarrow [A_a^i(x), \tilde{E}_j^b(y)] = i\hbar \delta_j^i \delta_a^b \delta^3(x - y) \quad (191)$$

Promosi variabel konjugat menjadi operator:

$$A_a^i \rightarrow \hat{A}_a^i = A_a^i \quad (193)$$

$$\tilde{E}_i^a \rightarrow \hat{E}_i^a = \frac{\delta}{\delta A_a^i} \quad (193)$$

Dengan  $\frac{\delta}{\delta A_a^i}$  adalah turunan fungsional terhadap koneksi  $A_a^i$ . Langkah terakhir adalah mendapatkan representasi ruang. Secara umum, dalam mekanika kuantum untuk mendapatkan representasi ruang diperlukan sifat square integrable dari state ( $\psi[A]$ ) sepanjang ruang konfigurasi dari sistem. Pada kasus gravitasi dalam variabel Ashtekar ini, ruang konfigurasi adalah ruang koneksi  $\mathcal{A} \simeq SU(2)$ , oleh karena itu representasi ruang haruslah sebuah ruang fungsional  $C^\infty[\mathcal{A}] \simeq L_2[\mathcal{A}]$ . Lebih jauh ruang fungsional ini harus memiliki sifat well defined inner product dan syarat kelengkapan; dalam kasus gravitasi kuantum, ruang fungsional ini adalah ruang Hilbert.

Masalah yang muncul dalam gravitasi kuantum kanonik berdasarkan variabel Ashtekar ini adalah sifat representasi ruang tidak well defined inner product, yaitu  $C^\infty[\mathcal{A}] \ni \psi[A]$  memiliki tak berhingga dimensi sehingga pengukuran dan inner product tak terdefiniskan. Dalam formulasi LQG hal ini dapat diselesaikan dengan mengajukan metode regulasi untuk koneksi dan densitas triad atau yang dikenal sebagai holonomy-flux algebra.

*Triads on the right: Wilson Loops:*

Selanjutnya kita tuliskan kembali kendala dalam relativitas umum pada (164) – (166) dalam variabel Ashtekar yang telah dipromosikan dalam bentuk operator (diambil kondisi selfdual:  $\gamma = \pm i$ ):

$$G_i = \mathcal{D}_a \tilde{E}_i^a \quad \rightarrow \quad \hat{G}_i \psi[A] = \mathcal{D}_a \frac{\delta}{\delta A_a^i} \psi[A] \quad (194)$$

$$H_a^{gravity} = \mathcal{F}_{ab}^i \tilde{E}_i^b \quad \rightarrow \quad \hat{H}_a^{gravity} \psi[A] = \mathcal{F}_{ab}^i \frac{\delta}{\delta A_b^i} \psi[A] \quad (195)$$

$$H^{gravity} = \varepsilon^{ij} \mathcal{F}_{ab}^k \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b \quad \rightarrow \quad \hat{H}^{gravity} \psi[A] = \varepsilon^{ij} \mathcal{F}_{ab}^k \frac{\delta}{\delta A_a^i} \frac{\delta}{\delta A_b^j} \psi[A] \quad (196)$$

Solusi dari kendala Gauss yang telah dipromosikan menjadi operator di atas akan menjadi fungsional yang invarian terhadap transformasi grup SU(2), sehingga terdapat kandidat paling sederhana yaitu:

$$\psi[A] = \text{konstan} \quad (197)$$

Keadaan ini akan lenyap untuk seluruh kendala relativitas umum yang telah dipromosikan sebagai operator di atas. Tetapi keadaan ini bersifat trivial [8]. Jacobson dan Smolin mengajukan solusi lainnya untuk solusi dari kendala di atas (khususnya solusi untuk kendala Gauss), yaitu solusi Wilson loop ( $W[A, \gamma]$ ) yang merupakan jumlah dari holonomi untuk teori gauge grup SU(2) ( $h_\gamma$ ):

$$\psi[A] = W[A, \gamma] = \text{Tr } h_\gamma[A, \gamma], \quad h_\gamma = \mathcal{P} \exp \left( \oint_\gamma A \right) \quad (198)$$

Dengan  $\mathcal{P}$  adalah operator path ordering dan  $\gamma$  adalah lintasan di hypersurface serta  $\oint_\gamma A \equiv \int_0^1 ds A_a^i(x(t)) \frac{dx^a(t)}{dt} \tau^i$ . Faktanya, Wilson loop merupakan solusi dari seluruh fungsi yang invarian untuk teori gauge berbasis koneksi. Kata loop dalam LQG merujuk pada Wilson loop. Selain itu Wilson loop juga merupakan solusi dari kendala Hamiltonian. Secara detail ditunjukkan sebagai berikut:

Dengan mengenakan holonomi untuk lintasan terbuka  $\gamma_o^{o'}$  pada operator densitas triad:

$$\hat{E}_i^a h_\gamma(\gamma_o^{o'}) = \frac{\delta}{\delta A_a^i} h_\gamma(\gamma_o^{o'}) = \oint_\gamma dy^a \frac{dx^a(t)}{dt} h_\gamma(\gamma_o^{o'}) \tau^i \quad (199)$$

Dengan  $\frac{dx^a(t)}{dt} = \delta^3(x - y)$  dan  $h_\gamma(\gamma_o^{o'}) \tau^i = h_\gamma(\gamma_o^y) \tau^i h_\gamma(\gamma_y^{o'})$  dengan  $\tau^i = -i \frac{\sqrt{2}}{2} \sigma^i$ , sehingga:

$$\hat{E}_i^a h_\gamma(\gamma_o^{o'}) = \frac{\delta}{\delta A_a^i} h_\gamma(\gamma_o^{o'}) = \oint_\gamma dy^a \delta^3(x-y) h_\gamma(\gamma_o^y) \tau^i h_\gamma(\gamma_y^{o'}) \quad (200)$$

Dipilihnya lintasan terbuka karena untuk menghindari ambiguitas ketika dikenakan pada turunan kedua. Ekspresi Wilson dapat diperoleh ketika didapatkan limit  $o$  dan  $o'$  saling bertemu. Selanjutnya turunan kedua dari densitas triad:

$$\begin{aligned} \hat{E}_i^a \hat{E}_j^b h_\gamma(\gamma_o^{o'}) &= \frac{\delta}{\delta A_a^i} \frac{\delta}{\delta A_b^j} h_\gamma(\gamma_o^{o'}) \quad (201) \\ &= \oint_\gamma dy^b \oint_{\gamma_o^y} dz^a \delta(x-y) \delta(x-z) h_\gamma(\gamma_o^z) \tau^i h_\gamma(\gamma_y^z) \tau^j h_\gamma(\gamma_y^{o'}) \\ &\quad + \oint_\gamma dy^b \oint_{\gamma_y^{o'}} dz^a \delta(x-y) \delta(x-z) h_\gamma(\gamma_o^y) \tau^j h_\gamma(\gamma_y^z) \tau^i h_\gamma(\gamma_z^{o'}) \end{aligned}$$

Sekarang kita dapatkan bentuk kendala Hamiltonian dalam basis trace matriks:

$$\hat{H}^{gravity} \psi[A] = \varepsilon^{ij} \mathcal{F}_{ab}^k \frac{\delta}{\delta A_a^i} \frac{\delta}{\delta A_b^j} \psi[A] = \varepsilon^{ij} \mathcal{F}_{ab}^k \frac{\delta}{\delta A_a^i} \frac{\delta}{\delta A_b^j} \text{Tr} h_\gamma[A, \gamma] \quad (202)$$

$$\begin{aligned} \hat{H}^{gravity} \psi[A] &= \varepsilon^{ij} \mathcal{F}_{ab}^k \left[ \oint_\gamma dy^b \oint_{\gamma_o^y} dz^a \delta(x-y) \delta(x \right. \quad (203) \\ &\quad \left. - z) \text{Tr} \left( \tau^i h_\gamma(\gamma_y^z) \tau^j h_\gamma(\gamma_y^z o) \right) \right. \\ &\quad \left. + \oint_\gamma dy^b \oint_{\gamma_y^{o'}} dz^a \delta(x-y) \delta(x-z) \text{Tr} \left( \tau^j h_\gamma(\gamma_y^z) \tau^i h_\gamma(\gamma_z^{o'}) \right) \right] \end{aligned}$$

Dengan  $h_\gamma(\gamma_y^z o)$  dan  $h_\gamma(\gamma_z^{o'})$  merupakan bagian holonomi yang menunjukkan loop dari  $y$  ke  $z$  melewati basepoint  $o$ . Jika loop tidak memiliki kink atau intersection, maka  $\gamma_y^z$  akan mengecil menuju sebuah titik yang menghasilkan fungsi delta Dirac ( $\gamma_y^z = \delta(0)$ ), sehingga kita dapatkan kendala Hamiltonian:

$$\begin{aligned} \hat{H}^{gravity} \psi[A] &= \varepsilon^{ij} \mathcal{F}_{ab}^k \left[ \oint_\gamma dy^b \oint_\gamma dz^a \delta(x-y) \delta(x \right. \quad (204) \\ &\quad \left. - z) \text{Tr} \left( \tau^i \delta(0) \tau^j h_\gamma(\gamma_y^z o) \right) \right. \\ &\quad \left. + \oint_\gamma dy^b \oint_\gamma dz^a \delta(x-y) \delta(x-z) \text{Tr} \left( \tau^j \delta(0) \tau^i h_\gamma(\gamma_z^{o'}) \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{H}^{gravity}\psi[A] &= \varepsilon^{ij} \mathcal{F}_{ab}^k \left[ \oint_{\gamma} dy^b \oint_{\gamma} dz^a \delta(x-y)\delta(x-z) \text{Tr} \left( \tau^i \tau^j h_{\gamma}(\gamma_{y^z}^o) \right) \right. \\
&\quad \left. + \oint_{\gamma} dy^b \oint_{\gamma} dz^a \delta(x-y)\delta(x-z) \text{Tr} \left( \tau^j \tau^i (\gamma_{z^o}^y) \right) \right] \\
&= \varepsilon^{ij} \mathcal{F}_{ab}^k \left[ \oint_{\gamma} dy^b \oint_{\gamma} dz^a \delta(x-y)\delta(x-z) \text{Tr} \left( \delta^{ij} h_{\gamma}(\gamma_{z^o}^y) \right) \right]
\end{aligned} \tag{205}$$

Sehingga kita dapatkan perluasan pada integral kedua untuk seluruh loop dan sifat loop yang halus (*smooth*).

Hal yang perlu diperhatikan bahwa kuantitas  $\varepsilon^{ij} \mathcal{F}_{ab}^k$  bersifat antisimetrik untuk pertukatan indeks a, b dan i, j tetapi dari integral terdapat sifat simetrik antara indeks a, b (dari integral) dan i, j dari matrik identitas  $\delta^{ij} = \delta^{ji}$ . Hal ini menghasilkan kendala Hamiltonian yang sama dengan nol ( $\hat{H}^{gravity}\psi[A] = 0$ ). Hasil ini menunjukkan bahwa Wilson dalam bentuk variabel Ashtekar merupakan solusi dari kendala Hamiltonian atau juga dikenal sebagai persamaan Wheeler-de Witt untuk gravitasi kuantum. Ini merupakan hasil yang luar biasa. Walaupun hasil ini belum bersifat umum karena belum memasukan pendekatan mini-surface.

Disisi lain, (1) Wilson loop ( $W[A, \gamma]$ ) bukanlah solusi kendala Hamiltonian sepenuhnya solusi ini gagal ketika pada loop terjadi kink dan intersection antar loop. Hal ini disebabkan oleh sifat alami dari Wilson loop yang merupakan smooth loop. (2) Selain itu, Wilson loop ( $W[A, \gamma]$ ) bukan merupakan solusi dari kendala diffeomorfisme karena ketika  $W[A, \gamma]$  dikenakan pada kendala diffeomorfisme maka kendala tersebut tidak lenyap. (3) Dan terakhir, ketika keadaan  $\psi[A]$  dikenakan pada metrik operator, maka representasi fungsi gelombang/keadaan yang dihasilkan adalah representasi ruang dengan metrik yang merosot (degenerate). Hal ini menyebabkan keadaan  $\psi[A]$  akan lenyap ketika dikenakan pada kendala Hamiltonian dan determinan three metric, ini berarti akan diperoleh nilai arbitrary untuk konstanta kosmologi. That spells serious trouble [8].

### *Triads on the left: Chern-Simon Forms in Kodama state*

Salah satu isu utama dalam menentukan dinamika dari medan gravitasi adalah diperlukannya observabel yaitu fungsional ruang fasa yang mana komut melalui kurung Poisson dengan seluruh set kendala relativitas umum. Dengan hadirnya konstanta kosmologis dan mengambil kasus selfdual  $\gamma = \pm i$ , maka diperoleh kendala Hamiltonian yaitu:

$$H_{\Lambda}^{gravity} = \varepsilon^{ij} \mathcal{F}_{ab}^k \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b + \frac{\Lambda}{6} \varepsilon_{abc} \varepsilon^{ijk} \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b \tilde{E}_k^c \quad (206)$$

Sehingga ketika dipromosikan menjadi operator melalui promosi densitas triad, maka diperoleh:

$$\hat{H}_{\Lambda}^{gravity} \psi_K[A] = \left( \varepsilon^{ij} \mathcal{F}_{ab}^k \frac{\delta}{\delta A_a^i} \frac{\delta}{\delta A_b^j} + \frac{\Lambda}{6} \varepsilon_{abc} \varepsilon^{ijk} \frac{\delta}{\delta A_a^i} \frac{\delta}{\delta A_b^j} \frac{\delta}{\delta A_c^k} \right) \psi_K[A] \quad (207)$$

Bersama dengan kendala lainnya:

$$\hat{G}_i \psi_K[A] = \mathcal{D}_a \frac{\delta}{\delta A_a^i} \psi_K[A] \quad (208)$$

$$\hat{H}_a^{gravity} \psi_K[A] = \mathcal{F}_{ab}^i \frac{\delta}{\delta A_b^i} \psi_K[A] \quad (208)$$

Pada tahun 1990, Kodama mengajukan solusi untuk 3 kendala di atas, yaitu suatu fungsional keadaan  $\psi_K[A]$  yang dikenal sebagai keadaan Kodama (Kodama state):

$$\psi_K[A] = e^{\frac{2}{3\Lambda} \int_{\Sigma} d^3x Y_{CS}[A] \sqrt{h}} \quad (209)$$

Dengan  $Y_{CS}[A]$  dikenal sebagai bentuk koneksi dari Chern-Simon form:

$$Y_{CS}[A] = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \delta_{ab} A_i^a \nabla_j A_k^b + \frac{2}{3} \varepsilon_{abc} \varepsilon^{ijk} A_i^a A_j^b A_k^c \quad (210)$$

Yang memenuhi identitas [42]:

$$\frac{\delta}{\delta A_{ia}} \left( \int_{\Sigma} d^3x Y_{CS}[A] \sqrt{h} \right) = 2 \varepsilon^{abc} \mathcal{F}_{bc}^i \quad (211)$$

Fungsi keadaan  $\psi[A]$  ini invarian terhadap transformasi diffeomorfisme dan transformasi SU(2), sehingga melalui aksi kurung Poisson untuk kendala-kendala lainnya lenyap. Ini berarti keadaan Kodama merupakan solusi klasik/semiklasik dari 3 kendala dalam relativitas umum: kendala Gauss, kendala diffeomorfisme, dan kendala Hamiltonian tetapi dengan bayaran hadirnya konstanta kosmologis positif. Ini menjadikan fungsi keadaan  $\psi[A]$  sebagai observabel berupa fungsi keadaan dasar untuk ruang de-Sitter.

Selanjutnya dapat kita tunjukkan bahwa keadaan Kodama memenuhi salah satu kendala, yaitu kendala Hamiltonian: (cek paper Lee Smolin)

$$\hat{H}_{\Lambda}^{gravity} \psi_K[A] = \left( \varepsilon^{ij} \mathcal{F}_{ab}^k \frac{\delta}{\delta A_a^i} \frac{\delta}{\delta A_b^j} + \frac{\Lambda}{6} \varepsilon_{abc} \varepsilon^{ijk} \frac{\delta}{\delta A_a^i} \frac{\delta}{\delta A_b^j} \frac{\delta}{\delta A_c^k} \right) \psi_K[A] \quad (212)$$

$$\hat{H}_\Lambda^{gravity} \psi_K[A] = \left[ \varepsilon^{ij}{}_k \frac{\delta}{\delta A_a^i} \frac{\delta}{\delta A_b^j} \cdot \mathfrak{S}_{ab}^k \right] \psi_K[A] \quad (213)$$

Dengan  $\mathfrak{S}_{ab}^k$  merupakan operator yang memiliki sifat selfdual, yaitu:

$$\mathfrak{S}_{ab}^k := \mathcal{F}_{ab}^k + \frac{\Lambda}{6} \varepsilon_{abc} \frac{\delta}{\delta A_c^k} \quad (214)$$

Dan menggunakan identitas untuk keadaan kodama berikut [42]:

$$\frac{\delta}{\delta A_a^i} \psi_K[A] = \frac{3}{\Lambda} \varepsilon_a{}^{bc} \mathcal{F}_{bc}^i \psi_K[A] \quad (215)$$

Maka suku  $\mathfrak{S}_{ab}^k$  dapat dievaluasi sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{ab}^k \psi_K[A] &= \mathcal{F}_{ab}^k \psi_K[A] + \frac{\Lambda}{6} \varepsilon_{abc} \frac{\delta}{\delta A_c^k} \psi_K[A] \\ \mathfrak{S}_{ab}^k \psi_K[A] &= \mathcal{F}_{ab}^k \psi_K[A] + \frac{\Lambda}{6} \times \frac{3}{\Lambda} \times \varepsilon_{abc} \varepsilon_c{}^{ef} \mathcal{F}_{ef}^k \psi_K[A] \\ \mathfrak{S}_{ab}^k \psi_K[A] &= \mathcal{F}_{ab}^k \psi_K[A] + \frac{1}{2} \times [-2(\delta_a^e \delta_b^f - \delta_b^e \delta_a^f)] \mathcal{F}_{ef}^k \psi_K[A] \end{aligned}$$

Dengan mengkontraksi indeks  $e = a$  dan  $f = b$ , maka:  $\mathfrak{S}_{ab}^k \psi_K[A] = 0$ . Hasil membuktikan bahwa

$$\hat{H}_\Lambda^{gravity} \psi_K[A] = 0 \quad (216)$$

Yang menunjukkan bahwa keadaan Kodama memenuhi kendala Hamiltonian begitu juga untuk kendala Gauss dan kendala diffeomorfisme.

Selain itu, keadaan Kodama dapat dilihat sebagai keadaan kuantum, seperti halnya pendekatan WKB namun kasus kuantisasi kanonik gravitasi dalam variabel Ashtekar. Ini menggambarkan pula kondisi semiklasik dari ruang-waktu de-Sitter. Walaupun begitu penelitian dalam kajian masih dalam progress. Dalam lingkup kajian LQG, fungsional Kodama belum secara eksak dapat diturunkan. Hal ini disebabkan karena dalam LQG variabel Ashtekar/koneksi dan densitas triad diregulasi melalui smearing kemudian dilanjutkan dengan promosi menjadi operator dan formulasinya dikenal sebagai holonomy flux-algebra, dimana formulasi ini berbeda dengan pembahasan sebelumnya, dimana kita secara langsung mempromosikan variabel kanonik baru menjadi operator tanpa melakukan regulasi smearing. Holonomy flux-algebra ini yang membedakan pendekatan LQG dengan pendekatan gravitasi kuantum lainnya.

### 2.3 Regulasi Variabel Baru Ashtekar-Barbero

Sebelum melakukan kuantisasi, variabel konjugat baru  $(A_a^i, \tilde{E}_i^a)$  yang dikenalkan sebelumnya dalam memformulasikan relativitas umum sehingga lebih dekat dengan teori gauge Yang-Mills. Proses ini lebih lanjut dilakukan melalui regulasi smearing sehingga variabel kanonik Ashtekar tidak bergantung pada posisi dalam ruang. Regulasi smearing dilakukan karena variabel konjugat  $(A_a^i, \tilde{E}_i^a)$  masih bersifat singular, selain itu agar formulasi tetap sesuai dengan prinsip background independent dalam relativitas umum dan tetap mempertahankan hubungan komutasi yang membentuk struktur aljabar oleh variabel konjugat  $(A_a^i, \tilde{E}_i^a)$ , maka dalam LQG diperkenalkan struktur aljabar yang dikenal sebagai holonomy flux algebra. Holonomy flux-algebra ini yang membedakan formulasi kuantisasi gravitasi untuk LQG dibandingkan formulasi lainnya.

#### (1) Regulasi Densitas Triad

Bentuk regulasi eksplisit densitas triad  $\tilde{E}_i^a$  dapat ditinjau dengan meninjau terlebih dahulu definisi luas dalam bentuk metrik, yaitu:

$$A_s = \int_S d\sigma_1 d\sigma_2 \sqrt{\det \left( g_{ab} \frac{\partial x^a}{\partial \sigma^\alpha} \frac{\partial x^b}{\partial \sigma^\beta} \right)} \quad \alpha, \beta = 1, 2 \quad (217)$$

Menggunakan notasi  $\partial_1 x^a = \frac{\partial x^a}{\partial \sigma^1}$ , maka:

$$\begin{aligned} \det \left( g_{ab} \frac{\partial x^a}{\partial \sigma^\alpha} \frac{\partial x^b}{\partial \sigma^\beta} \right) &= g_{ab} g_{cd} [\partial_1 x^a \partial_1 x^b \partial_2 x^c \partial_2 x^d - \partial_1 x^a \partial_2 x^b \partial_1 x^c \partial_2 x^d] \\ \det \left( g_{ab} \frac{\partial x^a}{\partial \sigma^\alpha} \frac{\partial x^b}{\partial \sigma^\beta} \right) &= 2g_{ab} g_{cd} \partial_1 x^a \partial_1 x^{[b} \partial_2 x^{c]} \partial_2 x^d \\ &= 2g_{a[b} g_{c]d} \partial_1 x^a \partial_1 x^b \partial_2 x^c \partial_2 x^d \end{aligned} \quad (218)$$

Didefinisikan

$$g_{a[b} g_{c]d} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ace} \varepsilon_{bdf} g g^{ef} \quad n_e = \varepsilon_{eab} \frac{\partial x^a}{\partial \sigma^1} \frac{\partial x^b}{\partial \sigma^2} \quad (219)$$

Sehingga

$$\det \left( g_{ab} \frac{\partial x^a}{\partial \sigma^\alpha} \frac{\partial x^b}{\partial \sigma^\beta} \right) = -2 \left( \frac{1}{2} \varepsilon_{ace} \varepsilon_{bdf} g g^{ef} \right) \frac{\partial x^a}{\partial \sigma^1} \frac{\partial x^b}{\partial \sigma^1} \frac{\partial x^c}{\partial \sigma^2} \frac{\partial x^d}{\partial \sigma^2}$$

$$\det\left(g_{ab} \frac{\partial x^a}{\partial \sigma^\alpha} \frac{\partial x^b}{\partial \sigma^\beta}\right) = -g g^{ef} \left(\varepsilon_{ace} \frac{\partial x^a}{\partial \sigma^1} \frac{\partial x^c}{\partial \sigma^2}\right) \left(\varepsilon_{bdf} \frac{\partial x^b}{\partial \sigma^1} \frac{\partial x^d}{\partial \sigma^2}\right) \quad (220)$$

Dan didapat:

$$\det\left(g_{ab} \frac{\partial x^a}{\partial \sigma^\alpha} \frac{\partial x^b}{\partial \sigma^\beta}\right) = -g g^{ef} n_e n_f \quad (221)$$

Substitusikan ke dalam persamaan luas kemudian menggunakan definisi tetrad dan densitas triad:  $g = -e^2$ ,  $g^{ef} = \eta^{ij} e_i^e e_j^f$  dan  $\tilde{E}_i^a = \frac{\delta S(A)}{\delta A_a^i} = \frac{\delta \mathcal{L}_H}{\delta A_a^i} = e e_i^a = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \varepsilon^{abc} e_b^j e_c^k$ :

$$\begin{aligned} A_s &= \int_S d\sigma_1 d\sigma_2 \sqrt{-g g^{ef} n_e n_f} = \int_S d\sigma_1 d\sigma_2 \sqrt{-(-e^2) \eta^{ij} e_i^e e_j^f n_e n_f} \\ A_s &= \int_S d\sigma_1 d\sigma_2 \sqrt{e^2 e_i^e e_j^f \eta^{ij} n_e n_f} = \int_S d\sigma_1 d\sigma_2 \sqrt{\tilde{E}_i^e \tilde{E}_j^f \eta^{ij} n_e n_f} \end{aligned} \quad (222)$$

Maka kita dapatkan:

$$A_s = \int_S d\sigma_1 d\sigma_2 \sqrt{\tilde{E}_i^e \tilde{E}^f i n_e n_f} \quad (223)$$

Bentuk terakhir di atas memperluas untuk sembarang permukaan dengan normal  $n_e$ . Dengan mengenalkan:

$$\tilde{E}^i = \frac{1}{2} \varepsilon_{abc} \tilde{E}^{ai} dx^b dx^c \quad (224)$$

Maka definisi luas permukaan menjadi:

$$A_s = \int_S |E| \quad (225)$$

Berdasarkan hal tersebut, dapat kita tinjau interpretasi dari magnitudo densitas triad per komponen, sebagai berikut:

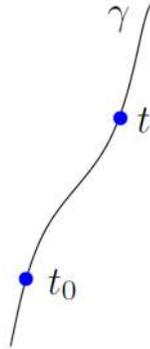
$$\tilde{E}^i(S) = \int_S \tilde{E}^i = \int_S \varepsilon_{abc} \tilde{E}^{ai} dx^b dx^c \quad (226)$$

Yang artinya memberikan definisi fluks densitas triad  $\tilde{E}$  yang melewati permukaan  $S$ . Bentuk terakhir dari  $\tilde{E}$  di atas merupakan bentuk regulasi untuk densitas triad, yaitu sebagai fluks medan yang melewati permukaan 3 dimensi  $S$ .

(2) Regulasi Koneksi (Regulasi Variabel Ashtekar)

Koneksi yang diperkenalkan Ashtekar ( $A_a^i$ ) merupakan elemen 1-form dari grup SU(2) berdasarkan kendala Gauss dalam Hamiltonian relativitas umum yang telah dipaparkan sebelumnya. Oleh karena berbentuk 1-form, maka  $A_a^i$  dapat direpresentasikan sebagai matrik dan regulasinya melalui proses smearing secara alami berupa integral garis. Integral garis ini dikenal sebagai holomi.

Sekarang kita definisikan gagasan mengenai paralel transpor sepanjang permukaan manifold dengan lintasan  $\gamma$  dan diparameterisasi pada  $x^a(t) : [0,1] \rightarrow \Sigma$ , diilustrasikan sebagai berikut:



(Sumber: [11])

Koneksi  $A_a^i$  sebagai element grup SU(2), yaitu  $A_a \equiv A_a^i \tau_i$ , dengan  $\tau^i$  adalah generator SU(2) atau  $\tau^i = -i \frac{\sqrt{2}}{2} \sigma^i$  dimana  $\sigma^i$  merupakan matrik Pauli. Dapat kita intergrasikan  $A_a$  sepanjang lintasan  $\gamma$  sebagai integral garis, yaitu:

$$A_a^i \rightarrow \int_{\gamma} A \equiv \int_0^1 ds A_a^i(x(t)) \frac{dx^a(t)}{dt} \tau^i \quad (227)$$

Holonomi dalam representasi koneksi  $A_a^i$ , dituliskan sebagai berikut:

$$h_{\gamma} = P \exp \left( \int_{\gamma} A \right) \quad (228)$$

Untuk kasus Wilson loop, integral garis menjadi integral tertutup:

$$h_\gamma = P \exp \left( \oint_\gamma A \right) \quad (229)$$

Dengan  $P$  adalah operator path ordering untuk memastikan urutan iterasi dari 0 hingga  $t$  ( $t_1 \geq t_2 \geq t_3 \geq \dots \geq t_n$ ). Sehingga holonomi dapat dituliskan:

$$h_\gamma = \sum_{n=0}^{\infty} \iiint_{1 > t_n \dots > t_1 > 0} A(\gamma(t_1)) \dots A(\gamma(t_n)) dt_1 \dots dt_n \quad (230)$$

Dengan parameter garis  $t$  yaitu  $t \in [0,1]$ . Lebih detail mengenai holonomi dapat dilihat pada Lampiran C.

Selain itu, terdapat sifat-sifat yang dimiliki oleh holonomi, yaitu:

- (i) Komposisi dari 2 holonomi adalah produk dari masing-masing holonomi:

$$h_{\alpha\beta} = h_\alpha h_\beta \quad (231)$$

- (ii) Terhadap transformasi gauge lokal  $U(x) \in \text{SU}(2)$ , holonomi bertransformasi:

$$h_\gamma^U = U_{s(\gamma)} h_\gamma U_{t(\gamma)}^{-1} \quad (232)$$

Dengan  $s(\gamma)$  dan  $t(\gamma)$  adalah titik sumber dan target sepanjang lintasan  $\gamma$

- (iii) Terhadap aksi diffeomorfisme, holonomi bertransformasi sebagai:

$$h_\gamma(\phi * A) = h_{\phi \circ \gamma}(A) \quad (233)$$

- (iv) Fungsional turunan terhadap koneksi ( $A$ ) diberikan oleh:

$$\frac{\delta h_\gamma(A)}{\delta A_a^i(x)} = \begin{cases} \frac{1}{2} \dot{x}^a \delta^3(\gamma(t), x) \tau_i h_\gamma & \text{jika } x \text{ adalah sumber di lintasan } \gamma \\ \frac{1}{2} \dot{x}^a \delta^3(\gamma(t), x) h_\gamma \tau_i & \text{jika } x \text{ adalah target di lintasan } \gamma \\ \dot{x}^a \delta^3(\gamma(t), x) h_\gamma(0, t) \tau_i h_\gamma(t, 1) & \text{jika } x \text{ terdapat di lintasan } \gamma \end{cases} \quad (234)$$

Pembuktian sifat-sifat holonomi di atas dapat dilihat pada Lampiran D.

Apabila kita lakukan trace terhadap holonomi  $h_\gamma(A)$  sepanjang lintasan tertutup  $\gamma$  (artinya titik awal dan akhir akan saling bertemu) maka kita akan peroleh definisi Wilson loop:

$$W[A] = \text{Tr } h_\gamma[A] \quad (235)$$

Dan bila ditransformasikan terhadap grup  $SU(2)$ , maka kuantitas ini akan invariant:

$$W[A'] = \text{Tr } h_\gamma[A'] = \text{Tr} \left( \Lambda(f) h_\gamma[A] \Lambda^{-1}(i) \right) = \text{Tr} \left( \Lambda(f) \Lambda^{-1}(i) h_\gamma[A] \right)$$

$$W[A'] = \text{Tr}(h_\gamma[A]) = W[A] \quad (236)$$

*Why a reformulation in terms of holonomies?*

Penggunaan Wilson loop pertama kali diperkenalkan dalam formulasi path integral untuk QCD pada lattice. Fitur utama dari pendekatan ini adalah didapatkannya potensial statik antara 2 quark berdasarkan nilai ekpekstasi dari hubungan Wilson loop antara 2 quark tersebut. Hasilnya adalah potensial linier yang menghasilkan formulasi kurungan (*confinement*). Selanjutnya Wilson loop dan generalisasinya digunakan untuk mengkuantisasi dalam basis bebas latar belakang (*background independent*) melalui definisi holonomi pada keadaan-knots yang ekuivalen dengan kelas loop terhadap diffeomorfisme. Rovelli dan Smolin memperkenalkan kuantisasi via holonomy-flux algebra berdasarkan pendekatan holonomi dibandingkan pendekatan hubungan komutasi kanonik antara variabel kanonik  $(p, q)$  yang diperkenalkan C.J Isham. Melalui pendekatan Rovelli dan Smolin inilah lahirnya LQG, walaupun holonomi sendiri tidak selalu berhubungan dengan LQG, seperti halnya kuantisasi cacat topologi (*topological defect*) untuk kasus gravitasi di 3 dimensi dan lebih jauh diperluas ke kasus 4 dimensi.

#### 2.4 Kuantisasi via *Holonomi-Flux Algebra* (Aljabar Holonomi-Densitas Triad)

Untuk mempersiapkan relativitas umum dalam program kuantisasi LQG, terdapat 2 langkah utama: Langkah pertama, mereformulasi teori dalam medan tetrad dan koneksi yang merupakan elemen grup  $SU(2)$ , yaitu koneksi variabel Ashtekar-Barbero. Langkah kedua, melakukan regulasi variabel (smearing koneksi dan densitas triad) tersebut, kemudian menyusun hubungan/aljabar Poisson dari variabel tersebut berdasarkan lintasan dan permukaan. Hal ini berbeda dengan proses smearing yang telah dibahas dalam formulasi ADM. Langkah kedua ini menghasilkan hubungan aljabar untuk smearing variabel kanonik baru:  $h_\gamma[A]$  dan  $\tilde{E}^i(S)$ . Hubungan aljabar ini dikenal

sebagai holonomi-flux algebra atau aljabar holonomi-densitas triad. Aljabar ini merupakan bentuk paling alami dari aljabar Poisson karena tidak hadirnya fungsi delta yang merupakan fungsi dari ruang dan telah dibuktikan oleh teorema yang dibuktikan oleh Lewandowski et.al [7,8,9,10]. Holonomi-flux algebra menjadi kunci memformulasikan versi kinematik LQG.

Sekarang kita tuliskan kembali variabel kanonik yang sudah melalui smearing, yaitu:  $\tilde{E}_l(S) = \int_S \tilde{E}_l$  dan  $h_l = P \exp(\int_l A)$  dengan indeks  $l$  mengindikasikan infinitesimal dari permukaan S di 3D hypersurface. Selain itu indeks  $l$  menunjukkan pula jumlah link yang melewati suatu permukaan/fluks, disebut sebagai lattice dual dari definisi sebelumnya. Sekarang kita memiliki variabel kanonik baru dengan indeks  $l$  yaitu  $(h_l, \tilde{E}_l)$ , dimana holonomi  $h_l$  adalah smearing sepanjang link dan  $\tilde{E}_l$  adalah smearing sepanjang permukaan/lattice yang merupakan dual dari link. Dengan menuliskan kembali  $h_l$  dan  $\tilde{E}_l$ , yaitu:

$$\tilde{E}_l = \int_S \varepsilon_{abc} \tilde{E}_l^a dS^{bc} = \int_S n_a \tilde{E}_l^a dudv \quad (237)$$

$$h_\gamma = P \exp\left(\int_0^1 ds A_a^i(x(t)) \frac{dx^a(t)}{dt} \tau^i\right) \quad (238)$$

Dengan  $n_a$  adalah vektor normal dari permukaan S dan  $u$  dan  $v$  adalah koordinat di permukaan S. Untuk membangun hubungan Poisson atau struktur simplektik antara  $h_l$  dan  $\tilde{E}_l$ , pertama-tama kita tuliskan variasi  $h_l$  terhadap koneksi  $A_a^i$ , yaitu:

$$\frac{\delta h_l}{\delta A_a^i} = \int_0^1 dt \delta^3(x - x(t)) \frac{dx^i(t)}{dt} h_\gamma(\gamma_0^t) \tau^a h_\gamma(\gamma_t^1) \quad (239)$$

$$\frac{\delta \tilde{E}(S)_l^i}{\delta \tilde{E}_a^i(x^j)} = \int_S n_i \delta^2(x^j - X^j(u; v)) \delta^{ai} dudv \quad (240)$$

Dengan  $h_\gamma(\gamma_b^a)$  adalah holonomi koneksi A sepanjang  $\gamma = \gamma(t)$  dari  $t = a$  menuju  $t = b$  dan hubungan Poisson antara keduanya adalah:

$$\{h_l, \tilde{E}_l^i\} = \int d^3x \left( \frac{\delta h_l}{\delta A_a^i(x)} \frac{\delta \tilde{E}_l^i}{\delta \tilde{E}_a^i(x)} - \frac{\delta \tilde{E}_l^i}{\delta A_a^i(x)} \frac{\delta h_l}{\delta \tilde{E}_a^i(x)} \right) = \int d^3x \left( \frac{\delta h_l}{\delta A_a^i(x)} \frac{\delta \tilde{E}_l^i}{\delta \tilde{E}_a^i(x)} \right)$$

$$\{h_l, \tilde{E}_{l'}^i\} = \int d^3x \left[ \int_0^1 dt \delta^3(x - x(t)) \frac{dx^i(t)}{dt} h_\gamma(\gamma_0^t) \tau^a h_\gamma(\gamma_t^1) \right] \left[ \int_S n_i \delta^2(x^j - X^j(u; v)) \delta^{ai} dudv \right] \quad (241)$$

Karena kita tinjau titik dimana:  $x = x(t)$  dan  $x^j = X^j$ , maka integral di atas akan lenyap bersama delta Dirac ( $\int d^3x \delta^3(x - x(t)) = 1$ ;  $\int_S \delta^2(x^j - X^j(u; v)) dudv = \delta_{ll'}$  dan  $\int_0^1 dt n_i \frac{dx^i(t)}{dt} = \text{sign} =$ ), sehingga diperoleh:

$$\{h_l, \tilde{E}_{l'}^i\} = \delta_{ll'} \bar{\sigma}^i h_\gamma \quad (242)$$

Dan hubungan komutasi lainnya memenuhi juga:

$$\{h_l, h_{l'}\} = 0 \quad (243)$$

$$\{\tilde{E}_l^i, \tilde{E}_{l'}^j\} = \delta_{ll'} \varepsilon^{ij}_k \tilde{E}_l^k \quad (244)$$

Seluruh hubungan aljabar simplektik di atas dikenal sebagai aljabar holonom – densitas triad (*holonomy flux-algebra*) yang dilabeli  $\mathfrak{S}_\Gamma$  dengan  $\Gamma$  adalah kumpulan link dan node yang membentuk grup  $SU(2)$  dengan  $\bar{\sigma}^i$  adalah matrik Pauli. Dapat diperhatikan bahwa  $h_l$  adalah elemen dari  $SU(2)$  karena ia memetakan secara eksponensial  $A_l^a \in SU(2)$ , sedangkan  $\tilde{E}_{l'}^i$  adalah komponen dari  $\tilde{E}_l$  merupakan elemen  $SU(2)$  dan memenuhi hubungan aljabar  $SU(2)$ . Oleh karena itu, keduanya  $(h_l, \tilde{E}_{l'}^i)$  adalah variabel berkonjugat satu dengan lainnya dan membangun elemen ruang-fasa  $(h_l, \tilde{E}_{l'}^i) \in SU(2) \times SU(2)$ . Secara sederhana definisi *holonomy flux-algebra*, dituliskan sebagai [9]:

- Hubungan aljabar Poisson yang mendasari loop quantum gravity adalah struktur aljabar Lie berbentuk  $Cyl \times V(Cyl)$  yang dihasilkan oleh fungsi silindrikal halus (*smooth*) dan medan vektor fluks ( $\tilde{E}_l^i$ ) pada  $Cyl$ . Involusi pada aljabar ini tentunya berupa konjugasi kompleks. Aljabar ini disebut aljabar holonomi-fluks dan akan disimbolkan dengan  $A$ . [9]

Dimana ruang  $Cyl$  dan fungsi silindrikal akan dijelaskan di pembahasan selanjutnya.

Untuk melakukan kuantisasi, maka kedua variabel konjugat ini  $(h_l, \tilde{E}_{l'}^i)$  dengan  $\tilde{E}_{l'}^i = \frac{E_{l'}^i}{\gamma}$  dapat dipromosikan menjadi operator yang memenuhi hubungan komutasi yang sebelumnya memenuhi hubungan Poisson ( $\{\dots, \dots\} \rightarrow [\dots, \dots]$ ):

$$[h_l, h_{l'}] = 0 \quad (245)$$

$$[h_l, E_{l'}^i] = i\gamma\ell_P^2 \delta_{ll'} \bar{\sigma}^i h_\gamma \quad (246)$$

$$[\tilde{E}_l^i, E_{l'}^j] = i\gamma\ell_P^2 \delta_{ll'} \varepsilon_k^{ij} \tilde{E}_l^k \quad (247)$$

Dengan  $\ell_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}$  adalah panjang Planck. Hal yang perlu dicatat disini kita gunakan  $E_l^i$  dibandingkan  $\tilde{E}_l^i$ , karena  $\tilde{E}_l^i = \frac{E_l^i}{\gamma}$ , sehingga disisi kanan hubungan komutasi muncul parameter Immirzi. Dengan mempromosikan 2 variabel sebagai operator, kita dapatkan:

$$h_l \rightarrow \hat{h}_l \psi[A] = h_l \psi[A] \quad (248)$$

$$E_l \rightarrow \hat{E}_l \psi[A] = \vec{J}_l \psi[A] \quad (249)$$

Dengan  $h_l$  adalah holonomi dan  $\vec{J}_l$  adalah medan vektor yang bersifat left invariant yang memenuhi grup SU(2) karena men-generate matrik Pauli ( $\bar{\sigma}^i$ ) jika orientasi titik di link keluar dari node dan bersifat right invariant jika menuju node di link:

$$\vec{J}_l: \mathcal{G} \rightarrow \mathfrak{g}, \quad \vec{J}_l: g_l \rightarrow \vec{J}_l(g_l) = \begin{cases} L_l^a(g_l) = i \frac{d}{d\tau} (e^{\bar{\sigma}^i \tau} g_l) \Big|_{\tau=0} \\ R_l^a(g_l) = i \frac{d}{d\tau} (g_l e^{\bar{\sigma}^i \tau}) \Big|_{\tau=0} \end{cases} \quad (250)$$

Fluk didefinisikan sebagai vektor medan yang invariant ketika ditransformasikan oleh gauge grup SU(2) yang berhubungan dengan kendala Gauss. Ruang fasa variabel secara otomatis merupakan operator yang mana kendala dapat dituliskan dalam operator ini.

Dalam konteks mekanika kuantum, kita dapat peroleh hubungan komutasi berdasarkan hubungan antar variabel dalam hubungan Poisson. Ruang Hilbert yang berhubungan adalah ruang yang berbentuk  $L_2(\mathbb{R}^3, d^3x)$ , yang merupakan ruang yang untuk fungsi-fungsi square integrable di  $\mathbb{R}^3$  dengan standar pengukuran adalah pengukuran Lebesgue  $d^3x$  di  $\mathbb{R}^3$ . Tetapi untuk kasus relativitas umum yang merupakan teori medan klasik dan digambarkan oleh koneksi  $A_i^a$  yang merupakan koneksi halus (smooth connections), dibutuhkan bentuk ruang Hilbert yang lebih besar dibandingkan ruang Hilbert untuk mekanika kuantum umumnya. Ruang Hilbert ini harus memuat tidak hanya fungsi-fungsi halus atau ruang konfigurasi klasik  $A_i^a$  tetapi juga ruang konfigurasi kuantum  $\bar{A}_i^a$ .

Dalam LQG, dapat dibangun pengukuran di ruang konfigurasi kuantum dengan cara memilih hubungan Poisson dari ruang konfigurasi klasik  $A_i^a$  yang diperluas ke ruang konfigurasi kuantum  $\bar{A}_i^a$ . Untuk itu maka kita memperkenalkan suatu fungsi yang dikenal sebagai fungsi silindrikal (*cylindrical function*) untuk koneksi  $A_i^a$  yang memiliki sifat square integrable. Langkah terakhir membangun ruang Hilbert berbasis grup  $SU(2)$  sesuai dengan regulasi variabel konjugat baru  $(h_i, E_i^i)$  untuk fungsi silindrikal ini. Oleh karena itu sifat square integrable untuk fungsi silindrikal grup  $SU(2)$  yang membangun ruang Hilbert dapat dituliskan:  $C^\infty[SU(2)] \simeq L_2[SU(2)]$ . Selanjutnya kita akan membahas yang dimaksud sebagai fungsi silindrikal dan mengkontruksi sektor kinematik untuk LQG.

## 2.5 Sektor Kinematik dari *Loop Quantum Gravity* (LQG)

### 2.5.1 Ruang Hilbert Kinematik ( $\mathcal{H}_{kin}$ ) dan Fungsi Silindrikal (*Cylindrical Functions*)

Representasi ruang Hilbert untuk koneksi  $\mathcal{A}$  memiliki masalah, yaitu tidak terdefiniskan inner produk, pengukuran dan completeness yang mana sangat penting dalam membangun ruang Hilbert. Oleh karena itu menggunakan representasi koneksi  $\mathcal{A}$  tidak dapat dibangun ruang Hilbert untuk LQG. Dalam LQG digunakan representasi holonomi dibandingkan representasi koneksi.

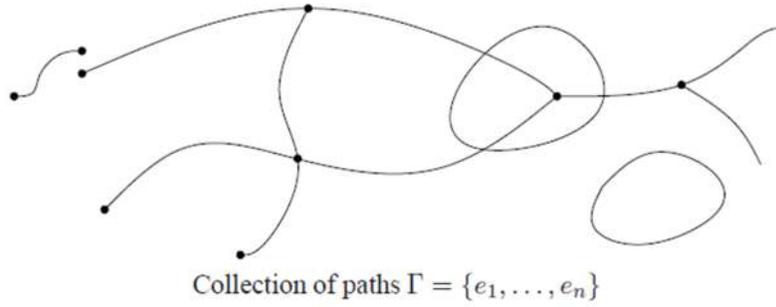
Suatu fungsional yang meliputi koneksi  $\gamma$  dituliskan sebagai berikut:

$$\psi[A] = \langle A|\psi \rangle \in C^\infty[\mathcal{A}] \quad (251)$$

Subset dari  $C^\infty[\mathcal{A}]$ , yang disebut  $Cyl[\mathcal{A}]$  yang terdiri dari fungsi silindrikal. Fungsi silindrikal ini fungsi kontinu yang terdiri dari holonomi  $h_e = \mathcal{P} \exp(\int_e A)$  sepanjang berhingga lintasan  $e$ . Tinjau sebuah grap  $\Gamma$  yang merupakan kumpulan dari lintasan  $e$  terorientasi  $e \subset \Sigma$  (kita sebut lintasan selanjutnya sebagai link dari grap). Sebuah grap  $\Gamma \subset \Sigma$  memiliki  $L$  jumlah total link dan fungsi silindrikal merupakan fungsi dengan sepasang  $(\Gamma, \psi)$  yaitu sebuah grap dan sebuah fungsi halus  $f: SU(2)^L \rightarrow \mathbb{C}$ . Fungsi  $f$  ini dapat dituliskan sebagai fungsi dari koneksi:

$$\langle A|\psi \rangle = \psi_{(\Gamma, f)}[A] = \psi(h_{e_1}[A], \dots, h_{e_L}[A]) \in Cyl_\Gamma \quad (252)$$

Dengan  $e_i$  dan  $i = 1, \dots, L$  adalah link yang merupakan bagian dari grap  $\Gamma$ .



(Sumber: [11])

Representasi ruang untuk fungsi  $\psi$  dapat menjadi ruang Hilbert jika fungsi tersebut memiliki scalar product. Peralihan dari koneksi  $A$  ke holonomi  $h_e$  menjadi sangat penting karena holonomi merupakan element grup  $SU(2)$  dan integrasi meliputi  $SU(2)$  bersifat well defined. Secara khusus terdapat keinvarianan yang unik dan pengukuran yang ternormalisasi  $dh$  yang disebut pengukuran Haar. Menggunakan  $L$  salinan untuk pengukuran Haar, maka scalar product ruang  $Cyl_\Gamma$  adalah:

$$\langle \psi_{(\Gamma,f)} | \psi_{(\Gamma,f')} \rangle \equiv \int \prod_e dh_e \overline{\psi(h_{e_1}[A], \dots, h_{e_L}[A])} \psi'(h_{e_1}[A], \dots, h_{e_L}[A]) \quad (253)$$

Ini mengubah  $Cyl_\Gamma$  sebagai ruang Hilbert  $\mathcal{H}_\Gamma$  yang berhubungan dengan grap  $\Gamma$ .

Selanjutnya kita definisikan ruang Hilbert dari fungsi-fungsi silindrikal untuk seluruh grap sebagai penjumlahan langsung dari masing-masing ruang Hilbert untuk grap. Ruang ini dikenal sebagai ruang Hilbert kinematik:

$$\mathcal{H}_{kin} = \bigoplus_{\Gamma \subset \Sigma} \mathcal{H}_\Gamma \quad (254)$$

Produk skalar di ruang Hilbert kinematik  $\mathcal{H}_{kin}$  adalah persamaan  $\langle \psi_{(\Gamma,\psi)} | \psi_{(\Gamma,\psi')} \rangle$  yang mana memiliki arti: jika  $\psi$  dan  $\psi'$  memiliki grap yang sama, maka produk  $\langle \psi_{(\Gamma,\psi)} | \psi_{(\Gamma,\psi')} \rangle$  dapat dilakukan. Sedangkan jika memiliki grap yang berbeda, katakan  $\Gamma_1$  dan  $\Gamma_2$ , dapat didefinisikan  $\Gamma_3 \equiv \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ , jika kita perluas untuk  $\psi_1$  dan  $\psi_2$  secara trivial di  $\Gamma_3$ , maka dapat kita definisikan skalar produk untuk  $\Gamma_3$ , yaitu:

$$\langle \psi_{(\Gamma_1,\psi_1)} | \psi_{(\Gamma_2,\psi_2)} \rangle \equiv \langle \psi_{(\Gamma_3,\psi_1)} | \psi_{(\Gamma_3,\psi_2)} \rangle = \langle \psi_{(\Gamma_1 \cup \Gamma_2,\psi_1)} | \psi_{(\Gamma_1 \cup \Gamma_2,\psi_2)} \rangle \quad (255)$$

Ini merupakan hasil kunci yang telah ditunjukkan oleh Ashtekar dan Lewandowski, yaitu ruang Hilbert kinematik yang meliputi koneksi gauge  $A$  di  $\Sigma$  setara dengan ruang  $Cyl$  untuk grup:

$$\mathcal{H}_{kin} = L_2[A, d\mu_{AL}] \quad (256)$$

Integrasi terhadap  $d\mu_{AL}$  meliputi ruang koneksi  $A$  disebut pengukuran Ashtekar-Lewandowski. Kembali ke formulasi holonomy flux-algebra:

$$[h_l, E_{l'}^i] = i\gamma\ell_P^2 \delta_{ll'} \bar{\sigma}^i h_\gamma \quad (257)$$

Dimana variabel kanonik adalah  $(h_l, E_{l'}^i)$  dengan  $h_l$  adalah elemen grup  $SU(2)$  dan  $E_{l'}^i$  yang memenuhi struktur aljabar  $su(2)$ , sehingga ruang fasa kedua adalah  $SU(2) \times su(2)$ , maka untuk setiap lintasan/link  $L$ , maka ruang konfigurasinya menjadi  $SU(2)^L = SU(2) \times SU(2) \times SU(2) \times \dots$  dan kita dapatkan ruang Hilbertnya kinematiknya adalah

$$\mathcal{H}_{kin} = L_2[A, d\mu_{AL}] = L_2[SU(2)^L, d\mu_{AL}] \quad (258)$$

Seluruh representasi ini dikenal sebagai representasi Ashtekar-Lewandowski dan merupakan satu-satunya representasi yang sesuai untuk formulasi LQG dalam hal ini representasi untuk holonomy flux-algebra. Hal ini telah dibuktikan oleh Lewandowski, Okolow, Sahlmann, dan Thiemann yang dikenal sebagai teorema LOST untuk LQG. Teorema LOST dituliskan sebagai berikut:

*LOST Theorem: Hanya ada satu representasi siklik dari aljabar holonomi-fluks  $A$  dengan vektor siklik yang invarian terhadap difeomorfisme, yaitu representasi Ashtekar-Lewandowski.*

Karakteristik dari representasi Ashtekar-Lewandowski, antara lain:

- Dalam representasi Ashtekar-Lewandowski terdapat operator geometris yang terkait dengan panjang, volume, dan luas memiliki spektrum yang sepenuhnya diskrit, memberikan gagasan bahwa geometri kuantum dapat menghasilkan gambaran fundamental baru tentang geometri.
- Meskipun terdapat operator untuk holonomi  $h_e$ , akan tetapi tidak terdapat operator yang mewakili koneksi  $A_a^i$  secara langsung dalam representasi ini. Hal ini berbeda dengan operator densitas triad  $E_i^a$  yang secara langsung dipromosikan sebagai operator.
- Begitu pula, untuk difeomorfisme (spasial), tidak adanya generator infinitesimal untuk kendala tersebut. Akan tetapi setidaknya terdapat representasi difeomorfisme terbatas yang diimplementasikan sebagai operator unitary.

Representasi Ashtekar-Lewandowski atau representasi holonomy flux-algebra untuk  $\mathcal{H}_{kin}$  bersifat unik dimana keunikannya dapat dibandingkan dengan teorema Von Neumann untuk mekanika kuantum mengenai keunikan representasi Schrodinger.

Sehingga produk skalar untuk fungsi silindrikl dari konenski dapat dituliskan kembali dalam representasi Ashtekar-Lewandowski:

$$\langle \psi_{(\Gamma_1, \psi_1)} | \psi_{(\Gamma_2, \psi_2)} \rangle \equiv \int d\mu_{AL} \overline{\psi_{(\Gamma_1, \psi_1)}(A)} \psi_{(\Gamma_2, \psi_2)}(A) \quad (259)$$

Sekarang telah didapat kandidat ruang Hilbert kinematik yang tidak harus memiliki ketergantungan terhadap latar belakang karena digunakan formulasi holonomy-flux algebra. Selanjutnya kita akan perkenalkan basis ortogonal basis untuk ruang Hilbert ini. Ini dapat dilakukan berdasarkan teorema Peter-Weyl dengan basis ruang Hilbert  $L_2[G, d\mu_{Haar}]$  untuk fungsi pada grup kompak  $G$ . Dimana fungsi tersebut direpresentasikan sebagai matrik elemen dari representasi unitary irreducible grup kompak tersebut, dalam hal ini  $G$  adalah grup kompak  $SU(2)$ , dituliskan sebagai berikut:

$$\psi(g) = \sum_j \hat{\psi}_{mn}^j D_{mn}^{(j)}(g) \quad \begin{array}{l} j = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots \\ m = -j, \dots, j \end{array} \quad (260)$$

Dengan  $D_{mn}^{(j)}(g)$  adalah matrik Wigner yang merupakan representasi matrik spin- $j$  irreducible dari elemen grup  $g$  dan  $j$  adalah bilangan kuantum spin serta  $m$  dan  $n$  adalah bilangan kuantum magnetik dalam grup  $SU(2)$ . Selain itu, matrik Wigner untuk  $SU(2)$  memiliki sifat:

$$\int dh D_{mn}^{(j)}(h) D_{m'n'}^{(j')}(h) = \frac{1}{2j+1} \delta^{jj'} \delta_{mm'} \delta_{nn'} \quad (261)$$

Atau

$$\sum_{jmn} (2j+1) \int dh D_{mn}^{(j)}(h) D_{m'n'}^{(j')}(h') = \delta(h-h') \quad (262)$$

Dengan  $h$  adalah holonomi dan merupakan  $h \in SU(2)$ . Untuk selanjutnya mengenai grup  $SU(2)$  dan representasinya, seperti matrik Wigner dan koefisien Clebs-Gordon dapat dilihat pada Apendik C.

Selanjutnya, untuk membangun ruang Hilbert grap  $\mathcal{H}_\Gamma$ , pertama-tama kita tinjau ruang Hilbert untuk sebuah link  $\mathcal{H}_l$  yaitu  $l = (n, n')$  yang menghubungkan 2 buah node  $n$  dan  $n'$  dari grap yang

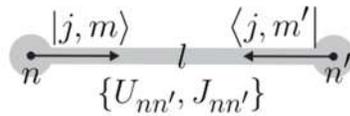
dilengkapi dengan ruang fasa di boundary  $(h_l, E_l) \in T^*SU(2)$ . Ruang Hilbert link  $\mathcal{H}_l$  ini yang nantinya akan membangun ruang Hilbert grap  $\mathcal{H}_\Gamma$ . Representasi ruang Hilbert link  $\mathcal{H}_l$  masing-masing dibangun dalam grup  $SU(2)$ , yaitu:

$$\mathcal{H}_l = L_2[SU(2), d\mu_{Haar}] \simeq \bigoplus^{j_l} (\mathcal{H}_{j_l} \otimes \mathcal{H}_{j_l}^*), \quad \mathcal{H}_{j_l} \simeq L^2[\mathbb{R}^n, d\mu] \quad (263)$$

Sehingga basis  $\mathcal{H}_l \simeq L_2[SU(2)]$  adalah:

$$|j_l, m_l, n_l\rangle = |j_l, m_l\rangle \langle j_l, n_l| \in \mathcal{H}_l \simeq \bigoplus^{j_l} (\mathcal{H}_{j_l} \otimes \mathcal{H}_{j_l}^*) \quad (264)$$

Dengan masing-masing basis spin berhubungan dengan titik akhir sebuah link:



(Sumber: [10])

Yang menggambarkan sebuah link dari sebuah grap dengan variabel dan bilangan spin kuantum

Untuk sebuah grap dengan  $L$  link, ruang Hilbert grap tersebut adalah produk dari  $\mathcal{H}_l$ , yaitu:

$$\mathcal{H}_\Gamma = L_2[SU(2)^L, d\mu_{Haar}] = \bigotimes_l^L \mathcal{H}_l = \bigotimes_l^L \bigoplus^{j_l} (\mathcal{H}_{j_l} \otimes \mathcal{H}_{j_l}^*) \quad (265)$$

Dan basis dapat pula direpresentasikan untuk  $n$  yang tidak terhubung ( $n$  non-connected), yaitu:

$$\begin{array}{c} \text{---} j_1 \\ \vdots \\ \text{---} j_n \end{array} = \bigotimes_{l=1}^n |j_l, m_l, n_l\rangle$$

(Sumber: [])

$\otimes |j_l, m_l, n_l\rangle$  menunjukkan basis dari representasi matrik untuk fungsi gelombang  $\psi_{(\Gamma, \psi)}[A] \in \mathcal{H}_\Gamma$ . Bila diuraikan basis elemen  $|j_l, m_l, n_l\rangle$  pada grap, yaitu:

$$\langle A | \Gamma: j_l, m_l, n_l \rangle \equiv D_{m_l n_l}^{(j_l)}(h_l) \cdots D_{m_1 n_1}^{(j_1)}(h_1) \quad (266)$$

Dan fungsi  $\psi_{(\Gamma, \psi)}[A] \in \mathcal{H}_\Gamma$  untuk grap  $\Gamma$  dengan sejumlah  $\mathcal{N}$  node dan  $\mathcal{L}$  link dapat diuraikan menjadi dalam representasi holonomi:

$$\begin{aligned} \psi_{(\Gamma, \psi)}[A] &= \psi_{(\Gamma, f)}(h_1[A], \dots, h_\mathcal{L}[A]) = \sum_{j_l, m_l, n_l} \psi_{m_1, \dots, m_\mathcal{L}, n_1, \dots, n_\mathcal{L}}^{j_1, \dots, j_\mathcal{L}} D_{m_1 n_1}^{(j_1)}(h_1[A]) \cdots D_{m_\mathcal{L} n_\mathcal{L}}^{(j_\mathcal{L})}(h_\mathcal{L}[A]) \\ \psi_{(\Gamma, \psi)}(h_1[A], \dots, h_\mathcal{L}[A]) &= \sum_{j_l, m_l, n_l} \psi_{m_1, \dots, m_\mathcal{L}, n_1, \dots, n_\mathcal{L}}^{j_1, \dots, j_\mathcal{L}} \prod_l D_{m_l n_l}^{(j_l)}(h_l[A]) \end{aligned} \quad (267)$$

Dan dalam representasi basis  $|\psi_{(\Gamma, f)}\rangle \in \mathcal{H}_\Gamma$  dituliskan:

$$\begin{aligned} |\psi_{(\Gamma, \psi)}\rangle &= \prod_l dh_l \langle \otimes^l h_{l_1}[A] | \psi \rangle | \otimes^l h_{l_1}[A] \rangle \\ &= \prod_l dh_l \psi_{(\Gamma, \psi)}(h_1[A], \dots, h_\mathcal{L}[A]) | \otimes^l h_{l_1}[A] \rangle \end{aligned} \quad (268)$$

Menggunakan syarat completeness dan orthogonalitas  $|j_l, m_l, n_l\rangle = |j_l, m_l\rangle \langle j_l, n_l|$ , kita dapat tuliskan  $\psi_{(\Gamma, \psi)}(h_1[A], \dots, h_\mathcal{L}[A])$  sebagai kombinasi linier dari representasi irreducible SU(2), yaitu:

$$\psi_{(\Gamma, \psi)}(h_1[A], \dots, h_\mathcal{L}[A]) = \sum_{j_l, m_l, n_l} \langle \otimes^l h_{l_1}[A] | \otimes_{j_l, m_l, n_l} \rangle \langle \otimes_{j_l, m_l, n_l} | f \rangle \quad (269)$$

Dengan bentuk basis di atas sama dengan formulasi yang telah didapat sebelumnya:

$$\psi_{(\Gamma, \psi)}(h_1[A], \dots, h_\mathcal{L}[A]) = \sum_{j_l, m_l, n_l} \psi_{m_1, \dots, m_\mathcal{L}, n_1, \dots, n_\mathcal{L}}^{j_1, \dots, j_\mathcal{L}} \prod_l D_{m_l n_l}^{(j_l)}(h_l[A]) \quad (270)$$

Yang merupakan basis keadaan (state basis) untuk variabel konjugat  $(h_l, E_l^i)$  dalam formulasi holonomy flux-algebra. Dapat kita ambil contoh untuk representasi paling sederhana holonomi dalam bentuk matrik Wigner:  $h_l \equiv D^{(\frac{1}{2})}(h_e)$  dan ketika dikenakan pada operator holonomi (generasilasi dari operator koneksi), maka didapat:

$$\hat{h}_\gamma[A] h_l[A] = h_\gamma[A] h_l[A] \quad (271)$$

Untuk selanjutnya basis keadaan  $\psi_{(\Gamma,f)}[A]$  ini akan kita gunakan dalam mendefinisikan operator-operator geometri di level kuantum, seperti operator panjang, volume, dan luas yang memiliki spektrum yang sepenuhnya diskrit.

### *Loop States and the loop transform*

Sekarang kita akan ambil contoh dari berhingganya norm keadaan (state) dari grap dan fungsi silindrikal halus SU(2)  $(\Gamma, f) = (\alpha, \text{tr})$ . Dimana grap  $\Gamma$  membentuk kurva tertutup  $\alpha$  atau sebuah loop dan  $f$  adalah trace function dari grup SU(2). Keadaan dapat dituliskan sebagai  $\Psi_\alpha$  atau dituliskan  $|\alpha\rangle$ :

$$\Psi_\alpha[A] = \Psi_{\alpha, \text{tr}}[A] = \langle A | \alpha \rangle = \text{tr } h(A, \alpha) = \text{tr } P e^{\oint_\alpha A} \quad (272)$$

Bentuk di atas merupakan kasus paling khusus dari keadaan yang terjadi pada quantum gravity dan merupakan basis yang memotivasi lahirnya LQG dan asal nama Loop di awalnya. Norm dari keadaan di atas, kita gunakan  $\langle \psi_{(\Gamma,f)} | \psi_{(\Gamma,f')} \rangle$  sebelumnya, sehingga

$$|\Psi_\alpha|^2 = \int dh_\alpha \overline{\psi(h_\alpha[A])} \psi'(h_\alpha[A]) = \int dh_\alpha |h_\alpha|^2 = 1 \quad (273)$$

Untuk loop lebih dari satu/multiloop:  $[\alpha] = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  dari berhingga  $n$  yang memungkinkan loop “tumpang tindih”, maka keadaan dapat dituliskan:

$$\Psi_\alpha[A] = \Psi_{\alpha_1}[A] \dots \Psi_{\alpha_n}[A] = \text{tr } h(A, \alpha_1) \dots \text{tr } h(A, \alpha_n) \quad (274)$$

Fungsional untuk basis loop space:

$$\Psi[\alpha] = \langle \Psi_\alpha | \Psi \rangle \quad (275)$$

Yang dikenal sebagai loop transform dari keadaan  $\psi[A]$ . Fungsional  $\Psi[\alpha]$  merepresentasikan keadaan kuantum sebagai fungsional dari ruang loop. Menggunakan pengukuran Haar/Ashtekar-Lewandowski:  $d\mu_{AL}$ , maka loop space dapat dituliskan:

$$\Psi[\alpha] = \int d\mu_{AL} \text{tr } P e^{\oint_\alpha A} \psi[A] \quad (276)$$

Secara intuitif ini mirip dengan transformasi Fourier dari ruang fasa  $A$  ke ruang fase  $\alpha$ .

### 2.5.2 Ruang Hilbert Kinematik ( $\mathcal{H}_{kin}^0$ ) dan Kendala Gauss: *Gauge-invariant Hilbert space*

Ruang Hilbert sebelumnya ( $\mathcal{H}_{kin}$ ) yang merupakan ruang Hilbert dengan anggota/states ( $\psi[A]$ ) yang invariant terhadap grup SU(2). Selanjutnya disini kita akan membangun ruang Hilbert baru yang memasukkan pula kendala Gauss yang telah dipromosikan menjadi kendala kuantum Gauss, dimana kendala yang dikenai kendala kuantum Gauss akan memenuhi:  $\hat{G}_i\psi[A] = 0$ . Hal ini memberikan simetri baru bagi ruang Hilbert  $\mathcal{H}_{kin}^0$ , yaitu local gauge invariance kendala. Ruang Hilbert baru ini dikenal sebagai  $\mathcal{H}_{kin}^0$  dimana subindeks *kin* menunjukkan bahwa ruang Hilbert ini belum lengkap dan agar diingat bahwa masih ada kendala yang perlu dipecahkan sebelum mencapai. Akan tetapi apakah ruang Hilbert  $\mathcal{H}_{kin}^0$  dengan kendala Gauss ini beririsan dengan ruang Hilbert yang memasukan kendala Hamiltonian dan diffeomorfisme masih merupakan open problem.

Dalam ruang Hilbert  $\mathcal{H}_{kin}^0$ , basis state dikenal sebagai spin-network. Aksi kendala Gauss direpresentasikan pada ruang Hilbert sbelumnya  $\mathcal{H}_{kin}$  adalah dengan cara mentransformasikan holonomi terhadap transformasi gauge (*local gauge invariance*):

$$h_l \rightarrow h'_l = \hat{U}_G h_l = g_{s(l)} h_l g_{t(l)}^{-1} \quad (277)$$

Sama pula representasi  $j$ , maka:

$$D^{(j)}(h_l) \rightarrow D^{(j)}(h'_l) = D^{(j)}(g_{s(l)} h_l g_{t(l)}^{-1}) = D^{(j)}(g_{s(l)}) D^{(j)}(h_l) D^{(j)}(g_{t(l)}^{-1}) \quad (278)$$

Darisini transformasi gauge yang bekerja pada sumber dan target pada link dikenal sebagai node dari sebuah grap. Dengan mensyaratkan keinvarianan gauge ini pada fungsi silindrikal maka keinvarianan ini bekerja pula pada nodes, yaitu:

$$\psi_{(\Gamma,\psi)}(h_1[A], \dots, h_l[A]) = \psi_{(\Gamma,\psi)}(g_{s_1} h_1[A] g_{t_1}^{-1}, \dots, g_{s_l} h_l[A] g_{t_l}^{-1}) \quad (279)$$

Sifat di atas dapat pula diimplementasikan secara langsung dalam formulasi group averaging:

Dimana  $\psi_{(\Gamma,\psi)} \in Cyl_\Gamma$ , yaitu:

$$\psi_{(\Gamma,\psi)}(h_1[A], \dots, h_l[A]) \equiv \int \prod_n d g_n \psi_{(\Gamma,\psi)}(g_{s_1} h_1[A] g_{t_1}^{-1}, \dots, g_{s_l} h_l[A] g_{t_l}^{-1}) \quad (280)$$

Untuk melengkapi pembahasan disini, kita akan tunjukkan bahwa dengan mensyaratkan kendala Gauss:  $\hat{G}_i\psi[A] = 0$  atau dalam bentuk differensial form, yaitu:

$$\hat{G}_i = \mathcal{D}_a \hat{E}_i^a = 0 \quad (281)$$

Dengan  $\mathcal{D}_a \hat{E}_i^a$ , berdasarkan teorema Stokes adalah

$$\int_{\Sigma} \mathcal{D}_a \hat{E}_i^a = \int_{\partial\Sigma} \hat{E}_i = 0 \quad (282)$$

Untuk kasus 4 dimensi Lorentzian maka untuk  $\int_{\Sigma} \mathcal{D}_a \hat{E}_i^a$  menyatakan integrasi terhadap permukaan spasial 3 dimensi dan  $\int_{\partial\Sigma} \hat{E}_i$  menyatakan integrasi terhadap boundary sehingga merupakan integrasi 2 dimensi. Dalam bentuk diskrit integral di atas dapat digantikan menjadi penjumlahan, yaitu:

$$\hat{G}_i = \int_{\partial\Sigma} \hat{E}_i = \lim_{a_l \rightarrow 0} \sum_{a_l \subset \partial\Sigma} \hat{E}_i^l(S) = 0 \quad (283)$$

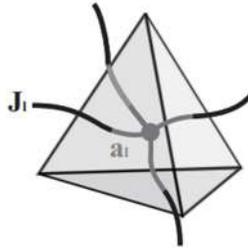
Dengan  $a_l$  merupakan luas tiap potongan di bidang permukaan. Karena  $a_l$  bernilai sembarang dan dapat didefinisikan sebagai regulator sehingga untuk mencegah sifat singular maka  $a_l$  dilarang  $a_l \rightarrow 0$ , sehingga regulasi kendala Gauss menjadi:

$$\hat{G}_i = \sum_l \hat{E}_i^l = 0 \quad (284)$$

Dan menggunakan  $\hat{E}_i \psi[A] = \vec{J}_i \psi[A]$  sebelumnya, maka:

$$\hat{G}_i |\psi_{(\Gamma, f)}\rangle = \sum_l \hat{E}_i^l |\psi_{(\Gamma, \psi)}\rangle = \sum_l \hat{J}_i^l |\psi_{(\Gamma, \psi)}\rangle = 0 \quad (285)$$

Dengan indeks  $l$  menggambarkan link dari area  $a_l$ . Persamaan terakhir di atas dapat diinterpretasikan sebagai operator kuantum dari kendala Gauss untuk suatu polihedron, dimana  $J_i^l$  berhubungan dengan yang tertutup  $a_l$  dalam polihedron, seperti ditunjukkan oleh gambar di bawah:



Sebuah tetrahedron kuantum (Sumber: [5])

Dapat kita pilih sebuah graf  $|\mathcal{L}|$ -valen sederhana, yaitu, graf yang hanya berisi satu simpul  $n$  dengan  $|\mathcal{L}|$ -link  $l = 1, \dots, |\mathcal{L}|$ , yang menunjuk keluar dari  $n$ , sehingga persamaan sebelumnya menjadi:

$$\hat{G}_i |\psi_{(\Gamma, \psi)}\rangle = \sum_l^n \hat{J}_i^l |\psi_{(\Gamma, \psi)}\rangle = \hat{J}_i^{1\dots n} |\psi_{(\Gamma, \psi)}\rangle = 0 \quad (286)$$

Dengan nilai eigen dapat ditentukan, yaitu:

$$\hat{J}_i^{1\dots n} |\psi_{(\Gamma, \psi)}\rangle = 0 \quad (287)$$

Dimana total spin dan bilangan kuantu magnetik  $j_{1\dots n} = 0$  dan  $m_{1\dots n} = 0$  ( $m_{1\dots n} = 0$  dapat terjadi karena  $-j \leq m \leq j$ ). Dengan keadaan  $|\psi_{(\Gamma, f)}\rangle \in \mathcal{H}_\Gamma$  yang memenuhi  $\hat{J}_i^{1\dots n} |\psi_{(\Gamma, f)}\rangle = 0$  dan secara otomatis memenuhi kendala kuantum Gauss. Sehingga dapat kita tuliskan ruang Hilbert kinematik:

$$\mathcal{H}_{kin}^0 \subset \mathcal{H}_{kin}, \quad \mathcal{H}_{kin}^0 \sim L_2[SU(U)^{|\mathcal{L}|}/SU(U)^{|\mathcal{N}|}] \quad (288)$$

Yang merupakan subruang invariant  $\mathcal{H}$  yang memenuhi kendala kuantum Gauss di setiap node dan menjadi ruang dengan anggota basis yang memenuhi  $\mathcal{H}_{kin}^0$ . Basis ini disebut basis spin network, yang akan bahas lebih detail sebagai berikut:

### 2.5.3 Kendala Kuantum Gauss dalam basis Holonomi: *Group averaging procedure*

Konstruksi operator kuantum Gauss terbukti memiliki interpretasi geometri yang jelas. Meskipun demikian, suatu deduksi formal pada keadaan/state yang memenuhi kendala Gauss menggunakan prosedur dari *Lattice Gauge Theory*, yaitu, *group averaging procedure*. Berdasarkan formulasi klasik untuk kendala Gauss:  $\mathcal{D}_a \tilde{E}_i^a = \partial_a \tilde{E}_i^a + \varepsilon_{ijk} A_a^j \tilde{E}^{ak}$  (148), yang merupakan generator infinitesimal transformasi gauge SU(2).

Transformasi gauge yang bekerja pada holonomi mengikuti:

$$h_{\gamma=l}[A] \rightarrow h'_{\gamma=l}[A] = U_l(\gamma(s)) h_{\gamma=l}[A] U_l^{-1}(\gamma(t)) \quad (289)$$

Dengan  $s$  menyatakan sumber dari lintasan  $\gamma = l$  dan  $t$  adalah target/titik akhir dari lintasan  $\gamma$  ( $s$  dan  $t$  secara jelas merupakan node dari grap  $\Gamma$ ). Dalam representasi matrik, maka transformasi gauge di atas menjadi:

$$D_{mn}^{(j)}(h_l[A]) \rightarrow D_{mn}^{(j)}(h'_l[A]) = D_{ma}^{(j)}(U_l(\gamma(s))) D_b^{(j)a}(h_l[A]) D_n^{(j)b}(U_t^{-1}(\gamma(t))) \quad (290)$$

Untuk setiap fungsi gelombang  $\psi_{(\Gamma,f)}(h_\gamma[A]) \in \mathcal{H}$  dapat dituliskan sebagai kombinasi linier dari produk representasi matrik irreducible SU(2) seperti ditunjukkan sebelumnya:

$$\psi_{(\Gamma,\psi)}(h_{l_1}[A], \dots, h_{l_L}[A]) = \sum_{j_l, m_l, n_l} \langle \otimes^l h_{l_1}[A] | \otimes_{l,j_l, m_l, n_l} \rangle \langle \otimes_{l,j_l, m_l, n_l} | f \rangle \quad (291)$$

$$\psi_{(\Gamma,\psi)}(h_{l_1}[A], \dots, h_{l_L}[A]) = \sum_{j_l, m_l, n_l} \psi_{m_1, \dots, m_l, n_1, \dots, n_l}^{j_1, \dots, j_l} \prod_l D_{m_l n_l}^{(j_l)}(h_l[A]) \quad (292)$$

Dapat kita peroleh fungsi gelombang  $\psi_{inv(\Gamma,f)}(h_\gamma[A]) \in \mathcal{H}_{kin}^0 \subset \mathcal{H}_{kin}$  dan mengikuti kondisi berikut:

$$\begin{aligned} & \psi_{(\Gamma,\psi)}(h_{l_1}[A], \dots, h_{l_L}[A]) \\ &= \psi_{(\Gamma,f)}(U_{l_1}(\gamma(s))h_{l_1}[A]U_{l_1}^{-1}(\gamma(t)), \dots, U_{l_L}(\gamma(s))h_{l_L}[A]U_{l_L}^{-1}(\gamma(t))) \end{aligned} \quad (293)$$

Yang berarti fungsi gelombang invariant terhadap transformasi gauge SU(2). Selanjutnya kita tinjau:

$$\psi_{inv(\Gamma,\psi)}(h_{l_1}[A], \dots, h_{l_L}[A]) = \sum_{j_l, m_l, n_l} \psi_{m_1, \dots, m_l, n_1, \dots, n_l}^{j_1, \dots, j_l} \left( \prod_l D_{m_l n_l}^{(j_l)}(h_l[A]) \right)_{inv} \quad (294)$$

Kita fokus pada bagian:

$$\prod_l D_{m_l n_l}^{(j_l)}(h_l[A]) = \prod_{n \in \Gamma} \prod_{\substack{l \in \Gamma \\ (n \cap l \neq \tilde{A})}} D_{m_l n_l}^{(j_l)}(h_l[A]) \quad (295)$$

Transformasi gauge bekerja pada node. Oleh karena itu, jika untuk sebuah node dimana seluruh link keluar darinya, maka transformasi gauge di sumber node s sebagai setengah rotasi matriknya, yaitu pada indeks pertama holonomi:

$$\prod_l D_{m_l n_l}^{(j_l)}(h_l[A]) = \prod_{\substack{l \in \Gamma \\ (n \cap l \neq \tilde{A})}} D_{m_l a}^{(j_l)}(h_l(\gamma(s))) D_{n_l}^{(j_l)a}(h_l[A]) \quad (296)$$

Karena sifat keinvarianan di node, maka transformasi gauge memberikan:

$$\begin{aligned} \prod_l D_{m_l n_l}^{(j_l)}(h'_l[A]) \Big|_n &= \prod_{\substack{l \in \Gamma \\ (n \cap l \neq \tilde{A})}} D_{m_l a}^{(j_l)}(h_l(\gamma(s))) D_{n_l}^{(j_l)a}(h_l[A]) \\ &\equiv \prod_{\substack{l \in \Gamma \\ (n \cap l \neq \tilde{A})}} D_{m_l n_l}^{(j_l)}(h_l[A]) \Big|_n \end{aligned} \quad (297)$$

Dengan menggunakan group average procedure atau prosedur perataan matrik dengan pengukuran  $i$  berupa matrik, maka hasil di atas dituliskan kembali menjadi:

$$\begin{aligned} \left( \prod_l D_{m_l n_l}^{(j_l)}(h'_l[A]) \Big|_n \right)_{inv} &= \left( \prod_{\substack{l \in \Gamma \\ (n \cap l \neq \tilde{A})}} D_{m_l n_l}^{(j_l)}(h_l[A]) \Big|_n \right)_{inv} \\ &= \sum_{\alpha_l \beta_l} i_{m_l n_l}^{\alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_l \beta_l} \prod_{\substack{l \in \Gamma \\ (n \cap l \neq \tilde{A})}} D_{\alpha_l \beta_l}^{(j_l)}(h_l[A]) \Big|_n \end{aligned} \quad (298)$$

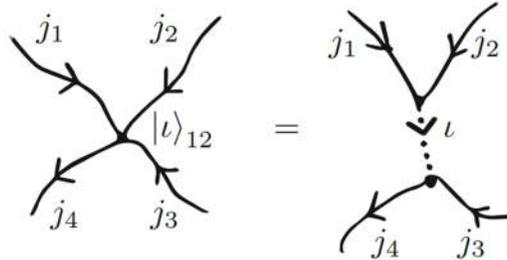
Dengan cara yang sama untuk transformasi gauge pada node target, digambarkan oleh aksi  $U_{l_\ell}^{-1}(\gamma(t))$ . Sehingga kita dapatkan hasil sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \left( \prod_l D_{m_l n_l}^{(j_l)}(h'_l[A]) \Big|_n \right)_{inv} &= \prod_{n \in \Gamma} \left( \prod_{\substack{l \in \Gamma \\ (n \cap l \neq \tilde{A})}} D_{m_l n_l}^{(j_l)}(h_l[A]) \Big|_n \right)_{inv} \\ &= \sum_{\alpha_l \beta_l} \prod_{n \in \Gamma} i_{m_l n_l}^{\alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_l \beta_l} \prod_{\substack{l \in \Gamma \\ (n \cap l \neq \tilde{A})}} D_{\alpha_l \beta_l}^{(j_l)}(h_l[A]) \Big|_n \end{aligned} \quad (299)$$

Dengan memasukkan hasil di atas ke dalam state/keadaan spin network, diperoleh:

$$\begin{aligned} \psi_{inv(\Gamma, \psi)}(h_{l_1}[A], \dots, h_{l_\ell}[A]) &= \sum_{j_l, m_l, n_l} \psi_{m_1, \dots, m_l, n_1, \dots, n_l}^{j_1, \dots, j_l} \sum_{\alpha_l \beta_l} \prod_{n \in \Gamma} i_{m_l n_l}^{\alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_l \beta_l} \prod_{\substack{l \in \Gamma \\ (n \cap l \neq \tilde{A})}} D_{\alpha_l \beta_l}^{(j_l)}(h_l[A]) \Big|_n \end{aligned} \quad (300)$$

Dengan kuantitas  $i$  dikenal sebagai intertwiner yang didefinisikan sebagai kontraksi koefisien Clebsh-Gordan ternormalisasi atau 3j Wigner symbol. Dapat diilustrasikan sebagai berikut dalam 4 valent graph:



(Sumber: [10])

Dimana spin intertwiner memenuhi  $i \in \{\max(|j_1 - j_2|, |j_3 - j_4|), \dots, \min(j_1 + j_2, j_3 + j_4)\}$  yang diparameterisasi oleh basis intertwiner:

$$|j\rangle_{12} = \sum_{m_1, m_2, m_3, m_4} \sqrt{2j+1} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 & j_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \end{pmatrix}^j \bigotimes_{k=1}^4 |j_k, m_k\rangle \quad (301)$$

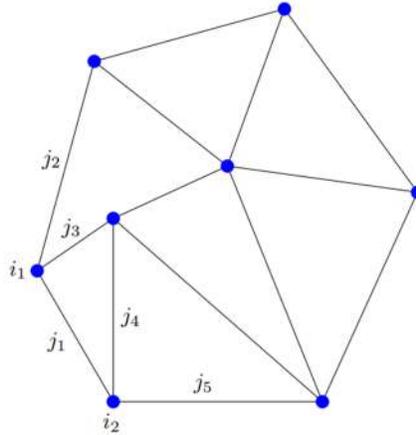
Dengan  $j \in \{\max(|j_1 - j_2|, |j_3 - j_4|), \dots, \min(j_1 + j_2, j_3 + j_4)\}$  dan  $\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 & j_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \end{pmatrix}$  merupakan matrik 4-  $jm$  Wigner. Lebih detail akan ditunjukkan pada Lampiran E. State/keadaan spin network yang memenuhi kendala kuantum Gauss secara kompak dapat dituliskan:

$$\psi_{(\Gamma, j_l, i_n)}(h_{l_1}[A], \dots, h_{l_L}[A]) = \bigotimes_n i_n \bigotimes_l D^{(j_l)} \quad (302)$$

Atau dalam bentuk basis:

$$\psi_{inv(\Gamma, j_l, i_n)}(h_{l_1}[A], \dots, h_{l_L}[A]) = \left\langle \bigotimes_n i_{(n)} \left| \bigotimes_l D^{(j_l)} \right\rangle_{\Gamma} \quad (304)$$

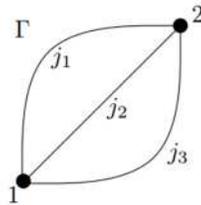
Dengan indeks  $n$  dan  $l$  menunjukkan jumlah node dan link dalam grap  $\Gamma$ . Spin network dapat diilustrasikan sebagai hubungan antara grap dengan colouring  $j_i$  digambarkan sebagai berikut:



Keadaan spin network membentuk basis bagi ruang Hilbert kinematik  $\mathcal{H}_{kin}^0$ . (Sumber: [11])

*Example: The theta graph*

Sebagai contoh untuk menentukan state spin network kita ambil kasus sederhana yaitu: *The theta graph*. Tinjaulah sebuah grap berikut yang merupakan kopling 3 buah link dengan 2 buah node:



Karena penjumlahan 3 buah link adalah nol maka resultan merea adalah sebuah node. Sehingga ruang Hilbert  $\mathcal{H}_{kin}^0$  merupakan bagian singlet dari ruang Hilber  $\mathcal{H}$ . Sehingga apabila dilakukan kopling 3 link tersebut, maka didapatkan ruang Hilbert:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{j_1} \otimes \mathcal{H}_{j_2} \otimes \mathcal{H}_{j_3} = \bigoplus_{|j = j_{12} - j_3|}^{j_{12} + j_3} \mathcal{H}_{j_l} \quad (305)$$

Ruang Hilbert di atas yang diambil hanya bagian dengan  $j = 0$ , yakni agar  $j_{12} = j_3$ . Sebagai contoh bila  $j_1 = \frac{1}{2}$  dan  $j_2 = \frac{1}{2}$  maka  $0 \leq j_{12} \leq 1$ . Agar state memenuhi kendala kuantum Gauss maka nilai  $j_3$  yang diperbolehkan juga berada pada rentang tersebut. Tetapi karena nilai  $j$  ini merepresentasikan panjang segmen dari segitiga maka nilai  $j_i \neq 0$  sehingga untuk kasus di atas hanya nilai  $j_3 = 1$  yang diperbolehkan.

Bila ketiga link bertemu pada ujung  $m_1, m_2$ , dan  $m_3$  maka kita dapat tuliskan state kopling ketiga link adalah  $\oplus$ , yaitu:

$$|\psi_{(\Gamma,\psi)}\rangle \equiv |j_1, j_2, j_3; j_{12} = j_3, j = 0, m = 0; n_1, n_2, n_3\rangle \quad (306)$$

Basis di atas dapat dituliskan ulang sebagai basis  $\otimes$  oleh koefisien Clebsch-Gordan:

$$\begin{aligned} & |\psi_{(\Gamma,\psi)}\rangle \\ &= \sum_{m_1 m_2 m_3} \langle j_1, j_2, j_3; m_1 m_2 m_3 | j_1, j_2, j_3, j_{12}, j = 0, m = 0 \rangle |j_1, m_1, n_1\rangle \otimes |j_2, m_2, n_2\rangle \otimes |j_3, m_3, n_3\rangle \end{aligned} \quad (307)$$

Dimana didefinisikan intertwiner  $i^{m_1 m_2 m_3}$  dalam representasi koefisien Clebsch-Gordan atau Wigner 3j-symbol, yaitu:

$$\begin{aligned} i^{m_1 m_2 m_3} i^{m_1 m_2 m_3} &= \langle j_1, j_2, j_3; m_1 m_2 m_3 | j_1, j_2, j_3, j_{12}, j = 0, m = 0 \rangle \\ &= \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (308)$$

Sehingga state di atas menjadi:

$$\begin{aligned} |\psi_{(\Gamma,\psi)}\rangle &= \sum_{m_1 m_2 m_3} i^{m_1 m_2 m_3} i^{m_1 m_2 m_3} |j_1, m_1, n_1\rangle \otimes |j_2, m_2, n_2\rangle \otimes |j_3, m_3, n_3\rangle \\ |\psi_{(\Gamma,\psi)}\rangle &= \sum_{m_1 m_2 m_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \overline{\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix}} |j_1, m_1, n_1\rangle \otimes |j_2, m_2, n_2\rangle \otimes |j_3, m_3, n_3\rangle \end{aligned} \quad (309)$$

Atau

$$\psi_{(\Gamma,\psi)} = i_1^{m_1 m_2 m_3} \overline{i_2^{n_1 n_2 n_3}} D_{m_1 n_1}^{(j_1)}(h_1[A]) D_{m_2 n_2}^{(j_2)}(h_2[A]) D_{m_3 n_3}^{(j_3)}(h_3[A]) \quad (310)$$

Intertwiner menyatakan sebuah node, sehingga untuk basis  $|\psi_{(\Gamma,\psi)}\rangle$  di atas merupakan state kasus theta grap memiliki 2 buah node dan memiliki 3 buah link.

Bila terdapat  $\mathcal{N}$  buah node dan  $\mathcal{L}$  buah link, maka didapatkan state total untuk kasus trivalen seperti ditunjukkan sebelumnya yaitu merupakan produk dari masing-masing individu state:

$$\psi_{(\Gamma,\psi)} = \left\langle \otimes_{i(n)}^n \left| \otimes_{i(l)}^l D^{(j_l)} \right\rangle_{\Gamma} = \psi_{n_1 \dots n_{\mathcal{L}}}^{j_1 \dots j_{\mathcal{L}}} i_1^{m_1 m_2 m_3} \dots i_{\mathcal{N}}^{m_{\mathcal{L}-2} m_{\mathcal{L}-1} m_{\mathcal{L}}} D_{m_1 n_1}^{(j_1)} \dots D_{m_{\mathcal{L}} n_{\mathcal{L}}}^{(j_{\mathcal{L}})} \quad (311)$$

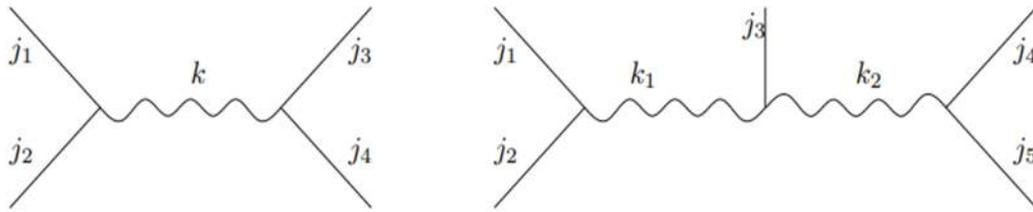
Dan untuk kasus four-valent yang merupakan kasus 4 dimensi Lorentzian, maka:

$$\psi_{(\Gamma, \psi)} = \left\langle \bigotimes_{n_1 \dots n_\ell} i_{(n)} \middle| \bigotimes_{l_1 \dots l_\ell} D^{(j_l)} \right\rangle_{\Gamma} \quad (312)$$

$$= \psi_{n_1 \dots n_\ell}^{j_1 \dots j_\ell} i_1^{m_1 m_2 m_3 m_4} \dots i_N^{m_{\ell-3} m_{\ell-2} m_{\ell-1} m_\ell} D_{m_1 n_1}^{(j_1)} \dots D_{m_\ell n_\ell}^{(j_\ell)}$$

Jika kasus yang ditinjau adalah 4 dimensi Lorentzian, maka yang digunakan 6j Wigner symbol. Untuk lebih detail mengenai teori kopling SU(2) dan representasi Wigner simbol dapat dilihat pada Lampiran E.

Selain itu, intertwiners dapat direpresentasikan sebagai penjumlahan minimal 2 representasi irreducible, sehingga minimal  $n = 2$ , seperti saat ini ditelaah. Untuk kasus  $n = 4$  dan  $n = 5$ , maka grap digambarkan:



Dengan virtual spin  $k_i$  menunjukkan intertwiners. (Sumber: [11])

Dapat dirangkumkan bahwa state spin network:

$$\psi_{(\Gamma, \psi)} = \left\langle \bigotimes_{n_1 \dots n_\ell} i_{(n)} \middle| \bigotimes_{l_1 \dots l_\ell} D^{(j_l)} \right\rangle_{\Gamma} \quad (313)$$

Membentuk basis untuk ruang Hilbert sebagai solusi dari kendala kuantum Gauss, yaitu:  $\mathcal{H}_{kin}^0$ . Struktur dari ruang ini dibentuk oleh basis spin network: grap yang berbeda  $\Gamma$  akan memiliki subruang orthogonal yang berbeda pula, sehingga  $\mathcal{H}_{kin}^0$  dapat diuraikan sebagai penjumlahan langsung ruang untuk grap yang telah tetap:

$$\mathcal{H}_{kin}^0 \subset \mathcal{H}_{kin}, \quad \mathcal{H}_{kin}^0 = \bigoplus_{\Gamma \subset \Sigma} \mathcal{H}_{\Gamma} \quad (314)$$

Dengan  $\mathcal{H}_{\Gamma}$  merupakan ruang Hilbert untuk grap yang telah tetap merupakan penjumlahan ruang untuk intertwiner:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_\Gamma &= L_2[SU(U)^{|\mathcal{L}|}/SU(U)^{|\mathcal{N}|}, d\mu_{Haar}] = \bigotimes_l^L \mathcal{H}_l & (315) \\
&= \bigotimes_l^L \bigoplus_{j_l} (\mathcal{H}_{j_l} \otimes \mathcal{H}_{j_l}^*)
\end{aligned}$$

2 persamaan di atas (314) – (315) merupakan analogi dari loop gravity yang setara dengan formulasi dekomposisi ruang Fock yang tersusun dari ruang Hilbert untuk medan bebas yang terdiri dari n-partikel state di ruang Minkowski. Kedua merupakan formulasi yang secara fundamental setara.

#### 2.5.4 Spin-network states: Membangun state untuk spin-network

Interpretasi grafik untuk spin network lebih jelas dalam basis representasi matrik  $|j_l, m_l, n_l\rangle$  dibandingkan basis holonomi  $|h_l(A)\rangle$ . Langkah-langkah untuk membangun states bagi spin network adalah sebagai berikut:

- (i) Jika terdapat grap yang saling terhubung  $\Gamma$ , dengan sejumlah link  $|\mathcal{L}|$  dan sejumlah node  $|\mathcal{N}|$ , maka ruang Hilbert dalam representasi Ashtekar-Lewandowski dibangun sebagai penjumlahan langsung (direct product) dari ruang Hilbert untuk link yang memenuhi:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_\Gamma &= L_2[SU(U)^{|\mathcal{L}|}/SU(U)^{|\mathcal{N}|}, d\mu_{Haar}] = \bigotimes_l^L \mathcal{H}_l & (316) \\
&= \bigotimes_l^L \bigoplus_{j_l} (\mathcal{H}_{j_l} \otimes \mathcal{H}_{j_l}^*)
\end{aligned}$$

Fungsional basis dari ruang di atas adalah  $\otimes |j_l, m_l, n_l\rangle$  berdasarkan teorema Peter-Weyl. Kita sebut ini basis perkalian- $\otimes$ .

- (ii) Pada masing-masing node, setengah bagian basis dapat dituliskan:  $|j_l, m_l, n_l\rangle = |j_l, m_l\rangle \langle j_l, n_l|$ , dengan  $|j_l, m_l\rangle$  atau  $\langle j_l, n_l|$  bergantung pada grap yang ditinjau dan bertransformasi sebagai basis penjumlahan- $\oplus$  dan ini berarti menjumlahkan setengah spin pada node. Ruang Hilbert yang memenuhi adalah  $\otimes^j \mathcal{H}_j = \bigoplus_{j_{min}}^{j_{max}} \mathcal{H}$ . Transformasi komponen matrik adalah koefisien Clebsh-Gordan atau secara umum koefisien kopling yang disebut  $i_{CG}$ . Ini merupakan basis penjumlahan- $\oplus$  untuk ruang Hilbert di (i).

- (iii) Implementasi kendala kuantum Gauss terjadi pada masing-masing node, oleh karena itu ini mensyaratkan total spin untuk masing-masing node memenuhi:

$$\hat{G}_i |\psi_{(\Gamma, \psi)}\rangle = \sum_l^n \hat{J}_i^l |\psi_{(\Gamma, \psi)}\rangle = \hat{J}_i^{1\dots n} |\psi_{(\Gamma, \psi)}\rangle = 0 \quad (317)$$

Ruang Hilbert yang dipilih biasanya adalah sebuah singlet  $\mathcal{H}_{j_{min}} = \mathcal{H}_0$  (jika mereka eksis). Ini memberikan kondisi koefisien kopling yang setara dengan intertwiner:  $i_{CG} = i$ . Basis singlet dari penjumlahan- $\oplus$  basis adalah basis spin network.

- (iv) Setiap state/keadaan spin network secara umum merupakan kombinasi linier dari basis spin network:

$$\begin{aligned} \psi_{inv(\Gamma, \psi)}(h_{l_1}[A], \dots, h_{l_L}[A]) \\ = \sum_{j_l, m_l, n_l} \psi_{m_1, \dots, m_l, n_1, \dots, n_l}^{j_1, \dots, j_l} \sum_{\alpha_l \beta_l} \prod_{n \in \Gamma} i_{m_l n_l}^{\alpha_l \beta_l} \prod_{\substack{l \in \Gamma \\ (n \cap l \neq \tilde{A})}} D_{\alpha_l \beta_l}^{(j_l)}(h_l[A]) \Big|_n \end{aligned} \quad (318)$$

Atau secara kompak dituliskan:

$$\psi_{(\Gamma, j_l, i_n)}(h_{l_1}[A], \dots, h_{l_L}[A]) = \bigotimes_n i_n \bigotimes_l D^{(j_l)} \quad (319)$$

Dan dalam bentuk basis:

$$\psi_{inv(\Gamma, j_l, i_n)}(h_{l_1}[A], \dots, h_{l_L}[A]) = \left\langle \bigotimes_n i_{(n)} \Big| \bigotimes_l D^{(j_l)} \right\rangle_{\Gamma} \quad (320)$$

Mengacu referensi [36], state spin network atau fungsional spin network dapat dirumuskan sebagai berikut:

- (i) Untuk setiap lintasan dengan link  $l$  yang direpresentasikan oleh matrik Wigner

$$n_l \xrightarrow{j_l} m_l \cong D_{m_l n_l}^{j_l}$$

Dengan indeks  $m_l$  atau  $n_l$ , bergantung dengan orientasi dan variable  $h_l \in SU(2)$ .

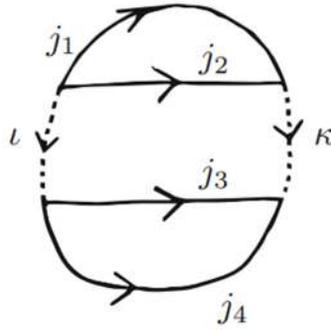
- (ii) Untuk setiap node terkait intertwiner, representasikan ke dalam matrik 4- $jm$  Wigner, yaitu:

$$\cong (-1)^{j_4 - n_4} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 & j_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & -n_4 \end{pmatrix}$$

Dengan indeks  $-n$  dan fase  $(-1)^{j-n}$  menunjukkan link yang keluar (outgoing links)

(iii) Terakhir, kalikan semua bersama-sama, dan jumlahkan atas semua indeks magnetik.

Dan diperoleh fungsi gelombang spin-network  $\psi_{(\Gamma, j_l, i_n)}(h_{l_1}[A], \dots, h_{l_L}[A])$  dan ruang Hilbert  $\mathcal{H}_\Gamma = L_2[SU(U)^{|\mathcal{L}|}/SU(U)^{|\mathcal{N}|}, d\mu_{Haar}]$  dan dapat digambarkan salah satunya sebagai berikut:



(Sumber: [36])

Dengan fungsi gelombang/state spin-network untuk kasus ini menggunakan formulasi:

$$\psi_{inv(\Gamma, j_l, i_n)}(h_{l_1}[A], \dots, h_{l_L}[A]) = \left\langle \otimes_{i(n)}^n \left| \otimes_{i(n)}^l D^{(j_l)} \right\rangle_\Gamma \quad (321)$$

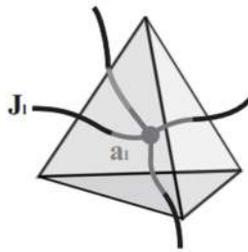
Maka diperoleh:

$$\begin{aligned} & \psi_{(\Gamma, j_l, i_n)}(h_{l_1}, h_{l_2}, h_{l_3}, h_{l_4}) \quad (322) \\ &= \sum_{m_i, n_i} (-1)^{\sum_i (j_i - n_i)} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 & j_4 \\ -n_1 & -n_2 & -n_3 & -n_4 \end{pmatrix}^{(l)} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 & j_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \end{pmatrix}^{(k)} \prod_{i=1}^4 D_{m_i n_i}^{j_i}(h_{l_i}) \end{aligned}$$

### 2.5.5 Operator Geometri dalam *Loop Quantum Gravity* (LQG)

Goal kita dalam LQG adalah menyusun teori gravitasi kuantum yang tidak bergantung struktur latar belakang ruang-waktu (*background independent*). Oleh karena itu, observabel-observabel dalam gravitasi kuantum haruslah merupakan observabel yang tidak bergantung latar belakang ruang-waktu, dalam konteks ini observabel yang dimaksud adalah observabel geometri, seperti panjang, luas, dan volume.

Pada bagian sebelumnya telah dibangun basis state untuk LQG dan basis ini memiliki representasi geometris. Keadaan/state *spin-network* ini digambarkan oleh keadaan/state dari *grap*, yang tertanam di *hypersurface* spasial  $\Sigma$ . State ini berisi informasi mengenai struktur *hypersurface*  $\Sigma$ . Karena tersusun atas *nodes* dan *link*, ini menggambarkan struktur diskrit dari ruang, Dimana *nodes* merepresentasikan sebuah *polihedra* dan *link* merepresentasikan permukaan yang melingkupi *polihedra* tersebut. Seperti ditunjukkan gambar sebelumnya:



Sebuah tetrahedron kuantum (Sumber: [5])

Oleh karena itu, langkah berikutnya seperti yang ditunjukkan dalam program kuantisasi Dirac, yaitu ialah membangun operator berupa operator geometris yang bekerja pada basis state *spin-network*. Operator geometris tersebut dibangun dari definisi klasik untuk kuantitas geometrisnya. Agar operator ini dapat bekerja pada state *spin-network* maka perlu dilakukan regularisasi ekspresi klasik dari kuantitas geometri tersebut melalui proses *smearing*. Pada bagian akan ditinjau operator geometri yang berupa operator luas dan volume untuk kasus 4d Lorentzian.

#### (a) Operator Luas

Operator geometrik paling sederhana yang dapat dibangun dalam LQG adalah operator luas. Dimulai dari definisi geometri klasik seperti yang telah ditunjukkan pada pembahasan regulasi

densitas triad. Kita ulangi kembali, pertama-tama untuk kuantitas luas dapat dituliskan sebagai berikut:

$$A(S) = \int_S d\sigma_1 d\sigma_2 \sqrt{\det\left(g_{ab} \frac{\partial x^a}{\partial \sigma^\alpha} \frac{\partial x^b}{\partial \sigma^\beta}\right)}, \quad \alpha, \beta = 1, 2 \quad (323)$$

Dengan  $\partial_1 x^a = \frac{\partial x^a}{\partial \sigma^1}$ , sehingga bagian  $\det\left(g_{ab} \frac{\partial x^a}{\partial \sigma^\alpha} \frac{\partial x^b}{\partial \sigma^\beta}\right)$  dapat dievaluasi sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \det\left(g_{ab} \frac{\partial x^a}{\partial \sigma^\alpha} \frac{\partial x^b}{\partial \sigma^\beta}\right) &= g_{ab} g_{cd} [\partial_1 x^a \partial_1 x^b \partial_2 x^c \partial_2 x^d - \partial_1 x^a \partial_2 x^b \partial_1 x^c \partial_2 x^d] \\ \det\left(g_{ab} \frac{\partial x^a}{\partial \sigma^\alpha} \frac{\partial x^b}{\partial \sigma^\beta}\right) &= 2g_{ab} g_{cd} \partial_1 x^a \partial_1 x^{[b} \partial_2 x^{c]} \partial_2 x^d \\ &= 2g_{a[b} g_{c]d} \partial_1 x^a \partial_1 x^b \partial_2 x^c \partial_2 x^d \end{aligned} \quad (324)$$

Karena  $g_{a[b} g_{c]d} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ace} \varepsilon_{bdf} g g^{ef}$  dan  $\frac{\partial x^a}{\partial \sigma^1} \frac{\partial x^c}{\partial \sigma^2} \varepsilon_{ace} = n_e$  serta  $\frac{\partial x^b}{\partial \sigma^1} \frac{\partial x^d}{\partial \sigma^2} \varepsilon_{bdf} = n_f$ , maka kita peroleh

$$\begin{aligned} \det\left(g_{ab} \frac{\partial x^a}{\partial \sigma^\alpha} \frac{\partial x^b}{\partial \sigma^\beta}\right) &= -2 \times \frac{1}{2} \varepsilon_{ace} \varepsilon_{bdf} g g^{ef} \partial_1 x^a \partial_1 x^b \partial_2 x^c \partial_2 x^d \\ \det\left(g_{ab} \frac{\partial x^a}{\partial \sigma^\alpha} \frac{\partial x^b}{\partial \sigma^\beta}\right) &= -g g^{ef} n_e n_f \end{aligned} \quad (325)$$

Definisi luas menjadi:

$$A(S) = \int_S d\sigma_1 d\sigma_2 \sqrt{-g g^{ef} n_e n_f} \quad (326)$$

Menggunakan definisi tetrad:  $g^{ef} = e_i^e e_j^f \eta^{ij} = e_i^e e^{fi}$  dan  $g = -e^2$ , maka (dengan indeks  $i, j = 1, 2, 3$ ; dimensi hypersurface 4D Lorentzian)

$$A(S) = \int_S d\sigma_1 d\sigma_2 \sqrt{e^2 e_i^e e^{fi} n_e n_f} \quad (327)$$

Menggunakan definisi densitas triad  $E_i^e = e e_i^e$  dan  $E^{fi} = e e^{fi}$ , maka:

$$A(S) = \int_S d\sigma_1 d\sigma_2 \sqrt{E_i^e E^{fi} n_e n_f} \quad (328)$$

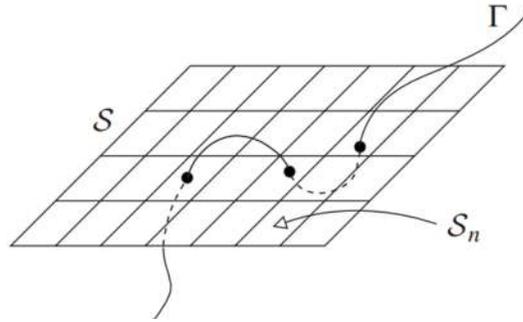
Selanjutnya kita regulasi definisi luas di atas, dimana permukaan  $S$  dapat diuraikan sebagai sejumlah  $N$  sel berdimensi 2, sehingga:

$$A(S) = \lim_{N \rightarrow \infty} A_N(S) \quad (329)$$

Dimana jumlahan Riemann dapat diekspresikan:

$$A_N(S) = \sum_{n=1}^N \sqrt{E_i(S_n)E^i(S_n)} \quad (330)$$

Dengan  $N$  adalah jumlah sel dan  $E_i(S_n)$  adalah fluks  $E_i$  yang melewati permukaan sel  $S_n$  (partisi  $S_n$ ), seperti ditunjukkan gambar di bawah:



Partisi dari  $S_n$  (Sumber: [5])

Bila kita evaluasi lebih lanjut untuk  $E_i(S_n)$ , maka:

$$E_i(S_n) = \int_{S_n} d^2\sigma E_i^e n_e = \int_{S_n} E_i^e n_e \approx E_i^e n_e S_n \quad (331)$$

Sehingga

$$A_N(S) = \sum_{n=1}^N \sqrt{E_i(S_n)E^i(S_n)} \approx \sum_{n=1}^N \sqrt{E_i^e n_e S_n E^{if} n_f S_n} = \sum_{n=1}^N S_n \sqrt{E_i^e n_e E^{if} n_f} \quad (332)$$

Kita substitusikan ke definisi:  $A(S) = \lim_{N \rightarrow \infty} A_N(S)$ , maka:

$$A(S) = \lim_{N \rightarrow \infty} A_N(S) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N S_n \sqrt{E_i^e n_e E^{if} n_f} = \int_S d\sigma_1 d\sigma_2 \sqrt{E_i^e E^{if} n_e n_f} \quad (333)$$

Yang mana menunjukkan kesetaraan antara definisi limit dan integral. Sekarang kita akan gunakan definisi limit di atas:

$$A(S) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N S_n \sqrt{E_i^e n_e E^{if} n_f} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \sqrt{E_i(S_n) E^i(S_n)} \quad (334)$$

Selanjutnya kita beralih ke level kuantum, dimana densitas triad dipromosikan sebagai fungsional koneksi (konstanta Planck, konstanta gravitasi, kelajuan cahaya dan parameter Immirzi dituliskan secara eksplisit):

$$E_i^e \rightarrow \hat{E}_i^a(S) = -\frac{i\hbar G\gamma}{c^3} \frac{\delta}{\delta A_a^i(S)} \quad (335)$$

Dalam representasi regulasi densitas triad dituliskan:

$$\hat{E}_i = \int_S d^2\sigma \hat{E}_i^a n_a = -\frac{i\hbar G\gamma}{c^3} \int_S d^2\sigma n_a \frac{\delta}{\delta A_a^i(S)} \quad (336)$$

Sehingga aksi regulasi densitas triad terhadap holonomi yang merupakan basis state spin-network, yaitu: [lihat Lampiran C]

$$\hat{E}_i(S) h_e[A] = -\frac{i8\pi\hbar G\gamma}{c^3} \int_S d^2\sigma n_a \frac{\delta h_e[A]}{\delta A_a^i(S)} = \pm \frac{i8\pi\hbar G\gamma}{c^3} h_{e_1}[A] \tau_i h_{e_2}[A] \quad (337)$$

Dengan  $e_1$  dan  $e_2$  adalah ujung-ujung lintasan/link dan  $\pm 1$  adalah sign yang bergantung pada koordinat. Dengan meninjau produk skalar 2 operator densitas triad/flux yang bekerja pada link:

$$\begin{aligned} \hat{E}_i(S) \hat{E}^i(S) h_e[A] &= -\frac{(8\pi)^2 \hbar^2 G^2 \gamma^2}{c^6} h_{e_1}[A] \tau_i \tau^i h_{e_2}[A] \\ &= -\frac{(8\pi)^2 \hbar^2 G^2 \gamma^2}{c^6} \tau_i \tau^i h_e[A] \end{aligned} \quad (338)$$

Dengan  $\tau_i$  merupakan generator grup SU(2) dan  $\tau_i \tau^i \equiv C^2$  dikenal sebagai operator Casimir. Untuk grup SU(2), operator Casimir yang bekerja dalam representasi tak tereduksi, yaitu:  $C^2 = -j(j+1)\mathbf{1}_{2j+1}$ , sehingga:

$$\hat{E}_i(S) \hat{E}^i(S) h_e[A] = -\frac{(8\pi)^2 \hbar^2 G^2 \gamma^2}{c^6} \tau_i \tau^i h_e[A] = -\frac{(8\pi)^2 \hbar^2 G^2 \gamma^2}{c^6} C^2 h_e[A] \quad (339)$$

$$\hat{E}_i(S) \hat{E}^i(S) h_e[A] = \frac{(8\pi)^2 \hbar^2 G^2 \gamma^2}{c^6} j(j+1) h_e[A] \quad (340)$$

Dengan  $j$  adalah spin yang bernilai pecahan setengah ( $j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$ ).

Kembali operator luas, yaitu:  $A(S) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \sqrt{E_i(S_n)E^i(S_n)}$ , dengan mempromosikan densitas sebagai triad, maka:

$$\hat{A}(S) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \sqrt{\hat{E}_i(S_n)\hat{E}^i(S_n)} \quad (341)$$

Dengan aksi dari basis state spin-network ( $\psi_{(\Gamma, j_L, i_n)}$ ) pada operator luas di atas dan hasil dari produk skalar 2 operator densitas triad (dalam representasi regulasi densitas triad), maka:

$$\begin{aligned} \hat{A}(S)\psi_{(\Gamma, j_L, i_n)} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \sqrt{\hat{E}_i(S_n)\hat{E}^i(S_n)} \psi_{(\Gamma, j_L, i_n)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \sqrt{J_i(S_n)J^i(S_n)} \psi_{(\Gamma, j_L, i_n)} \\ \hat{A}(S)\psi_{(\Gamma, j_L, i_n)} &= 8\pi\gamma l_P^2 \sum_{p \in \text{SU}\Gamma} \sqrt{j_p(j_p + 1)} \psi_{(\Gamma, j_L, i_n)} \end{aligned} \quad (342)$$

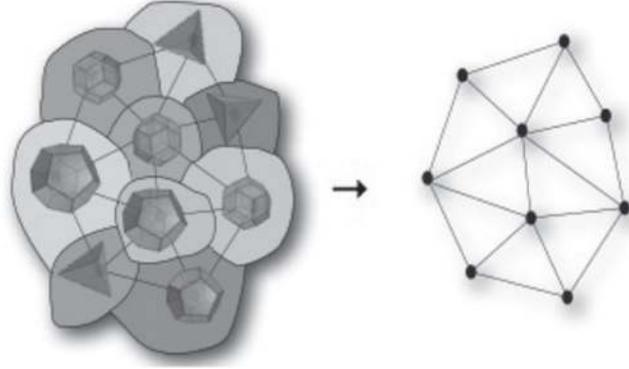
Dengan  $l_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}$  merupakan panjang Planck. Disini pada relasi operator luas di atas konstanta  $8\pi\gamma l_P^2 = \frac{8\pi\gamma\hbar G}{c^3}$  dikenal sebagai luas pada skala Planck dari LQG dan parameter Barbero-Immirzi  $\gamma$  yang berperan penting dalam teori kuantum untuk gravitasi.

Terdapat 2 hal ini yang perlu dicatat: Pertama, hasil terakhir di atas merupakan hasil yang luar biasa. Hal ini menunjukkan bahwa seluruh spektrum operator luas terkuantisasi: luas permukaan ruang memiliki nilai yang diskrit dengan luas yang sebanding dengan pangkat kuadrat nanjang Planck  $l_P^2 = \frac{\hbar G}{c^3}$ . Hasil ini dapat diserupakan dengan kuantisasi orbit lintasan elektron dalam atom berdasarkan persamaan Schrodinger. Kedua, operator memiliki aksi diagonal terhadap basis state spin-network. Oleh karena itu, state spin-network merupakan keadaan eigen dari operator luas ini.

Nilai terkecil dari nilai eigen operator luas di atas terjadi ketika di ambil  $\gamma = 1$  dan  $j_l = \frac{1}{2}$ , sehingga:

$$A_0(S) = \frac{4\sqrt{3}\pi\gamma\hbar G}{c^3} \approx 10^{-66} \text{ cm}^2 \quad (343)$$

Hasil ini menunjukkan bahwa LQG memprediksikan pada skala Planck ruang berbentuk diskrit seperti yang telah disangka sebelumnya bahwa gravitasi kuantum akan memberikan struktur luas terkecil pada skala Planck.



Sebuah irisan antara polihedra kuantum dan gambaran grap mereka (Sumber: [5])

### (b) Operator Volume

Operator geometris selanjutnya adalah operator volume. Dimulai dari definisi volume dalam geometris klasik, yaitu suatu daerah  $R$  yang merupakan bagian dari hypersurface  $\Sigma$ :

$$V(R) = \int_R d^3x \sqrt{-g} \quad (344)$$

Dengan  $g = -e^2$  dan menggunakan  $E_i^a = e e_i^a = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \varepsilon^{abc} e_b^j e_c^k$ , maka  $e = \frac{1}{2} \varepsilon_{abc} \varepsilon^{ijk} e_i^a e_j^b e_k^c$ , sehingga:

$$\begin{aligned} V(R) &= \int_R d^3x \sqrt{-g} = \int_R d^3x \sqrt{\left| \frac{1}{3!} \varepsilon_{abc} \varepsilon^{ijk} e_i^a e_j^b e_k^c \right|} \\ &= \int_R d^3x \sqrt{\left| \frac{1}{3!} \varepsilon_{abc} \varepsilon^{ijk} E_i^a E_j^b E_k^c \right|} \end{aligned} \quad (345)$$

Secara sederhana dengan mempromosikan densitas triad menjadi operator seperti kasus operator luas dan mengenakan dengan basis state spin-network  $\psi_{(\Gamma, j_l, i_n)}$ , maka diperoleh operator volume sebagai berikut (dengan menuliskan secara eksplisit dimensi dalam skala Planck):

$$V(R) \rightarrow \hat{V}(R) \psi_{(\Gamma, j_l, i_n)} = (8\pi\gamma)^{3/2} l_p^3 \int_R d^3x \sqrt{\left| \frac{1}{3!} \varepsilon_{abc} \varepsilon^{ijk} \hat{E}_i^a \hat{E}_j^b \hat{E}_k^c \right|} \psi_{(\Gamma, j_l, i_n)} \quad (346)$$

Namun terdapat 2 bentuk lain dari representasi operator volume yang masing-masing menggunakan regulasi yang spesifik: representasi Rovelli-Smolin (RS) dan representasi Ashtekar-Lewandowski (AL). Masing-masing representasi ditunjukkan sebagai berikut:

(i) Representasi Rovelli-Smolin (RS)

Regulasi operator volume dalam representasi RS diformulasikan secara non-trivial pada node yang digambarkan basis spin-network. Tinjau suatu daerah  $R_I$  kubus dalam koordinat volume  $\epsilon^3$  dari manifold 3 dimensi  $\int_R d^3x$ . Berdasarkan penjumlahan Rieman  $\int_R d^3x$  dapat didekati dengan penjumlahan  $\sum_I \text{volume}(C_I)$ . Partisi ini membuat  $V(R)$  dalam bentuk fluks/densitas triad. Kita perkenalkan suatu kuantitas:

$$\begin{aligned} W_I &\equiv \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3!} \int_{\partial C_I} d^2\sigma_1 \int_{\partial C_I} d^2\sigma_2 \int_{\partial C_I} d^2\sigma_3 |\det E| \\ &= \frac{1}{48} \int_{\partial C_I} d^2\sigma_1 \int_{\partial C_I} d^2\sigma_2 \int_{\partial C_I} d^2\sigma_3 |\varepsilon_{ijk} E_i^a(\sigma_1) n_a(\sigma_1) E_j^b(\sigma_2) n_b(\sigma_2) E_k^c(\sigma_3) n_c(\sigma_3)| \end{aligned} \quad (347)$$

Kuantitas  $W_I$  ini merupakan kuantitas non-lokal sebagai pendekatan untuk elemen volume untuk  $\epsilon$ . Untuk setiap  $\epsilon$ , partisi daerah  $R$  menjadi kubus  $R_I$ . Untuk limit kontinu dimana  $\epsilon \rightarrow 0$  dan kita dapatkan daerah  $R_I$  menjadi suatu titik, kita dapatkan:

$$W_I = \frac{1}{48} \varepsilon^{abc} n_a n_b n_c \det E_i^a \epsilon^6 \simeq \frac{1}{48\epsilon^6} \det E_i^a \simeq \text{volume}^2(C_I) \quad (348)$$

Menggunakan teorema Riemann seperti pada kasus operator luas, maka hubungan volume  $V(R)$  untuk daerah  $R$  dapat dituliskan sebagai berikut:

$$V(R) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_I \epsilon^3 \sqrt{W_I} \quad (349)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan di atas dengan definisi  $W_I$ , kita dapatkan:

$$V(R) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_I \epsilon^3 \sqrt{|W_I|} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_I \epsilon^3 \sqrt{\frac{1}{48\epsilon^6} |\det E_i^a|} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_I \sqrt{\frac{1}{48} |\det E_i^a|} \quad (350)$$

Sehingga di dapat:

$$V(R) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_I \sqrt{\frac{1}{48} \sum_{\alpha, \beta, \gamma} |\varepsilon_{ijk} E_i^a(\sigma_1) n_a(\sigma_1) E_j^b(\sigma_2) n_b(\sigma_2) E_k^c(\sigma_3) n_c(\sigma_3)|} \quad (351)$$

Dalam representasi regulasi densitas triad:  $E_i = \int_S d^2\sigma E_i^a n_a$ , maka:

$$V(R) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_I \sqrt{\frac{1}{48} \sum_{\alpha, \beta, \gamma} |\varepsilon_{ijk} E_i(S_I^\alpha) E_j(S_I^\beta) E_k(S_I^\gamma)|} \quad (352)$$

Selanjutnya kita promosikan definisi di atas menjadi operator volume (menuliskan secara eksplisit parameter Immirzi dan volumen Planck):

$$\begin{aligned} \hat{V}(R)\psi_{(\Gamma, j_l, i_n)} &= (8\pi\gamma)^{3/2} l_P^3 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_I \sqrt{\frac{1}{48} \sum_{\alpha, \beta, \gamma} |\varepsilon_{ijk} \hat{E}_i(S_I^\alpha) \hat{E}_j(S_I^\beta) \hat{E}_k(S_I^\gamma)|} \psi_{(\Gamma, j_l, i_n)} \\ \hat{V}(R)\psi_{(\Gamma, j_l, i_n)} &= (8\pi\gamma)^{3/2} l_P^3 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_I \sqrt{\frac{1}{48} \sum_{\alpha, \beta, \gamma} |\varepsilon_{ijk} J_i^1 J_j^2 J_k^3|} \psi_{(\Gamma, j_l, i_n)} \end{aligned} \quad (353)$$

Relasi di atas dikenal sebagai operator volume dalam representasi RS.

(ii) Representasi Ashtekar-Lewandowski (AL)

Representasi lainnya untuk operator volume adalah representasi Ashtekar-Lewandowski. Alternatif operator volume yang diajukan oleh Ashtekar dan Lewandowski memiliki sifat tambahan yang sensitif terhadap struktur diferensial pada graf di node. Pembagian wilayah  $R$  menjadi beberapa kubik sel seperti pada representasi RS, kuncinya adalah bagaimana memilih permukaan untuk melakukan smearing medan densitas triad. Dibandingkan pembagian batas kubik  $\partial C_I$  menuju sel  $S_I^a$ , sekarang kita tinjau  $C_I$  untuk 3 permukaan (karena kubik 3 dimensi). Kita tandai koordinatnya dengan  $x^a$  ( $a = 1, 2, 3$ ) dan permukaan  $S_I^a$  yang saling ortogonal (tegak lurus) satu sama lain. Kemudian dengan menggunakan relasi operator volume yang dipromosikan dari bentuk klasik volume, yaitu (dalam representasi limit):

$$\hat{V}(R)\psi_{(\Gamma, j_l, i_n)} = (8\pi\gamma)^{3/2} l_P^3 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{C_I} \sqrt{\frac{1}{3!} \varepsilon_{abc} \varepsilon^{ijk} \hat{E}_i^a \hat{E}_j^b \hat{E}_k^c} \psi_{(\Gamma, j_l, i_n)} \quad (354)$$

Dan dalam bentuk representasi regulasi densitas triad:  $E_i = \int_S d^2\sigma E_i^a n_a$ , maka operator volume AL dituliskan sebagai:

$$\begin{aligned} \hat{V}(R)\psi_{(\Gamma, j_l, i_n)} & \\ &= (8\pi\gamma)^{3/2} l_P^3 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{C_I} \sqrt{\frac{1}{3!} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{abc} \hat{E}^i(S_I^a) \hat{E}^j(S_I^b) \hat{E}^k(S_I^c)} \psi_{(\Gamma, j_l, i_n)} \end{aligned} \quad (355)$$

Tidak seperti representasi RS, dalam representasi AL tidak digunakan manipulasi ekspresi seperti penggunaan ekspresi  $W_l$ , tetapi secara langsung menggunakan definisi flux atau operator densitas triad:

$$\hat{E}^i(S)h_e[A] = -\frac{i8\pi\hbar G\gamma}{c^3} \int_S d^2\sigma n_a \frac{\delta h_e[A]}{\delta A_{ai}(S)} = \pm \frac{i8\pi\hbar G\gamma}{c^3} h_{e_1}[A]\tau^i h_{e_2}[A] \quad (356)$$

Menggunakan relasi di atas, maka dapat kita evaluasi secara langsung bentuk  $\frac{1}{3!}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{abc}\hat{E}^i(S_l^a)\hat{E}^j(S_l^b)\hat{E}^k(S_l^c)$ , sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3!}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{abc}\hat{E}^i(S_l^a)\hat{E}^j(S_l^b)\hat{E}^k(S_l^c) &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3!}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{abc}\kappa^a\kappa^b\kappa^c J^i J^j J^k \\ &= \frac{1}{48}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{abc}\kappa^a\kappa^b\kappa^c J^i J^j J^k \end{aligned} \quad (357)$$

Dengan  $J^i$  adalah generator SU(2) dalam representasi spin  $j$  dan  $\kappa^a$  adalah orientasi relatif antara sel  $S_l^a$  dan ujung lintasan  $e$ , yang didefinisikan sebagai:

$$\kappa(e) = \begin{cases} 1 & \text{jika } e \text{ berada di atas } S \\ -1 & \text{jika } e \text{ berada di bawah } S \\ 0 & \text{selain di atas dan di bawah} \end{cases} \quad (358)$$

Bentuk operator  $\frac{1}{48}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{abc}\kappa^a\kappa^b\kappa^c J^i J^j J^k$  bergantung pada pilihan permukaan sel  $S_l^a$ . Oleh karena itu mendefinisikan operator volume yang tidak bergantung pilihan regulator ini, maka kita perlu rata-ratakan (*averaging*) seluruh pilihan ortogonal sel  $S_l^a$ . Hasilnya adalah penjumlahan seluruhnya untuk seluruh node dalam grap, sehingga operator volume dituliskan sebagai:

$$\begin{aligned} \hat{V}(R)\psi_{(\Gamma, J, l, i_n)} & \\ &= (8\pi\gamma)^{3/2} l_P^3 \sum_{n \in \Gamma} \sqrt{\left| \frac{\kappa_0}{48} \varepsilon_{ijk} \sum_{e, e', e''} \epsilon(e, e', e'') J^i(e) J^j(e') J^k(e'') \right|} \psi_{(\Gamma, J, l, i_n)} \end{aligned} \quad (359)$$

Relasi di atas dikenal sebagai operator volume dalam representasi AL. Dengan  $\kappa_0$  merupakan parameter averaging yang diperkenalkan agar background independent tetap terjaga, seperti yang ditunjukkan oleh Ashtekar dan Lewandowski dalam papernya [38]. Sifat-sifat dari  $\kappa_0$

dapat dilihat lebih jauh dalam [38]. Selain itu, untuk lintasan/link  $e, e',$  dan  $e''$  berjalan keluar dari edge melewati node  $n$  dan  $\epsilon$  sebagai fungsi orientasi yang memenuhi:

- (1)  $\epsilon(e, e', e'')$  bernilai  $\pm 1$  jika arah yang bersinggungan dengan 3 edge secara linier tidak bergantung dan terorientasi dengan (+) atau (-) bergantung orientasi dari hypersurface  $\Sigma$ .
- (2)  $\epsilon(e, e', e'')$  bernilai 0 jika arah yang bersinggungan dengan 3 edge secara linier bergantung.

Dari representasi RS dan AL dapat kita telaah 2 perbedaan:

- (1) Dalam representasi AL parameter  $\kappa_0$  dipilih bernilai konstan sedangkan dalam representasi RS muncul secara unik
- (2) Dalam representasi AL, nilai mutlak berada diluar dari penjumlahan internal, sedangkan dalam representasi RS sebaliknya nilai mutlak berada di dalam. Hal ini menyebabkan representasi AL sensitif terhadap struktur diferensial dari grap, sehingga menyebabkan operator volume AL akan lenyap pada node dimana edge berada pada bidang yang sama, karena dalam kasus tersebut  $\epsilon(e, e', e'') = 0$ .

Disisi lain baik representasi RS dan AL keduanya bekerja pada nodes dari grap. Element matrik keduanya akan lenyap untuk ruang intertwiner yang berbeda dan oleh karena setiap ruang intertwiner memiliki dimensi berhingga, maka spektrum dari operator volume keduanya akan bernilai diskrit dengan minimal volume sebesar volume dalam skala Planck  $l_p^3$ .

Kita telah menelaah 2 operator geometri, yaitu operator luas dan operator volume. Hasil yang diperoleh berdasarkan LQG adalah bahwa geometri ruang bersifat diskrit pada skala Planck dan spin-network menggambarkan sifat kuantum geometrinya, dimana setiap link sebanding dengan luas dengan spin  $j$  dan setiap node sebanding dengan volume yang ditentukan oleh intertwiner  $i_n$  seperti hanya spin dari link yang berbagi pada node.

Hasil ini tidak sama dengan mengasumsikan pada awalnya ruang bersifat diskrit seperti pada pendekatan gravitasi kuantum kisi (*lattice approach to quantum gravity*), tetapi ini merupakan konsekuensi dengan memadukan secara hati-hati prinsip-prinsip utama dari relativitas umum dan mekanika kuantum. Hal ini sebanding dengan kuantisasi level energi pada osilator harmonik atau kuantisasi orbital pada orbital atom. Akibat sifat diskrit di skala Planck untuk eksitasi minimal

geometrik, maka LQG akan terhindar dari divergensi ultraviolet yang menghinggapi teori-teori gravitasi kuantum lainnya dan menjadi resolusi terkait masalah singularitas ruang-waktu dalam relativitas umum pada big bang dan pusat lubang hitam.

## 2.6. Aplikasi Sektor Kinematik LQG: Entropi Lubang Hitam dan Persamaan Friedmann dalam Model Friedmann-Robertson-Walker (FRW)

Pada pembahasan ini akan ditinjau aplikasi LQG khususnya pada sektor kinematik pada 2 kasus. Pertama, adalah penurunan persamaan entropi lubang hitam berdasarkan metode *counting state* berbasis spin-work di LQG. Hasilnya adalah entropi lubang hitam yang sesuai dengan yang diperoleh berdasarkan pendekatan semiklasik. Metode perhitungan yang digunakan mengikuti metode yang diperkenalkan oleh Rovelli [4]. Kedua, pada kosmologi di awal alam semesta yang digambarkan oleh metrik Friedmann-Robertson-Walker (FRW). Berbasis *Loop Quantum Cosmology* (LQC) merupakan toy model atau mini super-space dari LQG, maka variabel-variabel dalam model FRW diregulasi, sehingga diperoleh persamaan efektif Friedmann yang didalamnya terdapat suku koreksi kuantum dari LQC. Akibat adanya suku koreksi ini, maka Big-Bang yang pada mulainya diprediksikan persamaan Friedmann tradisional digantikan dengan Big-Bounce, sehingga alam semesta berawal dari alam semesta sebelumnya yang telah runtuh [9],[39],[40].

### 2.6.1 Penurunan Persamaan Entropi Lubang Hitam Berbasis LQG: Pendekatan Rovelli

Berdasarkan kajian Hawking mengenai ketidakberkurangan luas permukaan lubang hitam. Bekenstein melihat hal ini serupa dengan sifat entropi suatu sistem yang tidak berkurang, ia mengusulkan bahwa entropi lubang hitam sebanding dengan luas permukaannya. Bekenstein mengusulkan relasi antara entropi lubang hitam dengan permukaan:

$$S_{BH} = \frac{k_B c^3}{4\hbar G} A \quad (360)$$

Dengan  $A$  adalah ruang permukaan lubang hitam,  $k_B$  adalah konstan Boltzmann,  $c$  adalah kelajuan cahaya,  $\hbar$  adalah konstan Planck ( $\hbar = h/2\pi$ ), dan  $G$  adalah konstanta gravitasi Newton. Sehingga persamaan di atas merupakan persamaan yang menggabungkan seluruh konstanta fundamental di alam: mekanika statistik, relativitas umum, mekanika kuantum dan relativitas umum.

Salah satu tantangan dalam teori gravitasi kuantum adalah dapat menurunkan formulasi entropi lubang hitam (1). Sebagai salah satu kandidat gravitasi kuantum, LQG dapat menurunkan secara

eksak formulasi entropi lubang hitam (1) dari prinsip utama yang dibagi menjadi 2 skenario penurunan: skenario kinematik dan dinamik. Dalam laporan ini akan diturunkan formulasi (360) menggunakan skenario kinematik berdasarkan formulasi LQG di sektor kinematik (berdasarkan relasi operator geometri). Mengacu pada metode perhitungan yang diajukan oleh Carlo Rovelli [4] yang dikenal sebagai quantum counting. Entropi lubang hitam dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$S_{BH} = k_B \ln N(A) \quad (361)$$

Dengan  $N(A)$  adalah jumlah keadaan dari geometri kuantum di permukaan lubang hitam. Dari persamaan nilai eigen operator luas di LQG:

$$A_S = \frac{8\pi\gamma\hbar G}{c^3} \sum_{I \in S \cap \Sigma} \sqrt{j_p(j_p + 1)} \quad (362)$$

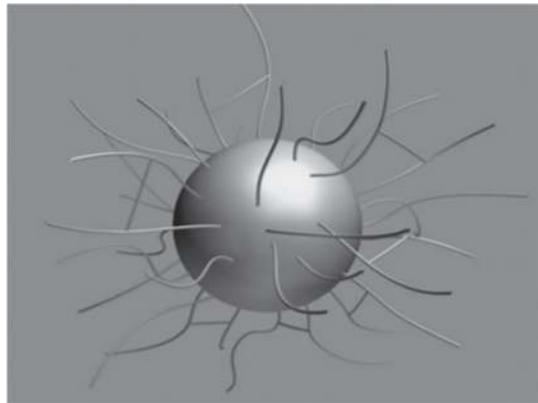
Dengan mengambil spin  $j_p$  memiliki nilai terkecil:  $j_p = j_{min} = \frac{1}{2}$ , maka didapat:

$$A_0 = \frac{4\sqrt{3}\pi\gamma\hbar G}{c^3} \quad (363)$$

Dan perbandingannya dengan luas permukaan lubang hitam menjadi:

$$n = \frac{A}{A_0} = \frac{Ac^3}{4\sqrt{3}\pi\gamma\hbar G} \quad (364)$$

Jumlah keadaan kuantum luas ( $N(A)$ ) disebabkan oleh irisan antara ujung graph yang melewati permukaan sehingga dapat diilustrasikan sebagai link spin-network yang keluar dari horizon lubang hitam, seperti ditunjukkan gambar berikut:



Spin-network keluar dari horizon lubang hitam.(Sumber: [5])

Karena dimensi ruang Hilbert untuk 1 spin-network adalah 2, maka jumlah keadaan  $N(A)$  dari lubang hitam untuk spin-network adalah:

$$N(A) = 2^n = 2^{\left(\frac{Ac^3}{4\sqrt{3}\pi\gamma\hbar G}\right)} \quad (365)$$

Sehingga kita peroleh formulasi entropi lubang hitam dari persamaan (361), maka:

$$S_{BH} = \frac{1}{\gamma} \frac{\ln(2)}{4\sqrt{3}\pi} \frac{Ak_Bc^3}{\hbar G} \quad (366)$$

Bila didefinisikan parameter Barbero-Immirzi adalah

$$\gamma = \frac{\sqrt{3}\pi}{\ln(2)} \quad (367)$$

Maka formula entropi lubang hitam yang sama dengan rumusan formulas entropi lubang hitam oleh Bekenstein dan Hawking (360), yaitu:

$$S_{BH} = \frac{k_Bc^3}{4\hbar G} A \quad (368)$$

Dapat diperhatikan disini bahwa menggunakan formulasi operator luas di LQG dapat diturunkan formula entropi lubang hitam secara eksak.

Kajian lebih jauh mengenai entropi lubang hitam masih dilakukan oleh Rovelli [5]. Dimana Rovelli memperbaiki pendekatan yang dilakukan sebelumnya dalam menghitung keadaan spin-network sehingga dalam formula entropi lubang hitam terdapat suku koreksi dari LQG selain hasil entropi oleh Bekenstein dan Hawking. Dimulai dari pendefinisian energi lubang hitam, dalam hal ini lubang hitam paling sederhana: lubang hitam Schwartzchild:

$$E(R) = \sqrt{g^{00}}M = \frac{M}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2R}}} \quad (369)$$

Untuk observer yang jauh dari horizon lubang hitam maka:  $r \ll 2GM$ , maka:  $\frac{2GM}{R} \approx \frac{2GM}{2GM+r}$  sehingga:

$$E(R) \approx \frac{M}{\sqrt{1 - \frac{2c^2GM}{c^2(2GM+r)}}} = M \sqrt{\frac{2GM}{r}} \quad (370)$$

Dengan koordinat horizon terhubung dengan jarak fisis oleh relasi:

$$d = \sqrt{g_{rr}}r = \frac{r}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 R}}} \quad (371)$$

Untuk kasus yang sama  $\ll 2GM$ , maka:  $\frac{2GM}{R} \approx \frac{2GM}{2GM+r}$ , maka:

$$d \approx \frac{r}{\sqrt{1 - \frac{2c^2 GM}{c^2(2GM+r)}}} = r \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \sqrt{2GMr} \quad (372)$$

Sehingga pengukuran energi pada jarak  $d$  dari horizon peristiwa dengan mensubstitusikan persamaan (372) ke (370), diperoleh:

$$E(d) = M \sqrt{\frac{2GM}{r}} = M \sqrt{\frac{2GM}{d^2/2GM}} = \frac{2GM^2}{d} \quad (373)$$

Oleh karena luas permukaan lubang hitam statik dapat dituliskan sebagai:  $A = 4\pi(2GM/c^2)^2$  dan berdasarkan relativitas umum bahwa pengamat berjarak  $d$  dari horizon lubang hitam akan mengalami percepatan sebesar:  $a = \frac{1}{d}$ . Sehingga kita dapatkan persamaan energi lubang hitam yang bergantung luas permukaan dan percepatan jauhnya pengamat, yaitu:

$$E = \frac{2GM^2}{d} = \frac{2G}{(1/a)} \times \frac{Ac^4}{16\pi G^2} \quad (374)$$

$$E = \frac{aAc^4}{8\pi G}$$

Persamaan (373) merupakan persamaan yang telah diturunkan pula oleh Frodden, Ghosh, dan Perez dengan cara lainnya sehingga dikenal pula sebagai formula energi lubang hitam Fodden-Ghosh-Perez [5].

Selanjutnya kita beralih ke LQG. Dalam LQG, nilai eigen operator luas didapatkan yaitu:

$$A_s = \frac{8\pi\gamma\hbar G}{c^3} \sqrt{j_p(j_p + 1)} \quad (375)$$

Dengan dimensi dari spin  $j_p$  adalah  $d_j = 2j_p + 1$ . Probabilitas untuk memiliki spin  $j_p$  berkebalikan dengan temperature  $T$  dengan memasukkan kondisi kemerosotan (*degeneracy*), sehingga

$$p_j(T) \sim (2j_p + 1)e^{-TE} \quad (376)$$

Dengan  $E$  adalah energi. Menggunakan formula energi (373) dan bentuk eksplisit nilai eigen operator luas (375) ke dalam persamaan (376), diperoleh:

$$p_j(T) \sim (2j_p + 1)e^{-TE} = (2j_p + 1) \exp \left[ T \times \frac{ac^4}{8\pi G} \times \frac{8\pi\gamma\hbar G}{c^3} \sqrt{j_p(j_p + 1)} \right]$$

$$p_j(T) \sim (2j_p + 1)e^{-TE} = (2j_p + 1) \exp \left[ \gamma\hbar a T \sqrt{j_p(j_p + 1)} \right] \quad (377)$$

Dengan penambahan konstanta proporsional atau dikenal pula sebagai fungsi partisi  $Z(T)$ , maka:

$$p_j(T) = Z^{-1}(T)(2j_p + 1) \exp \left[ \gamma\hbar a T \sqrt{j_p(j_p + 1)} \right] \quad (378)$$

Oleh karena  $\sum_j p_j = 1$  dan fungsi partisi (378) menjadi:

$$Z(T) = \sum_{j_p} (2j_p + 1) \exp \left[ \gamma\hbar a T \sqrt{j_p(j_p + 1)} \right] \quad (379)$$

Fungsi partisi  $Z(T)$  menggambarkan keadaan Gibbs untuk sebuah link yang berbanding terbalik dengan temperatur  $T$ . Entropi sebagai fungsi keadaan Gibbs dapat dituliskan sebagai:

$$S = - \sum_j p_j \log p_j \quad (380)$$

Dan dapat dituliskan sebagai relasi termodinamika:

$$E = TS + F \quad (381)$$

Dengan  $F$  adalah energi bebas Helmholtz, yang didefinisikan sebagai:

$$F = -T \log Z(T) \quad (382)$$

Sehingga menggunakan formula energi (373) dan definisi energi bebas Helmholtz (382) di atas ditambah asumsi bahwa sistem memenuhi kondisi temperatur Unruh, yaitu

$$T = \frac{\hbar a}{2\pi k_B} \quad (383)$$

kita peroleh berdasarkan persamaan (381) menjadi:

$$S = \frac{E - F}{T} = \frac{(aAc^4/8\pi G) - (c\hbar a/2\pi k_B) \log Z(T)}{c\hbar a/2\pi k_B} \quad (384)$$

Dengan menggunakan persamaan  $Z(T)$  (379), maka kita peroleh formula entropi lubang hitam dan penambahan suku koreksi dari LQG, yaitu:

$$S_{BH} = \frac{k_B c^3}{4\hbar G} A + \log \left[ \sum_{j_p} (2j_p + 1) \exp \left( \gamma c\hbar a T \sqrt{j_p(j_p + 1)} \right) \right] \quad (383)$$

Bagian di dalam eksponen dapat kita evaluasi untuk mendapatkan solusi bagi parameter Immirzi, dimana diasumsikan bahwa formula entropi lubang hitam kembali ke formulasi Bekenstein dan Hawking atau lenyap persamaan energi bebas Helmholtz ( $F = 0$ ):

$$\log \left[ \sum_{j_p} (2j_p + 1) \exp \left( \gamma c\hbar a T \sqrt{j_p(j_p + 1)} \right) \right] = 0 \quad (384)$$

Sehingga

$$\sum_{j_p} (2j_p + 1) \exp \left( \gamma c\hbar a T \sqrt{j_p(j_p + 1)} \right) = 1 \quad (385)$$

Secara numerik persamaan dapat diselesaikan parameter Immirzi  $\gamma$  yang dikenal sebagai  $\gamma_0$ , yaitu:

$$\gamma = \gamma_0 = 0,274 \quad (386)$$

Kedua perhitungan mengenai penurunan formulas entropi lubang hitam di atas merupakan beberapa cara menurunkan secara eksak sifat-sifat termodinamika lubang hitam berdasarkan LQG dan masih terdapat referensi lain bagaimana penurunan formulasi lubang hitam diperoleh seperti menggunakan pendekatan sektor dinamik LQG berbasis amplitude transisi [5] atau berbasis konsep keterkaitan kuantum (*entropy from entanglement*). Hal yang perlu diperhatikan disini selain penurunan formula entropi lubang hitam, melalui pendekatan ini diperoleh pula nilai (secara pendekatan) untuk parameter Immirzi, khusus di pendekatan kedua diperoleh hasil yang lebih umum dimana parameter Immirzi  $\gamma$  tidak harus sama dengan  $\gamma_0$  ( $\gamma = \gamma_0$ ), seperti yang ditunjukkan di [5], dimana diasumsikan fungsi partisi sebagai berikut:

$$Z(T) = e^{-\frac{Ac^4}{8\pi G} \left( T a - 2\pi \frac{\gamma_0}{\gamma} \right)} \quad (387)$$

Dengan prosedur yang sama dengan sebelumnya dan menggunakan persamaan (373) dan (387) maka akan diperoleh entropi lubang hitam:

$$S_{BH} = \frac{E - F}{T} = \frac{E}{T} + \log Z(T) = \frac{k_B c^3}{4\hbar G} A - \frac{k_B c^3}{4\hbar G} A \left(1 - \frac{\gamma_0}{\gamma}\right)$$

$$S_{BH} = \frac{\gamma_0 k_B c^3}{\gamma 4\hbar G} A \quad (388)$$

Hasil ini bersesuaian dengan dengan yang diberikan oleh *Loop Quantum Cosmology* (LQC).

### 2.6.2 *Loop Quantum Cosmology* (LQC) pada Model FRW untuk Kosmologi Awal Alam Semesta: Koreksi Kuantum Persamaan Friedmann

#### (a) Model Friedman -Robertson-Walker (FRW)

Dalam relativitas umum, gambaran kosmologi didasarkan pada konsep reduksi simetri melalui prinsip kosmologi yaitu alam semesta bersifat homogen dan isotropi dalam skala besar. Salah satu model yang didasarkan oleh prinsip tersebut adalah model kosmologi Friedmann-Robertson-Walker (FRW). *Loop Quantum Cosmology* (LQC) sebagai toy model berbasis model Bianchi dari relativitas umum, kuantisasi menggunakan beberapa metode LQG [9]. LQC sendiri dapat dikatakan sebagai suatu pendekatan/model kosmologi ruang-waktu yang menggunakan teknik-teknik perhitungan dalam LQG, seperti kuantisasi via flux atau densitas triad walaupun tidak memasukkan konsep holonomi. Dalam hal ini, LQC bukan merupakan model kosmologis yang diturunkan langsung dari LQG. Namun sebagai toy model dari LQG, LQC memberikan gambaran alam semesta awal yang diprediksikan oleh LQG seperti tidaknya adanya singularitas ruang-waktu dan inflasi.

Disisi lain, dalam sudut pandang kosmologi ruang-waktu saat ini dibutuhkan progres yang signifikan dari kandidat gravitasi kuantum untuk memberikan gambaran baik secara konsep dan teknis matematis mengenai alam semesta secara keseluruhan, awal dan akhirnya yang didukung oleh data observasi terkini. Berdasarkan hal ini, maka LQC dapat menjadi kandidat terbaik karena merupakan teori yang didasarkan dari salah satu kandidat gravitasi kuantum yaitu LQG. Ketiadaan singularitas ruang-waktu di awal semesta akibat efek kuantum dari ruang-waktu menjadikan indikasi bahwa LQC adalah pendekatan yang tepat untuk kajian kosmologi kuantum [9]. Selain itu LQC hingga saat ini banyak menghasilkan progress, seperti formulasi path integral LQC,

aplikasi pada interior lubang hitam, dan berbagai tinjauan perturbasi kosmologi. Dalam artikel ini akan dikaji penerapan LQC ini pada kasus ruang-waktu dalam model FRW.

Metrik ruang waktu model FRW dapat dituliskan sebagai berikut:

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[ \frac{1}{1 - Kr^2} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \right] \quad (389)$$

Dengan variabel dinamik yaitu  $a(t)$  dikenal sebagai faktor skala yang bergantung waktu sebagai co-moving coordinate,  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  adalah bagian radian dari hypersurface,  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$  adalah metrik bola 3 dimensi, dan  $K = -1, 0, +1$  yang masing-masing menunjukkan ( $K = -1$ ) alam semesta terbuka, ( $K = 0$ ) alam semesta datar, dan ( $K = +1$ ) alam semesta tertutup. Untuk lebih detail penurunan metrik FRW dapat dilihat pada Lampiran E.

Persamaan dinamika alam semesta berdasarkan metrik FRW dikenal sebagai persamaan Friedmann dan dapat diperoleh dengan melalui persamaan medan Einstein untuk metrik. Persamaan Friedmann dapat dituliskan sebagai berikut:

$$H^2 + \frac{K}{a^2} = \frac{8\pi G}{3a^2} H_{materi} \quad (390)$$

$$\dot{H} = H^2 - \frac{4\pi G}{3} (3P + \rho) \quad (391)$$

Dengan:  $H = \frac{\dot{a}}{a}$  dikenal sebagai parameter Hubble dan  $\dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} + H^2$  adalah laju perubahan parameter Hubble serta  $H_{materi}$  adalah Hamiltonian dari materi atau medan apapun di alam semesta. Persamaan Friedmann pertama memberikan kita kendala Hamiltonian untuk metrik FRW. Ini dimulai dengan formulasi Lagrangian dalam aksi Einstein-Hilbert [14]:

$$S_{EH} = \frac{1}{16\pi G} \int dt d^3x \sqrt{-g} R \quad (392)$$

Scalar Ricci untuk metrik FRW adalah:

$$R = \frac{6}{a^2} (a\ddot{a} + \dot{a}^2 + K) \quad (393)$$

Dengan mensubstitusikan ke aksi Einstein-Hilbert (392):

$$S_{EH} = \frac{V_0}{16\pi G} \int dt a(t)^3 R = \frac{3V_0}{8\pi G} \int dt (a^2 \ddot{a} + a\dot{a}^2 + aK) \quad (394)$$

Karena  $a^2\ddot{a} = -2a\dot{a}^2$ , maka

$$S_{EH} = \frac{3V_0}{8\pi G} \int dt (-a\dot{a}^2 + aK) \quad (395)$$

Dengan  $V_0 = \int_{\Sigma} d^3x$  adalah volume dari spasial manifold. Dari aksi di atas (395) dapat kita peroleh momentum konjugat  $p_a$  untuk satu satunya derajat kebebasan dalam model FRW yaitu factor skala  $a(t)$ :

$$p_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{a}} = -\frac{3V_0}{4\pi G} a\dot{a} \quad (396)$$

Selanjutnya kita dapatkan Hamiltonian gravitasi untuk aksi di atas menggunakan transformasi Legendre:

$$H = \sum_i p_i \dot{a}_i - L = p_a \dot{a} - L \quad (397)$$

Dan diperoleh:

$$H_{gravitasi} = -\frac{3V_0}{4\pi G} a\dot{a}^2 - \frac{3V_0}{8\pi G} (-a\dot{a}^2 + aK) = -\frac{3V_0}{8\pi G} a\dot{a}^2 - \frac{3V_0}{8\pi G} aK \quad (398)$$

Atau dalam momentum konjugat  $p_a$  dituliskan sebagai:

$$H_{gravitasi} = -\frac{2\pi G}{3V_0 a} p_a^2 - \frac{3V_0}{8\pi G} aK \quad (399)$$

Dalam formulasi ADM, jika diturunkan terhadap fungsi Lapse  $N$ , maka didapat bahwa Hamiltonian di atas menjadi bernilai nol sehingga merupakan kendala Hamiltonian:

$$H_{gravitasi} = -\frac{2\pi G}{3V_0 a} p_a^2 - \frac{3V_0}{8\pi G} aK \approx 0 \quad (400)$$

Dalam kehadiran materi, maka Hamiltonian di atas akan ditambahkan Hamiltonian materi dan hasilnya akan lenyap pula menggunakan persamaan Friedmann pertama:

$$H_{total} = H_{gravitasi} + H_{materi} = -\frac{2\pi G}{3V_0 a} p_a^2 - \frac{3V_0}{8\pi G} aK + aH_{materi} \approx 0 \quad (401)$$

Persamaan kendala Hamiltonian di atas dapat ditunjukkan setara dengan persamaan Friedmann pertama:

$$-\frac{2\pi G}{3V_0 a} p_a^2 - \frac{3V_0}{8\pi G} aK + aH_{materi} = 0 \quad (402)$$

Dengan mengembalikan definisi momentum konjugat:  $p_a = -\frac{3V_0}{4\pi G} a\dot{a}$ , maka:

$$\frac{3V_0}{8\pi G} a\dot{a}^2 + \frac{3V_0}{8\pi G} aK = V_0 a H_{materi}$$

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{K}{a^2} = \frac{8\pi G}{3a^2} H_{materi} \quad (403)$$

Karena parameter Hubble:  $H = \frac{\dot{a}}{a}$ , maka:

$$H^2 + \frac{K}{a^2} = \frac{8\pi G}{3a^2} H_{materi} \quad (404)$$

Yang mana merupakan persamaan Friedmann pertama.

### (b) Variabel Koneksi

Dalam formulasi koneksi gambaran mengenai isotropi dan homogenitas berbeda dari gambaran metrik, karena dalam LQC variable yang relevan adalah koneksi dan tetrad yang tidak bertransformasi terhadap transformasi difeomorfisme tetapi transformasi gauge. Transformasi gauge yang dimaksud adalah transformasi grup gauge  $G$  (seperti grup  $SL(2, \mathbb{C})$  untuk gravitasi di 4 dimensi Lorentzian atau grup  $SU(2)$  untuk spasial slice-nya di 3 dimensi) dan sebuah manifold, sebuah transformasi gauge adalah pemetaan:  $g: \mathcal{M} \rightarrow G$  dari manifold ke grup, yang mana diperantarai oleh koneksi dan triad:  $(A_a^i, E_i^a)$  di manifold. Keduanya bertransformasi sebagai:

$$(A', E') = (g^{-1} A g + g dg, g^{-1} E g) \quad (405)$$

Dalam LQC, koneksi dan tetrad didefinisikan sebagai berikut agar memenuhi transformasi di atas:

$$A_a = \tilde{c}^0 \omega_a^i \tau_i, \quad E^a = \tilde{p} \sqrt{\det({}^0 h)} E_i^a \tau^i \quad (406)$$

Dengan  ${}^0 h_{ab}$  adalah metrik di 3 dimensi spasial (fiducial metric) dari manifold  $\mathcal{M}$  dan  $\omega_a^i$  adalah co-triad serta  $\tau_i = -\frac{1}{2} \sigma_i$  dengan  $\sigma_i$  adalah matrik Pauli dan generator aljabar Lie  $\mathfrak{su}(2)$ .

Sehingga setiap pasangan  $(A', e')$  mengandung sejumlah pasangan bilangan kompleks  $(\tilde{c}, \tilde{p})$  yang dituliskan sebagai berikut:

$$A_a^i = \tilde{c} \delta_a^i, \quad E_i^a = \tilde{p} \delta_i^a \quad (407)$$

Dan untuk kasus model FRW, maka koneksi  $\tilde{c}$  dan triad  $\tilde{p}$  secara khusus dituliskan [14]:

$$|\tilde{p}| = \frac{a^2}{4}, \quad \tilde{c} = \tilde{\Gamma} + \frac{1}{2} \gamma \dot{a} = \frac{1}{2} (\sqrt{K} + \gamma \dot{a}) \quad (408)$$

Dengan  $\gamma$  adalah parameter Immirzi. Hubungan kurung Poisson keduanya koneksi  $\tilde{c}$  dan triad  $\tilde{p}$  memenuhi:

$$\{\tilde{c}, \tilde{p}\} = \frac{8\pi G\gamma}{3} V_0 \quad (409)$$

Dan bila volume  $V_0$  diserap ke dalam, maka dapat didefinisikan:

$$c = V_0^{1/3} \tilde{c}, \quad p = V_0^{2/3} \tilde{p} \quad \text{dan} \quad \Gamma = V_0^{1/3} \tilde{\Gamma} \quad (410)$$

Yang menyiratkan kuantisasi tanpa latar belakang seperti dalam formulasi holonomy flux algebra LQG. Dan diperoleh hubungan kurung Poisson (409) menjadi:

$$\{c, p\} = \frac{8\pi G\gamma}{3} \quad (411)$$

Selanjutnya kita akan tuliskan kendala Hamiltonian dalam variable  $(c, p)$ , yaitu:

$$\begin{aligned} H_{total} &= H_{gravitasi} + H_{materi} = -\frac{2\pi G}{3V_0 a} p a^2 - \frac{3V_0}{8\pi G} aK + H_{materi} \approx 0 \\ H_{total} &= -\frac{3V_0}{8\pi G} a\dot{a}^2 - \frac{3V_0}{8\pi G} aK + H_{materi} \approx 0 \\ H_{total} &= -\frac{3V_0}{8\pi G} \left( \frac{2}{V_0^{1/3}} \sqrt{|p|} \right) \left( \frac{2c}{\gamma V_0^{1/3}} - \frac{2\Gamma}{\gamma V_0^{1/3}} \right)^2 - \frac{3V_0}{8\pi G} \left( \frac{2}{V_0^{1/3}} \sqrt{|p|} \right) \left( \frac{2\Gamma}{V_0^{1/3}} \right)^2 + H_{materi} \\ &\approx 0 \\ H_{total} &= -\frac{3}{\pi G \gamma^2} \sqrt{|p|} (c - \Gamma)^2 - \frac{3}{\pi G} \sqrt{|p|} \Gamma^2 + H_{materi} \approx 0 \end{aligned} \quad (412)$$

Sehingga kita peroleh:

$$H_{total} = -\frac{3}{\pi G} \left( \frac{(c - \Gamma)^2}{\gamma^2} + \Gamma^2 \right) \sqrt{|p|} + H_{materi} \approx 0 \quad (413)$$

Hamiltonian total di atas berbeda dengan Hamiltonian gravitasi sebelumnya oleh factor 8, yang disebabkan normalisasi koordinat volume  $V_0$  dari bola 3 dimensi untuk kasus alam semesta tertutup  $K = 0$ .

Untuk Hamiltonian materi yang terdapat pula dalam persamaan Friedmann pertama, dapat dipilih kasus Hamiltonian medan skalar standar, yaitu (dapat variabel kanonik  $c$  dan  $p$ ):

$$H_{materi} = H_\phi(a, \phi, p_\phi) = \frac{1}{2} |p|^{-3/2} p_\phi^2 + |p|^{3/2} V(\phi) \quad (414)$$

Dengan  $\phi$  adalah medan scalar,  $p_\phi$  adalah momentum medan, dan potensial  $V(\phi)$ . Bila seluruh variabel di atas bersifat divergen maka persamaan diferensial yang dibangun tidak memiliki nilai data awal yang tidak well defined. Situasi ini akan berubah, ketika diperkenalkan variabel triad dibandingkan variabel metrik seperti sebelumnya. Selain itu dengan memperkenalkan variabel

baru, secara klasik tidak ada perubahan apapun dari teori sebelumnya, tetapi memiliki dampak di level kuantum.

(c) Variabel Holonomi

Untuk meninjau kasus kosmologi seperti dalam model FRW berdasarkan kendala Hamiltonian sebelumnya, maka diperlukan perumusan dari variabel metrik  $a$  dan  $p_a$  menjadi koordinat umum dan momentum sudutnya. Namun terdapat masalah dalam penggunaan variabel metrik ini, yaitu ketika  $a \rightarrow 0$ , maka didapat limit singularitas, begitu juga momentum ketika dipromosikan menjadi operator akan muncul singularitas serupa;  $\hat{p}_a \sim \frac{\partial}{\partial a}$ . Oleh karena itu, diperlukan penggantian variabel. Dalam LQC berbasis LQG, digunakan formulasi holonomi:

$$h_\gamma = P \exp \left( \int_\gamma dx A_a^i n^a \tau_i \right) \quad (415)$$

Dengan  $n^a = \frac{dx^a(t)}{dt}$  adalah unit tangen vektor di titik  $x^a$  dan  $\tau_i = -\frac{1}{2}\sigma_i$ , dimana  $\sigma_i$  adalah matrik Pauli. Selanjutnya menggunakan definisi koneksi sebelumnya dan set  $P = 1$ :

$$A_a^i = \tilde{c}\delta_a^i = \mu c \delta_a^i \quad (416)$$

Sehingga:

$$h_\gamma = \exp \left( \int_\gamma dx \mu c \delta_a^i n^a \tau_i \right) = \cos \left( \frac{\mu c}{2} \right) \mathbf{1} + 2 \sin \left( \frac{\mu c}{2} \right) (\delta_a^i n^a \tau_i) \quad (417)$$

Dengan  $\delta_a^i$  adalah triad fiducial untuk metrik spasial hypersurface dan factor  $\frac{1}{2}$  muncul sebagai kompensasi dari  $\tau_i = -\frac{1}{2}\sigma_i$ . Dalam bentuk matrik (menuliskan secara eksplisit definisi matrik Pauli), kita peroleh:

$$h_\gamma = \begin{bmatrix} \cos \left( \frac{\mu c}{2} \right) - i \sin \left( \frac{\mu c}{2} \right) & 0 \\ 0 & \cos \left( \frac{\mu c}{2} \right) + i \sin \left( \frac{\mu c}{2} \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-i\frac{\mu c}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\mu c}{2}} \end{bmatrix} \quad (418)$$

Elemen matrik  $e^{i\frac{\mu c}{2}}$  secara umum dapat dituliskan:  $e^{i\mu c}$  bekerja pada representasi fundamental grup SU(2) yang secara umum dituliskan:  $\exp(i\mu_j c)$ , dengan indeks  $j$  adalah ujung dari lintasan  $\gamma$  yang dievaluasi dan  $\mu_j$  bergantung pada panjang lintasan  $\gamma$ . Dalam bentuk elemen matrik di atas, maka representasi koneksi dapat dituliskan sebagai keadaan/states [13]:

$$\psi_{\{\mu_j, f_j\}}(c) = \sum_j f_j e^{i\mu_j c} \quad (419)$$

Dengan  $f_j \in \mathbb{C}, \mu_j \in \mathbb{R}$ . Inner produk antara 2 states diberikan oleh:

$$\langle \psi_{\mu_1} | \psi_{\mu_2} \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T dc \psi_{\mu_1}^* \psi_{\mu_2} \quad (420)$$

Selain itu, operator holomi mengkuantisasi  $e^{i\mu c}$  dengan membangun hubungan berikut:

$$\langle \psi_{\mu_1} | e^{i\mu c} \psi_{\mu_2} \rangle = \delta_{\mu_1, \mu + \mu_2} = \begin{cases} 1 & \text{jika } \mu = \mu_1 - \mu_2 \\ 0 & \text{selain itu} \end{cases} \quad (421)$$

(d) Kuantisasi

Seperti halnya dalam LQG, di LQC kedua state di atas:  $\psi_{\mu_1}$  dan  $\psi_{\mu_2}$  dapat berasal dari 2 jenis grap yang berbeda dan memberikan 2 bentuk momentum konjugat untuk  $\mu_1$  dan  $\mu_2$ . 2 state tersebut memenuhi sifat ortogonal:

$$\langle \psi_{\mu_i} | \psi_{\mu_j} \rangle = \delta_{\mu_i, \mu_j} = \begin{cases} 1 & \text{jika } \mu_i = \mu_j \\ 0 & \text{jika } \mu_i \neq \mu_j \end{cases} \quad (422)$$

Oleh karena basis state di atas bekerja untuk ruang-waktu isotropik dan homogen digambarkan oleh garis bilangan riil dilengkapi bukan dengan topologi kontinu biasa, tetapi dengan topologi diskrit. Karena fakta ini, maka tidak ada operator yang sesuai dengan koneksi  $\hat{c}$ . Oleh karena itu, ketika mengkuantisasi ekspresi yang melibatkan deret pangkat lebih tinggi dari operator  $\hat{c}$  dan operator tersebut harus dibangun dari ekspresi eksponensial koneksi.

Sebagai contoh  $\hat{c}^2$ , seperti yang ditunjukkan oleh kendala Hamiltonian. Ketika membangun operator  $\hat{c}^2$  ini kita tuliskan dalam eksponensial. Pertama kita definisikan:

$$c^2 = \frac{\sin^2(\mu c)}{\mu^2} + \mathcal{O}(\mu^4) \quad (423)$$

Dan bentuk  $\sin(\mu c)$  dapat dituliskan dalam bentuk eksponensial, yaitu:

$$\sin(\mu c) = \frac{e^{i\mu c} - e^{-i\mu c}}{2i} \quad (424)$$

Sehingga

$$\hat{c}^2 = \frac{\widehat{\sin^2(\mu c)}}{\mu^2} + \hat{\mathcal{O}}(\mu^4) = \frac{(e^{i\mu c} - e^{-i\mu c})^2}{4\mu^2} + \hat{\mathcal{O}}(\mu^4) \quad (425)$$

Dalam beberapa literatur dengan menggunakan persamaan terakhir (425) di atas untuk meregulasi kendala Hamiltonian [9].

(e) Keadaan Eigen dari Triad dan Kuantisasi Volume

Berdasarkan persamaan kurung Poisson sebelumnya  $\{c, p\}$ , selanjutnya kita promosikan kedua variable kanonik menjadi operator kuantum, yaitu:

$$[\hat{c}, \hat{p}] = \frac{8\pi G\gamma}{3} \quad (426)$$

Ini berimplikasi pada representasi koneksi dan momentum konjugatnya yang menjadi turunan terhadap  $c$  ketika dikenakan state  $\psi_\mu(c) = e^{i\mu c}$ :

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{8\pi G\gamma}{3} \frac{\partial}{\partial c} = -i \frac{8\pi\gamma l_p^2}{3} \frac{\partial}{\partial c} \quad (427)$$

Dengan  $l_p^2$  adalah panjang dalam skala Planck:  $l_p^2 = \frac{G\hbar}{c^3}$  ( $c$  disini adalah kelajuan Cahaya, dalam formulasi LQC disini kita set  $c = 1$ ). Sehingga aksi operator momentum terhadap basis  $\psi_\mu(c)$  kita dapatkan:

$$\begin{aligned} \hat{p}\psi_\mu &= -i \frac{8\pi\gamma l_p^2}{3} \frac{\partial}{\partial c} e^{i\mu c} \\ \hat{p}\psi_\mu &= \frac{8\pi\gamma l_p^2}{3} \mu \psi_\mu \end{aligned} \quad (428)$$

Atau dalam notasi braket:

$$\hat{p}|\mu\rangle = \frac{8\pi\gamma l_p^2}{3} \mu |\mu\rangle \quad (429)$$

Berdasarkan definisi geometri klasik [41], momentum  $p$  berhubungan langsung dengan unit volume:  $|p|^{3/2} = V$ , sehingga dengan mempromosikan momentum menjadi operator, maka diperoleh pula operator volume dalam LQC ini, yaitu:

$$\hat{V} = |\hat{p}|^{3/2} |\mu\rangle = \left( \frac{8\pi\gamma l_p^2}{3} \right)^{3/2} |\mu|^{3/2} |\mu\rangle$$

Atau

$$\hat{V} = \left( \frac{8\pi\gamma |\mu|}{3} \right)^{3/2} l_p^3 |\mu\rangle \quad (430)$$

Dapat dilihat persamaan (430) bahwa volume dalam unit Planck  $l_p^3$  dan  $|\mu|^{3/2}$  sebagai volume fisis ketika alam semesta dalam keadaan  $|\mu\rangle$ . Hasil ini penting karena ketika alam semesta seukuran

volume Planck, maka nilai volume yang terbatas ini akan memberikan batas dan menjadi resolusi singularitas. alam semesta yang berawal dari singularitas digantikan dengan alam semesta yang memental (baoucing) dari keruntuhan alam semesta sebelumnya.

(f) Regulasi Kendala Hamiltonian dalam Model FRW: Koreksi Kuantum Persamaan Friedmann

Sekarang kita regulasikan kendala Hamiltonian yang telah dirumuskan sebelumnya persamaan (55). Kendala Hamiltonian yang telah dirumuskan sebelum ditinjau untuk model FRW, yaitu:

$$H_{total} = -\frac{3}{\pi G} \left( \frac{(c - \Gamma)^2}{\gamma^2} + \Gamma^2 \right) \sqrt{|p|} + H_{materi} \approx 0 \quad (431)$$

Dengan Hamiltonian materi adalah medan scalar, persamaan (56):

$$H_{materi} = H_{\phi}(a, \phi, p_{\phi}) = \frac{1}{2} |p|^{-3/2} p_{\phi}^2 + |p|^{3/2} V(\phi) \quad (432)$$

Untuk kasus alam semesta datar/flat ( $K = 0 \rightarrow \Gamma = 0$ ) dan tiadanya potensial medan skalar, maka didapat kendala Hamiltonian efektif:

$$H_{total}^{eff} = -\frac{3}{\pi G \gamma^2} c^2 \sqrt{|p|} + \frac{1}{2} |p|^{-3/2} p_{\phi}^2 \approx 0 \quad (433)$$

Selanjutnya dapat kita definisikan variable baru, yaitu [9]:

$$b := \frac{c}{\sqrt{|p|}} \quad \text{dan} \quad v := \frac{|p|^{3/2}}{2\pi G} \quad (434)$$

Dan kedua variable di atas memenuhi hubungan kurung Poisson seperti  $\{c, p\} = \frac{8\pi G \gamma}{3}$ , yaitu:

$$\{b, v\} = 2\gamma \quad (435)$$

Sehingga kendala Hamiltonian efektif menjadi:

$$H_{total}^{eff} = -\frac{6}{\gamma^2} b^2 v + \frac{p_{\phi}^2}{4\pi G v} \approx 0 \quad (436)$$

Sekarang kita tinjau suku  $b^2$ . Pertama-tama tinjau  $c^2 = \frac{\sin^2(\mu c)}{\mu^2} + \mathcal{O}(\mu^4)$ , maka:

$$b^2 = \frac{\sin^2(\lambda b)}{\lambda^2} \quad (436)$$

Dengan  $\lambda = \mu \sqrt{|p|} = 4\sqrt{3}\pi \gamma l_p^2$ . Kembali ke kendala Hamiltonian efektif, jika kita definisikan kembali  $v = \gamma \hbar v$ , maka didapat:

$$H_{total}^{eff} = -\frac{6\hbar}{\gamma\lambda^2}v \sin^2(\lambda b) + \frac{1}{4\pi\gamma l_p^2} \frac{p_\phi^2}{v} \approx 0$$

$$\frac{6\hbar}{\gamma\lambda^2}v \sin^2(\lambda b) = \frac{1}{4\pi\gamma l_p^2} \frac{p_\phi^2}{v} \quad (437)$$

Dengan mendefinisikan volume fisis:

$$V := 2\gamma\pi\hbar Gv \quad (438)$$

Maka didapat:

$$\frac{3}{\pi G\gamma^2\lambda^2}V \sin^2(\lambda b) = \frac{p_\phi^2}{2V} \quad (439)$$

Karena  $\rho = \frac{p_\phi^2}{2V^2}$ , maka kita dapat peroleh:

$$\frac{3}{\pi G\gamma^2\lambda^2} \sin^2(\lambda b) = \rho$$

$$\sin(\lambda b) = \sqrt{\frac{\pi G\gamma^2\lambda^2\rho}{3}} \quad (440)$$

Dan

$$\cos(\lambda b) = \sqrt{1 - \sin^2(\lambda b)} = \sqrt{1 - \frac{\pi G\gamma^2\lambda^2\rho}{3}} \quad (441)$$

Untuk mendapatkan modifikasi persamaan Friedmann pertama dapat diperoleh dari persamaan Hamilton untuk volume dan b yang memenuhi:

$$\{b, V\} = \left( \frac{\partial b}{\partial b} (4\pi G\gamma) \frac{\partial V}{\partial V} - 4\pi G\gamma \frac{\partial V}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial V} \right) = 4\pi G\gamma \quad (442)$$

Sehingga untuk persamaan Hamilton bagi volume menjadi

$$\dot{V} = \{V, H_{total}^{eff}\} = -\frac{\partial H_{total}^{eff}}{\partial b} (4\pi G\gamma) \frac{\partial V}{\partial V} = -4\pi G\gamma \frac{\partial H_{total}^{eff}}{\partial b}$$

$$\dot{V} = \{V, H_{total}^{eff}\} = -4\pi G\gamma \frac{\partial}{\partial b} \left( -\frac{3}{\pi G\gamma^2\lambda^2}V \sin^2(\lambda b) + \frac{p_\phi^2}{2V} \right)$$

$$\dot{V} = \{V, H_{total}^{eff}\} = \frac{12}{\gamma\lambda}V \sin(\lambda b) \cos(\lambda b) \quad (443)$$

Dapat kita peroleh langsung modifikasi persamaan Friedmann menurut LQC menggunakan definisi parameter Hubble:  $H = \dot{V}/3V$ , di dapat:

$$H = \frac{\dot{V}}{3V} = \frac{4}{\gamma\lambda} \sin(\lambda b) \cos(\lambda b) = \frac{4}{\gamma\lambda} \left( \sqrt{\frac{\pi G \gamma^2 \lambda^2 \rho}{3}} \right) \left( \sqrt{1 - \frac{\pi G \gamma^2 \lambda^2 \rho}{3}} \right)$$

$$H = 4 \sqrt{\frac{\pi G \rho}{3} \left( 1 - \frac{\pi G \gamma^2 \lambda^2 \rho}{3} \right)}$$
(444)

Sehingga kita peroleh koreksi kuantum dari medan gravitasi untuk persamaan Friedmann pertama, yaitu:

$$H^2 = \frac{16\pi G \rho}{3} \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}} \right)$$
(445)

Dengan  $\rho_{\max} = \frac{3}{\pi G \gamma^2 \lambda^2}$ . Persamaan Friedmann pertama termodifikasi inilah yang merupakan persamaan kelajuan ekspansi alam semesta (ftat) dengan koreksian kuantum dari LQC. Dapat dilihat bahwa koreksi kuantum untuk gravitasi muncul dalam suku kedua yaitu  $\rho^2$  dengan tanda negative yang menunjukkan modifikasi dari persamaan Friedmann pertama. Dalam teori string untuk kosmologi diperoleh modifikasi dengan penambahan suku  $\rho^2$  tetapi dengan tanda positif, yang menunjukkan bahwa terdapat dimensi ekstra seperti waktu (*time like*). Analisis lebih lanjut mengenai ini dapat ditelaah pada ref [4].

Dari persamaan Friedmann termodifikasi di atas dapat disimpulkan bahwa factor skala alam semesta akan memantul (bounces) ketika  $\rho = \rho_{\max} \approx 0,41\rho_{\text{Planck}}$ . Tidak seperti teori FRW klasik, dimana kelajuan parameter Hubble yang bertumbuh selama evolusi tetapi terbatas pada nilai maksimum:  $H_{\max} = \frac{1}{2\gamma\lambda}$  yang bersesuaian dengan  $\rho = \frac{1}{2}\rho_{\max}$ . Hal yang perlu dicatat disini bahwa dinamika efektif yang diprediksikan berupa bounce ketika rapat energi sama dengan rapat energi maksimum merupakan solusi eksak dari LQC. Menggunakan perhitungan numerik berdasarkan state Gaussian [9], didapatkan bahwa lintasan efektif LQC bersesuaian dengan ketelitian yang tinggi evolusi kuantum untuk seluruh skala, seperti ditunjukkan gambar berikut [9]:

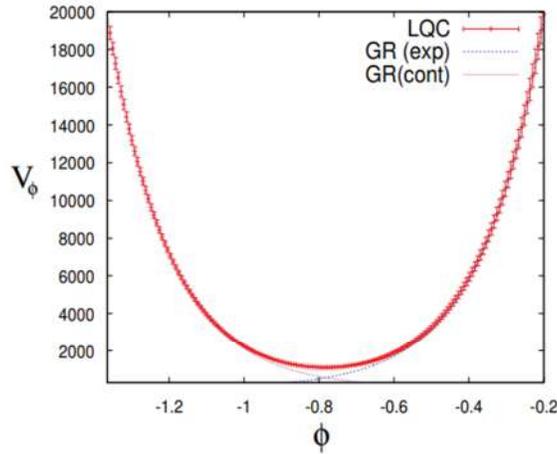
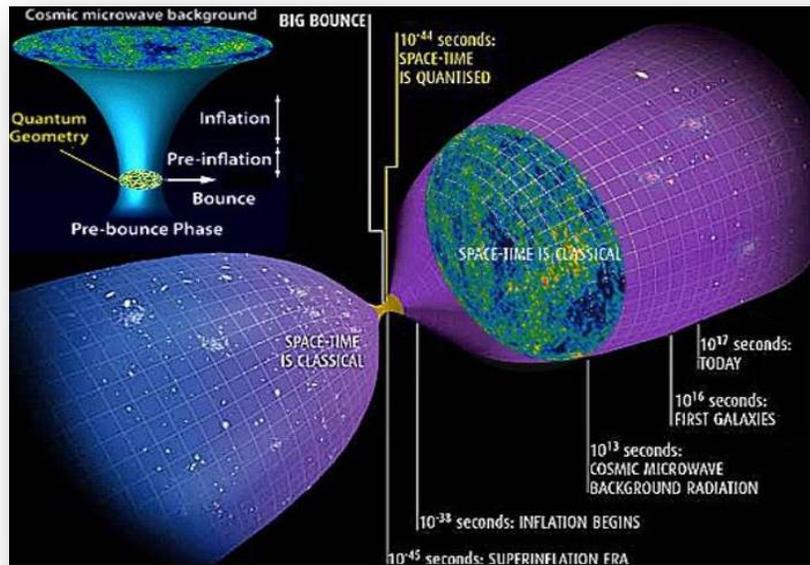


Fig. 1. A comparison of the quantum evolution in LQC for the volume observable (along with its dispersion) and the classical trajectories is shown. Unlike the general relativistic trajectories which lead to a singularity in the future evolution for the contracting branch and the past evolution for the expanding branch, the LQC trajectory is non-singular. The LQC trajectory bounces in the Planck regime and the loop quantum universe evolves in a non-singular way. The dispersions across the bounce are correlated, and their asymmetry depends on the method of initial state construction (see Ref. [10] for details of different methods). The state retains its peakedness properties in the above evolution, since the relative dispersion approaches a constant value at large volumes.

(Sumber: [9])

Adapun ilustrasi alam semesta bounce yang menggantikan gambaran alam semesta big-bang diilustrasikan sebagai berikut:



Gambar: Alam semesta bounce dari alam semesta sebelumnya yang mengalami keruntuhan gravitasi (Sumber: <https://steemit.com/science/@starlord6414/before-the-big-bang-or-ch-4-the-bouncing-universe>)

### 3. REFERENSI

- [1] Einstein, A. 1916. Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften (Berlin), seite 688-696 (the quote appears on p 696)
- [2] Ashtekar, Abhay and Eugenio Bianchi. 2021. A Short Review of Loop Quantum Gravity. Reports on Progress Physics: Key Issues Review.
- [3] Ashtekar, Abhay and Jerzy Lewandowski 2004 Background independent quantum gravity: A status report, Class. Quant. Grav. 21 R53-R152
- [4] Rovelli, Carlo 2004 Quantum Gravity. (Cambridge: Cambridge UP)
- [5] Rovelli, Carlo and Francesca Vidotto. 2014 Covariant Loop Quantum Gravity (Cambridge: Cambridge UP)
- [6] Perez, Alejandro. 2013. The Spin-Foam Approach to Quantum Gravity. Living Rev. Relativity, 16, (2013), 3
- [7] Thiemann, Thomas 2007 Introduction to Modern Canonical Quantum General Relativity. (Cambridge: Cambridge UP)
- [8] Gambini, Rodolfo and Jorge Pullin. 2009. Loops, Knots, Gauge Theories and Quantum Gravity. Cambridge University Press.
- [9] Ashtekar, Abhay and Jorge Pullin. 2017. Loop Quantum Gravity: The First 30 Years ed. A. Ashtekar and J. Pullin. Singapore: World Scientific.
- [10] Zen, Freddy Permana and Seramika Ariwahjoedi. 2019. A Brief Review on Canonical Loop Quantum Gravity: The Kinematical Part. Journal of Physics: Conference Series.1354012002
- [11] Dona, Pietro, and Simone Speziale. 2010. Introductory lectures to loop quantum gravity. [arXiv:1007.0402v2](https://arxiv.org/abs/1007.0402v2)
- [12] Frisoni, Pietropaolo. 2023. Introduction to Loop Quantum Gravity: Rovelli's lectures on LQG. [arXiv:2305.12215](https://arxiv.org/abs/2305.12215)

- [13] Bojowald, Martin. 2011. *Canonical Gravity and Applications in Cosmology, Black Holes, and Quantum Gravity*. Cambridge University Press: UK
- [14] Bojowald, Martin. 2008. Loop Quantum Cosmology. *Living Rev. Relativity*, 11, (2008), 4
- [15] Banerjee, Kinjal, Gianluca Calcagni and Mercedes Martin Benito. 2012. Introduction to Loop Quantum Cosmology. *SIGMA* 8 (2012), 016, 73 pages
- [16] Ashtekar, Abhay, and Parampreet Singh. 2011. Loop quantum cosmology: a status report. *Class. Quantum Grav.* **28** (2011) 213001 (122pp)
- [17] Modesto, Leonardo. 2006. Loop quantum black hole. *Class. Quantum Grav.* **23** (2006) 5587–5601
- [18] Modesto, Leonardo. 2010. Semiclassical Loop Quantum Black Hole. *Int J Theor Phys* (2010) 49: 1649–1683
- [19] Zhang, Xiandong. 2023. Loop quantum black hole. *Universe* **2023**, 9, 313. <https://doi.org/10.3390/universe9070313>
- [20] Azreg-Aïnou, Mustapha. 2014. Generating rotating regular black hole solutions without complexification. *PHYSICAL REVIEW D* 90, 064041 (2014)
- [21] Azreg-Aïnou, Mustapha. 2014. From static to rotating to conformal static solutions: rotating imperfect fluid wormholes with(out) electric or magnetic field. *Eur. Phys. J. C* (2014) 74:2865.
- [22] Contreras, Ernesto, J. M. Ramirez–Velasquez, Ángel Rincón, Grigoris Panotopoulos, and Pedro Bargueño. 2019. Black hole shadow of a rotating polytropic black hole by the Newman–Janis algorithm without complexification. *Eur. Phys. J. C* (2019) 79:802
- [23] Liu, Cheng, Tao Zhu, Qiang Wu, Kimet Jusufi, Mubasher Jamil, Mustapha Azreg-Aïnou, and Anzhong Wang. 2020. Shadow and quasinormal modes of a rotating loop quantum black hole. *PHYSICAL REVIEW D* 101, 084001 (2020).

- [24] Kelly, Jarod George, Robert Santacruz, and Edward Wilson-Ewing. 2020. Effective loop quantum gravity framework for vacuum spherically symmetric spacetimes. *Physical Review D*, 102(10). doi:10.1103/physrevd.102.106024
- [25] Bodendorfer, Norbert, Fabio M Mele and Johannes Münch. 2019. Effective quantum extended spacetime of polymer Schwarzschild black hole. *Class. Quantum Grav.* 36 (2019) 195015 (46pp)
- [26] Han, Muxin and Hongguang Liu. 2022. Improved effective dynamics of loop-quantum-gravity black hole and Nariai limit. *Class. Quantum Grav.* 39 (2022) 035011 (49pp)
- [27] Gambini, Rodolfo, Javier Olmedo, and Jorge Pullin. 2020. Spherically symmetric loop quantum gravity: analysis of improved dynamics. *Class. Quantum Grav.* 37 205012
- [28] Ashtekar, Abhay, Javier Olmedo, and Parampreet Singh. 2018. Quantum extension of the Kruskal spacetime. *Phys. Rev. D* **98**, 126003 — DOI: [10.1103/PhysRevD.98.126003](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.98.126003)
- [29] Farshid Soltani. 2023. A spin foam framework for the black-to-white hole transition. The Sixteenth Marcel Grossmann Meeting, pp. 4045-4061 (2023)
- [30] Garc'ia-Islas, J Manuel. 2008. BTZ black hole entropy: a spin foam model Description. *Class. Quantum Grav.* 25 (2008) 245001 (8pp)
- [31] Garc'ia-Islas, J Manuel. 2008. Toward a spin foam model description of black hole entropy. *Class. Quantum Grav.* 25 (2008) 238001 (4pp)
- [32] Christodoulou, Marios, Fabio D'Ambrosio, and Charalampos Theofilis. 2023. Geometry Transition in Spinfoams. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2302.12622>
- [33] D'Ambrosio, Fabio, Marios Christodoulou, Pierre Martin-Dussaud, Carlo Rovelli, and Farshid Soltani. 2021. End of a black hole's evaporation. *Phys. Rev. D* 103, 106014 (2021)
- [34] Soltania, Farshid, Carlo Rovelli, and Pierre Martin-Dussaud. 2021. The End of a Black Hole's Evaporation – II. *Phys. Rev. D* 104, 066015 (2021)
- [35] Han, Muxin, Carlo Rovelli, and Farshid Soltani. 2023. On the geometry of the black-to-white hole transition within a single asymptotic region. *Phys. Rev. D* 107, 064011 (2023)

- [36] Dussaud, Pierre Martin. 2019. A Primer of group theory for Loop Quantum Gravity and spin-foams. *General Relativity and Gravitation* (2019) 51:110
- [37] Varshalovich, D.A., Moskalev, A.N., Khersonskii, V.K.: *Quantum Theory of Angular Momentum*. World Scientific, Singapore (1987)
- [38] Ashtekar, Abhay and Jerzy Lewandowski. *Quantum Theory of Geometry II: Volume operators*. *Adv. Theor. Math. Phys.* 1 (1997) 388-429 (1997).
- [39] Ashtekar, Abhay, Tomasz Pawłowski, Parampreet Singh, and Kevin Vandersloot. Loop quantum cosmology of  $k = 1$  FRW models. *Physical Review D* 75, 024035 (2007).
- [40] Corichi, Alejandro and Asieh Karami. Loop quantum cosmology of the  $k = 1$  FRW: A tale of two bounces. *Physical Review D* 84, 044003 (2011).
- [41] Ashtekar, Abhay, Martin Bojowald, and Jerzy Lewandowski. Mathematical structure of loop quantum cosmology. *Advance of Theoretical Physics*. 7 (2003) 233-268 (2003).
- [43] Smolin, Lee. Quantum gravity with a positive cosmological constant. <http://arxiv.org/abs/hep-th/0209079v1> (2002).

## Lampiran A: Persamaan-Persamaan Kurvatur

Geometri pada manifold dapat dipandang dengan dua cara, yaitu:

- (1) Dengan menganggap manifold yang ditinjau berdiri sendiri dan bukan merupakan bagian dari manifold yang lebih besar (tidak di embedding dalam manifold lainnya),
- (2) Dengan menganggap manifold merupakan bagian/submanifold/hypersurface dari manifold lainnya

Keduanya akan memberikan definisi kurvatur yang berbeda.

Sekarang kita tinjau 2 definisi kurvatur: kurvatur intrinsik dan kurvatur ekstrinsik. Kurvatur intrinsik didefinisikan sebagai perubahan vektor secara paralel (paralel transport) dari satu titik ke titik lainnya dengan lintasan yang berbeda:

$$R_{bcd}^a \omega_a \equiv [\nabla_b, \nabla_c] \omega_d$$

Dan kurvatur ekstrinsil didefinisikan sebagai gradien vektor normal di hypersurface sepanjang permukaan manifold yang ditinjau:

$$K_{ab} \equiv \nabla_a n_b$$

Dalam tinjauan kita untuk manifold  $\mathcal{M}$  yang telah difoliasi menjadi  $\mathcal{M} \cong \mathbb{R} \times \Sigma$ , sehingga koordinat pada  $\mathcal{M}$  diparameterisasi oleh  $x^\mu = (t, x^a)$ . Dalam formulasi ADM telah ditentukan induced metrik  $h$  untuk permukaan spasial  $\Sigma$  yang merupakan manifold yang embedding di  $\mathcal{M}$ . Hubungan turunan kovarian di permukaan spasial  $\Sigma$  ( $D_a$ ) dengan turunan kovarian di manifold  $\mathcal{M}$  ( $\nabla_a$ ) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$D_b T^{a_1 \dots a_n}_{c_1 \dots c_n} \equiv h_{1f_1}^a \dots h_{nf_n}^a h_{1c_1}^d \dots h_{mc_m}^d h_b^e \nabla_e T^{f_1 \dots f_n}_{d_1 \dots d_n}$$

Sekarang kita memiliki turunan kovarian di permukaan spasial  $\Sigma$ , yaitu  $D_a$  dibandingkan  $\nabla_a$ . Sifat kompatibilitas induced metrik  $h$  dapat dicek sebagai berikut:

$$D_a h_{bc} = h_b^d h_c^e h_a^f \nabla_f h_{de} = h_b^d h_c^e h_a^f \nabla_f (g_{de} + n_d n_e) = h_b^d h_c^e h_a^f \nabla_f g_{de} + h_b^d h_c^e h_a^f \nabla_f (n_d n_e) = 0$$

Suku pertama akan lenyap karena sifat kompatibilitas metrik  $\nabla_a g_{bc} = 0$ , sedangkan suku kedua akan lenyap karena hubungan berikut:  $h_b^a n_a = 0$ .

Selanjutnya kita definisikan kurvatur di permukaan spasial  $\Sigma$ , sebagai:

$${}^{(3)}R_{bcd}^a \omega_a \equiv [D_b, D_c] \omega_d$$

Dan kurvatur ekstrinsik sebagai:

$$K_{ab} \equiv D_a n_b = h_b^c h_a^d \nabla_d n_c$$

Kurvatur ekstrinsik ini memiliki beberapa sifat, yaitu:

1.  $K_{ab} = h_a^c \nabla_c n_b$

Dibuktikan sebagai berikut:

$$K_{ab} = h_b^c h_a^d \nabla_d n_c = (g_b^c + n^c n_b) h_a^d \nabla_d n_c = h_a^d \nabla_d n_b + n^c n_b h_a^d \nabla_d n_c$$

Sekarang kita evaluasi bagian berikut kedua:  $n^c \nabla_d n_c$

$$n^c \nabla_d n_c = \frac{1}{2} (n^c \nabla_d n_c + n_c \nabla_d n^c) = \frac{1}{2} \nabla_d (n^c n_c) = 0$$

Sehingga diperoleh  $K_{ab} = h_a^c \nabla_c n_b$

2.  $K_{ab} = K_{ba}$  (Memiliki sifat simetrik)

Kita definisikan 2 vektor singgung di permukaan spasial  $\Sigma$  yaitu:  $Y^a \nabla_a = f^a \frac{\partial}{\partial x^a}$  dan  $Z^a \nabla_a = g^a \frac{\partial}{\partial x^a}$ , jika operasikan mereka dalam hubungan komutator, maka:

$$[Y, Z]^a \nabla_a = \left( f^a \frac{\partial g^b}{\partial x^a} - g^a \frac{\partial f^b}{\partial x^a} \right) \frac{\partial}{\partial x^b}$$

Atau  $[Y, Z]^a = \left( f^b \frac{\partial g^a}{\partial x^b} - g^b \frac{\partial f^a}{\partial x^b} \right) = Y^b \nabla_b Z^a - Z^b \nabla_b Y^a$  dan jika kalikan dengan vektor normal  $n_a$  maka akan bernilai nol (karena vektor normal dan vektor singgung saling tegak lurus:  $n_a Y^a = n_a Z^a = 0$ ), maka:

$$n_a [Y, Z]^a = 0 = n_a (Y^b \nabla_b Z^a - Z^b \nabla_b Y^a)$$

Menggunakan  $\nabla_b (n_a Z^a) = 0$ , maka  $n_a \nabla_b Z^a = -Z^a \nabla_b n_a$ , sehingga:

$$n_a [Y, Z]^a = 0 = -Y^b Z^a \nabla_b n_a + Z^b Y^a \nabla_b n_a = -(Y^b Z^a - Z^b Y^a) \nabla_b n_a$$

Sehingga  $Y^b Z^a = Z^a Y^b$ , hasil ini menunjukkan pertukaran indeks a dan b pada hubungan di atas bersifat simetrik. Oleh karena itu  $\nabla_b n_a = \nabla_a n_b$  dan karena  $\nabla_b n_a$  merupakan bagian dari definisi kurvatur ekstrinsik  $K_{ab} = h_a^c \nabla_c n_b$ , maka ini berakibat sifat simetrik pula untuk kurvatur ekstrinsik:

$$K_{ab} = K_{ba}$$

3.  $K_{ab} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_n h_{ab}$  (kurvatur ekstrinsik dapat dinyatakan dalam bentuk turunan Lie)

Pertama-tama kita tuliskan bentuk turunan Lie untuk induced metrik  $h$ , yaitu:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_n h_{ab} &= n^c \nabla_c h_{ab} + h_{cb} \nabla_a n^c + h_{ac} \nabla_b n^c \\ \mathcal{L}_n h_{ab} &= n^c \nabla_c (g_{ab} + n_a n_b) + (g_{cb} + n_c n_b) \nabla_a n^c + (g_{ac} + n_a n_c) \nabla_b n^c \\ \mathcal{L}_n h_{ab} &= n^c \nabla_c (n_a n_b) + g_{cb} \nabla_a n^c + n_c n_b \nabla_a n^c + g_{ac} \nabla_b n^c + n_a n_c \nabla_b n^c\end{aligned}$$

Karena  $n_c \nabla_a n^c = 0$  dan  $\nabla_a n_b = \nabla_a (g_{cb} n^c) = g_{cb} \nabla_a n^c$ , maka:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_n h_{ab} &= n^c n_b \nabla_c n_a + n^c n_a \nabla_c n_b + \nabla_a n_b + \nabla_b n_a \\ \mathcal{L}_n h_{ab} &= (h_b^c - g_b^c) \nabla_c n_a + (h_a^c - g_a^c) \nabla_c n_b + \nabla_a n_b + \nabla_b n_a \\ \mathcal{L}_n h_{ab} &= h_b^c \nabla_c n_a - g_b^c \nabla_c n_a + h_a^c \nabla_c n_b - g_a^c \nabla_c n_b + \nabla_a n_b + \nabla_b n_a \\ \mathcal{L}_n h_{ab} &= 2h_b^c \nabla_c n_a - \nabla_b n_a - \nabla_a n_b + \nabla_a n_b + \nabla_b n_a \\ \mathcal{L}_n h_{ab} &= 2K_{ab}\end{aligned}$$

Sehingga:

$$K_{ab} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_n h_{ab}$$

4. Terakhir adalah:

$$K_{ab} = \frac{1}{2N} (\dot{h}_{ab} - D_a N_b - D_b N_a)$$

Menggunakan definisi dari turunan Lie terhadap waktu:

$$\dot{T}^{a_1 \dots a_n}_{c_1 \dots c_n} := h_{1f_1}^{a_1} \dots h_{fn}^{a_n} h_{1c_1}^d \dots h_{cm}^d \mathcal{L}_t T^{f_1 \dots f_n}_{d_1 \dots d_n}$$

Untuk kasus  $\dot{h}_{ab}$ , maka:  $\dot{h}_{ab} = h_a^c h_b^d \mathcal{L}_t h_{cd}$  yang merupakan evolusi  $h$  sepanjang lintasan  $t^a$ . Dengan cara yang sama untuk kasus spasial sepanjang vektor pergeseran  $N^a$ , yaitu:

$$D_{b_1 \dots b_n} T^{a_1 \dots a_n}_{c_1 \dots c_n} + D_{c_1 \dots c_n} T^{a_1 \dots a_n}_{b_1 \dots b_n} := h_{1f_1}^{a_1} \dots h_{fn}^{a_n} h_{1c_1}^d \dots h_{cm}^d \mathcal{L}_N T^{f_1 \dots f_n}_{d_1 \dots d_n}$$

Menggunakan keduanya, maka:

$$\begin{aligned}K_{ab} &= \frac{1}{2} \mathcal{L}_n h_{ab} = \frac{1}{2N} \mathcal{L}_n (N h_{ab}) \\ K_{ab} &= \frac{1}{2N} (N n^c \nabla_c h_{ab} + h_{ac} \nabla_b (N n^c) + h_{cb} \nabla_a (N n^c))\end{aligned}$$

Menggunakan  $N n^c = t^c - N^c$ , maka

$$\begin{aligned}K_{ab} &= \frac{1}{2N} ((t^c - N^c) \nabla_c h_{ab} + h_{ac} \nabla_b (t^c - N^c) + h_{cb} \nabla_a (t^c - N^c)) \\ K_{ab} &= \frac{1}{2N} (t^c \nabla_c h_{ab} + h_{ac} \nabla_b t^c + h_{cb} \nabla_a t^c - N^c \nabla_c h_{ab} - h_{ac} \nabla_b N^c - h_{cb} \nabla_a N^c)\end{aligned}$$

Sisipkan  $h_a^e h_b^f$ :

$$K_{ab} = \frac{1}{2N} (h_a^e h_b^f t^c \nabla_c h_{ef} + h_a^e h_b^f h_{ec} \nabla_f t^c + h_a^e h_b^f h_{cf} \nabla_e t^c - h_a^e h_b^f N^c \nabla_c h_{ef} - h_a^e h_b^f h_{ec} \nabla_f N^c - h_a^e h_b^f h_{cf} \nabla_e N^c)$$

Sehingga:

$$K_{ab} = \frac{1}{2N} h_a^e h_b^f (\mathcal{L}_t h_{ef} - \mathcal{L}_N h_{ef})$$

Sekarang kita tinjau masing-masing bagian: Bagian kesatu:  $h_a^e h_b^f \mathcal{L}_t h_{ef}$ , menggunakan definisi turunan Lie terhadap waktu di atas didapat:  $h_a^e h_b^f \mathcal{L}_t h_{ef} = \dot{h}_{ab}$ . Dan bagian kedua:  $h_a^e h_b^f \mathcal{L}_N h_{ef}$ , menggunakan definisi turunan Lie terhadap vektor pergeseran  $N^a$  di atas didapat:  $h_a^e h_b^f \mathcal{L}_N h_{ef} = D_a N_b + D_b N_a$ , sehingga terbukti:

$$K_{ab} = \frac{1}{2N} (\dot{h}_{ab} - D_a N_b - D_b N_a)$$

Sekarang kita akan beralih pada penurunan berbagai hubungan geometri yang dibutuhkan dalam merumuskan teori relativitas umum dalam versi kanonik atau formulasi ADM, yaitu:

### 1. Persamaan Gauss

Pertama kita tinjau definisi kurvatur intrinsik:

$${}^{(3)}R_{bcd}^a \omega_a \equiv [D_b, D_c] \omega_d = D_b D_c \omega_d - D_c D_b \omega_d$$

Dengan bagian pertama persamaan di atas:

$$D_b D_c \omega_d = D_b (h_a^e h_c^f \nabla_f \omega_e) = h_a^i h_c^h h_b^g h_h^f \nabla_g (h_i^e h_h^f \nabla_f \omega_e)$$

$$D_b D_c \omega_d = h_a^i h_c^h h_b^g h_h^f \nabla_g h_i^e \nabla_f \omega_e + h_a^i h_c^h h_b^g h_i^e \nabla_g h_h^f \nabla_f \omega_e + h_a^i h_c^h h_b^g h_i^e h_h^f \nabla_g \nabla_f \omega_e$$

Karena  $h_i^e = g_i^e + n^e n_i$ , maka

$$D_b D_c \omega_d = h_a^i h_c^h h_b^g h_h^f \nabla_g (g_i^e + n^e n_i) \nabla_f \omega_e + h_a^i h_c^h h_b^g h_i^e \nabla_g (g_h^f + n^f n_h) \nabla_f \omega_e + h_a^i h_c^h h_b^g h_i^e h_h^f \nabla_g \nabla_f \omega_e$$

Dengan bagian pertama  $D_b D_c \omega_d$ , yaitu:

$$h_a^i h_c^h h_b^g h_h^f \nabla_g (g_i^e + n^e n_i) \nabla_f \omega_e = h_a^i h_c^h h_b^g h_h^f \nabla_g (n^e n_i) \nabla_f \omega_e$$

$$h_a^i h_c^h h_b^g h_h^f \nabla_g (g_i^e + n^e n_i) \nabla_f \omega_e = h_a^i h_c^h h_b^g h_h^f (\nabla_g n^e + \nabla_g n_i) \nabla_f \omega_e$$

$$h_a^i h_c^h h_b^g h_h^f \nabla_g (g_i^e + n^e n_i) \nabla_f \omega_e = h_a^i h_c^h h_h^f h_b^g n_i \nabla_g n^e \nabla_f \omega_e + h_a^i h_c^h h_h^f h_b^g n^e \nabla_g n_i \nabla_f \omega_e =$$

Menggunakan:  $K_{ab} = h_a^c \nabla_c n_b$  dan  $h_a^i n_i = n^e \omega_e = 0$ , maka:

$$\begin{aligned} h_d^i h_c^h h_b^g h_n^f \nabla_g (g_i^e + n^e n_i) \nabla_f \omega_e &= h_d^i n_i h_c^f K_b^e \nabla_f \omega_e + h_d^i h_c^f n^e K_{ib} \nabla_f \omega_e \\ &= h_d^i h_c^f n^e K_{ib} \nabla_f \omega_e \\ h_d^i h_c^h h_b^g h_n^f \nabla_g (g_i^e + n^e n_i) \nabla_f \omega_e &= -h_d^i \omega_e K_{ib} h_c^f \nabla_f n^e = -K_{ab} K_c^e \omega_e \end{aligned}$$

Selanjutnya untuk bagian kedua  $D_b D_c \omega_d$ , yaitu:

$$\begin{aligned} h_d^i h_c^h h_b^g h_i^e \nabla_g (g_h^f + n^f n_h) \nabla_f \omega_e &= h_d^i h_c^h h_b^g h_i^e \nabla_g (n^f n_h) \nabla_f \omega_e \\ h_d^i h_c^h h_b^g h_i^e \nabla_g (g_h^f + n^f n_h) \nabla_f \omega_e &= h_d^i h_c^h h_b^g h_i^e n_h \nabla_g n^f \nabla_f \omega_e + h_d^i h_c^h h_b^g h_i^e n^f \nabla_g n_h \nabla_f \omega_e \end{aligned}$$

Menggunakan:  $K_{cg} = h_c^h \nabla_g n_h$  dan  $h_a^i n_i = n^e \omega_e = 0$ , maka:

$$h_d^i h_c^h h_b^g h_i^e \nabla_g (g_h^f + n^f n_h) \nabla_f \omega_e = h_d^i n^f K_{cb} \nabla_f \omega_e$$

Sehingga kita dapatkan:

$$\begin{aligned} {}^{(3)}R_{bcd}^a \omega_a &= D_b D_c \omega_d - D_c D_b \omega_d \\ {}^{(3)}R_{bcd}^a \omega_a &= (-K_{ab} K_c^e \omega_e + h_d^e n^f K_{cb} \nabla_f \omega_e + h_d^i h_c^h h_b^g h_i^e h_n^f \nabla_g \nabla_f \omega_e) \\ &\quad - (-K_{ac} K_b^e \omega_e + h_d^e n^f K_{bc} \nabla_f \omega_e + h_d^i h_b^h h_c^g h_i^e h_n^f \nabla_g \nabla_f \omega_e) \\ {}^{(3)}R_{bcd}^a \omega_a &= h_b^f h_c^g h_d^e \nabla_f \nabla_g \omega_e - h_b^f h_c^g h_d^e \nabla_g \nabla_f \omega_e + K_{ac} K_b^e \omega_e - K_{ab} K_c^e \omega_e \\ &\quad + h_d^e n^f K_{cb} \nabla_f \omega_e - h_d^e n^f K_{bc} \nabla_f \omega_e \\ {}^{(3)}R_{bcd}^a \omega_a &= h_b^f h_c^g h_d^e [\nabla_f, \nabla_g] \omega_e + K_{ac} K_b^e \omega_e - K_{ab} K_c^e \omega_e \end{aligned}$$

Kita dapatkan persamaan Gauss, yaitu:

$${}^{(3)}R_{bcd}^a = h_b^f h_c^g h_d^h h_i^a R_{fgh}^i + K_{ac} K_b^a - K_{ab} K_c^a$$

Bila kita kontrasikan indeks a dan c kemudian kalikan dengan  $h^{bd}$ , maka:

$$\begin{aligned} h^{bd} {}^{(3)}R_{bd}^a &= h^{bd} h_b^f h_d^h R_{fgh}^a + h^{bd} K_{da} K_b^a - h^{bd} K_{db} K_a^a \\ {}^{(3)}R &= h^{ab} h^{cd} R_{abcd} + K_a^b K_b^a - (K_a^a)^2 \end{aligned}$$

Dengan menggunakan definisi:  $h^{ab} = g^{ab} + n^a n^b$ , maka:

$$\begin{aligned} {}^{(3)}R &= (g^{ab} + n^a n^b)(g^{cd} + n^c n^d) R_{abcd} + K_a^b K_b^a - (K_a^a)^2 \\ {}^{(3)}R &= (g^{ab} g^{cd} + g^{ab} n^c n^d + g^{cd} n^a n^b + n^a n^b n^c n^d) R_{abcd} + K_a^b K_b^a - (K_a^a)^2 \\ {}^{(3)}R &= g^{ab} g^{cd} R_{abcd} + 2g^{ab} n^c n^d R_{abcd} + n^a n^b n^c n^d R_{abcd} + K_a^b K_b^a - (K_a^a)^2 \\ {}^{(3)}R &= R + 2n^a n^b R_{ab} + n^a n^b n^c n^d R_{abcd} + K_a^b K_b^a - (K_a^a)^2 \end{aligned}$$

Suku  $n^a n^b n^c n^d R_{abcd}$  lenyap karena sifat simetri tensor Riemann dan menggunakan definisi:  $-n^a n^b g_{ab} = 1$ , maka:

$${}^{(3)}R = -n^a n^b g_{ab} R + 2n^a n^b R_{ab} + K_a^b K_b^a - (K_a^a)^2$$

$${}^{(3)}R = 2n^a n^b \left( R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R \right) + K_a^b K_b^a - (K_a^a)^2$$

Dimana  $R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R \equiv G_{ab}$  dikenal sebagai tensor Einstein, maka kita dapat persamaan Gauss-Codazzi:

$${}^{(3)}R - K_a^b K_b^a + (K_a^a)^2 = 2n^a n^b G_{ab}$$

Dengan tensor Einstein dapat digantikan dengan tensor Energi-Momentum berdasarkan persamaan medan Einstein:  $G_{ab} = 8\pi G T_{ab}$ .

Berdasarkan persamaan diatas pula, jika metrik  $g_{\mu\nu}$  memenuhi kendala  $H = H^a = 0$  untuk setiap *hypersurface*, maka 10 persamaan medan Einstein akan memenuhi  $G_{ab} = 0$ . Hal ini berarti dinamika ruang-waktu dalam relativitas umum terdapat dalam 4 kendala  $H = H^a = 0$ .

## 2. Persamaan Codazzi

Persamaan Codazzi dituliskan sebagai berikut:

$$h_e^a h_f^b h_g^c R_{abcd} n^d = D_e K_{fg} - D_f K_{eg}$$

Kita tinjau terlebih dahulu sisi sebelah kiri persamaan di atas:

$$h_e^a h_f^b h_g^c R_{abcd} n^d = h_e^a h_f^b h_g^c [\nabla_a, \nabla_b] n_c = h_e^a h_f^b h_g^c (\nabla_a (\nabla_b n_c)) - h_e^a h_f^b h_g^c (\nabla_b (\nabla_a n_c))$$

$$h_e^a h_f^b h_g^c R_{abcd} n^d = h_e^a h_f^b h_g^c \left( \nabla_a (g_b^h \nabla_h n_c) \right) - h_e^a h_f^b h_g^c \left( \nabla_b (g_a^i \nabla_i n_c) \right)$$

$$h_e^a h_f^b h_g^c R_{abcd} n^d$$

$$= h_e^a h_f^b h_g^c \left( \nabla_a \left( (h_b^h - n^h n_b) \nabla_h n_c \right) \right) - h_e^a h_f^b h_g^c \left( \nabla_b \left( (h_a^i - n^i n_a) \nabla_i n_c \right) \right)$$

Kita tinjau bagian pertama persamaan di atas:

$$h_e^a h_f^b h_g^c \left( \nabla_a \left( (h_b^h - n^h n_b) \nabla_h n_c \right) \right) = h_e^a h_f^b h_g^c \nabla_a (h_b^h \nabla_h n_c - n^h n_b \nabla_h n_c)$$

Karena  $K_{bc} = h_b^h \nabla_h n_c$ , maka:

$$\begin{aligned} h_e^a h_f^b h_g^c \left( \nabla_a \left( (h_b^h - n^h n_b) \nabla_h n_c \right) \right) &= h_e^a h_f^b h_g^c \nabla_a (K_{bc} - n^h n_b \nabla_h n_c) \\ &= D_e K_{fg} - h_e^a h_f^b h_g^c \nabla_a (n^h n_b \nabla_h n_c) \end{aligned}$$

Selanjutnya bagian kedua:

$$\begin{aligned} h_e^a h_f^b h_g^c \left( \nabla_b \left( (h_a^i - n^i n_a) \nabla_i n_c \right) \right) &= h_e^a h_f^b h_g^c \nabla_b (h_a^i \nabla_i n_c - n^i n_a \nabla_i n_c) \\ h_e^a h_f^b h_g^c \left( \nabla_b \left( (h_a^i - n^i n_a) \nabla_i n_c \right) \right) &= h_e^a h_f^b h_g^c \nabla_b (K_{ac} - n^i n_a \nabla_i n_c) \\ &= D_f K_{eg} - h_e^a h_f^b h_g^c \nabla_b (n^i n_a \nabla_i n_c) \end{aligned}$$

sehingga

$$h_e^a h_f^b h_g^c R_{abcd} n^d = D_e K_{fg} - h_e^a h_f^b h_g^c \nabla_a (n^h n_b \nabla_h n_c) - D_f K_{eg} + h_e^a h_f^b h_g^c \nabla_b (n^i n_a \nabla_i n_c)$$

$$h_e^a h_f^b h_g^c R_{abcd} n^d = D_e K_{fg} - D_f K_{eg} - h_e^a h_f^b h_g^c \left( \nabla_b (n^i n_a \nabla_i n_c) - \nabla_a (n^h n_b \nabla_h n_c) \right)$$

$$h_e^a h_f^b h_g^c R_{abcd} n^d$$

$$= D_e K_{fg} - D_f K_{eg}$$

$$- h_e^a h_f^b h_g^c \left( (n^i \nabla_i n_c) (\nabla_b n_a) + n_a \nabla_b (n^i \nabla_i n_c) - (n^h \nabla_h n_c) (\nabla_a n_b) \right)$$

$$- n_b \nabla_a (n^h \nabla_h n_c)$$

$$h_e^a h_f^b h_g^c R_{abcd} n^d$$

$$= D_e K_{fg} - D_f K_{eg}$$

$$- h_e^a h_f^b h_g^c \left( (n^i \nabla_i n_c) (\nabla_b n_a) + n_a \nabla_b (n^i \nabla_i n_c) - (n^h \nabla_h n_c) (\nabla_a n_b) \right)$$

$$- n_b \nabla_a (n^h \nabla_h n_c)$$

Disini kita definisikan percepatan normal:  $a_c := n^i \nabla_i n_c$ , maka  $\nabla_b a_c = 0$ , sehingga:

$$h_e^a h_f^b h_g^c R_{abcd} n^d$$

$$= D_e K_{fg} - D_f K_{eg}$$

$$- h_e^a h_f^b h_g^c (a_c (\nabla_b n_a) - a_c (\nabla_a n_b) + n_a \nabla_b a_c - n_b \nabla_a a_c)$$

$$h_e^a h_f^b h_g^c R_{abcd} n^d = D_e K_{fg} - D_f K_{eg} - h_e^a h_f^b h_g^c a_c (\nabla_b n_a - \nabla_a n_b)$$

Suku terakhir pada persamaan di atas akan lenyap karena sifat simetri  $\nabla_a n_b$ , maka kita

buktikan persamaan Codazzi:

$$h_e^a h_f^b h_g^c R_{abcd} n^d = D_e K_{fg} - D_f K_{eg}$$

### 3. Persamaan Ricci

Persamaan Ricci dituliskan sebagai berikut:

$$R_{abcd}n^b n^d = -\mathcal{L}_n K_{ab} + K_{ac}K_b^c + D_{(a}a_{b)} + a_a a_b$$

Dengan  $a_a := n^b \nabla_b n_a$  yang dikenal sebagai percepatan normal dan memenuhi  $a_a n^a = 0$ .

Pertama-tama kita tinjau turunan Lie untuk  $n$ , maka:

$$\mathcal{L}_n K_{ab} = n^c \nabla_c K_{ab} + K_{ac} \nabla_b n^c + K_{bc} \nabla_a n^c$$

Dengan  $K_{ab} = h_a^c \nabla_c n_b = (g_a^c + n^c n_a) \nabla_c n_b = \nabla_a n_b + n_a n^c \nabla_c n_b = \nabla_a n_b + a_b n_a$ ,

sehingga bagian pertama dapat kita tinjau:

$$n^c \nabla_c K_{ab} = n^c \nabla_c (\nabla_a n_b + a_b n_a) = n^c \nabla_c \nabla_a n_b + n^c n_a (\nabla_c a_b) + n^c a_b (\nabla_c n_a)$$

Karena  $n^c n_a = -g_a^c + h_a^c$ , maka:

$$n^c \nabla_c K_{ab} = n^c \nabla_c \nabla_a n_b + (-g_a^c + h_a^c) \nabla_c (n^e \nabla_e n_b) + a_a a_b$$

$$n^c \nabla_c K_{ab} = n^c \nabla_c \nabla_a n_b - (\nabla_a n^e) (\nabla_e n_b) - n^e \nabla_a \nabla_e n_b + a_a a_b + h_a^c \nabla_c (n^e \nabla_e n_b)$$

$$n^c \nabla_c K_{ab} = n^c \nabla_c \nabla_a n_b - (\nabla_a n^e) (\nabla_e n_b) - n^e \nabla_a \nabla_e n_b + a_a a_b + h_a^c \nabla_c a_b$$

$$n^c \nabla_c K_{ab} = n^c \nabla_c \nabla_a n_b - (\nabla_a n^e) (\nabla_e n_b) - n^e \nabla_a \nabla_e n_b + a_a a_b + h_a^c \nabla_c a_b$$

$$n^c \nabla_c K_{ab} = n^c \nabla_c \nabla_a n_b - (\nabla_a n^e) (\nabla_e n_b) - n^e \nabla_a \nabla_e n_b + a_a a_b + h_a^c \nabla_c (g_b^f a_f)$$

$$n^c \nabla_c K_{ab} = n^c \nabla_c \nabla_a n_b - (\nabla_a n^e) (\nabla_e n_b) - n^e \nabla_a \nabla_e n_b + a_a a_b + h_a^c g_b^f \nabla_c a_f + h_a^c a_f \nabla_c g_b^f$$

Karena  $\nabla_c g_b^f = 0$  dan  $g_b^f = h_b^f - n^f n_b$ , maka:

$$n^c \nabla_c K_{ab} = n^c \nabla_c \nabla_a n_b - (\nabla_a n^e) (\nabla_e n_b) - n^e \nabla_a \nabla_e n_b + a_a a_b + h_a^c (h_b^f - n^f n_b) \nabla_c a_f$$

Suku terakhir dapat kita evaluasi:

$$h_a^c (h_b^f - n^f n_b) \nabla_c a_f = h_a^c h_b^f \nabla_c a_f - h_a^c n^f n_b \nabla_c a_f = D_a a_b - h_a^c n^f n_b \nabla_c a_f$$

Karena:  $n^f a_f = 0$ , maka  $n^f \nabla_c a_f = -a_f \nabla_c n^f$ , sehingga:

$$h_a^c (h_b^f - n^f n_b) \nabla_c a_f = D_a a_b + h_a^c n_b a_f \nabla_c n^f = D_a a_b + (g_a^c + n^c n_a) n_b a_f \nabla_c n^f$$

$$h_a^c (h_b^f - n^f n_b) \nabla_c a_f = D_a a_b + n_b a_f \nabla_a n^f + n^c n_a n_b a_f \nabla_c n^f$$

Dengan mensubstitusikan hasil terakhir di atas ke persamaan  $n^c \nabla_c K_{ab}$ , maka:

$$n^c \nabla_c K_{ab} = n^c (\nabla_c \nabla_a - \nabla_a \nabla_c) n_b - (\nabla_a n^e) (\nabla_e n_b) + a_a a_b + D_a a_b + n_b a_f \nabla_a n^f + n^c n_a n_b a_f \nabla_c n^f$$

Adapun bagian kedua dan ketiga dari  $\mathcal{L}_n K_{ab}$ , maka:  $K_{ab} = h_a^c \nabla_c n_b$

$$K_{ac} \nabla_b n^c + K_{bc} \nabla_a n^c = h_a^d (\nabla_d n_c) (\nabla_b n^c) + K_{bc} K_f^c g_a^f$$

$$\begin{aligned}
K_{ac}\nabla_b n^c + K_{bc}\nabla_a n^c &= (g_a^d + n_a n^d)(\nabla_d n_c)(\nabla_b n^c) + K_{bc}K_f^c g_a^f \\
K_{ac}\nabla_b n^c + K_{bc}\nabla_a n^c &= (\nabla_a n_c)(\nabla_b n^c) + n_a n^d(\nabla_d n_c)(\nabla_b n^c) + K_{bc}K_f^c(h_a^f - n_a n^f) \\
K_{ac}\nabla_b n^c + K_{bc}\nabla_a n^c &= (\nabla_a n_c)(\nabla_b n^c) + n_a n^d(\nabla_d n_c)(\nabla_b n^c) + K_{bc}(K_a^c - h_f^d n_a n^f \nabla_d n^c) \\
K_{ac}\nabla_b n^c + K_{bc}\nabla_a n^c &= (\nabla_a n_c)(\nabla_b n^c) + n_a n^d(\nabla_d n_c)(\nabla_b n^c) + K_{bc}(K_a^c - n_a n^d \nabla_d n^c) \\
K_{ac}\nabla_b n^c + K_{bc}\nabla_a n^c &= (\nabla_a n_c)(\nabla_b n^c) + n_a n^d(\nabla_d n_c)(\nabla_b n^c) + K_{bc}K_a^c \\
&\quad - h_b^h n_a n^d(\nabla_d n^c)(\nabla_h n_c) \\
K_{ac}\nabla_b n^c + K_{bc}\nabla_a n^c &= (\nabla_a n_c)(\nabla_b n^c) + n_a n^d(\nabla_d n_c)(\nabla_b n^c) + K_{bc}K_a^c \\
&\quad - (g_b^h + n_b n^h)n_a n^d(\nabla_d n^c)(\nabla_h n_c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{ac}\nabla_b n^c + K_{bc}\nabla_a n^c &= (\nabla_a n_c)(\nabla_b n^c) + n_a n^d(\nabla_d n_c)(\nabla_b n^c) + K_{bc}K_a^c - n_a n^d(\nabla_d n^c)(\nabla_b n_c) \\
&\quad - n_a n^d(\nabla_d n^c)n_b n^h(\nabla_h n_c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{ac}\nabla_b n^c + K_{bc}\nabla_a n^c &= (\nabla_a n_c)(\nabla_b n^c) + n_a n^d((\nabla_d n_c)(\nabla_b n^c) - (\nabla_d n^c)(\nabla_b n_c)) + K_{bc}K_a^c \\
&\quad - n_a n^d(\nabla_d n^c)n_b n^h(\nabla_h n_c)
\end{aligned}$$

Dengan:  $n_a n^d((\nabla_d n_c)(\nabla_b n^c) - (\nabla_d n^c)(\nabla_b n_c)) = 0$ , maka:

$$K_{ac}\nabla_b n^c + K_{bc}\nabla_a n^c = (\nabla_a n_c)(\nabla_b n^c) + K_{ac}K_b^c - n_a n^d(\nabla_d n^c)n_b n^h(\nabla_h n_c)$$

Maka kita dapatkan:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_n K_{ab} &= n^c(\nabla_c \nabla_a - \nabla_a \nabla_c)n_b - (\nabla_a n^e)(\nabla_e n_b) + a_a a_b + D_a a_b + n_b a_f \nabla_a n^f \\
&\quad + n^c n_a n_b a_f \nabla_c n^f + (\nabla_a n_c)(\nabla_b n^c) + K_{ac}K_b^c - n_a n^d(\nabla_d n^c)n_b n^h(\nabla_h n_c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_n K_{ab} &= n^c(\nabla_c \nabla_a - \nabla_a \nabla_c)n_b - (\nabla_a n^e)(\nabla_e n_b) + a_a a_b + D_a a_b + n_b(\nabla_a n^f)(n^g \nabla_g n_f) \\
&\quad + n_a n_b a_f n^c \nabla_c n^f + (\nabla_a n_c)(\nabla_b n^c) + K_{ac}K_b^c - n_a n_b a_c n^d(\nabla_d n^c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_n K_{ab} &= n^c(\nabla_c \nabla_a - \nabla_a \nabla_c)n_b + a_a a_b + D_a a_b + n_b(\nabla_a n^f)(n^g \nabla_g n_f) + K_{ac}K_b^c \\
&\quad + (\nabla_a n_c)(\nabla_b n^c) - (\nabla_a n^e)(\nabla_e n_b) + n_a n_b a_f n^c \nabla_c n^f - n_a n_b a_c n^d(\nabla_d n^c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_n K_{ab} &= n^c(\nabla_c \nabla_a - \nabla_a \nabla_c)n_b + a_a a_b + D_a a_b + n_b(\nabla_a n^f)(n^g \nabla_g n_f) + K_{ac}K_b^c \\
&\quad + (\nabla_a n_c)(\nabla_b n^c) - (\nabla_a n^e)(\nabla_e n_b)
\end{aligned}$$

Sekarang kita tinjau suku-suku berikut dari persamaan di atas:

$$\begin{aligned}
& (\nabla_a n_c)(\nabla_b n^c) - (\nabla_a n^e)(\nabla_e n_b) + n_b(\nabla_a n^f)(n^g \nabla_g n_f) \\
& \quad = (\nabla_a n^c)(\nabla_b n_c - \nabla_c n_b + n_b n^g \nabla_g n_c) \\
& (\nabla_a n_c)(\nabla_b n^c) - (\nabla_a n^e)(\nabla_e n_b) + n_b(\nabla_a n^f)(n^g \nabla_g n_f) \\
& \quad = (\nabla_a n^c)(h_b^d g_c^f (\nabla_d n_f - \nabla_f n_d) + n_b n^g \nabla_g n_c) \\
& (\nabla_a n_c)(\nabla_b n^c) - (\nabla_a n^e)(\nabla_e n_b) + n_b(\nabla_a n^f)(n^g \nabla_g n_f) \\
& \quad = (\nabla_a n^c)(h_b^d h_c^f (\nabla_d n_f - \nabla_f n_d) - n_c n^f (\nabla_d n_f - \nabla_f n_d) + n_b n^g \nabla_g n_c)
\end{aligned}$$

Suku pertama persamaan di atas lenyap karena sifat sinetrik  $d$  dan  $f$ :  $(\nabla_d n_f - \nabla_f n_d) = 0$  dan suku terakhir pun lenyap karena  $n^g \nabla_g n_c = 0$  karena sifat normalisasi  $n_a$  serta terakhir suku kedua lenyap karena kontraksi  $\nabla_a n^c$  dengan  $(\nabla_a n^c) n_c n^f (\nabla_d n_f - \nabla_f n_d) = 0$ , maka:

$$(\nabla_a n_c)(\nabla_b n^c) - (\nabla_a n^e)(\nabla_e n_b) + n_b(\nabla_a n^f)(n^g \nabla_g n_f) = 0$$

Kembali ke persamaan  $\mathcal{L}_n K_{ab}$ , maka kita dapatkan:

$$\begin{aligned}
-n^c(\nabla_c \nabla_a - \nabla_a \nabla_c) n_b &= -\mathcal{L}_n K_{ab} + K_{ac} K_b^c + a_a a_b + D_a a_b \\
n^c(\nabla_a \nabla_c - \nabla_c \nabla_a) n_b &= -\mathcal{L}_n K_{ab} + K_{ac} K_b^c + a_a a_b + D_a a_b
\end{aligned}$$

Yang tidak lain adalah persamaan Ricci (pertukaran dan  $a$  dan  $b$  bersifat simetrik):

$$R_{acbd} n^c n^d = -\mathcal{L}_n K_{ab} + K_{ac} K_b^c + a_a a_b + D_{(a} a_{b)}$$

4. Persamaan  $R_{ab} n^a n^b = (K_a^a)^2 - K_a^b K_b^a + \nabla_a v^a$  yang merupakan kasus khusus persamaan Ricci

Terakhir kita turunkan persamaan untuk  $R_{ab} n^a n^b$ . Pertama-tama berdasarkan

$R_{acbd} n^c n^d = n^c(\nabla_a \nabla_c - \nabla_c \nabla_a) n_b$ , kemudian dikontraksikan:

$$\begin{aligned}
R_{ab} n^a n^b &= R_{acb}^c n^a n^b = -(\nabla_a \nabla_c - \nabla_c \nabla_a) n^a n^c = \nabla_a (\nabla_c n^a n^c) - \nabla_c (\nabla_a n^a n^c) \\
R_{ab} n^a n^b &= n^c \nabla_a (\nabla_c n^a) + (\nabla_c n^a) (\nabla_a n^c) + (\nabla_a n^a) (\nabla_c n^c) + n^a \nabla_a (\nabla_c n^c) \\
&\quad - n^c \nabla_c (\nabla_a n^a) - (\nabla_a n^a) (\nabla_c n^c) - (\nabla_c n^a) (\nabla_a n^c) - n^a \nabla_c (\nabla_a n^c) \\
R_{ab} n^a n^b &= (\nabla_a n^a) (\nabla_c n^c) - (\nabla_c n^a) (\nabla_a n^c) + \nabla_c (n^a \nabla_a n^c) - \nabla_a (n^a \nabla_c n^c) \\
&\quad + n^c \nabla_a (\nabla_c n^a) - n^c \nabla_c (\nabla_a n^a)
\end{aligned}$$

Dimana:  $n^c \nabla_a (\nabla_c n^a) = n^c \nabla_c (\nabla_a n^a)$ , maka:

$$R_{ab} n^a n^b = (\nabla_a n^a) (\nabla_c n^c) - (\nabla_c n^a) (\nabla_a n^c) + \nabla_c (n^a \nabla_a n^c) - \nabla_a (n^a \nabla_c n^c)$$

Sekarang kita tinjau suku berikut:

$$(\nabla_c n^a)(\nabla_a n^c) = (\nabla_f g_c^f n^a)(\nabla_e g_a^e n^c) = (g_c^f \nabla_f n^a)(g_a^e \nabla_e n^c)$$

$$(\nabla_c n^a)(\nabla_a n^c) = (h_c^f - n_c n^f)(h_a^e - n_a n^e)(\nabla_f n^a)(\nabla_e n^c)$$

$$(\nabla_c n^a)(\nabla_a n^c) = (h_c^f \nabla_f n^a - n_c n^f \nabla_f n^a)(h_a^e \nabla_e n^c - n_a n^e \nabla_e n^c)$$

$$(\nabla_c n^a)(\nabla_a n^c) = (h_c^f \nabla_f n^a)(h_a^e \nabla_e n^c) = K_c^a K_a^c$$

Dengan cara yang sama untuk:  $(\nabla_a n^a)(\nabla_c n^c) = K_a^a K_c^c = (K_a^a)^2$ , maka:

$$R_{ab} n^a n^b = (K_a^a)^2 - K_c^a K_a^c + \nabla_c (n^a \nabla_a n^c) - \nabla_a (n^a \nabla_c n^c)$$

$$R_{ab} n^a n^b = (K_a^a)^2 - K_c^a K_a^c + \nabla_c (n^a \nabla_a n^c - n^c \nabla_a n^a)$$

Dapat didefinisikan:  $v^c = n^a \nabla_a n^c - n^c \nabla_a n^a$ , sehingga berhasil dibuktikan

$$R_{ab} n^a n^b = (K_a^a)^2 - K_c^a K_a^c + \nabla_a v^a$$

Adapun untuk seluruh kontraksi  $R_{abc}^d$  dengan  $n^a$  dan  $h_{ab}$  akan lenyap karena sifat simetrik tensor Riemann.

## Lampiran B: Formulasi Tetrad Orde Pertama

### B.1 Hubungan Kurvatur 2-form dan Tensor Riemann

Disini akan dibuktikan hubungan antara kurvatur 2-form  $F_{\mu\nu}^{IJ}$  dan tensor Riemann  $R_{\mu\nu\alpha\beta}$  via medan tetrad  $e^{I\alpha}$ :

$$F_{\mu\nu}^{IJ}[\omega(e)] = e^{I\alpha} e^{J\beta} R_{\mu\nu\alpha\beta}[e]$$

Pertama-tama kita tuliskan definisi  $F_{\mu\nu}^{IJ}$ :

$$F_{\mu\nu}^{IJ} = \partial_\mu \omega_\nu^{IJ} - \partial_\nu \omega_\mu^{IJ} + \omega_{\mu K}^I \omega_\nu^{KJ} - \omega_{\nu K}^I \omega_\mu^{KJ}$$

Dimana  $\omega_\nu^{IJ} = e_\alpha^I \nabla_\nu e^{\alpha J} = e_\alpha^I \partial_\nu e^{\alpha J} + e_\alpha^I \Gamma_{\beta\nu}^\alpha e^{\beta J}$ , maka:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^{IJ} &= \partial_\mu (e_\alpha^I \partial_\nu e^{\alpha J} + e_\alpha^I \Gamma_{\beta\nu}^\alpha e^{\beta J}) - \partial_\nu (e_\alpha^I \partial_\mu e^{\alpha J} + e_\alpha^I \Gamma_{\beta\mu}^\alpha e^{\beta J}) \\ &\quad + (e_\alpha^I \partial_\mu e_K^\alpha + e_\alpha^I \Gamma_{\beta\mu}^\alpha e_K^\beta) (e_\alpha^K \partial_\nu e^{\alpha J} + e_\alpha^K \Gamma_{\beta\nu}^\alpha e^{\beta J}) \\ &\quad - (e_\alpha^I \partial_\nu e_K^\alpha + e_\alpha^I \Gamma_{\beta\nu}^\alpha e_K^\beta) (e_\alpha^K \partial_\mu e^{\alpha J} + e_\alpha^K \Gamma_{\beta\mu}^\alpha e^{\beta J}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^{IJ} &= (\partial_\mu e_\alpha^I) (\partial_\nu e^{\alpha J}) + e_\alpha^I (\partial_\mu \partial_\nu e^{\alpha J}) + (\partial_\mu e_\alpha^I) \Gamma_{\beta\nu}^\alpha e^{\beta J} + e_\alpha^I (\partial_\mu \Gamma_{\beta\nu}^\alpha) e^{\beta J} + e_\alpha^I \Gamma_{\beta\nu}^\alpha (\partial_\mu e^{\beta J}) \\ &\quad + e_\alpha^I (\partial_\mu e_K^\alpha) e_\beta^K (\partial_\nu e^{\beta J}) + e_\alpha^I (\partial_\mu e_K^\alpha) e_\rho^K \Gamma_{\beta\nu}^\rho e^{\beta J} + e_\alpha^I \Gamma_{\beta\mu}^\alpha e_K^\beta e_\rho^K (\partial_\nu e^{\rho J}) \\ &\quad + e_\alpha^I \Gamma_{\beta\mu}^\alpha e_K^\beta e_\rho^K \Gamma_{\sigma\nu}^\rho e^{\sigma J} - (\mu \leftrightarrow \nu) \end{aligned}$$

Menggunakan  $e_K^\beta e_\alpha^K = \delta_\alpha^\beta$  dan  $e_\alpha^I \partial_\mu e_K^\alpha = -e_K^\alpha \partial_\mu e_\alpha^I$ , sehingga:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^{IJ} &= e_\alpha^I e^{\beta J} (\partial_\mu \Gamma_{\beta\nu}^\alpha) + e_\alpha^I e^{\sigma J} \Gamma_{\beta\mu}^\alpha \Gamma_{\sigma\nu}^\beta + (\partial_\mu e_\alpha^I) (\partial_\nu e^{\alpha J}) - (\partial_\mu e_\alpha^I) (\partial_\nu e^{\alpha J}) + (\partial_\mu e_\alpha^I) \Gamma_{\beta\nu}^\alpha e^{\beta J} \\ &\quad - (\partial_\mu e_\alpha^I) \Gamma_{\beta\nu}^\alpha e^{\beta J} + e_\alpha^I e_\beta^K (\partial_\mu e_K^\alpha) (\partial_\nu e^{\beta J}) + e_\rho^K e^{\beta J} e_\alpha^I (\partial_\mu e_K^\alpha) \Gamma_{\beta\nu}^\rho + e_\alpha^I \Gamma_{\beta\mu}^\alpha (\partial_\nu e^{\beta J}) \\ &\quad - (\mu \leftrightarrow \nu) \end{aligned}$$

$$F_{\mu\nu}^{IJ} = e_\alpha^I e^{\beta J} (\partial_\mu \Gamma_{\beta\nu}^\alpha) - e_\alpha^I e^{\beta J} (\partial_\nu \Gamma_{\beta\mu}^\alpha) + e_\alpha^I e^{\sigma J} \Gamma_{\beta\mu}^\alpha \Gamma_{\sigma\nu}^\beta - e_\alpha^I e^{\sigma J} \Gamma_{\beta\nu}^\alpha \Gamma_{\sigma\mu}^\beta$$

$$F_{\mu\nu}^{IJ} = e_\alpha^I e^{\beta J} (\partial_\mu \Gamma_{\beta\nu}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\beta\mu}^\alpha + \Gamma_{\beta\mu}^\alpha \Gamma_{\sigma\nu}^\beta - \Gamma_{\beta\nu}^\alpha \Gamma_{\sigma\mu}^\beta)$$

Karena  $R_{\mu\beta\nu}^\alpha = \partial_\mu \Gamma_{\beta\nu}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\beta\mu}^\alpha + \Gamma_{\beta\mu}^\alpha \Gamma_{\sigma\nu}^\beta - \Gamma_{\beta\nu}^\alpha \Gamma_{\sigma\mu}^\beta$ , sehingga terbukti:

$$F_{\mu\nu}^{IJ} = e_\alpha^I e^{\beta J} R_{\mu\beta\nu}^\alpha = e^{I\alpha} e^{J\beta} R_{\mu\nu\alpha\beta}$$

Persamaan di atas dikenal sebagai persamaan struktur Cartan jenis kedua.

## B.2 Hubungan Determinan Metrik dan Determinan Tetrad

Hubungan determinan metrik  $g$  dan determinan tetrad  $e$ , sebagai berikut:

$$g = \det g_{\mu\nu} = \frac{1}{4!} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon^{\alpha\beta\eta\gamma} g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} g_{\rho\eta} g_{\sigma\gamma}$$

Menggunakan hubungan metrid dan medan tetrad:  $g_{\mu\nu} = e_\mu^I e_\nu^J \eta_{IJ}$ , amaka:

$$g = \det(e_\mu^I e_\nu^J \eta_{IJ}) = \frac{1}{4!} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon^{\alpha\beta\eta\gamma} e_\mu^I e_\alpha^J e_\nu^K e_\beta^L e_\rho^M e_\eta^N e_\sigma^O e_\gamma^P \eta_{MN} e_\sigma^O e_\gamma^P \eta_{OP}$$

$$g = \det(e_\mu^I e_\nu^J \eta_{IJ}) = \frac{1}{4!} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} e_\mu^I e_\nu^K e_\rho^M e_\sigma^O \varepsilon^{\alpha\beta\eta\gamma} e_\alpha^J e_\beta^L e_\eta^N e_\gamma^P \eta_{IJ} \eta_{KL} \eta_{MN} \eta_{OP}$$

$$g = \det(e_\mu^I e_\nu^J \eta_{IJ}) = \frac{1}{4!} e^2 \varepsilon^{IKMO} \varepsilon^{JLNP} \eta_{IJ} \eta_{KL} \eta_{MN} \eta_{OP} = -e^2$$

Sehingga terbukti bahwa:  $g = -e^2$

## B.3 Penurunan Persamaan Medan Einstein dari Formulasi Tetrad

Berdasarkan aksi Einstein-Hilbert dalam formulasi Tetrad:

$$S = \frac{1}{2} \varepsilon_{IJKL} \int d^4x e^K \wedge e^L \wedge F^{IJ} = \int d^4x e e_i^\mu e_j^\alpha F_{\mu\alpha}^{IJ}(\omega)$$

Kemudian divariasikan terhadap tetrad ( $e$ ), maka:

$$\delta S = 0 = \int d^4x \left[ (\delta e) e_i^\mu e_j^\alpha F_{\mu\alpha}^{IJ} + e (\delta e_i^\mu) e_j^\alpha F_{\mu\alpha}^{IJ} + e e_i^\mu (\delta e_j^\alpha) F_{\mu\alpha}^{IJ} + e e_i^\mu e_j^\alpha (\delta F_{\mu\alpha}^{IJ}(\omega)) \right]$$

Pertama-tama kita tinjau masing-masing suku:

1. Suku pertama:  $(\delta e) e_i^\mu e_j^\alpha F_{\mu\alpha}^{IJ}$

$$(\delta e) e_i^\mu e_j^\alpha F_{\mu\alpha}^{IJ} = e e_\rho^K (\delta e_\rho^K) e_i^\mu e_j^\alpha F_{\mu\alpha}^{IJ} = -e e_\rho^K (\delta e_\rho^K) e_i^\mu e_j^\alpha F_{\mu\alpha}^{IJ}$$

2. Suku kedua dan ketiga:  $e (\delta e_i^\mu) e_j^\alpha F_{\mu\alpha}^{IJ} + e e_i^\mu (\delta e_j^\alpha) F_{\mu\alpha}^{IJ}$

$$e (\delta e_i^\mu) e_j^\alpha F_{\mu\alpha}^{IJ} + e e_i^\mu (\delta e_j^\alpha) F_{\mu\alpha}^{IJ} = 2e (\delta e_i^\mu) e_j^\alpha F_{\mu\alpha}^{IJ}$$

3. Suku keempat:  $e e_i^\mu e_j^\alpha (\delta F_{\mu\alpha}^{IJ}(\omega)) = 0$  karena variasi terhadap  $\delta F_{\mu\alpha}^{IJ}(\omega) = 0$

Sehingga didapatkan

$$\begin{aligned}
0 &= \int d^4x \left( -e e_\rho^K (\delta e_K^\rho) e_I^\mu e_J^\alpha F_{\mu\alpha}^{IJ} + 2e (\delta e_I^\mu) e_J^\alpha F_{\mu\alpha}^{IJ} \right) \\
0 &= \int d^4x e \left( -e_\rho^I e_K^\mu e_L^\alpha F_{\mu\alpha}^{KL} + 2e_J^\alpha F_{\rho\alpha}^{IJ} \right) (\delta e_I^\rho) \\
0 &= 2 \int d^4x e \left( e_J^\alpha F_{\rho\alpha}^{IJ} - \frac{1}{2} e_\rho^I e_K^\mu e_L^\alpha F_{\mu\alpha}^{KL} \right) (\delta e_I^\rho)
\end{aligned}$$

Karena  $F_{\mu\nu}^{IJ} = e_\alpha^I e^{\alpha J} R_{\mu\nu}$  dan  $g^{\mu\alpha} = e_K^\mu e_L^\alpha \eta^{KL}$  dan  $g_{\rho\sigma} = e_\rho^I e_\sigma^K \eta_{IK}$ , maka:

$$\begin{aligned}
0 &= \int d^4x e \left( e_J^\alpha e_\alpha^I e^{\alpha J} R_{\rho\alpha} - \frac{1}{2} e_\rho^I e_\sigma^K e_K^\mu e_L^\alpha e^{\sigma L} R_{\mu\alpha} \right) (\delta e_I^\rho) \\
0 &= \int d^4x e \left( e^{\alpha I} R_{\rho\alpha} - \frac{1}{2} g_{\rho\sigma} \eta^{IK} g^{\mu\alpha} \eta_{KL} e^{\sigma L} R_{\mu\alpha} \right) (\delta e_I^\rho) \\
0 &= \int d^4x e \left( e^{\alpha I} R_{\rho\alpha} - \frac{1}{2} g_{\rho\alpha} e^{\alpha I} R \right) (\delta e_I^\rho)
\end{aligned}$$

Sehingga di dapat persamaan medan Einstein untuk kasus vakum:

$$R_{\rho\alpha} - \frac{1}{2} g_{\rho\alpha} R = 0$$

#### B.4 Penurunan Persamaan Medan Einstein dari Aksi Holst

Kita tuliskan aksi Holst sebagai berikut:

$$S[e, \omega] = \frac{1}{2} \varepsilon_{IJKL} \int d^4x e^K \wedge e^L \wedge F^{IJ}(\omega) + \frac{1}{\gamma} \delta_{IJKL} \int d^4x e^K \wedge e^L \wedge F^{IJ}(\omega)$$

Yang mana suku pertama merupakan suku dari aksi Einstein-Hilbert dalam formulasi tetrad dan suku kedua adalah suku tambahan yang berperan di kuantisasi level kuantum tetapi tidak memiliki kontribusi di level klasik. Suku pertama aksi Holst telah dibuktikan dapat menurunkan persamaan medan Einstein pada B.3 di atas. Adapun suku kedua, akan kita sekarang.

Dengan memvariasikan aksi Holst terhadap medan tetrad  $e$ , maka didapat:

$$\delta S = 0 = \int d^4x e \left( R_{\rho\alpha} - \frac{1}{2} g_{\rho\alpha} R \right) e^{\alpha I} (\delta e_I^\rho) + \frac{1}{\gamma} \delta_{IJKL} \varepsilon^{\mu\alpha\nu\beta} \int d^4x e_\nu^K e_\beta^L F_{\mu\alpha}^{IJ}$$

Menggunakan  $F_{\mu\nu}^{IJ} = e^{\alpha I} e^{\beta J} R_{\mu\nu\alpha\beta}$ , maka:

$$\delta S = 0 = \int d^4x e \left( R_{\rho\alpha} - \frac{1}{2} g_{\rho\alpha} R \right) e^{\alpha I} (\delta e_I^\rho) + \frac{1}{\gamma} \delta_{IJKL} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \int d^4x e_v^K e_\beta^L e^{\alpha I} e^{\beta J} R_{\mu\nu\alpha\beta}$$

Karena sifat simetrik tensor Riemann, maka  $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} R_{\mu\nu\alpha\beta} = 0$ , sehingga didapat persamaan medan Einstein untuk kasus vakum:

$$R_{\rho\alpha} - \frac{1}{2} g_{\rho\alpha} R = 0$$

### C. Definisi Holonomi

Holonomi didefinisikan sebagai solusi dari persamaan diferensial:

$$\frac{dh_\gamma(t)}{dt} + A(\gamma(t))h_\gamma(t) = 0, \quad h_\gamma(0) = 1$$

Dalam konteks manifold  $\mathcal{M}$ , maka holonomi merupakan solusi dari turunan kovarian sepanjang lintasan  $\gamma : [0,1] \rightarrow \mathcal{M}$  yang merupakan lintasan yang menghubungkan 2 titik di manifold  $\mathcal{M}$ :

$$\mathcal{D}_{\gamma(t)}h_\gamma(t) = \frac{d\gamma^\mu}{dt}D_\mu h_\gamma(t) = 0$$

$$\mathcal{D}_{\gamma(t)}h_\gamma(t) = \frac{d\gamma^\mu}{dt} \left( \frac{\partial h_\gamma(t)}{\partial \gamma^\mu} - h_\gamma(t)A_\mu(\gamma(t)) \right) = \frac{dh_\gamma(t)}{dt} + \dot{\gamma}^\mu h_\gamma(t)A_\mu(\gamma(t)) = 0$$

Dengan  $A_\mu$  adalah koneksi dan  $\dot{\gamma}^\mu = \frac{d\gamma^\mu}{dt}$ . Sehingga seperti ditunjukkan di atas bahwa holonomi adalah solusi persamaan diferensial (orde satu):

$$\frac{dh_\gamma(t)}{dt} + A'_\mu(\dot{\gamma}^\mu(t))h_\gamma(t) = 0$$

Dengan  $A'_\mu(\dot{\gamma}^\mu(t)) = \dot{\gamma}^\mu A_\mu(\gamma(t))$ . Bila ditetapkan syarat awal  $h_\gamma(0) = 1$  saat  $t = 0$ , maka:

$$\int_0^t \frac{dh_\gamma(t)}{dt} dt = \int_0^t A'_\mu(\dot{\gamma}^\mu(t))h_\gamma(t) dt$$

$$h_\gamma(t) = 1 - \int_0^t A'_\mu(\dot{\gamma}^\mu(t_1))h_\gamma(t_1) dt_1$$

$$h_\gamma(t) = 1 - \int_0^t A'_\mu(\dot{\gamma}^\mu(t_1)) \left( 1 - \int_0^{t_1} A'_\mu(\dot{\gamma}^\mu(t_2))h_\gamma(t_2) dt_2 \right) dt_1$$

$$h_\gamma(t) = 1 - \int_0^t A'_\mu(\dot{\gamma}^\mu(t_1))h_\gamma(0)dt_1 + \int_0^t \int_0^{t_1} A'_\mu(\dot{\gamma}^\mu(t_2))h_\gamma(t_2) dt_2 dt_1$$

Sehingga bila iterasi terus dilakukan, maka dapat dituliskan:

$$h_\gamma(t) = 1 - \int_0^t A'_\mu(\dot{\gamma}^\mu(t_1))h_\gamma(0)dt_1 + \int_0^t \int_0^{t_1} A'_\mu(\dot{\gamma}^\mu(t_1))A'_\mu(\dot{\gamma}^\mu(t_2))h_\gamma(0) dt_2 dt_1 \\ - \int_0^t \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} A'_\mu(\dot{\gamma}^\mu(t_1))A'_\mu(\dot{\gamma}^\mu(t_2))A'_\mu(\dot{\gamma}^\mu(t_3))h_\gamma(0) dt_3 dt_2 dt_1 + \dots$$

Masing-masing suku integrasi di atas merupakan integrasi simpleks (integration over simplex), dimana suku pertama merupakan integrasi terhadap 1-simpleks, suku kedua 2-simpleks, suku ketiga 3-simpleks dan suku ke n merupakan integrasi n-simpleks. Secara formal dapat dituliskan:

$$h_\gamma = \sum_{n=0}^{\infty} \iiint_{1>t_n \dots >t_1>0} A(\gamma(t_1) \dots A\gamma(t_n)) dt_1 \dots dt_n$$

Fungsi holonomi diatas terbukti merupakan solusi yang well defined apabila konvergen terdapat sup norm, yaitu memenuhi:

$$\|h_\gamma\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \iiint_{1>t_n \dots >t_1>0} \|A(\gamma(t_1) \dots A\gamma(t_n))\| dt_1 \dots dt_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|A\|^n \frac{t^n}{n!}$$

Oleh karena itu, untuk mengkompensasi hal tersebut serta kompensasi untuk suku-suku kubik, maka holonomi kembali dituliskan dengan menambahkan faktor  $\frac{1}{n!}$  Di setiap suku integralnya, sehingga:

$$h_\gamma(t) = 1 - \int_0^t A'_\mu(\dot{\gamma}^\mu(t_1))h_\gamma(0)dt_1 + \frac{1}{2!} \int_0^t \int_0^{t_1} A'_\mu(\dot{\gamma}^\mu(t_1))A'_\mu(\dot{\gamma}^\mu(t_2))h_\gamma(0) dt_2 dt_1 \\ - \frac{1}{3!} \int_0^t \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} A'_\mu(\dot{\gamma}^\mu(t_1))A'_\mu(\dot{\gamma}^\mu(t_2))A'_\mu(\dot{\gamma}^\mu(t_3))h_\gamma(0) dt_3 dt_2 dt_1 + \dots$$

Bila diperhatikan bahwa urutan  $t_1 \geq t_2 \geq t_3 \geq \dots \geq t_n$  sangat diperhatikan. Oleh karena itu diperkenalkan operator path ordering ( $\mathcal{P}$ ) untuk memastikan urutan iterasi dari 0 hingga t:

$$\mathcal{P}[A'_\mu(\dot{\gamma}^\mu(t_1))A'_\mu(\dot{\gamma}^\mu(t_2))A'_\mu(\dot{\gamma}^\mu(t_3)) \dots A'_\mu(\dot{\gamma}^\mu(t_n))] \\ = A'_\mu(\dot{\gamma}^\mu(t_1))A'_\mu(\dot{\gamma}^\mu(t_2))A'_\mu(\dot{\gamma}^\mu(t_3)) \dots A'_\mu(\dot{\gamma}^\mu(t_n))$$

Dengan  $t_1 \geq t_2 \geq t_3 \geq \dots \geq t_n$ . Sehingga holonomi dapat kembali kita tuliskan:

$$h_\gamma = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^t \mathcal{P}[A'_\mu(\dot{\gamma}^\mu(t_1))A'_\mu(\dot{\gamma}^\mu(t_2))A'_\mu(\dot{\gamma}^\mu(t_3)) \cdots A'_\mu(\dot{\gamma}^\mu(t_n))] dt_1 \cdots dt_n$$

Atau

$$h_\gamma = \mathcal{P} \exp \left( \int_\gamma A \right)$$

#### D. Pembuktian Sifat-Sifat Holonomi

(i) Pembuktian  $h_{\alpha\beta} = h_\alpha h_\beta$

Didefinisikan waktu di titik sumber  $t = 0$ . Untuk komponen 2 lintasan didefinisikan lintasan  $\alpha$  dan  $\beta$ , dapat kita tuliskan sebagai:

$$\beta\alpha = \begin{cases} \beta(t), & \text{jika } t \in [0, S] \\ \alpha(t - S), & \text{jika } t \in [S, T + S] \end{cases}$$

Jika kita bagi integral:  $\int_0^{S+T} = \int_0^S + \int_S^{S+T}$ , maka holonomi dapat dituliskan:

$$\int_0^t = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \left[ \int_0^S dt_1 \cdots \int_0^S dt_i + \int_0^T dt_{i+1} \cdots \int_0^T dt_n \right]$$

Sehingga ini memberikan pada kita path ordering sebagai berikut:

$$\begin{aligned} & \mathcal{P} \left[ A'_\mu \left( \beta\alpha(\dot{\gamma}^\mu(t_1)) \right) A'_\mu \left( \beta\alpha(\dot{\gamma}^\mu(t_2)) \right) A'_\mu \left( \beta\alpha(\dot{\gamma}^\mu(t_3)) \right) \cdots A'_\mu \left( \beta\alpha(\dot{\gamma}^\mu(t_n)) \right) \right] \\ &= \mathcal{P} \left[ A'_\mu \left( \beta(\dot{\gamma}^\mu(t_{i+1})) \right) \cdots A'_\mu \left( \beta(\dot{\gamma}^\mu(t_n)) \right) \right] \\ &+ \mathcal{P} \left[ A'_\mu \left( \alpha(\dot{\gamma}^\mu(t_1)) \right) \cdots A'_\mu \left( \alpha(\dot{\gamma}^\mu(t_i)) \right) \right] \end{aligned}$$

Sehingga, holonomi sepanjang gabungan 2 lintasan ini adalah:

$$\begin{aligned} h_{\alpha\beta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!(n-i)!} \left[ \int_0^T \mathcal{P} \left[ A'_\mu \left( \beta(\dot{\gamma}^\mu(t_{i+1})) \right) \cdots A'_\mu \left( \beta(\dot{\gamma}^\mu(t_n)) \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \int_0^S \mathcal{P} \left[ A'_\mu \left( \alpha(\dot{\gamma}^\mu(t_1)) \right) \cdots A'_\mu \left( \alpha(\dot{\gamma}^\mu(t_i)) \right) \right] \right] \\ h_{\alpha\beta} &= \sum_{i,q=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{q!} \int_0^T \mathcal{P} \left[ A'_\mu \left( \beta(\dot{\gamma}^\mu(t_{i+1})) \right) \cdots A'_\mu \left( \beta(\dot{\gamma}^\mu(t_n)) \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{(-1)^i}{i!} \int_0^S \mathcal{P} \left[ A'_\mu \left( \alpha(\dot{\gamma}^\mu(t_1)) \right) \cdots A'_\mu \left( \alpha(\dot{\gamma}^\mu(t_i)) \right) \right] \right] \end{aligned}$$

Maka didapat:

$$h_{\alpha\beta} = h_\alpha h_\beta$$

(ii) Pembuktian  $h_\gamma^U = U_{s(\gamma)} h_\gamma U_{t(\gamma)}^{-1}$

Diperkenalkan 2 vektor:  $u(t)$  dan  $w(t)$  yang memenuhi:

$$w(t) = U(\gamma(t))u(t) = U(\gamma(t))h_\gamma(t)u(0)$$

Dengan  $w(t)$  memenuhi persamaan diferensial:

$$\frac{dw(t)}{dt} = \dot{h}_\gamma U u(0) + h_\gamma \dot{U} u(0) = h_\gamma U U^{-1} A U u(0) + h_\gamma U U^{-1} \dot{U} u(0)$$

$$\frac{dw(t)}{dt} = h_\gamma U (U^{-1} A U + U^{-1} \dot{U}) u(0) = h_\gamma U u(0) (U^{-1} A U + U \dot{U}^{-1}) = w(t) A^U$$

Yang berimplikasi bahwa  $w(t) = h_\gamma^U(t)w(0) = h_\gamma^U(t)U(\gamma(0))u(0)$ , dengan membandingkannya dengan hasil sebelumnya:  $w(t) = h_\gamma^U(t)U(\gamma(0))u(0) = U(\gamma(t))h_\gamma(t)u(0)$ , maka:

$$h_\gamma^U(t)U(\gamma(0))u(0) = U(\gamma(t))h_\gamma(t)u(0)$$

$$h_\gamma^U(t)U(\gamma(0))u(0)U^{-1}(\gamma(t))u^{-1}(0) = U(\gamma(t))h_\gamma(t)u(0)U^{-1}(\gamma(t))u^{-1}(0)$$

sehingga terbukti:

$$h_\gamma^U(t) = U_{s(\gamma)} h_\gamma(t) U_{t(\gamma)}^{-1}$$

(iii) Pembuktian aksi diffeomorfisme terhadap koneksi ( $A$ ):  $h_\gamma(\phi * A) = h_{\phi \circ \gamma}(A)$

Aksi diffeomorfisme atau transformasi koordinat oleh fungsi  $\phi$  pada integral garis untuk koneksi  $A$  dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\int_\gamma \phi A = \int_0^1 A_\mu(\phi \circ \gamma(t)) \partial_\nu \phi^\mu(\gamma(t)) \dot{\gamma}^\nu(t) dt = \int_0^1 A_\mu(\phi \circ \gamma(t)) \frac{d}{dt} (\phi \circ \gamma(t))^\mu(t) dt$$

Yang berimplikasi pada:  $h_\gamma(\phi * A) = h_{\phi \circ \gamma}(A)$

(iv) Pembuktian fungsional turunan terhadap koneksi ( $A$ ):

$$\frac{\delta h_\gamma(A)}{\delta A_a^i(x)} = \begin{cases} \frac{1}{2} \dot{x}^a \delta^3(\gamma(t), x) \tau_i h_\gamma & \text{jika } x \text{ adalah sumber di lintasan } \gamma \\ \frac{1}{2} \dot{x}^a \delta^3(\gamma(t), x) h_\gamma \tau_i & \text{jika } x \text{ adalah target di lintasan } \gamma \\ \dot{x}^a \delta^3(\gamma(t), x) h_\gamma(0, t) \tau_i h_\gamma(t, 1) & \text{jika } x \text{ terdapat di lintasan } \gamma \end{cases}$$

Menggunakan persamaan differensial untuk koneksi:  $\frac{dh_\gamma(t)}{dt} + A(\gamma(t))h_\gamma(t) = 0$  yang memenuhi

$\frac{\delta h_\gamma(t_0, t)}{\delta A_a^i(x)}$ . Jika  $x$  terdapat dalam  $\gamma$ , maka persamaan differensial dituliskan:

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta h_\gamma(t_0, t)}{\delta A_a^i(x)} + A(\gamma(t)) \frac{\delta h_\gamma(t_0, t)}{\delta A_a^i(x)} = 0$$

Menggunakan definisi holonomi, maka persamaan dapat diselesaikan, yaitu:

$$\frac{\delta h_\gamma(t_0, t)}{\delta A_a^i(x)} = h_\gamma(t_0, s) \tau_i \dot{x}^a h_\gamma(s, t)$$

Menggunakan aturan Leibniz, maka:

$$\frac{\delta h_\gamma(t_0, t)}{\delta A_a^i(x)} = \frac{\delta h_\gamma(t_0, s)}{\delta A_a^i(x)} h_\gamma(s, t) + h_\gamma(t_0, s) \frac{\delta h_\gamma(s, t)}{\delta A_a^i(x)} = h_\gamma(t_0, s) \tau_i \dot{x}^a h_\gamma(s, t)$$

Sehingga terbukti  $\frac{\delta h_\gamma(A)}{\delta A_a^i(x)} = \dot{x}^a \delta^3(\gamma(t), x) h_\gamma(0, t) \tau_i h_\gamma(t, 1)$  untuk  $x$  terdapat dalam  $\gamma$ . Dan untuk

2 lainnya dapat kita evaluasi ketika  $x$  berada boundary atau salah satu titik sumber dan target:

$$\frac{\delta h_\gamma(A)}{\delta A_a^i(x)} = \begin{cases} \frac{1}{2} \dot{x}^a \delta^3(\gamma(t), x) \tau_i h_\gamma & \text{jika } x \text{ adalah sumber di lintasan } \gamma \\ \frac{1}{2} \dot{x}^a \delta^3(\gamma(t), x) h_\gamma \tau_i & \text{jika } x \text{ adalah target di lintasan } \gamma \end{cases}$$

## Lampiran E: Teori Kopling SU(2)

### E.1 Pembahasan Singkat Grup SU(2)

Grup SU(2) merupakan grup special unitary dan merupakan subgrup dari grup  $SL_2(\mathbb{C})$ :

$$SU(2) = \{a \in SL_2(\mathbb{C}) | a^\dagger a = 1\}$$

Dimana grup SU(2) adalah subgrup dari Lie riil 6 dimensi  $SL_2(\mathbb{C})$  yang berupa grup Lie riil 3 dimensi. Grup  $SL_2(\mathbb{C})$  sendiri merupakan grup yang isomorfik dengan grup Lorentz orthochronous [36]:

$$SL_2(\mathbb{C})/\{1, -1\} \cong SO^+(3,1)$$

Sehingga grup SU(2) akan isomorfik dengan grup SO(3) yang merupakan subgrup 3 dimensi dari grup  $SO^+(3,1)$ .

Dan apabila  $a \in SU(2)$ , maka:

$$a = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta^* \\ \beta & \alpha^* \end{pmatrix}, \text{ dengan } (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

$$a^\dagger = a^{-1}, \text{ sehingga } a^\dagger a = 1$$

Yang memberikan sifat unitary. Sedangkan dikatakan grup special karena dalam grup ini berlaku:

$$\det a = 1$$

Selain itu,  $a \in SU(2)$  dapat direpresentasikan pula sebagai:

$$a = \begin{pmatrix} w + ix & -y + iz \\ y + iz & w - ix \end{pmatrix}, \text{ dengan } (w, x, y, z) \in \mathbb{R}^4, w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

dan secara unik dapat juga sebagai:

$$a = a_0 + i \sum_{k=1}^3 a_k \sigma_k, \text{ dengan } a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \text{ dan } \sum_{k=1}^3 a_k^2 = 1$$

Dengan  $\sigma_k$  adalah matrik Pauli yang direpresentasikan sebagai berikut:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Dan memenuhi hubungan aljabar:

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$$

Bentuk aljabar Lie untuk grup  $SU(2)$  dituliskan sebagai:

$$\mathfrak{su}(2) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid M^\dagger = -M \text{ dan } \text{tr}(M) = 0\}$$

Dalam ruang vektor riil dengan basis diberikan oleh  $(i\sigma_1, i\sigma_2, i\sigma_3)$ . Oleh karena grup  $SU(2)$  adalah grup Lie kompak, maka setiap elemen dari  $SU(2)$  dapat dituliskan sebagai bentuk eksponen dari element yang berhubungan dengan aljabar Lie  $\mathfrak{su}(2)$ , antara lain sebagai berikut:

(1) Dekomposisi Eksponensial

Jika  $a \in SU(2)$ , maka eksis sebuah  $\alpha \in \mathbb{R}^3$ , sehingga:

$$a = e^{i\alpha \cdot \sigma} = e^{i(\alpha_1\sigma_1 + \alpha_2\sigma_2 + \alpha_3\sigma_3)} = \cos\|\alpha\|I + i \sin\|\alpha\| \frac{\alpha}{\|\alpha\|} \cdot \sigma$$

(2) Dekomposisi sudut Euler

Jika  $a \in SU(2)$ , maka eksis sebuah  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  (yang disebut sudut Euler), sehingga:

$$a = e^{-\frac{i\alpha}{2}\sigma_3} e^{-\frac{i\beta}{2}\sigma_3} e^{-\frac{i\gamma}{2}\sigma_3} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i(\alpha+\gamma)}{2}} \cos \frac{\beta}{2} & -e^{-\frac{i(\gamma-\alpha)}{2}} \sin \frac{\beta}{2} \\ e^{-\frac{i(\gamma-\alpha)}{2}} \sin \frac{\beta}{2} & e^{\frac{i(\alpha+\gamma)}{2}} \cos \frac{\beta}{2} \end{pmatrix}$$

Dengan pemilihan yang unik dimana  $\alpha \in ]-2\pi, 2\pi[$ ,  $\beta \in [0, \pi]$ , dan  $\gamma \in [|\alpha|, 4\pi - |\alpha|]$ .

## E.2 Fungsi Intergrabel untuk $SU(2)$

Pengukuran Haar dapat ditunjukkan eksis sebagai sebuah pengukuran Borel reguler yang bersifat kuasi-unik untuk  $\mu$  anggota  $SU(2)$  yang memenuhi:

(1) Invariant:  $\mu(u) = \mu(gu) = \mu(ug)$ ;

(2) Ternormalisasi:  $\mu(SU(2)) = 1$

Pengukuran Haar dapat dituliskan dalam bentuk fungsi integral  $f$  untuk  $SU(2)$ :

$$\int_{SU(2)} f(u) d\mu(u) \text{ dinyatakan sebagai } \int_{SU(2)} f(u) du$$

Ruang Hilbert  $L_2(SU(2))$  merupakan ruang fungsi kompleks untuk  $SU(2)$  yang memenuhi:

$$\int_{SU(2)} |f(u)|^2 du < \infty$$

Terdapat takhingga dimensi ruang Hilbert dengan perkalian skalar, yaitu:

$$(f_1, f_2) = \int_{SU(2)} f_1^*(u) f_2(u) du$$

### E.3 Representasi SU(2) dalam basis matrik Wigner

Sekarang kita akan tinjau representasi dari grup SU(2) untuk ruang Hilbert dengan dimensi berhingga. Berdasarkan teorema oleh Peter-Weyl, sebuah representasi grup kompleks berhingga dari grup kompak dapat dituliskan sebagai dekomposisi penjumlahan langsung (direct sum) dari representasi tak tereduksi (Representasi tak tereduksi artinya representasi suatu grup yang tidak dapat dibagi lagi menjadi subrepresentasi yang lebih kecil).

Disini kita akan berfokus pada representasi grup SU(2) dalam bentuk momentum sudut atau dalam basis  $|j, m\rangle$ . Sebagai subgrup dari  $SL_2(\mathbb{C})$ , maka grup SU(2) yang memiliki struktur aljabar grup  $\mathfrak{su}(2)$  yang sama dengan grup  $SL_2(\mathbb{C})$ , yaitu  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ , secara matematis memenuhi:

$$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \cong \mathfrak{su}(2) \oplus i \mathfrak{su}(2)$$

Dalam representasi aljabar  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  terdapat indeks bernilai pecahan setengah, yang dikenal sebagai spin. Untuk spin  $j \in \mathbb{N}/2$  berhubungan dengan ruang Hilbert dengan dimensi  $2j + 1$ . Basis kanonik disebut juga dengan magnetik basis dengan yang dinyatakan oleh  $|j, m\rangle$  dengan  $m \in \{-j, \dots, 0, \dots, j\}$ . Ini menghasilkan representasi ortonormal, yaitu:

$$\langle j, m | j, n \rangle = \delta_{mn}$$

Karena grup SU(2) merupakan grup rotasi maka representasinya dalam basis tersebut merupakan matrik Wigner  $D_{mn}^{(j)}(h)$ , yang dituliskan sebagai:

$$D_{mn}^{(j)}(h) = \langle j, m | h | j, n \rangle = \langle j, m, n | h \rangle$$

Matrik Wigner  $D_{mn}^{(j)}$  ini memenuhi sifat ortogonal yaitu  $L_2(SU(2))$ :

$$\int_{SU(2)} dh D_{mn}^{(j)}(h) D_{m'n'}^{(j')}(h) = \frac{1}{2j+1} \delta^{jj'} \delta_{mm'} \delta_{nn'}$$

Bila  $f(h)$  merupakan fungsi dari  $SU(2)$  maka berdasarkan teorema Peter-Weyl, dapat dituliskan sebagai fungsi dari matrik Wigner  $D_{mn}^{(j)}$  dan membentuk basis  $L_2(SU(2))$ , sehingga  $f(h) \in L_2(SU(2))$  dapat dituliskan:

$$f(h) = \sum_{j \in \mathbb{N}/2} \sum_{m=-j}^j \sum_{n=-j}^j f_{mn}^j D_{mn}^j(h)$$

Dengan koefisien  $f_{mn}^j \in \mathbb{C}$ . Sifat fungsi  $f(h)$  di atas dapat berlaku jika matrik Wigner bersifat lengkap dan pengukuran Haar. Sifat ini dibuktikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \int_{SU(2)} dh f(h) D_{m'n'}^{(j')}(h) &= \sum_{j \in \mathbb{N}/2} \sum_{m=-j}^j \sum_{n=-j}^j f_{mn}^j \int_{SU(2)} dh D_{mn}^j(h) D_{m'n'}^{(j')}(h) = \\ \int_{SU(2)} dh f(h) D_{m'n'}^{(j')}(h) &= \frac{1}{2j+1} \sum_{j \in \mathbb{N}/2} \sum_{m=-j}^j \sum_{n=-j}^j f_{mn}^j \end{aligned}$$

Sehingga dapat kita tuliskan koefisien  $f_{mn}^j$ , yaitu:

$$f_{mn}^j = (2j+1) \int_{SU(2)} dh f(h) D_{m'n'}^{(j')}(h)$$

Dengan menggunakan hasil di atas, maka:

$$\begin{aligned} f(h) &= \sum_{j \in \mathbb{N}/2} \sum_{m=-j}^j \sum_{n=-j}^j f_{mn}^j D_{mn}^j(h) \\ f(h) &= \sum_{j \in \mathbb{N}/2} \sum_{m=-j}^j \sum_{n=-j}^j \left( (2j+1) \int_{SU(2)} dh f(h) D_{m'n'}^{(j')}(h) \right) D_{mn}^j(h) \end{aligned}$$

Dari hasil kita dapatkan bahwa:

$$\sum_{j \in \mathbb{N}/2} \sum_{m=-j}^j \sum_{n=-j}^j (2j+1) \int_{SU(2)} dh D_{m'n'}^{(j')}(h) D_{mn}^j(h) = \delta^{jj'} \delta_{mm'} \delta_{nn'}$$

Hasil ini menunjukkan bahwa matrik Wigner bersifat komplit.

Terdapat beberapa bentuk eksplisit untuk matrik Wigner, antara lain:

- (i) Realisasi homogeneous

Matrik Wigner dalam representasi ini dituliskan sebagai:

$$D_{mn}^j(h) = \left( \frac{(j+m)!(j-m)!}{(j+n)!(j-n)!} \right)^{1/2} \sum_k \binom{j+n}{k} \binom{j-n}{j+m-k} \\ \times h_{11}^k h_{21}^{j+n-k} h_{12}^{j+m-k} h_{22}^{k-m-n}$$

Dengan  $k \in \{\max(0, m+n), \dots, \min(j+m, j+n)\}$  dan  $h = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$ .

Selain itu terdapat formula yang berguna untuk matrik Wigner yang didasarkan pada sifat simetrinya, yaitu:

$$D_{mn}^j(h) = (-1)^{m-n} D_{-m,-n}^j(h)$$

Formula di atas sangat berguna dalam perhitungan numerik untuk spin-network dan spin-foam.

- (ii) Ekspresi sudut Euler

Wigner mengajukan bentuk eksplisit untuk matriknya dalam representasi sudut Euler.

Jika  $h \in SU(2)$  dan  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^3$  merupakan sudut Euler dari  $h$ , sehingga  $h = e^{-\frac{i\alpha}{2}\sigma_3} e^{-\frac{i\beta}{2}\sigma_3} e^{-\frac{i\gamma}{2}\sigma_3}$ , maka:

$$D_{m'm}^j(h) = e^{-i(\alpha m' + \gamma m)} d_{m'm}^j(\beta)$$

Dengan dikenal sebagai reduced matrik Wigner:

$$d_{m'm}^j(\beta) = \left( \frac{(j+m)!(j-m)!}{(j+n)!(j-n)!} \right)^{1/2} \sum_{k=\max(0, m'+m)}^{\min(j+m', j+m)} (-1)^{m'+j-k} \binom{j+m}{k} \\ \times \binom{j-m}{j-k+m'} \left( \cos \frac{\beta}{2} \right)^{2k-m-m'} \left( \sin \frac{\beta}{2} \right)^{m+m'+2j-2k}$$

#### E.4 Teori Rekopling SU(2)

Representasi tak tereduksi dari grup SU(2) terbukti sebagai “penyusun mendasar” dari sifat kuantum ruang-waktu. Dalam perspektif matematika, representasi tak tereduksi merupakan kerangka dasar dalam membangun representasi grup lainnya. Begitu juga dengan representasi berhingga grup SU(2) yang secara lengkap merupakan grup tereduksi (reducible group) yang mana dapat diuraikan sebagai penjumlahan langsung representasi tak tereduksi grup tersebut, dalam hal ini grup SU(2). Secara khusus, sebuah perkalian tensor dari representasi tak tereduksi dalam diuraikan menjadi penjumlahan langsung representasi tak tereduksi, sebagai contoh hadirnya pemetaan bijek oleh intertwiner sebagai hasil dari perkalian tensor menjadi penjumlahan langsung representasi tak tereduksi. Intertwiner semacam ini dikenal sebagai kopling tensor. Goal dari teori rekopling adalah menggambarkan kopling tensor ini dan bagaimana menerjemahkannya antara 1 dekomposisi ke dekomposisi lainnya.

##### (1) Koefisien Clebsch-Gordan

Diberikan 3 representasi tak tereduksi SU(2), yaitu  $Q_{j_1}$  dan  $Q_{j_2}$ , representasi tensor didefinisikan sebagai  $Q_{j_1} \otimes Q_{j_2}$ . Basis kanonik  $Q_{j_1} \otimes Q_{j_2}$  diberikan oleh elemen berikut:

$$|j_1 m_1; j_2 m_2\rangle = |j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle$$

Dengan  $m_1$  dan  $m_2$  adalah indeks magnetic. Untuk basis ini bersifat unik ortonormal dan komut dengan operator yang dikenal sebagai *Complete Set of Commuting Operator* (CSCO). Dalam kasus SU(2), operator tersebut merupakan operator-operator momentum sudut dan dituliskan sebagai berikut:

$$J_3 \otimes \mathbf{1}, \quad \mathbf{1} \otimes J_3, \quad \mathbf{J}^2 \otimes \mathbf{1}, \quad \mathbf{1} \otimes \mathbf{J}^2$$

Dengan  $\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{J}_2$  dikenal sebagai total momentum sudut. Operator-operator di atas memenuhi hubungan komutasi sebagai berikut:

$$[J_{1i}, J_{1j}] = i\hbar \varepsilon_{ijk} J_{1k}$$

$$[J_{2i}, J_{2j}] = i\hbar \varepsilon_{ijk} J_{2k}$$

$$[J_{1i}, J_{2j}] = 0$$

Untuk operator total momentum sudut  $\mathbf{J}$  memenuhi hubungan komunitas:

$$[J_i, J_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} J_k$$

Sebagai konsekuensi dari 2 hubungan komutasi sebelumnya untuk  $\mathbf{J}_1$  dan  $\mathbf{J}_2$ . Selain bentuk operator di atas, terdapat bentuk operator lainnya yaitu:

$$J_3 \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes J_3, (\mathbf{J} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{J})^2, \mathbf{J}^2 \otimes \mathbf{1}, \mathbf{1} \otimes \mathbf{J}^2$$

Operator – operator di atas memenuhi hubungan komutasi dengan operator momentum sudut sebelumnya:

$$[\mathbf{J}^2, \mathbf{J}_1^2] = [\mathbf{J}^2, \mathbf{J}_2^2] = [\mathbf{J}^2, J_3] = 0$$

Oleh karena itu, akan eksis basis ortonormal, yaitu:

$$|j_1 j_2; k; n\rangle \text{ dengan } k \in \{|j_1 - j_2|, \dots, j_1 + j_2\} \text{ dan } n \in \{-k, \dots, k\}$$

Dan aksi operator di atas terhadap basis adalah:

$$(J_3 \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes J_3)|j_1 j_2; k; n\rangle = n|j_1 j_2; k; n\rangle$$

$$(\mathbf{J} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{J})^2 |j_1 j_2; k; n\rangle = k(k+1)|j_1 j_2; k; n\rangle$$

$$\mathbf{J}^2 \otimes \mathbf{1} |j_1 j_2; k; n\rangle = j_1(j_1+1)|j_1 j_2; k; n\rangle$$

$$\mathbf{1} \otimes \mathbf{J}^2 |j_1 j_2; k; n\rangle = j_2(j_2+1)|j_1 j_2; k; n\rangle$$

Selanjutnya koefisien Clebsch-Gordan dapat dituliskan sebagai perkalian scalar dari basis kanonik  $Q_{j_1} \otimes Q_{j_2}$ , yaitu:

$$C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{jm} = \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2; jm \rangle$$

Dimana  $|j_1 j_2; jm\rangle$  dapat dituliskan dalam representasi di atas menjadi:

$$|j_1 j_2; jm\rangle = \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{jm} |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$$

Bentuk eksplisit dari koefisien Clebsch-Gordan dituliskan sebagai berikut:

$$C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{j m} = \delta_{m, m_1 + m_2} \sqrt{2j + 1} \sqrt{\frac{(j + m)! (j - m)! (-j + j_1 + j_2)! (j - j_1 + j_2)! (j + j_1 - j_2)!}{(j + j_1 + j_2 + 1)! (j_1 + m_1)! (j_1 - m_1)! (j_2 + m_2)! (j_2 - m_2)!}}$$

$$\times \sum_k \frac{(-1)^{k + j_2 + m_2} (j + j_2 + m_1 - k)! (j_1 - m_1 + k)!}{(j - j_1 + j_2 - k)! (j + m - k)! (k + j_1 - j_2 - m)! k!}$$

Dimana  $k \in \{|j_1 - j_2|, \dots, j_1 + j_2\}$ . Selain bentuk eksplisit di atas dengan bantuan platform seperti Wolfram Alpha dalam Bahasa Wolfram, yaitu:

$$C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{j m} = \text{ClebsdhGordan}[\{j_1, m_1\}, \{j_2, m_2\}, \{j_3, m_3\}]$$

Berbagai bentuk eksplisit dari matrik Wigner dapat dilihat pada [37] hal. 235. Selain itu, matrik Wigner dalam representasi  $C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{j m}$  dapat dituliskan:

$$D_{m_1 n_1}^{j_1}(h) D_{m_2 n_2}^{j_2}(h) = \langle j_1 m_1 | h | j_1 n_1 \rangle \langle j_2 m_2 | h | j_2 n_2 \rangle = \langle j_1 m_1; j_2 m_2 | h | j_1 n_1; j_2 n_2 \rangle$$

$$D_{m_1 n_1}^{j_1}(h) D_{m_2 n_2}^{j_2}(h) = \sum_{j \in \mathbb{N}/2} \sum_{m = -j}^j \sum_{j' \in \mathbb{N}/2} \sum_{m' = -j'}^j \langle j_1 m_1; j_2 m_2 | j m \rangle \langle j m | h | j' m' \rangle \langle j' m' | j_1 n_1; j_2 n_2 \rangle$$

Sehingga

$$D_{m_1 n_1}^{j_1}(h) D_{m_2 n_2}^{j_2}(h) = \sum_{j \in \mathbb{N}/2} \sum_{m = -j}^j \sum_{m' = -j}^j C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{j m} C_{j_1 n_1 j_2 n_2}^{j m'} D_{m m'}^j(h)$$

Berikut adalah sifat-sifat dari koefisien Clebsch-Gordan, yaitu:

- (a) Koefisien Clebsch-Gordan merupakan koefisien dengan nilai numerik riil:  $C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{j m} \in \mathbb{R}$
- (b) Koefisien  $C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{j m}$  terdefinisi dengan baik dan tidak bernilai nol, jika dan hanya jika mengikuti ketidaksamaan Clebsch-Gordan (ketidaksamaan segitiga):

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$$

dan lainnya, menyebabkan  $C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{j m} = 0$

- (c) Jika  $m \neq m_1 + m_2$ , maka  $C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{j m} = 0$

- (d) Oleh karena  $|j m \rangle$  merupakan basis ortonormal, maka koefisien Clebsch-Gordan memenuhi hubungan orthogonal, yaitu:

$$\sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{j m} C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{j' m'} = \delta_{j j'} \delta_{m m'}$$

(2) Matrik 3- $j$ m Wigner (Wigner's 3- $j$ m Symbol)

Representasi tak tereduksi untuk matrik 3- $j$ m Wigner adalah  $Q_{j_1} \otimes Q_{j_2} \otimes Q_{j_3}$ , mengikuti teorema Peter-Weyl dapat didefinisikan sebagai penjumlahan langsung masing representasi. Adapun basis untuk matrik 3- $j$ m Wigner ini dituliskan sebagai berikut:

$$|(j_1 j_2) j_3; j_{12} k n\rangle = \sum_{m_1, m_2, m_3, m_{12}} C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{j_{12} m_{12}} C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{k n} \bigotimes_{i=1}^3 |j_i, m_i\rangle$$

Dengan  $j_{12} \in \{|j_1 - j_2|, \dots, j_1 + j_2\}$  dan  $k \in \{|j_{12} - j_3|, \dots, j_{12} + j_3\}$  dan  $n \in \{-k, \dots, k\}$ . Basis di atas jika dikenai operator  $\mathbf{J}^2$ , maka:

$$\mathbf{J}^2 |(j_1 j_2) j_3; j_{12} k n\rangle = 0 \leftrightarrow k = 0$$

Dan  $C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{j m}$  dikenal sebagai koefisien Clebsch-Gordan yang dapat didefinisikan dalam representasi matrik 3- $j$ m Wigner, yaitu:

$$C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{j m} = \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2; j m \rangle = (-1)^{j_1 - j_2 + m} \sqrt{2j + 1} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & -m \end{pmatrix}$$

Dalam representasi sebaliknya dapat dituliskan:

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{j_1 - j_2 - m_3}}{\sqrt{2j_3 + 1}} C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{j_3, -m_3}$$

Dengan menuliskan dalam bentuk determinan sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}$$

Dengan:

$$R_{11} = -j_1 + j_2 + j_3$$

$$R_{12} = j_1 - j_2 + j_3$$

$$R_{13} = j_1 + j_2 - j_3$$

$$R_{21} = j_1 + m_1 \qquad R_{22} = j_2 + m_2 \qquad R_{23} = j_3 + m_3$$

$$R_{31} = j_1 - m_1 \qquad R_{32} = j_2 - m_2 \qquad R_{33} = j_3 - m_3$$

Dan

$$J = j_1 + j_2 + j_3$$

Maka, diperoleh bentuk eksplisit matrik 3- $jm$  Wigner, yaitu [37]:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{R_{21}+R_{32}} \sqrt{\frac{R_{21}^{(-1)(R_{31}-R_{13})} R_{31}^{(-1)(R_{33}-R_{13})} R_{32}^{(-1)(R_{22}-R_{13})} R_{22}^{(-1)(R_{31}-R_{13})}}{(J+1)! R_{13}!}} \\ & \times (R_{21}R_{32} - R_{32}(J+1))^{R_{13}} \end{aligned}$$

Selain itu, matrik 3- $j$  Wigner memenuhi sifat simetri berikut:

(i) Simetri symbol

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1+j_2+j_3} \begin{pmatrix} j_2 & j_1 & j_3 \\ m_2 & m_1 & m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1+j_2+j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & -m_2 & -m_3 \end{pmatrix}$$

(ii) Hubungan orthogonal

$$\begin{aligned} & \sum_{jm} (2j+1) \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m'_1 & m'_2 & m \end{pmatrix} = \delta_{m_1 m'_1} \delta_{m_2 m'_2} \\ & \sum_{m_1 m_2} (2j+1) \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j' \\ m_1 & m_2 & m' \end{pmatrix} = \delta_{jj'} \delta_{mm'} \end{aligned}$$

Formula lainnya untuk matrik Wigner dalam representasi 3- $jm$ :

$$\int_{SU(2)} dh D_{m_1 n_1}^{j_1}(h) D_{m_2 n_2}^{j_2}(h) D_{m_3 n_3}^{j_3}(h) = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix}$$

(3) Matrik 4- $jm$  Wigner (Wigner's 4- $jm$  Symbol)

Seperti halnya pada matrik 3- $jm$  Wigner, pada matrik 4- $jm$  Wigner terdapat representasi tak tereduksi. Perbedaannya dalam matrik 4- $jm$  Wigner terdapat 4 buah representasi tak tereduksi

(matrik 3- $jm$  Wigner memiliki 3 representasi tak tereduksi dari grup  $SU(2)$ ), yaitu:  $Q_{j_1} \otimes Q_{j_2} \otimes Q_{j_3} \otimes Q_{j_4}$ . Basis ortonormal untuk 4 representasi ini dituliskan sebagai berikut:

$$|j\rangle_{12} = \sum_{m_1, m_2, m_3, m_4} \sqrt{2j+1} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 & j_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \end{pmatrix}^j \bigotimes_{k=1}^4 |j_k, m_k\rangle$$

Dengan  $j \in \{\max(|j_1 - j_2|, |j_3 - j_4|), \dots, \min(j_1 + j_2, j_3 + j_4)\}$  dan memiliki sifat unik ketika dikenai operator  $(\mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2)^2$ , yaitu:

$$(\mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2)^2 |j\rangle_{12} = j(j+1) |j\rangle_{12}$$

Kemudian untuk matrik 4- Wigner sendiri, dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 & j_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \end{pmatrix}^j = \sum_m (-1)^{j-m} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j & j_3 & j_4 \\ -m & m_3 & m_4 \end{pmatrix}$$

Dan memiliki sifat orthogonal, yaitu:

$$\sum_{m_1, m_2, m_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 & j_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \end{pmatrix}^{j_{12}} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 & l_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & n_4 \end{pmatrix}^{j_{12}} = \frac{\delta_{j_{12} l_{12}} \delta_{j_4 l_4} \delta_{m_4 n_4}}{d_{j_{12}} d_{j_4}}$$

Formula lainnya untuk matrik Wigner dalam representasi 4- $jm$  dan telah dibahas pada kasus theta grup valent, yaitu:

$$\int_{SU(2)} dh D_{m_1 n_1}^{j_1}(h) D_{m_2 n_2}^{j_2}(h) D_{m_3 n_3}^{j_3}(h) D_{m_4 n_4}^{j_4}(h) \\ = \sum_j (2j+1) \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 & j_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \end{pmatrix}^j \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 & j_4 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 \end{pmatrix}^j$$

#### (4) Matrik 6- $jm$ Wigner (Wigner's 6- $jm$ Symbol)

Untuk matrik 6- $jm$  Wigner disini kita akan gunakan basis yang berbeda dengan 2 jenis matrik Wigner sebelumnya. Basis tersebut adalah

$${}_{12}\langle j|k\rangle_{23} = \langle j_1 j_2(j) j_3 j m | j_1, j_2 j_3(k) j' m' \rangle \\ = \delta_{j j'} \delta_{m m'} \sqrt{2j+1} \times \sqrt{2k+1} (-1)^{j_1 + j_2 + j_3 - j_4 - 2j - 2k} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j \\ j_3 & j_4 & k \end{Bmatrix}$$

Dimana  $\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j \\ j_3 & j_4 & k \end{Bmatrix}$  dikenal sebagai matrik 6- $jm$  Wigner yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{Bmatrix} &= \sum_{m_1, \dots, m_6} (-1)^{\sum_{i=1}^6 (j_i - m_i)} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & -m_2 & -m_3 \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} j_1 & j_5 & j_6 \\ m_1 & -m_5 & m_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_4 & j_2 & j_6 \\ m_4 & m_2 & -m_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_3 & j_4 & j_5 \\ m_3 & -m_4 & m_5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Bentuk eksplisit dari matrik 6- $j_m$  Wigner mengacu pada [37] yaitu:

$$\begin{aligned} &\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{Bmatrix} \\ &= \Delta_{j_1 j_2 j_3} \times \Delta_{j_3 j_4 j_5} \times \Delta_{j_1 j_5 j_6} \times \Delta_{j_2 j_4 j_6} \\ &\times \sum_{n=1} \frac{(-1)^n (n+1)! (j_1 + j_3 + j_4 + j_6 - n)! (j_2 + j_3 + j_5 + j_6 - n)!}{(n - j_1 - j_2 - j_3)! (n - j_3 - j_4 - j_5)! (n - j_1 - j_5 - j_6)! (n - j_2 - j_4 - j_6)! (j_1 + j_2 + j_4 + j_5 - n)!} \end{aligned}$$

Dengan  $n$  adalah jumlah iterasi dalam perhitungan (semakin besai nilai  $n$ , semakin teliti nilai yang didapat) dan juga:

$$\Delta_{j_1 j_2 j_3} = \sqrt{\frac{(j_1 + j_2 - j_3)! (j_1 - j_2 + j_3)! (-j_1 + j_2 + j_3)!}{(j_1 + j_2 + j_3 + 1)!}}$$

$$\Delta_{j_3 j_4 j_5} = \sqrt{\frac{(j_3 + j_4 - j_5)! (j_3 - j_4 + j_5)! (-j_3 + j_4 + j_5)!}{(j_3 + j_4 + j_5 + 1)!}}$$

$$\Delta_{j_1 j_5 j_6} = \sqrt{\frac{(j_1 + j_5 - j_6)! (j_1 - j_5 + j_6)! (-j_1 + j_5 - j_6)!}{(j_1 + j_5 + j_6 + 1)!}}$$

$$\Delta_{j_2 j_4 j_6} = \sqrt{\frac{(j_2 + j_4 - j_6)! (j_2 - j_4 + j_6)! (-j_2 + j_4 + j_6)!}{(j_2 + j_4 + j_6 + 1)!}}$$

Selain itu, matrik 6- $j_m$  Wigner beberapa sifat, yaitu:

(i) Sifat simetri

Yaitu simetri permutasi kolom:

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_2 & j_3 & j_1 \\ j_5 & j_6 & j_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_3 & j_1 & j_2 \\ j_6 & j_4 & j_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_2 & j_1 & j_3 \\ j_5 & j_4 & j_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_1 & j_3 & j_2 \\ j_4 & j_6 & j_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_3 & j_2 & j_1 \\ j_6 & j_5 & j_4 \end{Bmatrix}$$

Simetri pemutaran bagian dan bawah kolom:

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_4 & j_2 & j_3 \\ j_1 & j_5 & j_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_1 & j_5 & j_3 \\ j_4 & j_2 & j_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_6 \\ j_4 & j_5 & j_3 \end{Bmatrix}$$

(ii) Hubungan orthogonal

$$\sum_{j_6} (2j+1)(2j'+1) \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j' \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{Bmatrix} = \delta_{jj'}$$

(iii) Hubungan komposisi

$$\sum_{j_6} (-1)^{j_6+j'+j} (2j_6+1) \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_2 & j_4 & j_6 \\ j_1 & j_5 & j' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_4 & j_1 & j' \\ j_2 & j_5 & j \end{Bmatrix}$$

(5) Matrik 9-*jm* Wigner (Wigner's 9-*jm* Symbol)

Matrik 9-*jm* Wigner atau dikenal pula sebagai koefisien Fano merupakan koefisien dari transformasi unitary yang berhubungan dengan vector keadaan/state yang terkait dengan skema kopling 4 operator momentum sudut  $\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2, \mathbf{J}_3$  dan  $\mathbf{J}_4$ . Basis untuk matrik 9-*jm* Wigner ini dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} & \langle j_1 j_2(j) j_3 j_4(j') j m | j_1 j_4(k) j_2 j_3(k') j' m' \rangle \\ & = \delta_{jj'} \delta_{mm'} (-1)^{j_3+j_4-j'} \sqrt{(2j+1)(2k+1)(2k'+1)(2j'+1)} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j \\ j_3 & j_4 & j' \\ k & k' & \tilde{j} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Dengan  $\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j \\ j_3 & j_4 & j' \\ k & k' & \tilde{j} \end{Bmatrix}$  adalah matrik 9-*jm* Wigner yang memenuhi sifat normalisasi berikut:

$$\sum_{j_7, j_8} (2j_7+1)(2j_8+1) \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \\ j_7 & j_8 & j_9 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j'_3 \\ j_4 & j_5 & j'_6 \\ j_7 & j_8 & j'_9 \end{Bmatrix} = \delta_{j_3 j'_3} \delta_{j_6 j'_6} \frac{\{j_1 j_2 j_3\} \{j_4 j_5 j_6\} \{j_3 j_6 j_9\}}{(2j_3+1)(2j_6+1)}$$

$$\sum_{j_3, j_6} (2j_3+1)(2j_6+1) \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \\ j_7 & j_8 & j_9 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \\ j'_7 & j'_8 & j_9 \end{Bmatrix} = \delta_{j_7 j'_7} \delta_{j_8 j'_8} \frac{\{j_1 j_4 j_7\} \{j_2 j_5 j_8\} \{j_7 j_8 j_9\}}{(2j_7+1)(2j_8+1)}$$

Dengan:

$$\{j_1 j_2 j_3\} = ?$$

Bentuk eksplisit matrik 9- $j_m$  Wigner adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \\ j_7 & j_8 & j_9 \end{pmatrix} \\
&= \frac{(\Delta j_1 j_2 j_3)(\Delta j_4 j_5 j_6)(\Delta j_2 j_5 j_8)(\Delta j_7 j_8 j_9)}{(\Delta j_1 j_4 j_7)(\Delta j_3 j_6 j_9)} \\
&\times \frac{(j_1 + j_4 - j_7)!(j_3 + j_6 - j_9)!}{(j_1 + j_4 + j_7 + 1)!(j_1 + j_4 + j_7)!(-j_1 + j_2 + j_3)!(j_2 - j_5 + j_6)!(-j_4 + j_5 + j_6)!} \\
&\times \frac{(j_7 + j_8 + j_9 + 1)!}{(j_2 - j_5 + j_8)!(-j_2 + j_5 + j_8)!} \\
&\times \sum_{xyzt} (-1)^{j_1 - j_3 + j_5 - j_7 + j_9 + x + y + z + t} \frac{(2j_1 - x)!(2j_2 - y)!(2j_4 - z)!(2j_5 - t)!}{x!y!z!t!} \\
&\times \frac{(-j_1 + j_2 + j_3 + x)!(-j_2 + j_5 + j_8 + y)!(-j_4 + j_5 + j_6 + z)!}{(j_1 + j_2 - j_3 + x)!(j_2 + j_5 - j_8 - y)!(j_4 + j_5 - j_6 - z)!(j_2 + j_5 - j_9 - t)!} \\
&\times \frac{(j_2 - j_5 + j_7 - j_9 + t)!(-j_1 - j_5 + j_6 + j_7 + x + t)!}{(j_1 + j_3 - j_7 - x - z)!(j_5 - j_2 + j_8 + y - t)!} \\
&\times \frac{(j_3 - j_4 + j_5 + j_9 + z - t)!(-j_1 + j_3 - j_4 + j_6 + j_7 + j_9 + 1 + x + z)!}{(-j_4 + j_5 + j_6 + z - t)!(j_2 - j_5 + j_7 - j_9 - y + t)!(-j_1 + j_3 - j_5 + j_7 + z + t)!}
\end{aligned}$$

Dimana  $x, y, z, t$  adalah bilangan factorial lebih atau sama dengan nol. Persamaan di atas pertama kali dirumuskan oleh Alisauskas dan Yutsis [37].

## Lampiran F: Model Friedmann-Robertson-Walker (FRW)

### F.1 Penurunan Metrik Friedmann-Robertson-Walker (FRW)

Metrik Friedmann-Robertson-Walker (FRW) ialah metrik yang memerikan geometri alam semesta makroskopis. Metrik FRW dapat diperoleh dari persamaan medan Einstein dengan asumsi dan kendala dari pengamatan antara lain sebagai berikut.

- (1) Pengembangan ruang secara seragam (ekspansi Hubble).
- (2) Adanya waktu kosmik dalam kerangka yang bergerak bersama dengan pengembangan ruang.
- (3) Alam semesta secara makroskopis bersifat homogen (seragam) dan isotropik (sama ke segala arah).
- (4) Secara makroskopis, alam semesta dapat dipandang didominasi oleh radiasi dan materi berkepadatan rendah.

Berdasarkan asumsi (1) maka fungsi parameter untuk koordinat ruang mestilah mengandung variabel waktu. Dari asumsi (2), maka dengan menggunakan “koordinat kosmik” atau co-moving coordinate dapat dipilih  $g_{00} = 1$ . Adapun dari asumsi (3), syarat isotropik menunjukkan metrik bersifat serupa simetri bola, sedangkan syarat homogen mengharuskan fungsi metrik bernilai sama untuk ketiga parameter ruang ( $Q_i dx^i$ ). Berdasarkan asumsi-asumsi di atas, kita sudah dapat memilih ansatz yang berbentuk:

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2\alpha(r,t)}[dr^2 + r^2 d\Omega^2]$$

Selanjutnya dipilih dari asumsi (4) tensor energi-momentum untuk fluida dituliskan sebagai:

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \cdot \text{diag}(-\rho \quad P \quad P \quad P)$$

Berdasarkan ansatz maka diperoleh symbol Christoffel yang tidak lenyap, yaitu:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^0 &= \dot{\alpha} e^{2\alpha} & \Gamma_{22}^0 &= \dot{\alpha} r^2 e^{2\alpha} & \Gamma_{33}^0 &= \dot{\alpha} r^2 \sin^2 \theta e^{2\alpha} \\ \Gamma_{11}^1 &= \alpha' & \Gamma_{22}^1 &= -r - \alpha' r^2 & \Gamma_{33}^1 &= -\sin^2 \theta (r + \alpha' r^2) \\ \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \alpha' + \frac{1}{r} \\ \Gamma_{01}^1 &= \Gamma_{10}^1 = \Gamma_{20}^2 = \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{03}^3 = \Gamma_{30}^3 = \dot{\alpha} & \Gamma_{23}^3 &= \cot \theta \end{aligned}$$

Tensor Ricci yang tidak lenyap:

$$R_{00} = -3\ddot{\alpha} - 2\dot{\alpha}^2$$

$$R_{01} = R_{10} = -2\dot{\alpha}'$$

$$R_{11} = e^{2\alpha}(\ddot{\alpha} + 3\dot{\alpha}^2) - 2\alpha'' - \frac{2}{r}\alpha'$$

$$R_{22} = r^2 e^{2\alpha} (\ddot{\alpha} + 3\dot{\alpha}^2) - r^2 \alpha'' - 3r\alpha' - r^2 \alpha'^2$$

$$R_{33} = R_{22} \sin^2 \theta$$

Dan scalar Ricci:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{00} R_{00} + g^{11} R_{11} + g^{22} R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} R_{33}$$

$$R = -6(\ddot{\alpha} + 2\dot{\alpha}^2) + e^{-2\alpha} \left( 4\alpha'' + 2\alpha'^2 + \frac{8}{r} \alpha' \right)$$

Menggunakan persamaan medan Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - g_{\mu\nu} \Lambda = \kappa T_{\mu\nu}$$

Untuk komponen 01, maka:

$$R_{01} - \frac{1}{2} g_{01} R - g_{01} \Lambda = \kappa T_{01} = 0$$

Sehingga dipenuhi

$$R_{01} = 0 = -2\dot{\alpha}' = -2 \frac{d}{dr} \left( \frac{d\alpha}{dt} \right)$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa dalam  $\alpha(r, t)$  variable r dan t adalah variable yang terpisah, sehingga dapat dituliskan dalam bentuk penjumlahan:

$$\alpha(r, t) = A(r) + \ln R(t)$$

Sehingga  $\alpha' = A'$  dan  $\dot{\alpha} = \frac{\dot{R}}{R}$ . Selanjutnya dengan mengurangkan  $r^2 R_{11}$  dengan  $R_{22}$ , maka:

$$R_{22} - r^2 R_{11} = r^2 A'' - r^2 A'^2 - rA'$$

Dengan menggunakan persamaan medan Einstein dalam bentuk:

$$R_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \left( \frac{1}{2} R + \Lambda \right)$$

Untuk masing-masing komponen kita peroleh:

$$R_{00} = \kappa \rho - \left( \frac{1}{2} R + \Lambda \right)$$

$$R_{11} = e^{2\alpha} \kappa P - e^{2\alpha} \left( \frac{1}{2} R + \Lambda \right)$$

$$R_{11} = e^{2\alpha} r^2 \kappa P - e^{2\alpha} r^2 \left( \frac{1}{2} R + \Lambda \right)$$

2 persamaan terakhir memberikan nilai dan berdasarkan persamaan sebelumnya

$R_{22} - r^2 R_{11} = r^2 A'' - r^2 A'^2 - rA'$ , maka:

$$R_{22} - r^2 R_{11} = r^2 A'' - r^2 A'^2 - r A'$$

$$0 = r^2 A'' - r^2 A'^2 - r A'$$

Atau

$$A'' - A'^2 - \frac{1}{r} A' = 0 \rightarrow \frac{d^2 A}{dr^2} - \left(\frac{dA}{dr}\right)^2 - \frac{1}{r} \frac{dA}{dr} = 0$$

Dengan memisalkan:

$$B(r) = \frac{1}{r} \frac{dA}{dr}$$

Sehingga

$$\frac{d^2 A}{dr^2} = r \frac{dB}{dr} + B$$

$$\left(\frac{dA}{dr}\right)^2 = r^2 B^2$$

Kita substitusikan ke persamaan sebelumnya, maka:

$$\frac{d^2 A}{dr^2} - \left(\frac{dA}{dr}\right)^2 - \frac{1}{r} \frac{dA}{dr} = 0 \rightarrow r \frac{dB}{dr} + B - r^2 B^2 - B = 0$$

atau

$$\frac{dB}{dr} = r B^2$$

$$\int \frac{dB}{B^2} = \int r dr$$

$$-\frac{1}{B} = \frac{1}{2} r^2 + C_1 \rightarrow B = -\frac{2}{2C_1 + r^2}$$

Dengan  $C_1$  adalah tetapan integrasi. Dengan mengembalikan  $B(r) = \frac{1}{r} \frac{dA}{dr}$ , maka didapatkan:

$$\frac{1}{r} \frac{dA}{dr} = -\frac{2}{2C_1 + r^2}$$

$$A = -2 \int \frac{r}{2C_1 + r^2} dr$$

Misalkan  $u = 2C_1 + r^2$ , maka  $du = 2r dr$ , sehingga

$$A = - \int \frac{1}{u} du = -\ln u + C_2 = -\ln(2C_1 + r^2) + C_2$$

Maka dengan mengingat:  $\alpha(r, t) = A(r) + \ln R(t)$ , maka diperoleh:

$$\alpha(r, t) = A(r) + \ln R(t) = -\ln(2C_1 + r^2) + C_2 + \ln R(t)$$

$$\alpha(r, t) = \ln\left(\frac{R(t)}{2C_1 + r^2}\right) + C_2$$

Dari variabel metrik:  $e^{2\alpha(r,t)}$ , maka dengan mensubstitusikan hasil di atas diperoleh:

$$e^{2\alpha(r,t)} = e^{2\left[\ln\left(\frac{R(t)}{2C_1+r^2}\right)+C_2\right]} = e^{\left[\ln\left(\frac{R(t)}{2C_1+r^2}\right)^2+2C_2\right]} = \frac{R(t)^2}{(2C_1+r^2)^2} e^{2C_2} = \frac{1}{\left(1+\frac{r^2}{2C_1}\right)^2} \frac{R(t)^2 e^{2C_2}}{2C_1}$$

Dengan mendefinisikan  $\frac{1}{C_1} = \frac{K}{2}$ ,  $\frac{2C_1}{e^{2C_2}} = R_0^2$ , dan  $\frac{R(t)}{R_0} = a(t)$  sebagai factor skala, sehingga

$$e^{2\alpha(r,t)} = \frac{a(t)^2}{\left(1 + \frac{Kr^2}{4}\right)^2}$$

Dengan mensubstitusikan hasil di atas ke metrik ruang-waktu di awal, maka:

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{a(t)^2}{\left(1 + \frac{Kr^2}{4}\right)^2} [dr^2 + r^2 d\Omega^2]$$

Metrik di atas dikenal sebagai metrik Friedmann-Robertson-Walker (FRW). Dan ketika kita perkenalkan transformasi koordinat polar circumference, maka:

$$\tilde{r} = \frac{r}{1 + \frac{Kr^2}{4}}$$

Sehingga

$$\frac{d\tilde{r}}{dr} = \frac{1}{1 + \frac{Kr^2}{4}} - \frac{\frac{Kr^2}{2}}{\left(1 + \frac{Kr^2}{4}\right)^2} = \frac{1 + \frac{Kr^2}{4} - \frac{Kr^2}{2}}{\left(1 + \frac{Kr^2}{4}\right)^2} = \frac{1 - \frac{Kr^2}{4}}{\left(1 + \frac{Kr^2}{4}\right)^2}$$

Dan

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\tilde{r}}{dr}\right)^2 &= \frac{\left(1 + \frac{Kr^2}{4}\right)^2 - Kr^2}{\left(1 + \frac{Kr^2}{4}\right)^4} = \frac{1 - Kr^2 \left(1 + \frac{Kr^2}{4}\right)^{-2}}{\left(1 + \frac{Kr^2}{4}\right)^2} = \frac{1 - K\tilde{r}^2}{\left(1 + \frac{Kr^2}{4}\right)^2} \\ \frac{d\tilde{r}^2}{1 - K\tilde{r}^2} &= \frac{dr^2}{\left(1 + \frac{Kr^2}{4}\right)^2} \end{aligned}$$

Hasil di atas kita substitusikan ke metrik FRW sebelumnya, maka:

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{a(t)^2}{\left(1 + \frac{Kr^2}{4}\right)^2} [dr^2 + r^2 d\Omega^2]$$

$$= -dt^2 + a(t)^2 \left[ \frac{1}{\left(1 + \frac{Kr^2}{4}\right)^2} dr^2 + \frac{r^2}{\left(1 + \frac{Kr^2}{4}\right)^2} d\Omega^2 \right]$$

Maka diperoleh

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[ \frac{1}{1 - K\tilde{r}^2} d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 d\Omega^2 \right]$$

Dengan menghilangkan tanda tilde di peroleh metri FRW sebagai berikut:

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[ \frac{1}{1 - K\tilde{r}^2} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \right]$$

Dalam metrik di atas terdapat tetapan integritas  $K$  yang akan ditentukan kemudian dengan menggunakan asumsi-asumsi sebelumnya dan di peroleh  $K = -1, 0, +1$  yang masing-masing menunjukkan ( $K = -1$ ) alam semesta terbuka, ( $K = 0$ ) alam semesta datar, dan ( $K = +1$ ) alam semesta tertutup. Adapun nilai factor skala  $a(t)$  dapat diperoleh dengan menyelesaikan persamaan Friedmann yang diperoleh dari persamaan medan Einstein.

## F.2 Persamaan Friedmann dari Model FRW

Persamaan Friedmann adalah persamaan yang menggambarkan dinamika alam semesta dalam model Friedmann-Robertson-Walker (FRW). Dengan menggunakan transformasi koordinat polar circumference:

$$\tilde{r} = \frac{r}{1 + \frac{Kr^2}{4}}$$

Diperoleh:

$$e^{2\alpha} = \frac{a^2}{1 - K\tilde{r}^2}; \quad \dot{\alpha} = \frac{\dot{a}}{a}; \quad \ddot{\alpha} = \frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2; \quad \alpha' = -\frac{1}{2}Kr^2; \quad \alpha'' = 2K\left(\frac{\tilde{r}}{r}\right)^2 - \frac{K^2}{2}\tilde{r}^2$$

Kemudian menuliskan  $\tilde{r} \rightarrow r$ , diperoleh komponen tensor Ricci untuk metrik FRW dalam koordinat polar circumference sebagai berikut:

$$R_{00} = 3\frac{\ddot{a}}{a}$$

$$R_{11} = -\frac{1}{1 - K\tilde{r}^2} (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2K)$$

$$R_{22} = -r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2K)$$

$$R_{33} = R_{22} \sin^2 \theta$$

Dan skalar Ricci:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = \frac{6}{a^2}(a\ddot{a} + \dot{a}^2 + K)$$

Menggunakan persamaan medan Einstein untuk komponen 00 dan 11, yaitu:

(a) Komponen 00

$$R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R - g_{00}\Lambda = 8\pi GT_{00}$$

$$3\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{1}{2}(-1)\left[\frac{6}{a^2}(a\ddot{a} + \dot{a}^2 + K)\right] - (-1)\Lambda = -8\pi G\rho$$

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 3\frac{K}{a^2} - \Lambda = 8\pi G\rho$$

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{K}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}$$

Didefinisikan disini  $H = \frac{\dot{a}}{a}$ , yaitu parameter Hubble, maka persamaan di atas menjadi persamaan Friedmann pertama:

$$H^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{K}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}$$

(b) Komponen 11

$$R_{11} - \frac{1}{2}g_{11}R - g_{11}\Lambda = 8\pi GT_{11}$$

$$-\frac{1}{1-K\tilde{r}^2}(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2K) - \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{1-K\tilde{r}^2}\right)\left[\frac{6}{a^2}(a\ddot{a} + \dot{a}^2 + K)\right] - \left(\frac{a^2}{1-K\tilde{r}^2}\right)\Lambda$$

$$= -8\pi G\left(\frac{a^2 P}{1-K\tilde{r}^2}\right)$$

$$(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2K) - 3(a\ddot{a} + \dot{a}^2 + K) + a^2\Lambda = 8\pi GP a^2$$

$$-\left(2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{K}{a^2}\right) + \Lambda = 8\pi GP$$

Dengan menjumlahkan persamaan  $\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{K}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}$  dengan persamaan terakhir, maka:

$$-\left(2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{K}{a^2}\right) + \Lambda = 8\pi GP$$

$$\begin{aligned}
& - \left( 2 \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{8\pi G \rho}{3} - \frac{K}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} + \frac{K}{a^2} \right) + \Lambda = 8\pi G P \\
& - \left( 2 \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{8\pi G \rho}{3} - \frac{K}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} + \frac{K}{a^2} \right) + \Lambda = 8\pi G P \\
& \frac{\ddot{a}}{a} = - \frac{4\pi G}{3} (3P + \rho) + \frac{\Lambda}{3}
\end{aligned}$$

Karena  $H = \frac{\dot{a}}{a}$ , maka  $\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} - H^2$ , sehingga diperoleh persamaan Friedmann kedua:

$$\dot{H} = H^2 - \frac{4\pi G}{3} (3P + \rho) + \frac{\Lambda}{3}$$

Kita peroleh 2 persamaan Friedmann yaitu:

$$\begin{aligned}
H^2 + \frac{K}{a^2} &= \frac{8\pi G \rho}{3a^2} + \frac{\Lambda}{3} \\
\dot{H} &= H^2 - \frac{4\pi G}{3} (3P + \rho) + \frac{\Lambda}{3}
\end{aligned}$$

Yang masing-masing menunjukkan kelajuan ekspansi/pengerutan alam semesta dan lainnya menunjukkan akselerasi/perlambatan laju ekspansi alam semesta.