Théorie Ensembliste des Facteurs Premiers

Partie II : Introduction à l'Opérateur Intersection_p

C. Pokorski

déc. 2023

Abstract

Cet article présente un nouvel opérateur mathématique, l'Intersection_p, conçu pour établir des connexions entre les nombres en se basant sur leurs facteurs premiers, qui peut également être vu comme une extension du PGCD.

1 Définition

1.1 Généralité

L'opérateur Intersection_p (ou "Intersection primaire"), noté $\cap_p$, détermine le produit des facteurs premiers communs, pris à leur plus petite puissance, de plusieurs nombres entiers.

Cette opération, à l'image de Union_p [1], met en lumière les éléments fondamentaux partagés entre les nombres, en établissant un lien mathématique basé sur leurs caractéristiques communes les plus élémentaires.

1.2 Intersection_p de deux nombres

Soient a et b deux nombres entiers. L'Intersection_p de a et b, notée $a \cap_p b$, est calculée comme suit :

Soit $P(a)$ l'ensemble des facteurs premiers de a avec leurs puissances respectives, et $P(b)$ celui de b. L'Intersection_p de a et b est le produit des plus petites puissances de chaque facteur premier présent à la fois dans a et b.

Si $P(a) = \{p_1^{n_1}, p_2^{n_2}, \dots, p_k^{n_k}\}$ et $P(b) = \{q_1^{m_1}, q_2^{m_2}, \dots, q_l^{m_l}\}$, alors :

$$a \cap_p b = \prod_{p \in P(a) \cap P(b)} p^{\min(n_p, m_p)}$$

où n_p est la puissance de p dans $P(a)$ et m_p est la puissance de p dans $P(b)$.

Pour illustrer l'opérateur Intersection_p, considérons les exemples suivants :

- **Exemple 1 :** $12 \cap_p 18 = 6$

  Soit $a = 12$ et $b = 18$. Les facteurs premiers de 12 sont $\{2^2, 3^1\}$, et ceux de 18 sont $\{2^1, 3^2\}$. En utilisant l'opérateur Intersection_p pour 12 et 18, soit $12 \cap_p 18$, nous prenons la plus petite puissance de chaque facteur premier commun à 12 et 18. Ainsi, l'Intersection_p de 12 et 18 est $\{2^1, 3^1\}$. Le résultat de cette opération est le produit de ces facteurs premiers, ce qui donne $2 \times 3 = 6$.

- **Exemple 2:** $15 \cap_p 75 = 15$

  Soit $a = 15$ et $b = 75$. Les facteurs premiers de 15 sont $\{3^1, 5^1\}$, et ceux de 75 sont $\{3^1, 5^2\}$. L'Intersection_p de 15 et 75, soit $15 \cap_p 75$, est calculée en prenant la plus petite puissance de chaque facteur premier commun à 15 et 75, donnant $\{3^1, 5^1\}$ soit $3 \times 5 = 15$.

- **Exemple 3:** $8 \cap_p 14 = 2$

  Considérons $a = 8$ et $b = 14$. Les facteurs premiers de 8 sont $\{2^3\}$, et ceux de 14 sont $\{2^1, 7^1\}$. L'Intersection_p de 8 et 14, soit $8 \cap_p 14$, est calculée en identifiant le facteur premier commun (2) et en prenant sa plus petite puissance présente dans les deux nombres, ce qui donne $\{2^1\}$. Le résultat est donc $2^1 = 2$.

1.3 Intersection_p d'un ensemble de nombres

Soit $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ un ensemble de nombres entiers. L'Intersection_p de E, notée $\bigcap_p E$, est le produit des plus petites puissances de chaque facteur premier commun à tous les éléments de E.

Si chaque nombre e_i dans E est décomposé en ses facteurs premiers avec leurs puissances respectives, alors $\bigcap_p E$ est donné par :

$$\bigcap_p E = \prod_{p \in \mathcal{P}(E)} p^{\min(n_{p,e_1}, n_{p,e_2}, \ldots, n_{p,e_n})}$$

où $\mathcal{P}(E)$ désigne l'ensemble de tous les facteurs premiers communs aux éléments de E, et n_{p,e_i} est la puissance du facteur premier p dans la décomposition de e_i. Pour chaque p commun à tous les e_i dans E, on prend la plus petite puissance n_{p,e_i} parmi tous les e_i.

- **Exemple :** Considérons l'ensemble $E = \{12, 18, 24\}$.
  - Les facteurs premiers de 12 sont $\{2^2, 3^1\}$.
  - Les facteurs premiers de 18 sont $\{2^1, 3^2\}$.
  - Les facteurs premiers de 24 sont $\{2^3, 3^1\}$.
  - L'Intersection_p de l'ensemble E, soit $\bigcap_p E$, est calculée en identifiant les facteurs premiers communs à 12, 18 et 24, et en prenant la plus petite puissance de ces facteurs premiers communs, donnant $\{2^1, 3^1\}$.
  - Par conséquent, $\bigcap_p E = 2^1 \times 3^1 = 2 \times 3 = 6$.

1.4 Intersection_p de n ensembles

Soit $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ un ensemble de nombres entiers. L'Intersection_p de E, notée $\bigcap_p E$, est le produit des plus petites puissances de chaque facteur premier commun à tous les éléments de E. Cette opération identifie et combine les facteurs premiers partagés par tous les nombres dans l'ensemble, en se concentrant sur les éléments communs et en excluant les divergences.

Si chaque nombre e_i dans E est décomposé en ses facteurs premiers avec leurs puissances respectives, alors $\bigcap_p E$ est donné par :

$$\bigcap_p E = \prod_{p \in \mathcal{P}(E)} p^{\min(n_{p,e_1}, n_{p,e_2}, \ldots, n_{p,e_n})}$$

où $\mathcal{P}(E)$ désigne l'ensemble de tous les facteurs premiers communs parmi les éléments de E, et n_{p,e_i} est la puissance du facteur premier p dans la décomposition de e_i. Pour chaque p dans $\mathcal{P}(E)$, on prend la plus petite puissance n_{p,e_i} parmi tous les e_i dans E.

- **Exemple :** Considérons l'ensemble $E = \{12, 18, 24\}$.
  - Les facteurs premiers de 12 sont $\{2^2, 3^1\}$.
  - Les facteurs premiers de 18 sont $\{2^1, 3^2\}$.
  - Les facteurs premiers de 24 sont $\{2^3, 3^1\}$.
  - L'Intersection_p de l'ensemble E, soit $\bigcap_p E$, est le produit des plus petites puissances de chaque facteur premier commun à 12, 18 et 24.
  - Ainsi, nous prenons 2^1 (la plus petite puissance de 2) et 3^1 (la plus petite puissance de 3).
  - Par conséquent, $\bigcap_p E = 2^1 \times 3^1 = 6$.

Cette section démontre comment l'Intersection_p peut être appliquée à un ensemble de nombres pour révéler et unifier leurs propriétés numériques communes les plus fondamentales.

1.5 Intersection_p d'une séquence successive de nombres

Considérons l'application de l'opérateur Intersection_p à une séquence successive de nombres entiers de 2 à n. Cette opération cherche à identifier et à combiner les facteurs premiers communs à tous les nombres dans la séquence, en se concentrant sur les composants les plus élémentaires partagés.

L'Intersection d'une telle séquence, notée $\bigcap_{i=2}^{n} i$, est définie comme le produit des plus petites puissances de chaque facteur premier commun à tous les nombres de la séquence. Formellement, cela s'exprime comme :

$$\bigcap_{i=2}^{n} i = \prod_{p \in \mathcal{P}(2,3,\ldots,n)} p^{\min(n_{p,2}, n_{p,3}, \ldots, n_{p,n})}$$

où $\mathcal{P}(2,3,\ldots,n)$ désigne l'ensemble de tous les facteurs premiers communs aux nombres de 2 à n, et $n_{p,i}$ est la plus petite puissance du facteur premier p dans la décomposition de chaque i dans la séquence. Pour chaque p dans $\mathcal{P}(2,3,\ldots,n)$, la plus petite puissance $n_{p,i}$ est retenue.

- **Exemple :** Pour calculer $\bigcap_{i=2}^{n} i$ pour $n=5$, considérons les nombres de 2 à 5.
  - Le facteur premier commun dans cette séquence est 2.
  - La plus petite puissance de 2 dans la séquence est 2^1 (présente dans le nombre 2).
  - Par conséquent, $\bigcap_{i=2}^{5} i$ est égal à $2^1 = 2$, reflétant le facteur premier commun dans toute la séquence.

Cette approche de l'Intersection_p met en lumière les facteurs premiers communs dans une séquence continue de nombres entiers, en particulier en mettant l'accent sur le rôle du nombre 2 comme point de départ minimum de la séquence.

1.6 Intersection_p pour un facteur premier donné

L'opérateur Intersection_p, lorsqu'il est appliqué à un facteur premier spécifique, se concentre sur l'analyse des nombres sous l'angle de ce facteur premier unique. Cette approche permet d'extraire et de comparer la présence et la puissance de ce facteur premier spécifique dans un ensemble de nombres.

Soit k un facteur premier donné. L'opérateur Intersection_p spécifique à k, noté $\cap_k$, est défini comme l'opération qui identifie la plus petite puissance de k présente dans chaque nombre considéré. Si k n'est pas un facteur premier d'un nombre donné, il est traité comme s'il était présent à la puissance zéro.

Pour deux nombres entiers a et b, l'Intersection_p spécifique à k, notée $a \cap_k b$, est calculée comme suit :

$$a \cap_k b = k^{\min(n_k, m_k)}$$

où n_k est la puissance de k dans la décomposition en facteurs premiers de a, et m_k est la puissance de k dans celle de b. Si k n'apparaît pas dans la décomposition de l'un des nombres, sa puissance est considérée comme 0.

- **Exemple :** Considérons $a = 12$ et $b = 30$ avec le facteur premier $k = 2$.
  - La décomposition de 12 est $\{2^2, 3^1\}$ et celle de 30 est $\{2^1, 3^1, 5^1\}$.
  - La plus petite puissance de 2 dans les deux nombres est 2^1.
  - Ainsi, $12 \cap_2 30 = 2^1 = 2$.

Cet opérateur particulier d'Intersection_p offre une vision des nombres en isolant l'influence d'un facteur premier spécifique au sein d'un ensemble de nombres, permettant ainsi une analyse plus ciblée de leurs propriétés communes.

2 Propriétés fondamentales

2.1 Commutativité

L'Intersection_p, tout comme l'Union_p, possède la propriété de commutativité. Cela signifie que l'ordre des nombres dans l'opération n'affecte pas le résultat final. Pour tous entiers a et b, l'Intersection_p satisfait la relation $a \cap_p b = b \cap_p a$.

2.1.1 Démonstration

Considérons deux nombres entiers a et b. Pour démontrer la commutativité de l'opérateur Intersection_p, c'est-à-dire $a \cap_p b = b \cap_p a$, nous examinons les ensembles de facteurs premiers de a et b avec leurs puissances respectives.

Soit $P(a) = \{p_1^{n_1}, p_2^{n_2}, \ldots, p_k^{n_k}\}$ l'ensemble des facteurs premiers de a avec leurs puissances, et $P(b) = \{q_1^{m_1}, q_2^{m_2}, \ldots, q_l^{m_l}\}$ celui de b.

L'Intersection_p de a et b, notée $a \cap_p b$, est le produit des plus petites puissances de chaque facteur premier commun présent dans $P(a)$ et $P(b)$. Formellement :

$$a \cap_p b = \prod_{p \in P(a) \cap P(b)} p^{\min(n_p, m_p)}$$

où n_p est la puissance de p dans $P(a)$, et m_p est la puissance de p dans $P(b)$.

De manière similaire, pour $b \cap_p a$:

$$b \cap_p a = \prod_{p \in P(b) \cap P(a)} p^{\min(m_p, n_p)}$$

Étant donné que l'intersection des ensembles de facteurs premiers est commutative (c'est-à-dire, $P(a) \cap P(b) = P(b) \cap P(a)$) et que la fonction min est également commutative ($\min(n_p, m_p) = \min(m_p, n_p)$), nous avons :

$$a \cap_p b = b \cap_p a$$

Cela prouve que l'opérateur Intersection_p est commutatif, démontrant ainsi que l'ordre des nombres dans l'opération n'affecte pas le résultat de l'Intersection.

2.2 Associativité

L'Intersection_p est également une opération associative, ce qui signifie que peu importe comment les nombres sont regroupés dans l'opération, le résultat final reste le même. Pour tous entiers a, b, et c, l'Intersection_p satisfait la relation $(a \cap_p b) \cap_p c = a \cap_p (b \cap_p c)$.

2.2.1 Démonstration

Considérons trois nombres entiers a, b, et c. Pour démontrer l'associativité de l'opérateur Intersection_p, c'est-à-dire $(a \cap_p b) \cap_p c = a \cap_p (b \cap_p c)$, nous examinons les ensembles de facteurs premiers de a, b, et c avec leurs puissances respectives.

Soient $P(a)$, $P(b)$, et $P(c)$ les ensembles des facteurs premiers de a, b, et c, respectivement. L'Intersection_p de a et b est donnée par :

$$a \cap_p b = \prod_{p \in P(a) \cap P(b)} p^{\min(n_p, m_p)}$$

où n_p et m_p sont les puissances des facteurs premiers dans $P(a)$ et $P(b)$. De même, pour l'Intersection_p de b et c :

$$b \cap_p c = \prod_{p \in P(b) \cap P(c)} p^{\min(m_p, o_p)}$$

où o_p est la puissance de p dans $P(c)$.

Considérons maintenant $(a \cap_p b) \cap_p c$:

$$(a \cap_p b) \cap_p c = \prod_{p \in (P(a) \cap P(b)) \cap P(c)} p^{\min(\min(n_p, m_p), o_p)}$$

Et de manière similaire pour $a \cap_p (b \cap_p c)$:

$$a \cap_p (b \cap_p c) = \prod_{p \in P(a) \cap (P(b) \cap P(c))} p^{\min(n_p, \min(m_p, o_p))}$$

Puisque l'intersection d'ensembles est associative (c'est-à-dire, $(P(a) \cap P(b)) \cap P(c) = P(a) \cap (P(b) \cap P(c))$) et que la fonction min est également associative, nous avons :

$$(a \cap_p b) \cap_p c = a \cap_p (b \cap_p c)$$

Cela prouve que l'opérateur Intersection_p est associatif, démontrant que le regroupement des nombres dans l'opération n'affecte pas le résultat final de l'Intersection.

2.3 Distributivité

L'Intersection_p présente une propriété de distributivité par rapport à la multiplication. Cela signifie que pour tous entiers a, b, et c, l'Intersection_p distribuée sur la multiplication de deux nombres est équivalente à la multiplication des résultats des Intersections_p individuelles. Formellement, cela s'exprime par $a \cap_p (b \cdot c) = (a \cap_p b) \cdot (a \cap_p c)$.

2.3.1 Démonstration

Soient a, b, et c trois entiers. Nous voulons démontrer que $a \cap_p (b \cdot c) = (a \cap_p b) \cdot (a \cap_p c)$.

Décomposons a, b, et c en leurs facteurs premiers respectifs avec leurs puissances. Soient $P(a)$, $P(b)$, et $P(c)$ les ensembles des facteurs premiers de a, b, et c.

L'Intersection_p $a \cap_p (b \cdot c)$ est le produit des plus petites puissances de chaque facteur premier commun à a et $b \cdot c$:

$$a \cap_p (b \cdot c) = \prod_{p \in P(a) \cap P(b \cdot c)} p^{\min(n_p, m_p + o_p)}$$

où n_p est la puissance de p dans $P(a)$, et $m_p + o_p$ est la somme des puissances de p dans $P(b)$ et $P(c)$.

Considérons maintenant les Intersections $a \cap_p b$ et $a \cap_p c$:

$$(a \cap_p b) = \prod_{p \in P(a) \cap P(b)} p^{\min(n_p, m_p)}$$

$$(a \cap_p c) = \prod_{p \in P(a) \cap P(c)} p^{\min(n_p, o_p)}$$

La multiplication de ces deux résultats donne :

$$(a \cap_p b) \cdot (a \cap_p c) = \prod_{p \in P(a) \cap P(b)} p^{\min(n_p, m_p)} \cdot \prod_{p \in P(a) \cap P(c)} p^{\min(n_p, o_p)}$$

En comparant $a \cap_p (b \cdot c)$ et $(a \cap_p b) \cdot (a \cap_p c)$, nous observons que les deux expressions sont équivalentes. Cela montre que l'Intersection_p distribuée sur la multiplication de deux nombres est équivalente à la multiplication des Intersections_p individuelles, confirmant ainsi la propriété de distributivité de l'Intersection_p.

2.4 Élément neutre

Le nombre 1 sert d'élément neutre pour l'Intersection_p, car $a \cap_p 1 = a$.

2.4.1 Démonstration

Soit a un nombre entier. Pour démontrer que 1 est l'élément neutre pour l'Intersection_p, nous devons montrer que $a \cap_p 1 = a$.

Considérons l'ensemble des facteurs premiers $P(a)$ de a. Le nombre 1 est unique en ce qu'il n'a pas de facteurs premiers. Ainsi, l'Intersection_p de a et 1 se réduit à identifier les facteurs premiers de a qui sont également "présents" dans 1, qui en réalité n'en possède aucun.

L'Intersection_p de a et 1 est donc :

$$a \cap_p 1 = \prod_{p \in P(a) \cap P(1)} p^{\min(n_p, 0)}$$

Puisque $P(1)$ est vide, l'intersection $P(a) \cap P(1)$ est également vide, et il n'y a aucun facteur premier à considérer. En conséquence, le produit est égal à a lui-même, car aucun facteur n'est modifié ou exclu.

Cela démontre que 1 agit comme l'élément neutre dans l'opération d'Intersection_p, car l'Intersection_p de tout nombre avec 1 donne le nombre lui-même, sans aucune modification.

2.5 Idempotence

L'Intersection_p possède la propriété d'idempotence, ce qui signifie que l'application répétée de l'opération sur un nombre ne change pas le résultat après la première application. En termes formels, pour tout entier a, l'Intersection_p de a avec lui-même donne le même nombre, soit $a \cap_p a = a$.

2.5.1 Démonstration

Soit a un nombre entier avec un ensemble de facteurs premiers $P(a) = \{p_1^{n_1}, p_2^{n_2}, \ldots, p_k^{n_k}\}$.

L'Intersection_p de a avec lui-même est le produit des plus petites puissances de chaque facteur premier présent dans $P(a)$. Comme nous considérons a en intersection avec lui-même, les ensembles de facteurs premiers et leurs puissances sont identiques dans les deux instances. Ainsi, pour chaque facteur premier p_i dans $P(a)$, la plus petite puissance dans les deux occurrences de a est simplement n_i.

En conséquence, l'Intersection_p de a avec lui-même est :

$$a \cap_p a = \prod_{p_i \in P(a)} p_i^{n_i} = a$$

Cela montre que l'Intersection_p d'un nombre avec lui-même ne modifie pas ce nombre, confirmant la propriété d'idempotence de l'Intersection_p. L'opération d'Intersection conserve ainsi l'essence du nombre original, sans introduire de changement, même lorsque l'opération est répétée.

2.6 Préservation des facteurs Premiers

Une caractéristique importante de l'Intersection_p est sa capacité à préserver les facteurs premiers existants dans les nombres impliqués, sans en introduire de nouveaux. Cette propriété garantit que l'Intersection_p d'un ensemble de nombres ne produit que des facteurs premiers qui sont déjà présents dans ces nombres.

2.6.1 Démonstration

Considérons deux nombres entiers a et b avec leurs ensembles respectifs de facteurs premiers $P(a)$ et $P(b)$. L'Intersection_p de a et b est définie comme le produit des plus petites puissances de chaque facteur premier commun à a et b.

Pour chaque facteur premier p présent dans l'Intersection_p $a \cap_p b$, ce facteur premier doit exister dans les décompositions en facteurs premiers de a et de b. Cela signifie que l'Intersection_p ne peut pas générer de nouveaux facteurs premiers qui n'étaient pas présents dans les nombres originaux.

Prenons par exemple les nombres $a = 12$ et $b = 18$. L'Intersection_p de 12 et 18 implique les facteurs premiers 2 et 3, qui sont les seuls facteurs premiers présents dans les deux nombres. Aucun nouveau facteur premier n'est introduit dans le résultat de $12 \cap_p 18$, qui est 6, car seuls les facteurs premiers déjà existants dans 12 et 18 sont utilisés.

Cette propriété de préservation des facteurs premiers confirme que l'Intersection_p est une opération qui ne modifie pas la nature fondamentale des nombres impliqués en termes de leurs composants premiers. Elle garantit que le résultat de l'Intersection_p reflète fidèlement les caractéristiques premières communes des nombres considérés.

2.7 Non Inversibilité

L'Intersection_p, contrairement à d'autres opérations algébriques, ne possède pas d'éléments inverses dans l'ensemble des nombres entiers. En termes mathématiques, cela signifie qu'il n'existe pas de nombre entier b tel que pour un entier a donné, l'Intersection_p de a et b donne un élément neutre (1 dans le cas de l'Intersection_p).

2.7.1 Démonstration

Pour tout nombre entier a, supposons qu'il existe un entier b tel que $a \cap_p b = 1$. Cette condition impliquerait l'absence de facteurs premiers communs entre a et b. Cependant, le seul nombre sans facteurs premiers est 1, ce qui signifie que l'un des nombres dans l'opération doit déjà être 1. Par conséquent, il n'y a pas d'élément inverse pour a dans le cadre de l'Intersection_p, à l'exception du cas où a est lui-même 1.

2.8 Inégalité de distribution de l'Intersection_p sur trois nombres

Pour tous entiers a, b, et c, l'Intersection_p de a avec l'Intersection_p de b et c n'est pas nécessairement égale à l'Intersection_p de a avec b et l'Intersection_p de a avec c. Autrement dit, $a \cap_p (b \cap_p c)$ n'est pas nécessairement égale à $(a \cap_p b) \cap_p (a \cap_p c)$.

2.8.1 Démonstration

Considérons trois nombres entiers a, b, et c. L'Intersection_p de a avec $(b \cap_p c)$ est le produit des plus petites puissances des facteurs premiers communs à a, b, et c:

$$a \cap_p (b \cap_p c) = \prod_{p \in P(a) \cap (P(b) \cap P(c))} p^{\min(n_p, \min(m_p, o_p))}$$

où n_p, m_p, et o_p sont les puissances des facteurs premiers p dans a, b, et c respectivement.

D'autre part, considérons $(a \cap_p b) \cap_p (a \cap_p c)$, qui est le produit des plus petites puissances des facteurs premiers communs à a et b et entre a et c:

$$(a \cap_p b) \cap_p (a \cap_p c) = \prod_{p \in (P(a) \cap P(b)) \cap (P(a) \cap P(c))} p^{\min(\min(n_p, m_p), \min(n_p, o_p))}$$

La différence entre ces deux expressions réside dans les ensembles de facteurs premiers considérés et leurs puissances minimales respectives. Dans certains cas, ces ensembles et puissances peuvent différer, entraînant ainsi une inégalité entre $a \cap_p (b \cap_p c)$ et $(a \cap_p b) \cap_p (a \cap_p c)$.

2.9 Intersection_p de deux nombres Consécutifs

Pour tout nombre entier n, l'Intersection_p de n et $n + 1$ est toujours égale à 1. Cela s'explique par le fait que des nombres consécutifs ne partagent aucun facteur premier commun.

2.9.1 Démonstration

Considérons deux nombres consécutifs n et $n + 1$. Par définition, des nombres consécutifs sont des entiers qui se suivent dans l'ordre naturel, comme 3 et 4, 5 et 6, etc.

Pour tout nombre n, ses facteurs premiers sont uniques à n et ne se répètent pas dans $n + 1$, car si un facteur premier était commun, cela signifierait que n et $n + 1$ ne sont pas consécutifs. En effet, si un facteur premier p divisait à la fois n et $n+1$, alors p devrait également diviser leur différence, qui est 1, ce qui est impossible.

Par conséquent, l'Intersection_p de deux nombres consécutifs n et $n+1$, qui est le produit des plus petites puissances de chaque facteur premier commun, est toujours 1, car il n'y a pas de facteurs premiers communs entre n et $n+1$.

Cette propriété de l'Intersection_p montre que pour des nombres consécutifs, le seul facteur premier commun est inexistant, ce qui conduit à un résultat d'Intersection de 1, illustrant ainsi une caractéristique unique de l'arithmétique des nombres consécutifs.

2.10 Intersection_p de n nombres premiers distincts

Soit $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ un ensemble de n nombres premiers distincts, l'Intersection_p de l'ensemble P est égale à 1

2.10.1 Démonstration

Dans l'ensemble P, chaque nombre premier est distinct et ne partage aucun facteur premier avec un autre nombre de l'ensemble. Par définition, un nombre premier n'a d'autres facteurs que 1 et lui-même. Ainsi, l'Intersection_p, qui est le produit des plus petites puissances des facteurs premiers communs, aboutit à une situation unique où aucun facteur premier n'est commun à tous les nombres de P.

Par conséquent, l'Intersection_p de l'ensemble P est toujours égale à 1. Cette situation découle de l'absence de facteurs premiers communs entre des nombres premiers distincts.

2.11 Inclusion des Facteurs Premiers

Si un entier a est un facteur d'un autre entier b, alors l'Intersection_p de a et b est égale à a, c'est-à-dire $a \cap_p b = a$.

2.11.1 Démonstration

Soit a un facteur de b, ce qui signifie qu'il existe un entier k tel que $b = a \times k$. Les facteurs premiers de b sont donc constitués des facteurs premiers de a ainsi que de ceux de k.

Dans l'Intersection_p $a \cap_p b$, nous considérons le produit des plus petites puissances de chaque facteur premier commun à a et b. Étant donné que a est un facteur de b, tous les facteurs premiers de a sont inclus dans b avec des puissances égales ou supérieures.

Pour chaque facteur premier p présent dans a et b, la plus petite puissance dans l'Intersection sera celle trouvée dans a, puisque a est un sous-ensemble de b en termes de facteurs premiers.

Par conséquent, l'Intersection_p de a et b produit un résultat qui est simplement a lui-même.

2.12 Homogénéité

L'opérateur Intersection_p est homogène par rapport à la multiplication par un entier. Pour tous entiers a, b, et k, on a $k \cdot (a \cap_p b) = (k \cdot a) \cap_p (k \cdot b)$.

2.12.1 Démonstration

Considérons trois entiers a, b, et k. L'Intersection_p $a \cap_p b$ est le produit des plus petites puissances de chaque facteur premier commun à a et b.

En multipliant a et b par k avant de calculer leur Intersection_p, les puissances de tous les facteurs premiers dans a et b sont multipliées par k. Cependant, puisque l'Intersection_p prend la plus petite puissance des facteurs premiers communs, multiplier a et b par k ne change pas les facteurs premiers communs, mais change uniquement leurs puissances.

Ainsi, $(k \cdot a) \cap_p (k \cdot b)$ donne le même ensemble de facteurs premiers que $a \cap_p b$, mais chacun multiplié par k. Cela est équivalent à prendre l'Intersection $a \cap_p b$ et ensuite multiplier le résultat par k.

Cette propriété d'homogénéité démontre que l'ordre de multiplication et d'Intersection $\cap_p$ peut être interchangé sans affecter le résultat final.

2.13 Stabilité de résultat

Si $a \cap_p b = c$, alors $a \cap_p c = c$ et $b \cap_p c = c$.

2.13.1 Démonstration

Considérons trois nombres entiers a, b, et c, avec $a \cap_p b = c$. Cela signifie que c est le produit des plus petites puissances de chaque facteur premier commun à a et b.

Lorsque nous effectuons l'Intersection_p de c avec a, nous recherchons à nouveau les plus petites puissances des facteurs premiers communs à c et a. Cependant, puisque c a été obtenu par l'Intersection_p de a et b, il ne contient que les facteurs premiers communs à a et b, et ce, avec les plus petites puissances présentes dans a et b.

Ainsi, tous les facteurs premiers de c sont déjà présents dans a avec des puissances égales ou supérieures. Par conséquent, l'Intersection_p $a \cap_p c$ sélectionne les puissances des facteurs premiers de c, qui sont les mêmes que celles utilisées pour calculer c à l'origine. D'où, $a \cap_p c = c$.

De même, l'Intersection_p $b \cap_p c$ donne également c pour les mêmes raisons.

3 Interaction avec la Fonction Totient de Euler

Soient k et l deux nombres premiers distincts, leur Intersection $\cap_p$ est systématiquement égale à 1.

3.1 Démonstration

L'Intersection $\cap_p$ de k et l, étant des nombres premiers distincts, est toujours égale à 1, car ils ne partagent pas de facteurs premiers. Par conséquent, lorsque nous appliquons la fonction totient de Euler à cette Intersection, soit $\varphi(1)$, le résultat est également 1, car 1 est le seul nombre inférieur ou égal à 1 et copremier avec lui-même.

4 Intersection $\cap_p$ de n Nombres Égale à 1

Pour tous entiers $a_1, a_2, \ldots, a_n$, si $a_1 \cap_p a_2 \cap_p \ldots \cap_p a_n = 1$, alors $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$.

4.1 Démonstration

Supposons que l'Intersection $\cap_p$ de l'ensemble $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ soit 1. Cela implique que le produit des plus petites puissances de tous les facteurs premiers communs à ces nombres est 1. La seule façon d'obtenir un tel résultat est l'absence totale de facteurs premiers communs parmi les nombres de l'ensemble.

Étant donné que le nombre 1 est le seul entier sans facteurs premiers, la condition que $a_1 \cap_p a_2 \cap_p \ldots \cap_p a_n = 1$ ne peut être satisfaite que si chaque a_i dans l'ensemble est lui-même égal à 1.

References

[1] C. Pokorski, *Théorie Ensembliste des Facteurs Premiers*, Partie I : Introduction à l'Opérateur Union_p, `https://vixra.org/abs/2312.0158`

Informations

Version du document : v1.0 - déc. 2023
Contact : cpokorski.fr@gmail.com