MNRAS **000**, 1–?? (0000) Preprint 4 September 2023 Compiled using MNRAS LATEX style file v3.0

Cálculo de n-ésimas sumas parciales S_n de series de potencias y su relación con el cálculo de los números de Bernoulli

Carlos Oscar Rodríguez Leal

4 September 2023

ABSTRACT

In this work, the general formula of the n-th partial sums S_n of sums of powers of the form $1^n + 2^n + \ldots + m^n$ is obtained by an algebraic method, and said formula is applied to the obtaining the Bernoulli numbers by a new simple method

En este trabajo se obtiene la fórmula general de las n-ésimas sumas parciales S_n de sumas de potencias de la forma $1^n + 2^n + \ldots + m^n$ mediante un método algebraico y dicha fórmula se aplica a la obtención de los números de Bernoulli por un método alternativo recursivo sencillo.

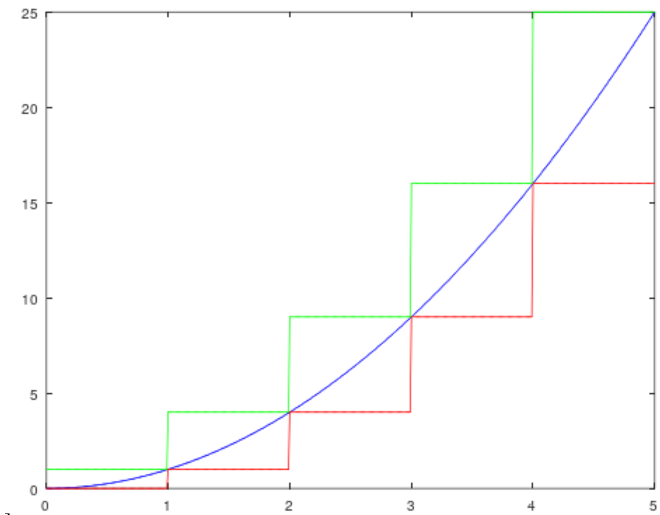
Key words: sumas parciales de sucesiones – series de potencias – números de Bernoulli

1 INTRODUCTION

En este artículo se obtiene la fórmula general de las n-ésimas sumas parciales S_n de sumas de potencias de la forma $1^n + 2^n + \cdots + m^n$, por un método algebraico novedoso muy sencillo y se aplica a la obtención de los números de Bernoulli de una forma muy sencilla, mediante relaciones de recurrencia o mediante determinantes de matrices triangulares.

2 DEDUCCIÓN DE LAS N-ÉSIMAS SUMAS PARCIALES DE SERIES DE POTENCIAS

Para deducir las n-ésimas sumas parciales de series de potencias S_n: $\Sigma_{m=1}^{p} m^n$, primeramente observamos el comportamiento gráfico del área bajo la curva escalonada de las sumas parciales y su similitud y acotamiento con las integrales definidas de los respectivos polinomios inferior (con área menor a la sumatoria) $0^n + 1^n + \ldots + p^n$ y superior (con área mayor a la sumatoria) $1^n + 2^n + \ldots + (p+1)^n$(ver figura 1). Con lo cual establecemos la siguiente conjetura:



[h]

Figure 1. Conjetura de sumas de potencias

$$\Sigma_{m=1}^{p} m^n = A_0^n + A_1^n p + \ldots + A_n^n p^n + A_{n+1}^n p^{n+1}, \tag{1}$$

donde A_j^n es el coeficiente j-ésimo del respectivo polinomio de grado $n+1$ Mas por [1,2,3], vemos que dicha conjetura es correcta y que A_0^n es cero, es decir, que no existe término constante.

Ahora, si tomamos la suma con un último término más, es decir, $\Sigma_{m=1}^{p+1} m^n$, obtendremos

$$\begin{aligned}\Sigma_{m=1}^{p+1} m^n = A_1^n(p+1) + A_2^n(p+1)^2 + \ldots + A_n^n(p+1)^n + A_{n+1}^n \\ (p+1)^{n+1} = A_1^n p + A_2^n p^2 + \ldots + A_n^n p^n + (p+1)^n,\end{aligned} \tag{2}$$

de donde, al desarrollar los polinomios, se deduce que,

$$\begin{aligned}A_1^n(p+1) + A_n^2(p^2+2p+1) + \ldots + A_n^n(C_0^n p^0 + C_1^n p + \ldots \\ +C_n^n p^n + A_{n+1}^n(C_0^{n+1} p^0 + C_1^{n+1} p^1 + \\ \ldots + C_n^{n+1} p^n + C_{n+1}^{n+1} p^{n+1} = \\ = A_1^n p + A_2^n p^2 + \ldots + A_n^n p^n + A_{n+1}^n p^{n+1} + \\ +C_0^n p^0 + C_1^n p + \ldots + C_n^n p^n,\end{aligned} \tag{3}$$

de donde, eliminando los términos iguales de ambos lados de la ecuación,

$$\begin{aligned} A_1^n + A_2^n(2p+1) + \dots \\ + A_n^n(C_0^n p^0 + C_1^n p^1 + \dots + C_{n-1}^n p^{n-1}) \\ = A_{n+1}^n(C_0^{n+1} p^0 + C_1^{n+1} p^1 + \\ \dots + C_n^{n+1} p^n = C_0^n p^0 + C_1^n p + \dots C_n^c p^n), \end{aligned} \tag{4}$$

y así, igualando coeficientes de términos semejantes, llegamos al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} C_0^n &= A_1^n C_0^1 + A_2^n C_0^2 + \dots + A_n^n C_0^n + A_{n+1}^n C_0^{n+1} \\ C_1^n &= A_2^n C_1^2 + \dots + A_n^n C_1^n + A_{n+1}^n C_1^{n+1} \vdots \\ C_{n-1}^n &= A_n^n C_{n-1}^n + A_{n+1}^n C_{n-1}^{n+1} \\ C_n^n &= A_{n+1}^n C_n^{n+1} \end{aligned} \tag{5}$$

.

2.1 Solución del sistema de ecuaciones

El sistema anterior se puede resolver recursivamente con las siguientes fórmulas:

$$A_{n+1}^n = C_n^n / C_n^{n+1} = 1/(n+1) \tag{6}$$

$$A_{i+1}^n = \frac{C_i^n - \Sigma_{k=2}^{n+1-i} A_{i+k}^n C_i^{i+k}}{C_i^{i+1}}, \tag{7}$$

con $i = 1, \dots, n-1$

Por otro lado, expresando el sistema matricialmente, obtendremos, para algún grado n fijo, otro método de solución del sistema (método matricial)

$$\boldsymbol{C_m^n = A_i^n C_m^i} \tag{8}$$

donde hemos usado un convenio de suma como el de Einstein en análisis tensorial, con $i = m+1, \dots, n+1$, y $m = 0, \dots, n$, por lo que, resolviendo el sistema matricial con la inversa de una matriz triangular (lo que reduce muchísimo el orden de complejidad del cálculo), obtenemos los valores del vector de coeficientes

$$\boldsymbol{A_i^n = C_m^n (C_m^i)^{-1}} \tag{9}$$

2.2 Ejemplo de prueba

Como ejemplo de corroboración calcularemos la fórmula conocida de las sumas de potencias cuartas

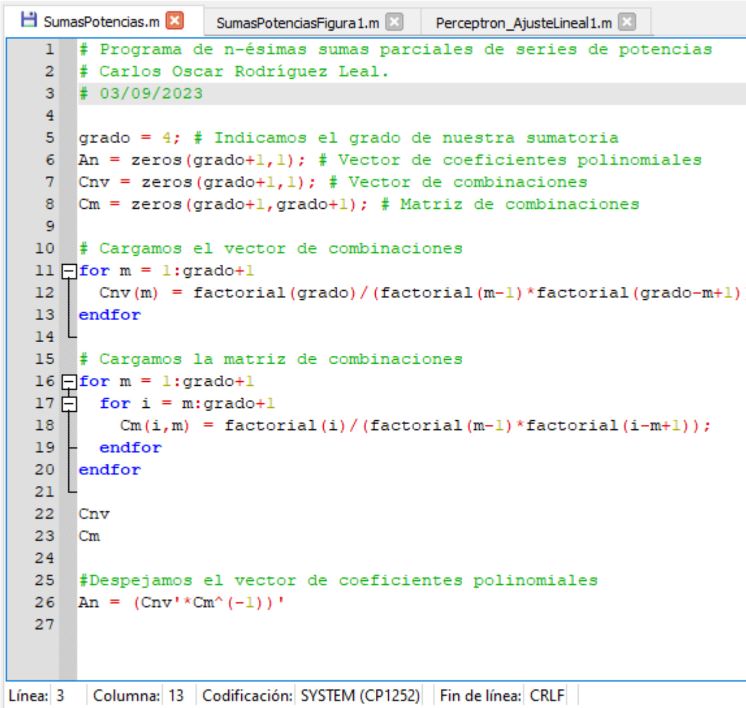
$$1^4 + 2^4 + \dots + m^4 = \frac{m(m+1)(2m+1)(3m^2+3m+1)}{30}. \tag{10}$$

En este ejemplo $n = 4$, por lo que, resolviendo el sistema para las variables A_m^4, primeramente por el método recursivo, tendremos

$$A_5^4 = 1/5, A_4^4 = 1/2, A_3^4 = 1/3, A_2^4 = 0, A_1^4 = -1/30, \tag{11}$$

coincidiendo estos coeficientes con los dados en [1,2].

Y ahora, encontrando la solución de la ecuación matricial usando el programa octave (versión 8.2.0), obtendremos los mismos valores de los coeficientes polinomiales A_m^n (ver en el apéndice el código en octave).



```
# Programa de n-ésimas sumas parciales de series de potencias
# Carlos Oscar Rodríguez Leal.
# 03/09/2023

grado = 4; # Indicamos el grado de nuestra sumatoria
An = zeros(grado+1,1); # Vector de coeficientes polinomiales
Cnv = zeros(grado+1,1); # Vector de combinaciones
Cm = zeros(grado+1,grado+1); # Matriz de combinaciones

# Cargamos el vector de combinaciones
for m = 1:grado+1
  Cnv(m) = factorial(grado)/(factorial(m-1)*factorial(grado-m+1)
endfor

# Cargamos la matriz de combinaciones
for m = 1:grado+1
  for i = m:grado+1
    Cm(i,m) = factorial(i)/(factorial(m-1)*factorial(i-m+1));
  endfor
endfor

Cnv
Cm

#Despejamos el vector de coeficientes polinomiales
An = (Cnv'*Cm^(-1))'
```


[h]

Figure 2. Código en Octave

3 OBTENCIÓN DE LOS NÚMEROS DE BERNOULLI

En esta sección encontramos un método alternativo sencillo para calcular los números de Bernoulli.

De acuerdo a [2], el n-ésimo número de Bernoulli se corresponde con el coeficiente del término de grado 1 A_1^n. Por lo tanto, usando las fórmulas (6) y (7) ó (9) (según se utilice el método recursivo o el matricial, respectivamente), podremos obtener, por este método alternativo, $B_0 = 1, B_n = A_1^n, n > 0$

4 APÉNDICE

En este apéndice se muestra el código en Octave para encontrar los coeficientes polinomiales A_m^n.

REFERENCES

[1] Murray R. Spiegel, John Liu, Lorenzo Abellanas. Fórmlas y tablas de matemática aplicada, 2º edición, Schaum, McGRAW-HILL/INTERAMERICANA DE ESPAÑA, Madrid, 2005.
[2] Alexey Beshenov (cadadr@gmail.com). Números de Bernoulli, 2017.
[3] Tsuneo Arakawa Tomoyoshi Ibukiyama Masanobu Kaneko. Bernoulli Numbers and Zeta Functions, Springer Monographs in Mathematics, Japón, 2014.