Démonstration de la conjecture de Golbach

Auteur : Yves Désiré IPOLO

Rectorat académique de Guyane-

Lycée Anne Marie Javouhey de Cayenne

Email : ipolod@yahoo.com

Tel. +594 694 97 77 34

Paul Erdös (1913-1996)

« *Dieu ne joue peut-être pas aux dés avec l'univers, mais il se passe quelque chose d'étrange avec les nombres premiers* ».

Propos liminaire.

Si Dieu a créé l'homme avec dix doigts, IL lui a donné en conséquence le système décimal, le seul qui soit réellement adapté à son cerveau, pour que jamais les nombres n'échappent à son quotient. Dix doigts, dix chiffres de base qu'il peut manier sans peine pour maîtriser et côtoyer l'infiniment grand ou visiter l'infiniment petit. Nul besoin d'être un savant pour le faire.

Il serait donc absurde de chercher à démontrer la conjecture de Goldbach sous le prisme unique d'une fonction de répartition des nombres premiers que seuls les esprits mathématiques les plus aiguisés ou affûtés, donc les érudits ne pourraient maîtriser.

Si les mathématiques de Dieu sont élémentaires, basiques et accessibles à tous, celles de l'homme semblent presque inaccessibles au commun des mortels.

Et si Goldbach était à la portée de tout apprenti mathématiques ?

Introduction.

Dans le journal en ligne le Monde, on peut lire un article de Philippe Pajot publié le 11 avril 2013 dédié aux mathématiques avec un titre aussi évocateur qu'énigmatique : « **Mathématiques: l'impossible démonstration** ».

L'auteur poursuit son article en rappelant la conjecture de Goldbach : « **Tout nombre pair peut s'écrire comme la somme de deux nombres premiers**. Voici un énoncé qui paraît simple. Pourtant, aucun mathématicien au monde n'a encore pu démontrer cette proposition de Goldbach formulée en 1742 ».

« Présentée pour la première fois à Leonhard Euler, cette conjecture est passée depuis plus de trois siècles à d'éminents mathématiciens du XXème siècle : Gauss ; Hardy et Littlewood, Erdös,...
L'énoncé de la conjecture étant d'une simplicité déconcertante et presque infantile au point que les amateurs sont aussi tenter de relever défi. La conjecture résiste toujours au temps en dépit des avancées de la technologie qui ne fait que réconforter le mythe selon lequel la démonstration est impossible.
Il est apparu au cours des années que si une démonstration simple existait pour cette conjecture, « nul doute que ces éminents mathématiciens talentueux l'auraient trouvée depuis un certain temps déjà ! »

Nous allons tenter la démonstration de la conjecture de Goldbach en nous appuyant sur deux types de raisonnement : **par analyse-synthèse et par l'absurde.**

Ce travail propose une démonstration de la conjecture de Goldbach en quatre étapes :

1. Quelques notations de base et définitions ;
2. Une analyse basée sur une série d'activités de découverte pour revisiter les nombres premiers ;
3. Une synthèse proposant quelques lemmes et propositions pour revisiter la conjecture de Goldbach ;
4. Un conclusion sous forme de raisonnement par l'absurde pour démontrer la **conjecture de Goldbach**

Notations.
Pour tout entier naturel non nul n, on notera :

- $\boldsymbol{\Delta(n)}$ **l'ensemble de tous les nombres entiers naturels inférieurs à $\boldsymbol{n}$ et premiers avec $\boldsymbol{n}$.**
  Soit $\Delta(n) = \{q_1;\ q_2; \dots;\ q_{k_n}\}$, avec $q_1 < q_2 < \cdots < q_{k_n}$.
  $Card\Delta(n) = k_n$
- $\pi'(n)$, un sous-ensemble de $\Delta(n)$ dont tous les éléments sont des nombres premiers c'est-à-dire l'ensemble des nombres entiers premiers et premiers avec n
- $\overline{\pi'(n)}$, le complémentaire de $\pi'(n)$ dans $\boldsymbol{\Delta(n)}$.

Remarque
$\pi'(n)$ et $\overline{\pi'(n)}$ forment une partition de $\Delta(n)$.

Définition. Soit n un nombre premier. On appellera solution triviale de Goldbach, tout couple de la forme $(\mathbf{n}; \mathbf{n})$.

Exemples :
Pour $n = 2$, $4 = 2 + 2$. **(2 ;2) est la solution triviale de Goldbach**.
Pour $n = 3$, $6 = 3 + 3$. (3 ;3) **est la triviale solution de Goldbach.**

Définition liminaire.

On appellera **solution Ipolo** de rang n, tout couple de **nombres premiers $\boldsymbol{p}$** et **$\boldsymbol{q}$ qui sont premiers avec $\boldsymbol{2n}$** tels que $2n = p + q$.

Activités de découverte

$\Delta(1) = \{1\}$	$1 - \Delta(1) = \{0\}$
$\Delta(2) = \{1\}$ $\pi'(2) = \phi$	$2 - \Delta(2) = \{1\}$
$\Delta(3) = \{1; 2\}$ $\pi'(3) = \{2\}$	$3 - \Delta(3) = \{2; 1\}$
$\boldsymbol{\Delta(4) = \{1; 3\}}$ $\boldsymbol{\pi'(4) = \{3\}}$	$\boldsymbol{4 - \Delta(4) = \{3; 1\}}$
$\Delta(5) = \{1; 2; 3; 4\}$ $\pi'(5) = \{2; 3\}$	$5 - \Delta(5) = \{4; 3; 2; 1\}$

$\boldsymbol{\Delta(6) = \{5; 1\}}$ $\boldsymbol{\pi'(6) = \{5\}}$	$\boldsymbol{6 - \Delta(6) = \{5; 1\}}$
$\Delta(7) = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $\boldsymbol{\pi'(7) = \{2; 3; 5\}}$	$7 - \Delta(7) = \{6; 5; 4; 3; 2; 1\}$
$\boldsymbol{\Delta(8) = \{1; 3; 5; 7\}}$ $\boldsymbol{\pi'(8) = \{3; 5; 7\}}$	$\boldsymbol{8 - \Delta(8) = \{7; 5; 3; 1\}}$
$\Delta(9) = \{1; 2; 4; 5; 7; 8\}$ $\boldsymbol{\pi'(9) = \{2; 5; 7\}}$	$9 - \Delta(9) = \{8; 7; 5; 4; 2; 1\}$
$\boldsymbol{\Delta(10) = \{1; 3; 7; 9\}}$ $\boldsymbol{\pi'(10) = \{3; 7\}}$	$\boldsymbol{10 - \Delta(10) = \{9; 7; 3; 1\}}$
$\Delta(11) = \{1; 2; 4; 5; 7; 8; 9; 10\}$ $\boldsymbol{\pi'(11) = \{2;\ 5; 7\}}$	$11 - \Delta(11) = \{10; 9; 8; 7; 6; 5; 4; 3; 2; 1\}$
$\boldsymbol{\Delta(12) = \{1; 5; 7; 11\}}$ $\boldsymbol{\pi'(12) = \{5; 7; 11\}}$	$\boldsymbol{12 - \Delta(12) = \{11; 7; 1\}}$
$\Delta(13) = \{1; 2; 4; 5; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$ $\pi'(13) = \{2; 5; 7; 11\}$	$13 - \Delta(13) = \{12; 11; 10; 9; 8; 7; 5; 4; 2; 1\}$
$\boldsymbol{\Delta(14) = \{1; 3; 5; 9; 11; 13\}}$ $\boldsymbol{\pi'(14) = \{3; 5; 11; 13\}}$	$\boldsymbol{14 - \Delta(14) = \{13; 11; 5; 3; 1\}}$
$\Delta(15) = \{1; 2; 4; 7; 8; 11; 13; 14\}$ $\pi'(15) = \{2; 7; 11; 13\}$	$15 - \Delta(15) = \{14; 13; 11; 8; 7; 4; 2; 1\}$
$\boldsymbol{\Delta(16) = \{1; 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15\}}$ $\boldsymbol{\pi'(16) = \{3; 5; 7; 11; 13\}}$	$\boldsymbol{16 - \Delta(16) = \{15; 13; 11; 9; 7; 5; 3; 1\}}$

Synthèse.

Lemme 1.
Pour tout entier naturel non nul n, $\Delta(n) \neq \phi$

Démonstration.
On sait que tout nombre entier naturel non nul est premier avec 1. Donc $\Delta(n) \neq \phi$ car $q_1 = 1 \in \Delta(n)$.
De plus, $q_{k_n} = n - 1$ appartient à $\Delta(n)$, car
$n - (n - 1) = 1$
Ainsi, $n \wedge (n - 1) = 1$, d'après l'égalité de Bézout
On voit bien que $q_1 = 1$ et $q_{k_n} = n - 1$ sont bien éléments de $\Delta(n)$.

Propriété 1
Soient n et p deux entiers naturels non nuls tels que $p < n$ et $n \wedge p = 1$. Alors, $(n - p) \wedge p = 1$.

Démonstration
Si $n \wedge p = 1$, alors il existe u et v entiers relatifs tels que $nu + pv = 1$, d'après le théorème de Bézout.
Ainsi :
$nu + pv = 1 \Leftrightarrow (n - p)u + pu + pv = 1 \Leftrightarrow (n - p)u + p(u + v) = 1$.
Ainsi, $(n - p) \wedge p = 1$
CQFD.

Lemme 2.
Pour tout entier naturel n,

$$\boxed{\boldsymbol{\Delta(n) \subset n - \Delta(n)}}$$

Démonstration
Soit $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{n} - \boldsymbol{\Delta(n)}$, Montrons que $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{\Delta(n)}$.
Soit $p \in n - \Delta(n)$, il existe un entier $k \in \Delta(n)$ tel que $p = n - \mathrm{k}$.
D'après l'égalité de Bézout, il existe u et v entiers relatifs tels que : $nu + kv = 1$
Or $k = n - p$.
Donc, $nu + (n - p)v = 1 \Leftrightarrow nu + nv - pv = 1 \ \Leftrightarrow n(u + v) + p(-v) = 1$
$\Leftrightarrow n \wedge p = 1$
Par conséquent $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{\Delta(n)}$.
CQFD.

Corollaire 1.
Soit n un nombre entier naturel non nul. Les ensembles $\boldsymbol{\Delta(n)}$ **et** $\boldsymbol{n - \Delta(n)}$ **égaux.**

$$\boxed{\boldsymbol{\Delta(n) = n - \Delta(n)}}$$

Démonstration.
On rappelle que $\varDelta(n)$ est un ensemble non vide car il contient 1 et $n-1$ et il est fini.
On considère l'application suivante

$\psi: \varDelta(n) \to n - \Delta(n)$
$\quad k \longmapsto n-k$

Par construction, $\boldsymbol{\psi}$ **est injective**.
En effet, pour tout nombre k et k' dans $\varDelta(n)$, on a :
$n-k = n-k' \Leftrightarrow k = k'$.

Puisque $\boldsymbol{\Delta(n)} \subset \boldsymbol{n - \Delta(n)}$, d'après le lemme 2, on en déduit que $\boldsymbol{\Delta(n) = n - \Delta(n)}$

CQFD.

Conséquence.
Si $\boldsymbol{\Delta(n)}$ **=** $\boldsymbol{n - \Delta(n)}$**,** alors

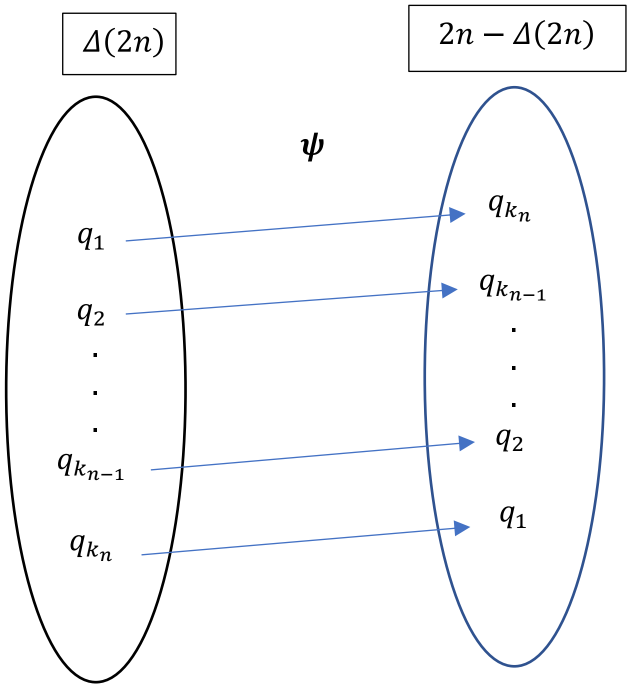
Rangeons les éléments de $\varDelta(n)$ par ordre croissant. On note $\varDelta(n) = \{q_1;\ q_2; \dots;\ q_{k_n}\}$
, avec
$q_1 < q_2 < \cdots < q_{k_n}$.

On a :
$q_1 < q_2 < \cdots < q_{k_n} \Leftrightarrow n - q_{k_n} < \cdots < n - q_2 < n - q_1$

Etant donné que l'application ψ est une bijection de $\varDelta(n)$ dans $\varDelta(n)$ qui préserve la structure de $\varDelta(n)$, on peut le voir comme une symétrie de $\varDelta(n)$. ψ est donc un automorphisme de $\varDelta(n)$ dans $\varDelta(n)$ qui vérifie :
$\boldsymbol{\psi \circ \psi(k) = k}$**.**
$\boldsymbol{\psi}\big(max\varDelta(2n)\big) = min\varDelta(2n)$

$\boldsymbol{\psi} min\varDelta(2n) = max\varDelta(2n)$

On déduit du corollaire 1 que :
$q_1 = n - q_{k_n}$
$q_2 = n - q_{k_2}$
.
.
.
$q_{k_n} = n - q_1$



Conjecture de Goldbach revisitée

Conjecture de Goldbach revisitée 1. Pour tout nombre entier nature n strictement supérieur à 3, il existe un nombre entier naturels premier $p < 2n$ et premier avec $2n$ tel $\boldsymbol{2n - p}$ soit **premier et premier avec** $\boldsymbol{n}$.

Conjecture de Goldbach revisitée 2. Pour tout nombre entier nature n strictement supérieur à 3, il existe deux nombres entiers naturels p et q **premiers et premiers avec** $\boldsymbol{n}$ tels que $\boldsymbol{2n = p + q}$.

Remarque. Les deux propositions sont équivalentes.

Conclusion. Démonstration de la conjecture de Goldbach

Pour $n = 2$, $2n = 4 = 2 + 2$, le couple (2 ;2) **est une solution triviale de Goldbach**
Pour $n = 3$, $2n = 6 = 3 + 3$, le couple (3 ;3) **est une solution triviale de Goldbach**
Pour $n = 4$, $2n = 8$,
$\boldsymbol{\Delta(8)} = \{\boldsymbol{1; 3; 5; 7}\}$ et $\boldsymbol{\pi'(8)} = \{\boldsymbol{3; 5; 7}\}$**,** et $\boldsymbol{2n = 8 = 3 + 5}$ le couple **(3 ;5) une solution Ipolo** de rand 4.

Pour tout nombre entier n supérieur ou égal à 4.

1. Il est établi que pour tout entier non nul n, $\boldsymbol{\Delta(n)}$ **=** $\boldsymbol{n - \Delta(n)}$ **(corollaire 1). Ainsi :**

Pour tout nombre entier non nul $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{\Delta(2n)}$ = $\boldsymbol{2n - \Delta(2n)}$

2. On considère l'application ψ

$$\psi: \Delta(2n) \to 2n - \Delta(2n)$$
$$k \longmapsto 2n - k$$

Il a été démontré qu'elle est injective (cf. corollaire 1) et donc bijective car
$\boldsymbol{\Delta(2n)} = \boldsymbol{2n - \Delta(2n)}$**.**

3. Raisonnement par l'absurde.
Soit $\Delta(2n) = \{q_1;\ q_2; \dots;\ q_{k_{2n}}\}$.

On considère l'application

$$\psi: \pi'(2n) \cup \overline{\pi'(2n)} \to \pi'(2n) \cup \overline{\pi'(2n)}$$
$$k \longmapsto 2n - k$$

Où $\pi'(2n)$ et $\overline{\pi'(2n)}$ forment une partition de $\Delta(2n)$.

Supposons qu'il n'existe aucun nombre entier premier inférieur à $\boldsymbol{2n}$ et premier avec $\boldsymbol{2n}$ de la forme $2n - k$ où k est un nombre entier premier et premier avec $2n$.
Alors, pour tout k dans $\pi'(n)$, $\psi(k) \in \overline{\pi'(2n)}$ sinon, $\psi(k)$ serait premier. Ainsi, tout élément k de $\pi'(2n)$ aurait son image dans $\overline{\pi'(2n)}$ c'est-à-dire que tout nombre entier premier de $\Delta(2n)$ a pour image un nombre non premier de $\Delta(2n)$.

Etant donné que ψ est une bijection de $\Delta(2n)$ dans $\Delta(2n)$ qui préserve la structure de $\Delta(2n)$, on peut le voir comme une symétrie de $\Delta(2n)$. ψ est donc un automorphisme de $\Delta(2n)$ dans $\Delta(2n)$ qui vérifie
$\boldsymbol{\psi \circ \psi(k) = k}$. Ainsi :

$$\boldsymbol{\psi}\big(max\Delta(2n)\big) = min\Delta(2n)$$

$$\boldsymbol{\psi}(min\Delta(2n)) = max\Delta(2n)$$

Ce qui veut dire que par l'automorphisme $\boldsymbol{\psi}$**,** tout élément de $\pi'(2n)$ a son image dans $\overline{\pi'(2n)}$ et, réciproquement tout élément de $\overline{\pi'(2n)}$ a son image dans $\pi'(2n)$.

Or $min\Delta(2n) = 1 \in \overline{\pi'(2n)}$ et $\psi(1) = 2n - 1 = max\Delta(2n) \in \pi'(2n)$.

Etant donné que n est un nombre quelconque, on en déduit que pour tout nombre entier n, $2n - 1$ serait un nombre premier.

Ce qui est absurde car :
pour $n = 5$, $\psi(1) = 2 \times 5 - 1 = 10 - 1 = 9$. 9 n'est pas un nombre premier.
De même, pour $n = 8$, $\psi(1) = 2 \times 8 - 1 = 16 - 1 = 15$. 15 n'est pas un nombre premier.

D'où la contradiction.

CQFD.