納米爾史托克和歐拉方程（**Navier-Stokes and Euler equation**）

紊流仍然是現代物理學的一個謎。到現在為止，沒有人能成功地解釋紊流的詳細機制。流體力學是由 Navier-Stokes 方程和 Euler 方程引導。在這裡，我將提出一個機制來解釋動盪及其 Navier-Stokes 方程和 Euler 方程之間關係。我建議紊流是由歐拉方程產生的，它可以通過 Navier-Stokes 方程可以預防：

Navier-Stokes 方程為

$$\mathrm{\rho}\left(\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{t}}+\mathrm{v}\cdot\nabla\mathrm{v}\right)=-\nabla\mathrm{p}+\nabla\cdot\mathrm{T}+\mathrm{f}$$

P 為壓力，T 為黏滯力，f 是體力，尤其是重力。如果 f 是指重力，它可以由 ρg 來表示。(更廣義可用 ρa 表示體力)

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+v\cdot\nabla v\right)=-\nabla p+\nabla\cdot T+\rho g$$

該 div T 可表示為 μ 黏滯項（μ 是粘度）。根據施陶丁格定律，我建議帶電流體粘度實際上與磁有關。從愛因斯坦的電遷移率關係，我們可以發現磁和帶電流體粘度之間的關係

$$\mathrm{D}=\frac{\mathrm{KT}}{6\pi\mu\mathrm{r}}=\frac{\varphi\mathrm{KT}}{\mathrm{q}}$$

$$\text{mobility } \varphi=\frac{\mathrm{q}}{\mathrm{mf}}$$

$$\text{viscosity } \mu=\frac{\mathrm{mf}}{6\pi\mathrm{r}}$$

由於流體為質量流，則粘滯力可類比電流的電阻：

$$J=\sigma g$$

$$g=\rho J$$

$$\sigma=\frac{1}{\rho}$$

(J 為質量流密度，g 為重力場，σ為質量流傳導係數，ρ為 gravity resistivity)

若存在質量流歐姆定律(R 為質量阻)：

$$g=\frac{V}{l}$$

$$J=\frac{I}{A}$$

則：

$$\rho=\frac{VA}{Il}=R\frac{A}{l}$$

(V 為重力位勢，I 為質量流，A 為截面積，l 為長度)
又知粘滯力公式及類似阻尼公式：

$$F = \mu A \frac{u}{l}$$

$$F = -cu$$

則：

$$c = \mu \frac{A}{l}$$

對比上式，可得粘滯度μ相當於質量阻 R。而已知電阻
有並聯和串聯等公式，也可能適用於質量阻(粘滯度)：
並聯：

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu 1} + \frac{1}{\mu 2}$$

串聯：

$$\mu = \mu 1 + \mu 2$$

若相似於電功率：

$$P = I^2 R = VR$$

可將質量阻 R 換成黏滯度 u 可得質量功率。
不可壓縮流時：

$$\nabla \cdot v = 0$$

如果我們考慮流體力學的雷諾數（Re）則納維-斯托克斯方程變為

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v\right) = -\nabla p + \frac{1}{Re}\nabla^2 v + \rho g$$

另一種表示方法為(黏滯度μ)：

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v\right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 v + \rho g$$

$$m\frac{dv}{dt} = F$$

$$\rho A dx \frac{dv}{dt} = -A dp$$

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\frac{dp}{dx}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v = \frac{d}{dx}\left(\frac{v^2}{2}\right)$$

$$\rho \nabla \frac{1}{2} v \cdot v = -\nabla p$$

$$v \cdot \nabla v = \nabla\left(\frac{1}{2} v \cdot v\right) - v \times \nabla \times v$$

又因等效原理：(值得注意的是體力含重力不為零，因為流體必然有質量)

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \rho g$$

消去兩邊：

$$-v \times (\nabla x v) = \lambda \nabla^2 v = \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 v$$

$$\mu \nabla^2 v + \rho v \times (\nabla x v) = \mu \nabla^2 v - \rho 2\omega \times v = 0$$

帕松方程：

$$\nabla^2 v = \frac{\rho}{\mu} * 2\omega \times v = \frac{\rho}{\mu} * 2\omega^2 \times r$$

當旋流時，解上面的帕松方程則可得速度場及相應的壓力場，這就是有黏滯力下 Navier-Stokes 方程的旋流解（rotational flow）。利用 Delta & Green functions：

$$v = \frac{m\omega^2}{2\pi\mu}$$

而在非旋流（irrotational flow）時：

$$\nabla x v = 0$$

$$\mu \nabla^2 v = 0$$

可得到拉普拉斯方程而得黏滯力下 Navier-Stokes 方程的非旋流解。這之前就有研究者推出：

$$v = \nabla \varphi$$

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

$$\nabla(\nabla^2 \varphi) = \nabla^2(\nabla \varphi) = \nabla^2 v = 0$$

由速度解也可推出壓力解。

在可壓縮流（compressible flow）情況納氏方程為：

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v\right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 v + \frac{1}{3} \mu \nabla(\nabla \cdot v) + \rho g$$

此時需考慮：

$$\nabla \cdot v \neq 0$$

考慮公式帶入：

$$\nabla(\nabla \cdot v) = \nabla^2 v + \nabla \times (\nabla \times v)$$

若為無旋流時：

$$\nabla x v = 0$$

可得：

$$\frac{4}{3} \mu \nabla^2 v = 0$$

我們得可壓縮流的非旋流可得拉普拉斯方程解，但是變密度的可壓縮流是否仍

套用動壓公式$\frac{1}{2}\rho v^2$尚有疑處。且值得注意的是可壓縮流如氣體的流體力學方程式較適合採用歐拉方程式來解，因為其黏滯度小而雷諾數高，在空氣中不管小如蝴蝶或大如飛機其雷諾數都大於四千故應用歐拉方程來解較恰當，由於如下所述歐拉方程易產生渦旋等紊流，這是蝴蝶或鳥類展翅產生空氣旋轉渦旋來使其飛翔的原理。在解可 壓縮流的旋流時，筆者若假設旋力場旋度之原理仍可用:

$$\mathrm{Curl\ s} = \mathrm{Curl\ (2\ v)} = 2u\left[J - \epsilon\frac{dg}{dt}\right]$$

設 G=c=1 則:

$$\mathrm{Curl\ v} = \mathrm{u}\left[J - \epsilon\frac{dg}{dt}\right] = J - \epsilon\frac{dg}{dt}$$

$$\rho\nabla\frac{1}{2}v \cdot v = -\nabla p$$

$$v \cdot \nabla v = \nabla\left(\frac{1}{2}v \cdot v\right) - v \times \nabla \times v$$

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t} = \rho g$$

則納氏方程式變成:

$$-\rho v \times (\nabla x v) = \frac{\mu}{3}\nabla^2 v + \frac{\mu}{3}\nabla D$$

根據連續性方程式:

$$\nabla \cdot v = \frac{-1}{\rho}\left(\frac{d\rho}{dt}\right) = D$$

又:

$$\nabla(\nabla \cdot v) = \nabla^2 v + \nabla \times (\nabla \times v)$$

$$-\rho v \times (\nabla x v) = \frac{4\mu}{3}\nabla^2 v + \frac{\mu}{3}\nabla \times (\nabla \times v)$$

$$\nabla \times (\nabla \times v) = \nabla \times \mathrm{Curl\ v} = \nabla \times \left[J - \epsilon\frac{dg}{dt}\right]$$

而:

$$\nabla \times g = 0$$

$$J = \sigma g$$

$$\nabla \times (\nabla \times v) = 0$$

$$\rho v \times (\nabla x v) = -\rho 2\omega \times v$$

最後方程式變成:

$$\rho 2\omega \times v = \frac{4\mu}{3}\nabla^2 v$$

$$\nabla^2 v = \frac{3}{2\mu}(\rho\omega \times v) == \frac{3\rho}{2\mu} * \omega^2 \times r$$

解上述帕松方程式則可以得到可壓縮流下的旋流解。

$$v = \frac{3m\omega^2}{8\pi\mu}$$

另外，如果我們完全忽略剪力（粘性），方程變成類似歐拉方程：

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v\right) = -\nabla p + \rho g$$

高雷諾數可誘發紊流的發生。這就是粘性項可以防止紊流的發生。從 Navier-Stokes 方程變成似歐拉方程引起湍流現象。由於 mobility=v/E 與磁場相反則磁與黏滯度相關，慣性力(重力)大則 Re 大易生紊流，黏滯力大則 Re 小不易生紊流，是否與重力場可能造成奇點有關?流體粘滯度如同電學中電阻的概念。而磁流變流體和磁與 shear stress 的關係說明磁與帶電流體黏滯度相關。

湍流有幾個特點。首先，湍流通常是一個快速旋轉流與自發形成旋渦。如何產生一個旋渦，我們可以採取兩種左側和右側的歐拉方程的旋度：

$$\nabla \times \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v\right) = -\nabla \times \nabla p + \rho\nabla \times g$$

基於微積分的規則，我們必須

$$-\nabla \times \nabla p = 0$$

$$\nabla \times g = 0$$

而且，

$\omega = 2w$

$\mathrm{w} = \nabla \times \mathrm{v}$

我們也有以下的規則：

$\mathrm{v} \cdot \nabla\mathrm{v} = \nabla\left(\frac{1}{2}\mathrm{v} \cdot \mathrm{v}\right) - \mathrm{v} \times \mathrm{w}$

$\nabla \times \nabla\varphi = 0$

$\nabla \times (\mathrm{v} \times \mathrm{w}) = -\mathrm{w}(\nabla \cdot \mathrm{v}) + (\mathrm{w} \cdot \nabla)\mathrm{v} - (\mathrm{v} \cdot \nabla)\mathrm{w} + \mathrm{v}(\nabla \cdot \mathrm{w})$

$\nabla \cdot (\nabla \times \mathrm{v}) = 0$

另外，在流體不可壓縮，還有

$\nabla \cdot \mathrm{v} = 0$

我們得到：

$\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\mathrm{w} + (\mathrm{v} \cdot \nabla)\mathrm{w} = (\mathrm{w} \cdot \nabla)\mathrm{v}$

而且，我們讓：

$$\frac{D}{Dt}w = \frac{\partial}{\partial t}w + (v \cdot \nabla)w$$

最後，我們得到：

$$\frac{D}{Dt}w = (w \cdot \nabla)v$$

這是渦旋方程。因此，此似歐拉方程可以自發地誘導渦旋方程與渦流的產生。但是，如果我們考慮的納維-斯托克方程的粘性項，散度 T 的旋度不會在等式右邊的變成零。因此，Navier-Stokes 方程的存在可以防止渦旋方程的發生。
紊流的第二個特點是擴散性。即湍流中的流體的增加均化（混合）。這可以通過渦旋方程形成一個奇點的旋渦來解釋：我們可以看到有一個奇異積分操作子作用於渦度。這是說渦流奇點的形成。當流體由於此奇點被移動到漩渦的中心，可以解釋可以解釋湍流擴散性。如果我們考慮的 Navier-Stokes 方程的粘性項，它可以防止渦旋方程的產生，以及奇點的形成。由於帶電流體黏滯力與磁力相關，由冷次定律知道磁場的感應電流會與原電流方向相反，而重力場可形成奇點而靜電場可形成渦漩，磁場感應電流的產生正可以抵消原流體靜電場的渦漩紊流。

紊流的第三個重要特徵是不規則。這可以通過衝擊波產生的歐拉方程來解釋。基於歐拉方程，我們可以得到所謂的蘭金-雨貢紐（Rankine-Hugonoit）的衝擊（跳躍）條件：

$$[\rho Vx] = \rho 1V1x - \rho 2V2x = 0$$

$$\left[\frac{1}{2}V_x^2 + E\right] = 0$$

$$[p + \rho V_x^2] = 0$$

由於從歐拉方程衝擊波的不連續性的特點，我們可以從歐拉方程預測的動盪是不規則的。例如，切向不穩定性可以衍生自歐拉方程：
我們讓壓力：

$$p = f(z)e^{i(kx-\omega t)}$$

我們可以得到：

$$\omega = kv\frac{\rho 1 \mp i\sqrt{\rho 1\rho 2}}{\rho 1 + \rho 2}$$

虛數單位的存在意謂流體的不穩定性。如果我們考慮粘性項，那麼不穩定會降低。因此，我們可以從歐拉方程得到紊流的三個關鍵特性。
基於蘭金-雨貢紐的條件，我們可以解釋一些不穩定的現象。瑞利-泰勒不穩定性是由於兩種流體具有不同的密度。不同密度的流體之間的加速界面衝擊波發

生 Richtmyer-Meshkov 不穩定性。當存在兩種流體之間交介面的速度差異發生開爾文-亥姆霍茲不穩定。Saffman-Taylor 不穩定性也因密度不同的兩種液體。瑞利貝納德對流是由於界面之間的熱能的差異。最後，電熱不穩定（electrothermal instability）是由於升高的熱能（溫度）。因此，湍流現象的機制更見清晰。

我們最後可討論 Navier-Stokes 方程的光滑性問題，光滑性要求要無限可微，但是我們知道空間和時間都有普朗克尺度的最小單位而非無限可微。由於 Navier-Stokes 方程是由連續性方程式導出，Navier-Stokes 方程式是連續性可微分。雖然空間最小單位是普朗克空間，但因其尺度極小而可符合所謂光滑性定義。若納維史托克方程可轉化為拉普拉斯方程，拉氏方程的解為調和函數都有無限可微的光滑性。而帕松方程也是具有無限可微的光滑性，Navier-Stokes 方程的存在性與光滑性是可得證的。如下即可證得（for any multi-index α）：

$$f \in C_0^\infty(Rn)$$
$$u \in C_0^\infty(Rn)$$

帕松方程:

$$f = -\Delta u$$

When n≥3

$$\varphi(y) = \frac{1}{n\,(n-2)\,\alpha\,(n)\,|y|^{n-2}}$$

α(n)為 n 維度之體積元素

$$u(x) = \int_{R^n} f(x-y)\,\varphi(y)dy$$

$$D^\alpha u(x) = \int_{R^n} [D^\alpha f(x-y)]\,\varphi(y)dy$$

對於任何 multi-index α，此證明帕松方程有連續無限可微分的光滑性。