Regla de combinación y último teorema de Fermat

Combination rule and last Fermat's theorem

Carlos Alejandro Chiappini

ABSTRACT

ESPAÑOL

El objetivo central de este documento es razonar respecto al uso combinado de dos o más metodos para resolver un problema matemático.

Para facilitar la comprensión presento el tema con ayuda de un problema conocido. He escogido el último teorema de Fermat porque el polinomio que lo expresa posee pocos monomios y pocas variables.

ENGLISH

The central objective of this document is to reason regarding the combined use of two or more methods to solve a mathematical problem.

To facilitate understanding I present the topic with the help of a known problem. I have Fermat's Last Theorem has been chosen because the polynomial that expresses it has few monomials and few variables.

This document is available in English with the title Combination rule and last Fermat's theorem.

Parte 1 - Regla de combinación

Pensemos en un problema matemático que pueda ser planteado en dos o más formas. Pensemos en tres, por ejemplo.

Respecto a una variable v , cada planteo acota el intervalo de valores posibles y las tres cotas no son igualmente restrictivas. Este detalle es irrelevante cuando empleamos los métodos separadamente, sin combinarlos.

¿ Qué sucede cuando nuestra inteción es combinarlos ? Las dos cotas menos restrictivas permiten valores de v prohibidos por la cota más restrictiva. ¿ Es esto irrelevante para la combinación ? ¿ O es necesaria una regla que asegure correspondencia y coherencia ?

Simbolicemos f_1, f_2, f_3 a las formas de planteo. Supongamos que f_1 establece $v < 1$, f_2 establece $v < 2$ y f_3 establece $v < 3$. La forma f_1 es inaplicable para $v \geq 1$, pero las otras dos son aplicables. ¿ Podemos combinar las tres despreocupadamente o necesitamos respetar alguna norma de coherencia y de correspondencia ?

Mencionemos algo evidente. La combinación es posible si aplicamos las formas menos restrictivas dentro del intervalo $v < 1$ y excluimos el resto. Ese resto no pertenece a la combinación de las tres formas, porque excluye a f_1 . Aplicar las formas menos restrictivas dentro del intervalo permitido por f_1 es un criterio imprescindible para tener correspondencia y coherencia en la combinación.

¿ Es válido en términos lógicos lo que ha sido explicado ? Suponiendo repuesta afirmativa enuncio la regla explícitamente.

REGLA DE COMBINACIÓN

$\downarrow$

Cuando combinamos dos o más formas de plantear un problema, la forma más restrictiva establece el intervalo de validez de la combinación.

Parte 2 - Ejemplo de aplicación

Muestro como ejemplo la regla de combinación aplicada al último teorema de fermat, que admite dos enfoques elementales, uno aritmético y otro geométrico.

Escribo la ecuación de Fermat.

$$a^n + b^n = c^n \tag{1}$$

o Enfoque geométrico

La representación triangular comienza con $n \geq 2$, pues $n = 1$ corresponde a suma de segmentos de una misma recta.

$$\boxed{n \geq 2}$$

Repito la ecuación original del problema.

$$a^n + b^n = c^n$$

Factorizo

$$a\ a^{n-1} + b\ b^{n-1} = c\ c^{n-1}$$

Divido ambos miembros por c^{n-1} . Después simplifico.

$$a\ \left(\frac{a}{c}\right)^{n-1} + b\ \left(\frac{b}{c}\right)^{n-1} = c$$

$$c = a\ \left(\frac{a}{c}\right)^{n-1} + b\ \left(\frac{b}{c}\right)^{n-1} \tag{2}$$

Es evidente el par de relaciones siguiente.

$$a < c\ \Rightarrow \frac{a}{c} < 1 \tag{3}$$

$$b < c\ \Rightarrow\ \frac{b}{c} < 1 \tag{4}$$

Las relaciones (3) y (4) aplicadas a (2) determinan lo siguiente.

$$c < a + b$$

Intercambio miembros

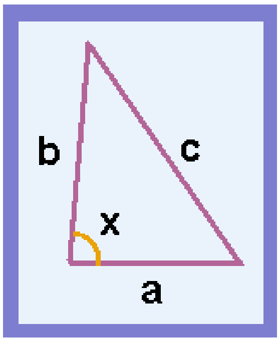
$$a + b > c \tag{5}$$

Es evidente el par de relaciones siguiente.

$$a + c > b \tag{6}$$

$$b + c > a \tag{7}$$

Las desigualdades (5, (6) y (7) son carcterísticas de un triángulo.



Por teorema del coseno tenemos lo siguiente.

$$a^2 + \ b^2 - 2\ a\ b\ \cos x = c^2 \tag{8}$$

Parte 3 - Aritmética y geométrica combinadas

En la terna a, b, c mínima no existe factor común entre números de la terna. Entonces a y b no pueden ser iguales. Simbolizando b al mayor tenemos lo siguiente.

$$\boxed{\frac{a}{b} < 1 \qquad \leftarrow \ \textit{condición aritmética} \ \ (9)}$$

Esa condición puede ser expreada como una ecuación que cumple una condición. Escribo la ecuación.

$$a = \frac{b}{q} \tag{10}$$

Escribo la condición.

$$q > 1 \tag{11}$$

En (8) reemplazo a como indica (10) .

$$\left(\frac{b}{q}\right)^2 + \ b^2 - 2\ \frac{b}{q}\ b\ \cos x = c^2$$

Agrupo

$$\left(\frac{b}{q}\right)^2 + \ b^2 - 2\ \frac{b^2}{q}\ \ \cos x = c^2$$

Extraigo factor común b^2 .

$$\boxed{b^2 \left(\frac{1}{q^2} + 1 - \frac{2}{q} \ \cos x \right) = c^2 \quad (12)}$$

Para $n \geq 2$ es $\cos x \geq 0$. Lo demuestro comenzando en (8).

$$a^2 + b^2 - 2\ a\ b\ \cos x = c^2 \tag{8}$$

Despejo $\cos x$

$$\cos x = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\ a\ b} \tag{13}$$

Para $n \geq 2$, un procedimiento análogo al procedimiento que permitió demostrar $a + b > c$ conduce a lo siguiente.

$$a^2 + b^2 \geq c^2$$

Entonces

$$a^2 + b^2 - c^2 \geq 0$$

Divido ambos miembros por $2\ a\ b$. Después resuelvo el segundo miembro.

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\ a\ b} \geq 0 \tag{14}$$

Multiplico M.A.M. (13) y (14) . Después simplifico.

$$\cos x \geq 0 \tag{15}$$

Intercambio miembros en (12) .

$$c^2 = b^2 \left(\frac{1}{q^2} + 1 - \frac{2}{q} \ \cos x \right) \tag{16}$$

La inecuación (15) implica en (16) lo siguiente.

$$c^2 \leq b^2 \left(\frac{1}{q^2} + 1 \right)$$

Divido ambos miembros por b^2

$$\frac{c^2}{b^2} \leq \frac{1}{q^2} + 1$$

La condición (11) expresa $q > 1$. Entonces queda lo siguiente.

$$\frac{c^2}{b^2} < 2$$

Elevo ambos miembros a la potencia $\dfrac{n}{2}$.

$$\left(\frac{c}{b} \right)^n < 2^{\left(\frac{n}{2} \right)}$$

$$\left(\frac{c}{b}\right)^n < \left(\sqrt{2}\right)^n \tag{17}$$

Repito aquí la ecuación (1) .

$$a^n + b^n = c^n$$

Divido por b^n ambos miembros. Después simplifico.

$$\frac{a^n}{b^n} \; + \; 1 = \left(\frac{c}{b}\right)^n$$

Intercambio miembros

$$\left(\frac{c}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \; + \; 1 \tag{18}$$

Reemplazo el primer miembro de (17) como indica (18) .

$$\frac{a^n}{b^n} \; + \; 1 < \left(\sqrt{2}\right)^n$$

$$\boxed{\frac{a^n}{b^n} \; < -1 + \left(\sqrt{2}\right)^n \quad (19)}$$

La inecuación (9) expresa lo siguiente.

$$\frac{a}{b} < 1$$

Elevo ambos miembros a la potencia n .

$$\frac{a^n}{b^n} < 1 \tag{20}$$

La condición (20) es la condición aritmética, expresada en potencia enésima.

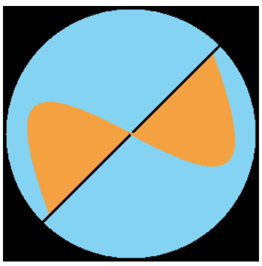
La inecuación aritmética (20) es más restrictiva que la inecuación geométrica (19) . La regla de combinación explicada en la Parte 1 del documento informa que debemos utilizar a (19) dentro del intervalo acotado por (20) . Esto significa excluir en (19) los valores de n que implican $\frac{a}{b} > 1$. Consecuentemente la región $n > 2$ está excluida.

Parte 4 - Reflexión

- La convicción general es suponer que por medios elementales una demostración del último teorema de Fermat es imposible.
- Nuestra obligación es encontrar errores en el desarrollo expuesto.
- Podríamos atacar al recurso novedoso, que es la regla de combinación. Tal vez sea mentira que necessitamos respetarla para tener correspondencia y coherencia en la combinación de métodos.
- Otra posibilidad es atacar a la representación geométrica, en caso de ser inadecuada.
- Podríamos objetar el uso de inecuaciones, en caso de generar incertidumbre.

- Otro detalle atacable podría ser el artificio constituido por (10) y (11) , que traduce la información de la inecuación (9) a una ecuación condicionada.
- Esa traducción conduce a una ecuación de segundo grado, que es (12). Podríamos objetar el segundo grado invocando el grado n de la ecuación de Fermat.
- Seguramente hay más detalles atacables.
- Bastaría un detalle refutado para desechar el planteo mostrado en este documento y, consecuentemente, desechar la regla de combinación.
- La persona lectora está invitada a realizar esa tarea.
- Personalmente no he podido realizarla.
- Hsta que que sea efectuada, supondré que la regla de combinación es válida.

Pierre de Fermat (1601 - 1665)



Carlos Alejandro Chiappini

3 de agosto de 2023

carloschiappini@gmail.com