Analytical proof of Collatz conjecture

by Ahmed Idrissi Bouyahyaoui

***

Algorithm of Collatz (3*x + 1) :

Let x a positive integer number.

1 - if x is even then x := x/2

2 - if x is odd then x := x * 3 + 1

We repeat 1 - 2 until obtain a cycle (is only cycle ?) or x tends to infinity.

The cycle [4, 2, 1] is the Collatz conjecture.

Every sequence S(x) which ends in 1 is called "Collatz sequence".

The numbers of proof :

x_i and $(x_i + v_i)$ are positive integer numbers. $(x_i + v_i)$ is the **successor** of x_i and v_i is an integer number of **adjustment**. At first step $x_0 = y_0 > 2$ and $v_0 = 2$.

Representation of integer numbers x_i and v_i :

$\mathbf{x_i = 2^{\alpha i} * y_i}$ and $\mathbf{v_i = 2^{\beta i} * z_i}$ or $\mathbf{v_i = 0 * z_i}$, $\mathbf{z_0 = 1.}$

$i, \alpha_i, \beta_i, \alpha \in N$, $x_i, (x_i + v_i), y_i, x, y, c \in N^*$, $v_i, z_i, v \in Z$.

x_0, y_i, z_i are **odd** integers.

The proposed algorithm :

The proposed algorithm, an extension of Collatz algorithm, is applied to $(x_i + v_i)$.

1 - For the rule 1 of Collatz algorithm, we have :

$x_i = 2^{\alpha i} * y_i$, $v_i = 2^{\beta i} * z_i$.

The operation concerns $2^{\alpha i}$ and $2^{\beta i}$.

If x_i and v_i are even then $x_i := x_i/2$ and $v_i := v_i/2$ until x_i or v_i is or are odd.

α_i and β_i are actualized.

If $\alpha_i + \beta_i > 0$ and $\alpha_i * \beta_i = 0$ then division by 2 is deferred.

2 - By application of rule 2 of Collatz algorithm with adjustment to :

$x_i = 2^{\alpha i} * y_i$, $v_i = 2^{\beta i} * z_i$, $x_i + v_i = 2^{\alpha i} * y_i + 2^{\beta i} * z_i$, $\alpha_i * \beta_i = 0$,

The operation concerns y_i, z_i which are **odd** integers.

We obtain :

$\mathbf{x_{i+1} = 2^{\alpha i}*(3*y_i+1)}$, $\mathbf{v_{i+1} = 2^{\beta i}*3*z_i - (2^{\alpha i} -1)}$ (1)

$x_{i+1} = 3x_i + 1 + (2^{\alpha i} - 1)$, $v_{i+1} = 3v_i - (2^{\alpha i} - 1)$ (2)

$x_{i+1} = 3x_i + 1 + (2^{\alpha i} - 1)$, $v_{i+1} = (3v_i + 1) - 2^{\alpha i}$

$\mathbf{x_{i+1}+v_{i+1} = 3(x_i+v_i) + 1}$ (3)

(3) is conform to rule 2 of Collatz algorithm.

In equalities (2), x_{i+1} is increased by $(2^{\alpha i} - 1)$ and v_{i+1} is decreased by $(2^{\alpha i} - 1)$, we deduce

$\mathbf{v_i < x_i}$ (4)

With initial data $x_0 = 1*y_0 > 2$ and $v_0 = 2$, we have $(x_0 + v_0) > 0$ and as $(x_{i+1} + v_{i+1}) = 3(x_i + v_i) + 1$ (3), we have by recurrence :

$\mathbf{x_i + v_i > 0}$ (5)

Relations (4) and (5) give the double inequality :

$\mathbf{0 < x_i + v_i < 2*x_i} = 2*2^{\alpha i}*y_i$ (6)

By hypothesis $S(y_0)$ is a Collatz sequence and the double inequality (6) shows that sequence $S(x_0+2)$ is bounded because it is upper bounded by sequence $2*S(x_0)$ and lower bounded by sequence $S(0)$.

Proof :

By hypothesis $S(y_0)$ is a Collatz sequence, then it exists at least one i such that

$\mathbf{y_i = 1}$, $x_i = 2^{\alpha i}*y_i = 2^{\alpha i}$ and $v_i = 2^{\beta i}*z_i$. (7)

As $v_i < x_i$ and $(x_i + v_i) > 0$, we have :

$(v_i < x_i) \wedge (z_i > 0) \Rightarrow 2^{\beta i}*z_i < 2^{\alpha i} \Rightarrow \beta_i < \alpha_i$,

$((x_i + v_i) > 0) \wedge (z_i < 0) \Rightarrow 2^{\beta i}*|z_i| < 2^{\alpha i} \Rightarrow \beta_i < \alpha_i$,

The application of rule 1 of Collatz algorithm consists to divide by $2^{\beta i}$:

$\beta_i < \alpha_i$, $\alpha_i := \alpha_i - \beta_i$, $\beta_i := 0$, $\alpha_i * \beta_i = 0$.

$\mathbf{x_i + v_i = 2^{\alpha i}*y_i + z_i}$, $y_i = 1$ (8)

As **for every k ≥ i** $\mathbf{y_k \in [1, 4, 2]}$, $\mathbf{x_k + v_k}$ is of form :

$\mathbf{x_k + v_k = 2^{\alpha k} + z_k}$ (9)

Let $f(\alpha) = x + v$ a continuous and differentiable function of curve passing through points on the coordinate plane $(i, x_i + v_i)$. The function $f(\alpha)$ is associated to bounded sequence $S(x_0 + 2)$, it has at least one optimum in the domain of variation defined by the condition :

$$\mathbf{(x_i + v_i > 0) \text{ et } (v_i < x_i)} \qquad (10)$$

The only possible cyclic minimal optimum is a minimum equal to 1.

For every optimal point $(k, x_k + v_k)$, function $f(\alpha) = 2^\alpha + z$ has a zero derivative.
We have :

$f(\alpha) = x + v = 2^\alpha + z$, of derivative (11)
$f'(\alpha) = 2^\alpha \ln 2 + z'$ which is zero at the optimum
$f'(\alpha) = 0$ that implies $z' = - 2^\alpha \ln 2$ and the primitive function
$z = - 2^\alpha + c$, c is an arbitrary integer constant.

For every optimum we have :

$f(\alpha) = c$

At the optimum minimum = 1, it exists at least one n such that,

$y_n \in [1, 4, 2]$, $f(\alpha_n) = x_n + v_n = 2^{\alpha n} + z_n = 2^{\alpha n} - 2^{\alpha n} + c = c$.

For the minimum $f(\alpha_n) = 1$, it suffices to set $c = 1$ and so we have :

$$\mathbf{f(\alpha_n) = x_n + v_n = 1, \quad x_n = 2^{\alpha n} \text{ and } v_n = -(2^{\alpha n} - 1)}. \qquad (12)$$

Conclusion :

The sequence $S(x_0 +2)$ ends in 1 and has the only cycle [1, 4, 2, 1].
So by recurrence, every positive integer number gives a Collatz sequence.
**

Preuve analytique de la Conjecture de Collatz

par Ahmed Idrissi Bouyahyaoui

***

Algorithme de Collatz (3*x + 1) :

Soit x un nombre entier positif.

1 - si x est pair alors   x := (x/2)

2 - si x est impair alors   x := (x*3 + 1)

On répète 1 - 2 jusqu'à obtenir un cycle (le cycle est-il unique ?) ou bien x tend vers l'infini.

Le cycle [4, 2, 1] est la conjecture de Collatz.

Toute suite S(x) qui aboutit à 1 est appelée ''Suite de Collatz''.

Les nombres de la preuve :

x_i et $(x_i + v_i)$ sont des nombres entiers positifs. $(x_i + v_i)$ est le **successeur** de x_i et v_i est un nombre entier **d'ajustement.** A l'étape initiale $x_0=y_0 > 2$ et $v_0 = 2$.

Représentation des nombres entiers x_i et v_i :

$\mathbf{x_i = 2^{\alpha i} * y_i}$ et $\mathbf{v_i = 2^{\beta i} * z_i}$ ou $\mathbf{v_i = 0 * z_i, z_0 = 1.}$

i, α_i, β_i, $\alpha \in N$, x_i, $(x_i + v_i)$, y_i, x, y, c $\in N^*$, v_i, z_i, v $\in Z$.

x_0, y_i, z_i sont des entiers impairs.

L'algorithme proposé :

L'algorithme proposé, une extension de celui de Collatz, est appliqué à $(x_i + v_i)$.

1 - Pour la règle 1 de l'algorithme de Collatz, on a :

$x_i = 2^{\alpha i} * y_i$, $v_i = 2^{\beta i} * z_i$.

L'opération concerne $2^{\alpha i}$ et $2^{\beta i}$.

Si x_i et v_i sont pairs alors $x_i := x_i/2$ et $v_i := v_i/2$ jusqu'à x_i ou v_i est ou sont impairs. α_i et β_i sont actualisés.

Si $\alpha_i + \beta_i > 0$ et $\alpha_i * \beta_i = 0$ alors la division par 2 est différée.

2 – En appliquant la règle 2 de l'algorithme de Collatz avec ajustement à :

$x_i = 2^{\alpha i} * y_i$, $v_i = 2^{\beta i} * z_i$, $x_i + v_i = 2^{\alpha i} * y_i + 2^{\beta i} * z_i$, $\alpha_i * \beta_i = 0$,

L'opération concerne y_i et z_i qui sont des entiers **impairs**.

On obtient :

$\mathbf{x_{i+1} = 2^{\alpha i}*(3*y_i+1)}$, $\mathbf{v_{i+1} = 2^{\beta i}*3*z_i - (2^{\alpha i} -1)}$ (1)

$x_{i+1} = 3x_i + 1 + (2^{\alpha i} - 1)$, $v_{i+1} = 3v_i - (2^{\alpha i} - 1)$ (2)

$x_{i+1} = 3x_i + 1 + (2^{\alpha i} - 1)$, $v_{i+1} = (3v_i + 1) - 2^{\alpha i}$

$\mathbf{x_{i+1}+v_{i+1} = 3(x_i+v_i) + 1}$ (3)

(3) est conforme à la règle 2 de l'algorithme de Collatz.

Dans (2), x_{i+1} est augmenté de $(2^{\alpha i} - 1)$ et v_{i+1} est diminué de $(2^{\alpha i} - 1)$, on en déduit

$\mathbf{v_i < x_i}$ (4)

Avec les données initiales $x_0 = 1*y_0 > 2$ et $v_0 = 2$, on a $(x_0 + v_0) > 0$ et comme $(x_{i+1} + v_{i+1}) = 3(x_i + v_i) + 1$ (3), on a par récurrence :

$\mathbf{x_i + v_i > 0}$ (5)

Les relations (4) and (5) donnent la double inégalité :

$\mathbf{0 < x_i + v_i < 2*x_i} = 2*2^{\alpha i}*y_i$ (6)

Par hypothèse $S(y_0)$ est une suite de Collatz, la double inégalité (6) montre que la suite $S(x_0+2)$ est **bornée** car elle est **majorée** par la suite $2*S(x_0)$ et **minorée** par la suite $S(0)$.

Preuve :

Par hypothèse $S(y_0)$ est une suite de Collatz, ainsi **il existe au moins un i** tel que

$\mathbf{y_i = 1}$, $x_i = 2^{\alpha i}*y_i = 2^{\alpha i}$ et $v_i = 2^{\beta i}*z_i$. (7)

Comme $v_i < x_i$ et $(x_i + v_i) > 0$, on a :

$(v_i < x_i) \wedge (z_i > 0) \Rightarrow 2^{\beta i}*z_i < 2^{\alpha i} \Rightarrow \beta_i < \alpha_i$,

$((x_i + v_i) > 0) \wedge (z_i < 0) \Rightarrow 2^{\beta i}*|z_i| < 2^{\alpha i} \Rightarrow \beta_i < \alpha_i$,

L'application de la règle 1 de l'algorithme de Collatz consiste à diviser par $2^{\beta i}$:

$\beta_i < \alpha_i$, $\alpha_i := \alpha_i - \beta_i$, $\beta_i := 0$, $\alpha_i * \beta_i = 0$.

$\mathbf{x_i + v_i = 2^{\alpha i}*y_i + z_i}$, $y_i = 1$ (8)

Comme **pour tout k ≥ i y_k Є [1, 4, 2]**, $\mathbf{x_k + v_k}$ est de la forme :

$\mathbf{x_k + v_k = 2^{\alpha k} + z_k}$ (9)

Soit $f(\alpha) = x + v$ une fonction continue et dérivable et dont la courbe passe par les points du plan de coordonnées $(i, x_i + v_i)$. La fonction $f(\alpha)$ étant associée à la suite bornée $S(x_0 + 2)$, elle possède au moins un optimum dans le domaine de variation défini par la condition :

$$\mathbf{(x_i + v_i > 0) \ \ et \ \ (v_i < x_i)} \tag{10}$$

Le seul optimum minimal cyclique possible est un minimum égal à 1.

Pour tout point optimal $(k, x_k + v_k)$, la fonction $f(\alpha) = 2^\alpha + z$ est de dérivée nulle.
On a :

$f(\alpha) = x + v = 2^\alpha + z$, de dérivée (11)
$f'(\alpha) = 2^\alpha \ln 2 + z'$ qui est nulle à l'optimum
$f'(\alpha) = 0$ ce qui implique $z' = -2^\alpha \ln 2$ et la fonction primitive
$z = -2^\alpha + c$, c est une constante entière arbitraire.

Pour tout optimum on a :

$f(\alpha) = c$

A l'optimum minimum = 1, il existe au moins un n tel que,

$y_n \in [1, 4, 2]$, $f(\alpha_n) = x_n + v_n = 2^{\alpha n} + z_n = 2^{\alpha n} - 2^{\alpha n} + c = c$.

Pour le minimum $f(\alpha_n) = 1$, il suffit de poser c = 1 et l'on a :

$$\mathbf{f(\alpha_n) = x_n + v_n = 1, \ \ x_n = 2^{\alpha n} \ \ et \ \ v_n = -(2^{\alpha n} - 1)}. \tag{12}$$

Conclusion :

La suite $S(x_0 + 2)$ aboutit à 1 et a l'unique cycle [1, 4, 2, 1].
Ainsi par récurrence, tout nombre entier positif donne une suite de Collatz.
**