# Une démonstation de la conjecture de Fermat

$$(x+y)^n = x^n + y^n + xy \sum_{j=0}^{n-2} \left(x^j + y^j\right)(x+y)^{n-2-j}$$

Auteur : Olivier Massot
Email : omassot@singnet.com.sg

# Table des matières

**Résumé**

La formule du binôme, établie par Isaac Newton, est d'une importance incontestable et trouve son usage dans de très nombreux domaines. Cette étude présente des formulations alternatives à la formule de Newton ainsi que certains résultats qu' on en peut dériver. Une démonstration de la conjecture de Fermat parait ainsi possible.

Chapitre 1

# Une autre façon d'exprimer la formule du binôme de Newton.

## 1.1 Objet du chapitre.

La formule du binôme peut être réécrite. Cette nouvelle formulation permet à son tour de procéder à d'autres calculs qui mettent en évidence certaines propriétés que la formule originale ne permet pas de dégager.

## 1.2 Une autre formule.

Soit un entier naturel $n$ donné, $x$ et $y$ étant deux nombres réels non nuls. Dans tout ce qui suit, cet entier naturel $n$ est supposé supérieur ou égal à 3. Nous pouvons écrire

$$\frac{(x+y)^n - x^n}{(x+y) - x} = \sum_{j=0}^{n-1} (x+y)^{n-1-j}\, x^j = \frac{(x+y)^n - x^n}{y}$$

et de même

$$\frac{(x+y)^n - y^n}{(x+y) - y} = \sum_{j=0}^{n-1} (x+y)^{n-1-j}\, y^j = \frac{(x+y)^n - y^n}{x}$$

Sommons ces deux quantités

$$\frac{(x+y)^n - x^n}{y} + \frac{(x+y)^n - y^n}{x} = \sum_{j=0}^{n-1} (x+y)^{n-1-j} \left(x^j + y^j\right)$$

et nous obtenons la formule

$$(x+y)^{n+1} - \left(x^{n+1} + y^{n+1}\right) = xy \sum_{j=0}^{n-1} (x+y)^{n-1-j} \left(x^j + y^j\right)$$

que par commodité nous écrivons

$$(x+y)^n - (x^n + y^n) = xy \sum_{j=0}^{n-2} (x+y)^{n-2-j} \left(x^j + y^j\right) \tag{1.1}$$

La formule de Newton, que nous rappelons ici

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} C_n^j x^{n-j} y^j \tag{1.2}$$

où

$$C_n^j = \frac{n!}{(n-j)!j!} \tag{1.3}$$

permet donc d'établir l'égalité

$$\sum_{j=0}^{n-2} (x+y)^{n-2-j} \left(x^j + y^j\right) = \sum_{j=1}^{n-1} C_n^j x^{n-j-1} y^{j-1}$$

soit finalement

$$\sum_{j=0}^{n-2} (x+y)^{n-2-j} \left(x^j + y^j\right) = \sum_{j=0}^{n-2} C_n^{j+1} x^{n-2-j} y^j$$

## 1.3 Etude de la nouvelle formule.

Posons

$$A_n(x,y) = \sum_{j=0}^{n-2} (x+y)^{n-2-j} \left(x^j + y^j\right) \tag{1.4}$$

Remarquons tout d'abord que

$$\sum_{j=0}^{n-2} (x+y)^{n-2-j} \left(x^j + y^j\right) = \sum_{j=0}^{p-2} (x+y)^{n-2-j} \left(x^j + y^j\right) + \sum_{j=p-1}^{n-2} (x+y)^{n-2-j} \left(x^j + y^j\right)$$

avec $p \in \mathbb{N}^*$ et $p < n$, soit encore

$$\sum_{j=0}^{n-2} (x+y)^{n-2-j} \left(x^j + y^j\right) = \sum_{j=0}^{p-2} (x+y)^{(n-p)+(p-2-j)} \left(x^j + y^j\right) + \sum_{j=p-1}^{n-2} (x+y)^{n-2-(j-(p-1)+p-1)} \left(x^{j-(p-1)+p-1} + y^{j-(p-1)+p-1}\right)$$

et

$$\sum_{j=0}^{n-2} (x+y)^{n-2-j} \left(x^j + y^j\right) =$$

$$(x+y)^{n-p} \sum_{j=0}^{p-2} (x+y)^{p-2-j} \left(x^j + y^j\right)$$
$$+ \sum_{j=0}^{n-2-(p-1)} (x+y)^{n-2-(j+p-1)} \left(x^{j+p-1} + y^{j+p-1}\right)$$

et

$$\sum_{j=0}^{n-2} (x+y)^{n-2-j} \left(x^j + y^j\right) =$$

$$(x+y)^{n-p} \sum_{j=0}^{p-2} (x+y)^{p-2-j} \left(x^j + y^j\right)$$
$$+ \sum_{j=0}^{n-2-(p-1)} (x+y)^{n-p-1-j} \left(x^{j+p-1} + y^{j+p-1}\right)$$

et enfin

$$A_n(x,y) = (x+y)^{n-p} A_p(x,y)$$
$$+ \sum_{j=0}^{n-2-(p-1)} (x+y)^{n-p-1-j} \left(x^{j+p-1} + y^{j+p-1}\right)$$

Considérons maintenant le cas où $n = p+1$, alors

$$A_{p+1}(x,y) = (x+y) A_p(x,y) + \sum_{j=0}^{0} (x+y)^{-j} \left(x^{j+p-1} + y^{j+p-1}\right)$$

soit encore

$$A_{p+1}(x,y) = (x+y) A_p(x,y) + \left(x^{p-1} + y^{p-1}\right)$$

mais

$$x^{p-1} + y^{p-1} = (x+y)^{p-1} - xyA_{p-1}(x,y)$$

et donc

$$A_{p+1}(x,y) = (x+y) A_p(x,y) + (x+y)^{p-1} - xyA_{p-1}(x,y) \qquad (1.5)$$

Concentrons nous maintenant plus particulièrement sur $A_n(x,y)$ et développons cette quantité à partir de la formule 1.4 en page 2. Il vient

$$\begin{aligned}
A_n(x,y) &= 3(x+y)^{n-2} + \sum_{j=0}^{n-4} (x+y)^{n-4-j}\left(x^{j+2}+y^{j+2}\right) \\
&= 3(x+y)^{n-2} + \left(x^2+y^2\right)^{n-4} + \sum_{j=0}^{n-5} (x+y)^{n-5-j}\left(x^{j+3}+y^{j+3}\right) \\
&= 3(x+y)^{n-2} + (x+y)^{n-2} - 2xy(x+y)^{n-4} + \sum_{j=0}^{n-5} (x+y)^{n-5-j}\left(x^{j+3}+y^{j+3}\right) \\
&= 4(x+y)^{n-2} - 2xy(x+y)^{n-4} + \sum_{j=0}^{n-5} (x+y)^{n-5-j}\left(x^{j+3}+y^{j+3}\right)
\end{aligned}$$

En poursuivant les calculs de cette manière, nous obtenons

$$\begin{aligned}
A_n(x,y) = 5(x+y)^{n-2} \\
- 5xy(x+y)^{n-4} + \sum_{j=0}^{n-6} (x+y)^{n-6-j}\left(x^{j+4}+y^{j+4}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_n(x,y) = 6(x+y)^{n-2} - 9xy(x+y)^{n-4} + 2x^2y^2(x+y)^{n-6} \\
+ \sum_{j=0}^{n-7} (x+y)^{n-7-j}\left(x^{j+5}+y^{j+5}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_n(x,y) = 7(x+y)^{n-2} - 14xy(x+y)^{n-4} + 7x^2y^2(x+y)^{n-6} \\
+ \sum_{j=0}^{n-8} (x+y)^{n-8-j}\left(x^{j+6}+y^{j+6}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_n(x,y) = 8(x+y)^{n-2} - 20xy(x+y)^{n-4} + 16x^2y^2(x+y)^{n-6} - 2x^3y^3(x+y)^{n-8} \\
+ \sum_{j=0}^{n-9} (x+y)^{n-9-j}\left(x^{j+7}+y^{j+7}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_n(x,y) = 9(x+y)^{n-2} - 27xy(x+y)^{n-4} + 30x^2y^2(x+y)^{n-6} - 9x^3y^3(x+y)^{n-8} \\
+ \sum_{j=0}^{n-10} (x+y)^{n-10-j}\left(x^{j+8}+y^{j+8}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_n(x,y) = 10(x+y)^{n-2} - 35xy(x+y)^{n-4} + 50x^2y^2(x+y)^{n-6} - 25x^3y^3(x+y)^{n-8} \\
+ 2x^4y^4(x+y)^{n-10} \\
+ \sum_{j=0}^{n-11} (x+y)^{n-11-j}\left(x^{j+9}+y^{j+9}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
A_n(x,y) = 11(x+y)^{n-2} - 44xy(x+y)^{n-4} + 77x^2y^2(x+y)^{n-6} - 55x^3y^3(x+y)^{n-8} \\
+ 11x^4y^4(x+y)^{n-10} \\
+ \sum_{j=0}^{n-12}(x+y)^{n-12-j}\left(x^{j+10}+y^{j+10}\right)
\end{aligned}
$$

Il est bien sur possible de pousser ces calculs aussi loin que nous le désirons. En donnant à $n$ les valeurs 3, 4, 5, 6,..., nous en déduisons les nouveaux développements respectifs de $A_3(x,y)$, $A_4(x,y)$, $A_5(x,y)$, $A_6(x,y)$, etc...

Supposons à présent les formules suivantes respectivement vraies jusqu'aux rangs $2k$ et $2k+1$, avec $k \in \mathbb{N}^*$

$$
A_{2k}(x,y) = \sum_{j=0}^{k-1} D_{2k}^{j}(-1)^j(xy)^j(x+y)^{2(k-1-j)} \tag{1.6}
$$

$$
A_{2k+1}(x,y) = (x+y)\sum_{j=0}^{k-1} D_{2k+1}^{j}(-1)^j(xy)^j(x+y)^{2(k-1-j)} \tag{1.7}
$$

Les coefficients $D_{2k}^{j}$ et $D_{2k+1}^{j}$ sont, si possible, à expliciter (et le seront en effet par la suite).

Reprenons l'equation 1.5 en page 3 et réécrivons la sous la forme

$$
A_{2k+2}(x,y) = (x+y)A_{2k+1}(x,y) + (x+y)^{2k} - xyA_{2k}(x,y)
$$

Explicitons maintenant cette relation

$$
\begin{aligned}
A_{2k+2}(x,y) = (x+y)^2\sum_{j=0}^{k-1} D_{2k+1}^{j}(-1)^j(xy)^j(x+y)^{2(k-1-j)} \\
+ (x+y)^{2k} \\
- xy\sum_{j=0}^{k-1} D_{2k}^{j}(-1)^j(xy)^j(x+y)^{2(k-1-j)}
\end{aligned}
$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$
\begin{aligned}
A_{2k+2}(x,y) = (x+y)^2\sum_{j=0}^{k-1} D_{2k+1}^{j}(-1)^j(xy)^j(x+y)^{2(k-1-j)} \\
+ (x+y)^{2k} \\
+ \sum_{j=0}^{k-1} D_{2k}^{j}(-1)^{j+1}(xy)^{j+1}(x+y)^{2(k-1-j)}
\end{aligned}
$$

Poursuivons nos calculs. Nous obtenons de façon équivalente

$$A_{2k+2}(x,y) = \sum_{j=0}^{k-1} D_{2k+1}^{j} (-1)^{j} (xy)^{j} (x+y)^{2(k-j)}$$
$$+ (x+y)^{2k}$$
$$+ \sum_{j=0}^{k-1} D_{2k}^{j} (-1)^{j+1} (xy)^{j+1} (x+y)^{2(k-1-j)}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$A_{2k+2}(x,y) = \sum_{j=0}^{k-1} D_{2k+1}^{j} (-1)^{j} (xy)^{j} (x+y)^{2(k-j)}$$
$$+ (x+y)^{2k}$$
$$+ \sum_{j=1}^{k} D_{2k}^{j-1} (-1)^{j} (xy)^{j} (x+y)^{2(k-j)}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$A_{2k+2}(x,y) = \sum_{j=1}^{k-1} \left(D_{2k+1}^{j} + D_{2k}^{j-1}\right) (-1)^{j} (xy)^{j} (x+y)^{2(k-j)}$$
$$+ D_{2k+1}^{0} (x+y)^{2k} + (x+y)^{2k} + D_{2k}^{k-1} (xy)^{k}$$

et nous pouvons écrire

$$A_{2k+2}(x.y) = \sum_{j=0}^{k} D_{2k+2}^{j} (-1)^{j} (xy)^{j} (x+y)^{2(k-j)}$$

avec

$$D_{2k+2}^{0} = D_{2k+1}^{0} + 1$$
$$D_{2k+2}^{k} = D_{2k}^{k-1}$$

et

$$(\forall j \in \mathbb{N})\,(1 \leq j \leq k-1)\left(D_{2k+2}^{j} = D_{2k+1}^{j} + D_{2k}^{j-1}\right)$$

De la même manière, nous avons

$$A_{2k+3}(x,y) = (x+y)\,A_{2k+2}(x,y) + (x+y)^{2k} - xyA_{2k+1}(x,y)$$

Explicitons

$$A_{2k+3}(x,y) = (x+y) \sum_{j=0}^{k} D_{2k+2}^{j} (-1)^{j} (xy)^{j} (x+y)^{2(k-j)}$$
$$+ (x+y)^{2k+1}$$
$$- xy\,(x+y) \sum_{j=0}^{k-1} D_{2k+1}^{j} (-1)^{j} (xy)^{j} (x+y)^{2(k-1-j)}$$

d'où

$$A_{2k+3}(x,y) = \sum_{j=0}^{k} D_{2k+2}^{j}(-1)^{j}(xy)^{j}(x+y)^{2(k-j)+1}$$
$$+ (x+y)^{2k+1}$$
$$+ \sum_{j=0}^{k-1} D_{2k+1}^{j}(-1)^{j+1}(xy)^{j+1}(x+y)^{2(k-1-j)+1}$$

ce qui équivaut à

$$A_{2k+3}(x,y) = (x+y)^{2k+1}$$
$$+ \sum_{j=0}^{k} D_{2k+2}^{j}(-1)^{j}(xy)^{j}(x+y)^{2(k-j)+1}$$
$$+ \sum_{j=1}^{k-1} D_{2k+1}^{j-1}(-1)^{j}(xy)^{j}(x+y)^{2(k-j)+1}$$

et aussi

$$A_{2k+3}(x,y) = \left(D_{2k+2}^{0}+1\right)(x+y)^{2k+1}$$
$$+ \sum_{j=1}^{k} \left(D_{2k+2}^{j}+D_{2k+1}^{j-1}\right)(-1)^{j}(xy)^{j}(x+y)^{2(k-j)+1}$$

et nous pouvons enfin écrire

$$A_{2k+3}(x,y) = (x+y)\sum_{j=0}^{k} D_{2k+2}^{j}(-1)^{j}(xy)^{j}(x+y)^{2(k-j)}$$

avec

$$D_{2k+2}^{0} = D_{2k+1}^{0}+1$$

et

$$(\forall j \in \mathbb{N})\,(1 \le j \le k)\left(D_{2k+3}^{j} = D_{2k+2}^{j}+D_{2k+1}^{j-1}\right)$$

Ceci termine notre raisonnement par récurrence et nous pouvons écrire en guise de conclusion

$$(\forall k \in \mathbb{N}^*)\left(A_{2k} = \sum_{j=0}^{k-1} D_{2k}^{j}(-1)^{j}(xy)^{j}(x+y)^{2(k-1-j)}\right) \tag{1.8}$$

avec

$$D_{2k}^{0} = D_{2k-1}^{0}+1 \Longleftrightarrow D_{2k}^{0} = 2k \tag{1.9}$$

et

$$D_{2k}^{k-1} = D_{2k-2}^{k-2} = \cdots = D_{4}^{1} = 2 \tag{1.10}$$

et

$$(\forall j \in \mathbb{N})\,(1 \leq j \leq k-1)\left(D_{2k}^{j} = D_{2k-1}^{j} + D_{2k-2}^{j-1}\right) \tag{1.11}$$

et de même

$$(\forall k \in \mathbb{N}^{*})\left(A_{2k+1} = (x+y)\sum_{j=0}^{k-1} D_{2k+1}^{j}\,(-1)^{j}\,(xy)^{j}\,(x+y)^{2(k-1-j)}\right) \tag{1.12}$$

avec

$$D_{2k+1}^{0} = D_{2k}^{0} + 1 \Longleftrightarrow D_{2k}^{0} = 2k+1 \tag{1.13}$$

et

$$(\forall j \in \mathbb{N})\,(1 \leq j \leq k)\left(D_{2k+1}^{j} = D_{2k}^{j} + D_{2k-1}^{j-1}\right) \tag{1.14}$$

## 1.4 Valeurs prises par les coefficients $D_h^j$ où $(h \in \mathbb{N})$ et $(h \geq 3)$

Nous avons, ainsi que nous venons de l'établir

$$(\forall h \in \mathbb{N})\,(h \geq 3)\left(D_h^0 = h\right)$$

Prenons à présent $j = 1$. Nous avons

$$D_h^1 = D_{h-1}^1 + D_{h-2}^0$$

Nous pouvons donc écrire

$$\left.\begin{array}{r} D_h^1 = D_{h-1}^1 + D_{h-2}^0 \\ D_{h-1}^1 = D_{h-2}^1 + D_{h-3}^0 \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ D_5^1 = D_4^1 + D_3^0 \end{array}\right\} \Longrightarrow D_h^1 = \sum_{j=0}^{h-5} D_{h-2-j}^0 + D_4^1$$

or

$$D_{h-2-j}^0 = h-2-j$$

et, d'après la relation 1.10 établie en page 7

$$D_4^1 = 2$$

d'où il vient

$$D_h^1 = \sum_{j=0}^{h-5}(h-2-j) + 2 = ((h-2)+(h-3)+(h-4)+\cdots+3)+2$$

et donc

$$2D_h^1 = h\,(h+3)$$

et finalement

$$(\forall h \in \mathbb{N}^{*})\,(h \geq 3)\left(D_h^1 = \frac{h\,(h-3)}{2}\right) \tag{1.15}$$

Clairement

$$(\forall h \in \mathbb{N}^*)\,(h \geq 3)\,\left(D_h^1 \in \mathbb{N}\right)$$

Par des calculs analogues, nous trouvons pour tout entier naturel $h \geq 3$

$$D_h^2 = \frac{h\,(h-4)\,(h-5)}{6} \tag{1.16}$$

$$D_h^3 = \frac{h\,(h-5)\,(h-6)\,(h-7)}{24} \tag{1.17}$$

Là également

$$(\forall h \in \mathbb{N}^*)\,(h \geq 3)\,\left(D_h^2 \in \mathbb{N}\right)$$

$$(\forall h \in \mathbb{N}^*)\,(h \geq 3)\,\left(D_h^3 \in \mathbb{N}\right)$$

Nous remarquons alors que les relations 1.11 et 1.14 établies en page 8 ainsi que celles (voir relations 1.15, 1.16 et 1.17) établies en pages 8 et 9 nous permettent d'affirmer

$$(\forall h \in \mathbb{N}^*)\,(h \geq 3)\left(\forall j \in \left\{0, 1, \cdots, \frac{h-4}{2}\right\}\right)\left(D_h^j \in \mathbb{N}\right)$$

Supposons maintenant, $h$ étant choisi pair et pour tout $j \in \left\{0, 1, \cdots, \frac{h-2}{2}\right\}$ la formule

$$D_h^j = \frac{h\,(h-(j+2))!}{(j+1)!\,(h-2\,(j+1))!} \tag{1.18}$$

vraie jusqu'au rang $h$, pour tout entier naturel pair inférieur ou égal à $h$.

Supposons aussi vraie pour tout $j \in \left\{0, 1, \cdots, \frac{h-4}{2}\right\}$, jusqu'au rang $h-1$, pour tout entier naturel impair inférieur ou égal à $h-1$, la formule

$$D_{h-1}^j = \frac{(h-1)\,((h-1)-(j+2))!}{(j+1)!\,((h-1)-2\,(j+1))!} \tag{1.19}$$

alors

$$D_{h-1}^{j-1} = \frac{(h-1)\,(h-1-(j+1)!)}{j!\,(h-1-2j)!} = \frac{(h-1)\,(h-(j+2)!)}{j!\,(h-1-2j)!}$$

La relation 1.11 établie en page 8 nous permet d'écrire

$$D_{h+1}^{j} = \frac{h\,(h-(j+2))!}{(j+1)!\,(h-2\,(j+1))!} + \frac{(h-1)\,(h-(j+2))!}{j!\,(h-1-2j)!}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$D_{h+1}^{j} = \frac{(h-(j+2))!}{j!}\left(\frac{h}{(j+1)\,(h-2\,(j+1))!} + \frac{(h-1)}{(h-1-2j)!}\right)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$D_{h+1}^{j} = \frac{(h-(j+2))!}{j!}\left(\frac{h\,(h-1-2j)+(h-1)\,(j+1)}{(h-1-2j)!\,(j+1)}\right)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$D_{h+1}^{j} = \frac{(h-(j+2))!}{(j+1)!\,(h-1-2j)!}\,(h\,(h-1)-2jh+(h-1)\,j+(h-1))$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$D_{h+1}^{j} = \frac{(h-(j+2))!}{(j+1)!\,(h-1-2j)!}\left(h^2-1-(h+1)\,j\right)$$

et enfin

$$D_{h+1}^{j} = \frac{(h-(j+2))!}{(j+1)!\,(h-1-2j)!}\,(h+1)\,(h-1-j)$$

Nous pouvons donc écrire

$$D_{h+1}^{j} = \frac{(h+1)\,(h-(j+1))!}{(j+1)!\,(h+1-2\,(j+1))!} \tag{1.20}$$

Nous mènerions les calculs de la même manière en supposant $h$ impair.

Nous vérifions que

$$(\forall h \in \mathbb{N}^*)\,(h \geq 3)\left(D_h^0 = h\right)$$

et, en notant $2\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels pairs

$$(\forall h = 2k \in 2\mathbb{N}^*)\,(h \geq 4)\left(D_{2k}^{k-1} = 2\right)$$

Nous avons donc établi au terme de ce raisonnement par récurrence

$$(\forall k \in \mathbb{N}^*)\,(\forall j \in \{0,1,2,\cdots,k-1\})$$
$$\left(D_{2k+1}^{j} = \frac{(2k+1)\,(2k-(j+1))!}{(j+1)!\,(2k+1-2\,(j+1))!}\right)$$
$$\left(D_{2(k+1)}^{j} = \frac{2\,(k+1)\,(2\,(k+1)-1-(j+1))!}{(j+1)!\,(2\,(k+1)-2\,(j+1))!}\right) \tag{1.21}$$

Remarquons que pour tout entier naturel $h$

$$h-2\,(j+1)+(j+1) = h-(j+1)$$

Nous pouvons donc écrire

$$D_h^{j} = \frac{h\,(h-(j+1))!}{(h-(j+1))\,(j+1)!\,(h-2\,(j+1))!}$$

et aussi

$$D_h^{j} = \frac{h}{h-(j+1)}C_{h-(j+1)}^{j+1}$$

## 1.5 Etude sur les coefficients $D_h^j$

Pour les entiers naturels $h = 2k + 1$ impairs qui suivent, nous vérifions par le calcul les relations

$$k = 1 \Longleftrightarrow h = 2k + 1 = 3$$
$$D_3^0 = 3C_0^0$$

$$k = 2 \Longleftrightarrow h = 2k + 1 = 5$$
$$D_5^0 = 5C_1^0$$
$$D_5^1 = 5C_1^1$$

$$k = 3 \Longleftrightarrow h = 2k + 1 = 7$$
$$D_7^0 = 7C_2^0$$
$$D_7^1 = 7C_2^1$$
$$D_7^2 = 7C_2^2$$

$$k = 4 \Longleftrightarrow h = 2k + 1 = 9$$
$$D_9^0 = 9C_3^0$$
$$D_9^1 = 9C_3^1$$
$$D_9^2 = 9C_3^2 + 3C_0^0$$
$$D_9^1 = 9C_3^3$$

$$k = 5 \Longleftrightarrow h = 2k + 1 = 11$$
$$D_{11}^0 = 11C_4^0$$
$$D_{11}^1 = 11C_4^1$$
$$D_{11}^2 = 11\left(C_4^2 + C_1^0\right)$$
$$D_{11}^3 = 11\left(C_4^3 + C_1^1\right)$$
$$D_{11}^4 = 11C_4^4$$

$$k = 6 \Longleftrightarrow h = 2k + 1 = 13$$
$$D_{13}^0 = 13C_5^0$$
$$D_{13}^1 = 13C_5^1$$
$$D_{13}^2 = 13\left(C_5^2 + 2C_2^0\right)$$
$$D_{13}^3 = 13\left(C_5^3 + 2C_2^1\right)$$
$$D_{13}^4 = 13\left(C_5^4 + 2C_2^2\right)$$
$$D_{13}^5 = 13C_5^5$$

$k = 7 \Longleftrightarrow h = 2k + 1 = 15$

$$
\begin{aligned}
D^0_{15} &= 15C^0_6 \\
D^1_{15} &= 15C^1_6 \\
D^2_{15} &= 15\left(C^2_6 + 3C^0_3\right) \\
D^3_{15} &= 15\left(C^3_6 + 3C^1_3\right) \\
D^4_{15} &= 15\left(C^4_6 + 3C^2_3 + 3C^0_0\right) \\
D^5_{15} &= 15\left(C^5_6 + 3C^3_3\right) \\
D^6_{15} &= 15C^6_6
\end{aligned}
$$

$k = 8 \Longleftrightarrow h = 2k + 1 = 17$

$$
\begin{aligned}
D^0_{17} &= 17C^0_7 \\
D^1_{17} &= 17C^1_7 \\
D^2_{17} &= 17\left(C^2_7 + 5C^0_4\right) \\
D^3_{17} &= 17\left(C^3_7 + 5C^1_4\right) \\
D^4_{17} &= 17\left(C^4_7 + 5C^2_4 + C^0_0\right) \\
D^5_{17} &= 17\left(C^5_7 + 5C^3_4 + C^1_1\right) \\
D^6_{17} &= 17\left(C^6_7 + 5C^4_4\right) \\
D^7_{17} &= 17C^7_7
\end{aligned}
$$

$k = 9 \Longleftrightarrow h = 2k + 1 = 19$

$$
\begin{aligned}
D^0_{19} &= 19C^0_8 \\
D^1_{19} &= 19C^1_8 \\
D^2_{19} &= 19\left(C^2_8 + 7C^0_5\right) \\
D^3_{19} &= 19\left(C^3_8 + 7C^1_5\right) \\
D^4_{19} &= 19\left(C^4_8 + 7C^2_5 + 3C^0_2\right) \\
D^5_{19} &= 19\left(C^5_8 + 7C^3_5 + 3C^1_2\right) \\
D^5_{19} &= 19\left(C^6_8 + 7C^4_5 + 2C^2_2\right) \\
D^6_{19} &= 19\left(C^7_8 + 7C^5_5\right) \\
D^8_{19} &= 19C^8_8
\end{aligned}
$$

$k = 10 \Longleftrightarrow h = 2k + 1 = 21$

$$
\begin{aligned}
D_{21}^{0} &= 21 C_{9}^{0} \\
D_{21}^{1} &= 21 C_{9}^{1} \\
D_{21}^{2} &= 21 \left( C_{9}^{2} + 19 C_{6}^{0} \right) \\
D_{21}^{3} &= 21 \left( C_{9}^{3} + 19 C_{6}^{1} \right) \\
D_{21}^{4} &= 21 \left( C_{9}^{4} + 19 C_{6}^{2} + 14 C_{3}^{0} \right) \\
D_{21}^{5} &= 21 \left( C_{9}^{5} + 19 C_{6}^{3} + 14 C_{3}^{1} \right) \\
D_{21}^{6} &= 21 \left( C_{9}^{6} + 19 C_{6}^{4} + 14 C_{3}^{2} + 3 C_{0}^{0} \right) \\
D_{21}^{7} &= 21 \left( C_{9}^{7} + 19 C_{6}^{5} + 14 C_{3}^{3} \right) \\
D_{21}^{8} &= 21 \left( C_{9}^{7} + 19 C_{6}^{6} \right) \\
D_{21}^{9} &= 21 C_{9}^{9}
\end{aligned}
$$

Nous sommes amenés à supposer que pour tout entier naturel impair $2k + 1$, supérieur ou égal à 3, chaque coefficient $D_{2k+1}^{j}$ peut s'exprimer comme suit

$$D_{2k+1}^{j} = \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k}{3} \rfloor} F_{2k+1}^{l} C_{k-1-3l}^{j-2l} \tag{1.22}$$

avec

$$0 \leq k - 1 - 3l \leq k - 1 \tag{1.23}$$

et nous poserons par convention

$$(\forall j)\,(j - 2l < 0) \left( C_{k-1-3l}^{j-2l} = 0 \right) \tag{1.24}$$

Pour démontrer la validité de cette formule pour tout entier naturel $k$ non nul, nous allons chercher à expliciter, dans la mesure du possible, le coefficients $F_{2k+1}^{l}$ en fonction de $k$ et de $l$.

Pour une entier naturel $k$ quelconque, nous vérifions les relations

$$D_{2k+1}^{0} = (2k+1)\, C_{k-1}^{0}$$

$$D_{2k+1}^{1} = (2k+1)\, C_{k-1}^{1}$$

Nous pouvons toujours écrire avec $k \geq 4$

$$D_{2k+1}^{2} = (2k+1)\, C_{k-1}^{2} + \left( D_{2k+1}^{2} - (2k+1)\, C_{k-1}^{2} \right) C_{k-4}^{0}$$

Mais, en accord avec les relations 1.3 et 1.21 établies en pages 2 et 10

$$D_{2k+1}^{2} - (2k+1)\, C_{k-1}^{2} = (2k+1) \left( \frac{(2k-3)!}{3!\,(2k+1-6)!} - \frac{(k-1)!}{2!\,(k-3)!} \right)$$

et de la même manière

$$D_{2k+1}^{2} - (2k+1)\, C_{k-1}^{2} = (2k+1) \left( \frac{(2k-3)!}{3!\,(2k-5)!} - \frac{(k-1)!}{2!\,(k-3)!} \right)$$

et

$$D_{2k+1}^2 - (2k+1)\, C_{k-1}^2 = (2k+1) \left( \frac{(2k-3)\,(2k-4)}{3!} - \frac{(k-1)\,(k-2)}{2!} \right)$$

et

$$D_{2k+1}^2 - (2k+1)\, C_{k-1}^2 = (2k+1) \left( \frac{(2k-3)\,(k-2)}{3} - \frac{(k-1)\,(k-2)}{2} \right)$$

soit encore

$$D_{2k+1}^2 - (2k+1)\, C_{k-1}^2 = (2k+1) \left( \frac{2\,(2k-3)\,(k-2) - 3\,(k-1)\,(k-2)}{6} \right)$$

et enfin

$$D_{2k+1}^2 - (2k+1)\, C_{k-1}^2 = \frac{(2k+1)\,(k-2)\,(k-3)}{6}$$

Nous posons

$$F_{2k+1}^1 = D_{2k+1}^2 - (2k+1)\, C_{k-1}^2 = \frac{(2k+1)\,(k-2)\,(k-3)}{3!}$$

De la même façon, nous trouverions

$$D_{2k+1}^3 = (2k+1) \left( C_{k-1}^3 + F_{2k+1}^1 C_{k-4}^1 \right)$$

et

$$D_{2k+1}^4 = (2k+1) \left( C_{k-1}^4 + F_{2k+1}^1 C_{k-4}^2 + F_{2k+1}^2 C_{k-7}^0 \right)$$

ce qui nous donne

$$F_{2k+1}^2 = \left( \left( D_{2k+1}^4 - (2k+1)\, C_{k-1}^4 \right) - \left( D_{2k+1}^2 - (2k+1)\, C_{k-1}^2 \right) C_{k-4}^2 \right)$$

Par des calculs similaires aux précédents, les coefficients $D_{2k+1}^j$ et $C_{k-j}^l$ étant explicités, nous trouvons

$$F_{2k+1}^2 = \frac{(2k+1)\,(k-3)\,(k-4)\,(k-5)\,(k-6)}{5!}$$

Nous sommes alors amenés à supposer vraie, pour tout entier naturel $k \geq 1$, l'égalité

$$F_{2k+1}^l = \frac{(2k+1)\,(k-1-l)!}{(2l+1)!\,(k-1-3l)!} \tag{1.25}$$

avec l'entier naturel $l$ tel que

$$0 \leq l \leq \lfloor \frac{k}{3} \rfloor$$

Nous effectuons maintenant la différence des coefficents $F_{2k+1}^l$ et $F_{2k-1}^l$

$$F_{2k+1}^l - F_{2k-1}^l = \frac{(2k+1)\,(k-1-l)!}{(2l+1)!\,(k-1-3l)!} - \frac{(2k-1)\,(k-2-l)!}{(2l+1)!\,(k-2-3l)!}$$

Il vient

$$F_{2k+1}^l - F_{2k-1}^l = \frac{(k-2-l)!}{(2l+1)!\,(k-2-3l)!} \left( \frac{(2k+1)\,(k-1-l) - (2k-1)\,(k-1-3l)}{(k-1-3l)} \right)$$

et

$$F_{2k+1}^{l} - F_{2k-1}^{l} = \frac{(k-2-l)!}{(2l+1)!\,(k-1-3l)!}\left((2k+1)(k-1-l) - (2k-1)(k-1-3l)\right)$$

soit encore

$$F_{2k+1}^{l} - F_{2k-1}^{l} = \frac{(k-2-l)!}{(2l+1)!\,(k-1-3l)!}\left(2\,(2l+1)(k-1)\right)$$

et finalement

$$F_{2k+1}^{l} - F_{2k-1}^{l} = \frac{2\,(k-1)(k-2-l)!}{(2l)!\,(k-1-3l)!} \tag{1.26}$$

Notre hypothèse 1.22 émise en page 13 nous conduit maintenant à montrer par récurrence l'existence de la relation

$$(\forall k \in \mathbb{N}^*)\,(k \geq 1)\,(\forall j \in \mathbb{N})\,(0 \leq j \leq k-1)\left(D_{2k+1}^{j} = \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k}{3} \rfloor} F_{2k+1}^{l} C_{k-1-3l}^{j-2l}\right)$$

où chaque coefficient $F_{2k+1}^{l}$ s'exprime par la formule 1.25 établie en page 14.

Supposons vraie jusqu'au rang $2k-1$, pour tout entier naturel $j \leq k-2$, la relation

$$D_{2k-1}^{j} = \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k-1}{3} \rfloor} F_{2k-1}^{l} C_{k-2-3l}^{j-2l} \tag{1.27}$$

avec

$$F_{2k-1}^{l} = \frac{(2k-1)(k-2-l)!}{(2l+1)!\,(k-2-3l)!}$$

Nous effectuons à présent

$$D_{2k-1}^{j} - D_{2k-3}^{j-1} = D_{2k-2}^{j}$$

soit encore

$$D_{2k-2}^{j} = \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k-1}{3} \rfloor} F_{2k-1}^{l} C_{k-2-3l}^{j-2l} - \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k-2}{3} \rfloor} F_{2k-3}^{l} C_{k-3-3l}^{j-2l-1} \tag{1.28}$$

Deux cas se présentent alors.

### 1.5.1 Cas 1 : $\lfloor \frac{k-1}{3} \rfloor = \lfloor \frac{k-2}{3} \rfloor = m$

Nous avons

$$\lfloor \frac{k-1}{3} \rfloor = m \Longleftrightarrow k-1 = 3m + \rho > 3m$$

Les seules valeurs que $\rho$ peut prendre a priori sont 0, 1 et 2.

#### 1.5.1.1 $\rho = 0$

$$\begin{aligned} \rho = 0 &\Longrightarrow k-1 = 3m \\ &\Longleftrightarrow k-2 = 3m-1 < 3m \end{aligned}$$

#### 1.5.1.2 $\rho = 1$

$$\begin{aligned}\rho = 1 &\Longrightarrow k-1 = 3m+1 \\ &\Longleftrightarrow k-2 = 3m\end{aligned}$$

#### 1.5.1.3 $\rho = 2$

$$\begin{aligned}\rho = 2 &\Longrightarrow k-1 = 3m+2 \\ &\Longrightarrow k-2 = 3m+1\end{aligned}$$

Clairement, $\rho$ ne peut pas être égal à 0. Nous remarquons également que dans ce Cas 1

$$2k+1 \not\equiv 0 \quad (3) \tag{1.29}$$

Rappelons que

$$\left(C^{j-2l}_{k-2-3l} = C^{j-2l-1}_{k-3-3l} + C^{j-2l}_{k-3-3l}\right) \Longleftrightarrow \left(C^{j-2l-1}_{k-3-3l} = C^{j-2l}_{k-2-3l} - C^{j-2l}_{k-3-3l}\right) \tag{1.30}$$

Nous avons alors (voir la relation 1.28 établie en page 15)

$$D^j_{2k-2} = \sum_{l=0}^{m} \left(F^l_{2k-1} C^{j-2l}_{k-2-3l} - F^l_{2k-3} C^{j-2l-1}_{k-3-3l}\right) \tag{1.31}$$

ce qui équivaut à

$$D^j_{2k-2} = \sum_{l=0}^{m} \left(F^l_{2k-1} C^{j-2l}_{k-2-3l} - F^l_{2k-3}\left(C^{j-2l}_{k-2-3l} - C^{j-2l}_{k-3-2l}\right)\right)$$

et

$$D^j_{2k-2} = \sum_{l=0}^{m} \left(\left(F^l_{2k-1} - F^l_{2k-3}\right) C^{j-2l}_{k-2-3l} + F^l_{2k-3} C^{j-2l}_{k-3-2l}\right)$$

avec $m = \lfloor \frac{k-2}{3} \rfloor = \lfloor \frac{k-1}{3}, \rfloor$. En particulier, parmi les entiers naturels $2k+1$, où $k$ satisfait cette propriété, nous trouvons tous les entiers premiers strictement supérieurs à 3.

### 1.5.2 Cas 2 : $\lfloor \frac{k-1}{3} \rfloor = \lfloor \frac{k-2}{3} \rfloor + 1 = m$

Nous avons

$$\lfloor \frac{k-1}{3} \rfloor = m \Longleftrightarrow k-1 = 3m+\rho$$

Comme précédemment,

#### 1.5.2.1 $\rho = 0$

$$\begin{aligned}\rho = 0 &\Longrightarrow k-1 = 3m \\ &\Longleftrightarrow k-2 = 3m-1\end{aligned}$$

#### 1.5.2.2 $\rho = 1$

$$\begin{aligned}\rho = 1 &\Longrightarrow k-1 = 3m+1\\ &\Longleftrightarrow k-2 = 3m\end{aligned}$$

#### 1.5.2.3 $\rho = 2$

$$\begin{aligned}\rho = 2 &\Longrightarrow k-1 = 3m+2\\ &\Longleftrightarrow k-2 = 3m+1\end{aligned}$$

Et dans ce cas, $\rho$ ne peut qu'être égal à 0. Nous remarquons egalement

$$\begin{aligned}2k+1 \equiv 0 &\Longleftrightarrow k \equiv 1 \quad (3)\\ &\Longleftrightarrow k-1 \equiv 0 \quad (3)\end{aligned}$$

Nous avons alors (voir la relation 1.28 établie en page 15)

$$\begin{aligned}D^j_{2k-2} &= \sum_{l=0}^{m} F^l_{2k-1} C^{j-2l}_{k-2-3l} - \sum_{l=0}^{m-1} F^l_{2k-3} C^{j-2l-1}_{k-3-3l}\\ &= F^m_{2k-1} C^{j-2(m+1)}_{k-2-3(m+1)} + \sum_{l=0}^{m-1} F^l_{2k-1} C^{j-2l}_{k-2-3l} - \sum_{l=0}^{m-1} F^l_{2k-3} C^{j-2l-1}_{k-3-3l}\\ &= F^m_{2k-1} C^{j-2(m+1)}_{k-2-3(m+1)} + \sum_{l=0}^{m-1} \left(\left(F^l_{2k-1} - F^l_{2k-3}\right) C^{j-2l}_{k-2-3l} + F^l_{2k-3} C^{j-2l}_{k-3-3l}\right)\end{aligned}$$

avec $m = \lfloor \frac{k-1}{3} \rfloor$ et $m-1 = \lfloor \frac{k-2}{3} \rfloor$.

Revenons au Cas 1 et reprenons notre hypothèse 1.27 émise en page 15

$$\sum_{l=0}^{m} F^l_{2k-3} C^{j-2l}_{k-3-3l} = D^j_{2k-3}$$

alors, en accord avec la relation 1.31 posée en page 16

$$D^j_{2k-2} - D^j_{2k-3} = D^{j-1}_{2k-4}$$

et finalement nous obtenons l'égalité

$$D^{j-1}_{2k-4} = \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k-2}{3} \rfloor} F^l_{2k-4} C^{j-2l}_{k-2-3l} \tag{1.32}$$

avec, en accord avec la relation 1.26 établie en page 15

$$F^l_{2k-4} = F^l_{2k-1} - F^l_{2k-3}$$

Il nous reste à établir la validité de l'égalité 1.32 en page 17 lorsque $k \geq 4$ décrit $\mathbb{N}$. Nous nous assurons d'abord par un calcul simple qu'elle est en effet vérifiée lorsque $k$ prend successivement les valeurs 4, 5 et $6 \cdots$, alors que $j$ décrit son intervalle de définition.

Nous supposons alors que cette égalité est vérifiée jusqu'au rang $2k$, pour tout $j \leq (k-1)$, soit

$$D_{2k}^{j} = \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k}{3} \rfloor} F_{2k}^{l} C_{k-3l}^{j+1-2l}$$

Nous pouvons remarquer que les calculs faits pour aboutir à la formule donnant $D_{h=2k}^{j}$ en fonction des coefficients $F_{2k}^{l}$ et des coefficients du binôme $C_{k-3l}^{j+1-2l}$ sont généralisables à une valeur quelconque de $h$ dans $\mathbb{N}$. Il nous suffit d'établir la relation de récurrence sur les coefficients d'indices $h$ impairs pour obtenir un résultat valable quelque soit la parité de cet indice $h$.

En reprenant l'hypothèse de départ (voir notre hypothèse 1.27 émise en page 15), portant sur les coefficients d'indices impairs, et en utilisant ce que nous venons d'établir, nous vérifions

$$D_{2k+1}^{j} = D_{2k}^{j} + D_{2k-1}^{j-1}$$

avec

$$D_{2k}^{j} = \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k}{3} \rfloor} F_{2k}^{l} C_{k-3l}^{j+1-2l}$$

et

$$D_{2k-1}^{j-1} = \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k-1}{3} \rfloor} F_{2k-1}^{l} C_{k-2-3l}^{j-2l}$$

D'après les calculs que nous venons d'effectuer pages 16 et 17, nous avons

$$\begin{aligned}
D_{2k}^{j} = & \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k}{3} \rfloor = m} F_{2k-2}^{l} C_{k-1-3l}^{j-2l} + F_{2k-1}^{l} C_{k-2-3l}^{j-2l} \\
& \iff D_{2k}^{j} = \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k}{3} \rfloor = m} \left(F_{2k+1}^{l} - F_{2k-1}^{l}\right) C_{k-1-3l}^{j-2l} + F_{2k-1}^{l} C_{k-2-3l}^{j-2l} \\
& \iff D_{2k}^{j} = \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k}{3} \rfloor = m} F_{2k+1}^{l} C_{k-1-3l}^{j-2l} - \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k}{3} \rfloor = m} F_{2k-1}^{l} C_{k-1-3l}^{j-2l-1} \\
& \iff D_{2k}^{j} = D_{2k+1}^{j} - D_{2k-1}^{j-1}
\end{aligned}$$

Ce résulat est bien en accord avec l'égalité 1.14 établie en page 8.

Connaissant $F_{2k-2}^{l}$ et $F_{2k-1}^{l}$, exprimés en fonction de $l$ et de $k$, nous pouvons calculer $F_{2k+1}^{l}$, en allant en sens inverse du calcul nous ayant donné $F_{2k-2}^{l}$ puis $F_{2k-4}^{l}$. Nous trouvons donc

$$D_{2k+1}^{j} = \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k}{3} \rfloor} F_{2k+1}^{l} C_{k-1-3l}^{j-2l}$$

avec

$$F_{2k+1}^{l} = \frac{(2k+1)\,(k-1-l)!}{(2l+1)!\,(k-1-3l)!}$$

La relation de récurrence est donc établie pour tous les coefficients $D_h^j$ d'indice $h$ pair ou impair.

Récapitulons maintenant l'ensemble des résultats obtenus au cours des pages précédentes (voir les équations 1.8 et 1.12 page 7 et 8)

$$(\forall n \in \mathbb{N})\,(n \geq 3)\left((x^n + y^n) = x^n + y^n + xy\sum_{j=1}^{n-2} A_n\,(x,y)\right)$$

avec pour $n = 2k$ (voir l'équation 1.8 en page 7)

$$A_{2k}\,(x,y) = \sum_{j=0}^{k-1} D_{2k}^{j}\,(-1)^j\,(xy)^j\,(x+y)^{2(k-1-j)}$$

et

$$(\forall k \in \mathbb{N}^*)\,(k > 1)\,(\forall j \in \mathbb{N})\,(j \leq k-1)\left(D_{2k}^{j} = \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k}{3} \rfloor} F_{2k}^{l} C_{k-3l}^{j+1-2l}\right)$$

et

$$F_{2k}^{l} = \frac{2k\,(k-1-l)!}{(2l)!\,(k-3l)!}$$

et pour $n = 2k+1$ (voir l'équation 1.12 en page 8)

$$A_{2k+1}\,(x,y) = (x+y)\sum_{j=0}^{k-1} D_{2k+1}^{j}\,(-1)^j\,(xy)^j\,(x+y)^{2(k-1-j)}$$

et

$$(\forall k \in \mathbb{N}^*)\,(\forall j \in \mathbb{N})\,(j \leq k-1)\left(D_{2k+1}^{j} = \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k}{3} \rfloor} F_{2k+1}^{l} C_{k-1-3l}^{j-2l}\right)$$

et

$$F_{2k+1}^{l} = \frac{(2k+1)\,(k-1-l)!}{(2l+1)!\,(k-1-3l)!}$$

## 1.6 Etude de $A_{2k+1}\,(x,y)$ où $k \in \mathbb{N}^*$

Nous allons voir dans ce paragraphe qu'il est possible de poursuivre la factorisation de la quantité $A_{2k+1}\,(x,y)$. En utilisant les derniers résultats, nous pouvons écrire

$$A_{2k+1}\,(x,y) = (x+y)\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k}{3} \rfloor} F_{2k+1}^{l} C_{k-1-3l}^{j-2l}\,(-1)^j\,(xy)^j\,(x+y)^{2(k-1-j)}$$

Nous avons alors, pour chaque $k$, et pour tout $j$ et tout $l$

$$F_{2k+1}^{l} C_{k-1-3l}^{j-2l} (-1)^{j} (xy)^{j} (x+y)^{2(k-1-j)}$$
$$= F_{2k+1}^{l} C_{k-1-3l}^{j-2l} (-1)^{j-2l+2l} (xy)^{j-2l+2l} (x+y)^{2(k-1-3l+3l-(j-2l)-2l)}$$
$$= \left(F_{2k+1}^{l} C_{k-1-3l}^{j-2l} (-1)^{j-2l} (xy)^{j-2l} (x+y)^{2(k-1-3l-(j-2l))}\right) (-1)^{2l} (xy)^{2l} (x+y)^{2l}$$

$A_{2k+1}(x.y)$ peut donc s'écrire de la façon suivante

$$A_{2k+1}(x,y)$$
$$= (x+y)$$
$$\sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k}{3} \rfloor} F_{2k+1}^{l} (-1)^{2l} (x+y)^{2l}$$
$$\sum_{j=0}^{k-1} C_{k-1-3l}^{j-2l} (-1)^{j-2l} (xy)^{j-2l} (x+y)^{2(k-1-3l-(j-2l))}$$

Si $j$ varie de 0 à $k-1$, alors $j-2l$ varie de 0 à $k-1-2l$, et comme nécessairement

$$j - 2l \leq k - 1 - 3l$$

nous obtenons

$$A_{2k+1}(x,y)$$
$$= (x+y) \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k}{3} \rfloor} F_{2k+1}^{l} (-1)^{2l} (x+y)^{2l} \sum_{j=0}^{k-1-3l} C_{k-1-3l}^{j} (-1)^{j} (xy)^{j} (x+y)^{2(k-1-3l-j)}$$

mais

$$\sum_{j=0}^{k-1-3l} C_{k-1-3l}^{j} (-1)^{j} (xy)^{j} (x+y)^{2(k-1-3l-j)}$$
$$= \left((x+y)^2 - xy\right)^{k-1-3l}$$
$$= \left(x^2 + xy + y^2\right)^{k-1-3l}$$

et finalement

$$A_{2k+1}(x,y) = (x+y) \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k}{3} \rfloor} F_{2k+1}^{l} (-1)^{2l} (x+y)^{2l} \left(x^2 + xy + y^2\right)^{k-1-3l}$$

Si de plus, nous supposons que $2k+1$ est un entier naturel impair strictement supérieur à 3 et non multiple de 3, alors (voir l'égalité 1.29 en page 16)

$$k - 1 \not\equiv 0 \quad (3)$$

et donc $k-1-3l$ ne s'annule pour aucune valeur de $l$. Par conséquent $A_{2k+1}(x,y)$ est toujours divisible par $\left(x^2 + xy + y^2\right)$ et nous pouvons écrire pour tout entier naturel $n = 2k+1 > 3$

$$A_{2k+1}(x,y) =$$
$$(x+y)\left(x^2+xy+y^2\right)\sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k}{3} \rfloor} F_{2k+1}^{l}(-1)^{2l}(x+y)^{2l}\left(x^2+xy+y^2\right)^{k-2-3l} \quad (1.33)$$

## 1.7 Différentes expressions de la formule du binôme.

Nous arrivons à la fin de cette étude, dont le but était de reformuler la formule du binôme. Ainsi que présenté (voir l'équation 1.2 en page 2) et établi (voir l'équation 1.1 en page 2), nous avons

$$\begin{aligned}
(x+y)^n &= \sum_{j=0}^{n} C_n^j x^{n-j} y^j \\
&= x^n + y^n + \sum_{j=1}^{n-1} C_n^j x^{n-j} y^j \\
&= x^n + y^n + xy \sum_{j=0}^{n-2} C_n^{j+1} x^{n-2-j} y^j \\
&= x^n + y^n + xy \sum_{j=0}^{n-2} (x+y)^{n-2-j}\left(x^j + y^j\right)
\end{aligned}$$

De plus, selon que l'entier naturel $n$ est pair ou impair, la formule du binôme peut également être explicitée comme suit

$n = 2k$ **pair**

$$(x+y)^{2k} = x^{2k} + y^{2k} + xy \sum_{j=0}^{k-1} D_{2k}^{j}(-1)^j (xy)^j (x+y)^{2(k-1-j)}$$

avec

$$D_{2k}^{j} = \frac{2k\,(2k-1-(j+1))!}{(j+1)!\,(2k-2\,(j+1))!}$$

ainsi qu'établi plus haut (voir l'équation 1.8 en page 7).

$n = 2k+1$ **impair**

$$(x+y)^{2k+1} = x^{2k+1} + y^{2k+1} + xy\,(x+y) \sum_{j=0}^{k-1} D_{2k+1}^{j}(-1)^j (xy)^j (x+y)^{2(k-1-j)}$$

avec

$$D_{2k+1}^{j} = \frac{(2k+1)\,(2k-(j+1))!}{(j+1)!\,(2k+1-2\,(j+1))!}$$

ainsi qu'établi plus haut (voir l'équation 1.12 en page 8).

$n = 2k + 1 > 3$ **et** $n \not\equiv 0 \ (3)$

$$(x+y)^n = x^n + y^n + \\ xy\,(x+y)\left(x^2+xy+y^2\right)\sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k}{3} \rfloor} F_{2k+1}^{l}\,(-1)^{2l}\,(x+y)^{2l}\left(x^2+xy+y^2\right)^{k-2-3l} \tag{1.34}$$

avec

$$F_{2k+1}^{l} = \frac{(2k+1)\,(k-1-l)!}{(2l+1)!\,(k-1-3l)!} \tag{1.35}$$
$$\equiv 0 \quad (n = 2k+1)$$

ainsi qu'établi plus haut (voir l'équation 1.33 en page 21).

Remarquons que l'ensemble de ces entiers naturels $n$ contient tous les entiers premiers impairs distincts de 3.

L'exposé de ces résultats termine cette étude. Nous passons maintenant à l'étude de la conjecture de Fermat, conjecture qui a été démontrée par Andrew Wiles (1993/1995).

# Chapitre 2

# Etude de la conjecture de Fermat.

## 2.1 Objet du chapitre.

Cette conjecture a donc été démontrée par Andrew Wiles entre 1993 et 1995. Pour autant, ainsi qu'il en a pu être pour d'autres problèmes dans l'histoire des mathématiques, l'exploration d'autres voies pouvant amener à d'autres démonstrations n'est pas sans intérêt. C'est ce que nous allons essayer de montrer dans ce qui suit.

## 2.2 Premier point.

Soit $n$ et $p$ deux entiers premiers impairs distincts ou non l'un de l'autre. Plaçons nous dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, l'ensemble des entiers modulo $p$, muni de l'addition et de la multiplication. Cet ensemble muni de ces deux lois est un corps commutatif et chacun de ses éléments $u$ admet un inverse $u^{-1}$. Choisissons $\alpha$ tel que $(1 \leq \alpha < p)$ avec

$$(\forall j \in \mathbb{N})\,(0 \leq j \leq n)\,\left(\alpha^j \neq 1\right)$$

et

$$\alpha^n \equiv 1 \quad (p)$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1} &\equiv \sum_{j=0}^{n-1} \alpha^j \quad (p) \\
&\equiv 1 + \alpha \sum_{j=0}^{n-2} \alpha^j \quad (p) \\
&\equiv 0 \quad (p)
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\alpha \sum_{j=0}^{n-2} \alpha^j \equiv -1 \Longrightarrow \sum_{j=0}^{n-2} \alpha^j &\equiv \frac{\alpha^{n-1}-1}{\alpha-1} \equiv -\alpha^{-1} \quad (p) \\
&\Longrightarrow \alpha^{n-1} - 1 \equiv \alpha^{-1}(\alpha-1) \quad (p) \\
&\Longrightarrow \alpha^n - \alpha \equiv \alpha - 1 \quad (p) \\
&\Longleftrightarrow \alpha^n + 1 \equiv 2\alpha \quad (p) \\
&\Longleftrightarrow 2 \equiv 2\alpha \quad (p) \\
&\Longleftrightarrow 1 \equiv \alpha \quad (p)
\end{aligned}$$

Par conséquent, si

$$\alpha^n - 1 \equiv (\alpha - 1) \sum_{j=0}^{n-1} \alpha^j \equiv 0 \quad (p) \tag{2.1}$$

alors

$$\alpha \equiv 1 \quad (p) \tag{2.2}$$

## 2.3 Rappel de la conjecture.

Soit l'equation

$$x^n + y^n = z^n \tag{2.3}$$

avec $n$ entier premier, $n > 2 \in \mathbb{N}^*$.

Pierre de Fermat (1607-1665) a conjecturé qu'il n'existait pas de triplet $x \in \mathbb{N}^*$, $y \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{N}^*$, satisfaisant la relation 2.3. Nous supposerons

$$0 < x < y < z$$

Ceci nous conduit à écrire

$$\begin{aligned}
x + y \equiv z \quad (n) &\Longleftrightarrow x + y = kn + z \, (k \in \mathbb{N}^*) \\
&\Longrightarrow x > kn
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Laissant de côté le cas où $n = 3$, nous allons nous interesser à tous les autres cas où $n > 3$. Il est possible, sans perte de généralité de ne considérer que les cas où $n$ est premier.

## 2.4 Deuxième point.

Soient donc, s'ils existent, $x \in \mathbb{N}^*$, $y \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{N}^*$ qui satisfont la relation 2.3. Il est alors toujours possible de supposer que $x$, $y$ et $z$ sont premiers entre eux deux à deux. Nous avons

$$\begin{aligned}
z^n &= x^n + y^n \\
&= x^n - (-1)^n y^n \\
&= (x - (-1)\, y) \sum_{j=0}^{n-1} x^{n-1-j} (-1)^j y^j
\end{aligned}$$

Dans le cas où $z \not\equiv 0\ (n)$, $(x-(-1)\,y)$ et $\sum_{j=0}^{n-1} x^{n-1-j}\,(-1)^j\,y^j$ sont deux grandeurs premières entre elles et nous avons

$$(\exists h \in \mathbb{N}^*)\,(x+y=h^n)$$

et

$$z^n \equiv 0 \Longrightarrow z \equiv 0 \quad (h)$$

Enfin, la relation 1.34 et la formule 1.35 énoncées en page 22 nous permettent d'écrire

$$((x+y)-z)\sum_{j=0}^{n-1}(x+y)^{n-1-j}\,z^j = n\lambda xy\,(x+y)\left(x^2+xy+y^2\right) \tag{2.5}$$

avec $\lambda \in \mathbb{N}^*$.

Il est clair que les entiers naturels $x$, $y$, $(x+y)$ et $\left(x^2+xy+y^2\right)$ sont premiers entre eux deux à deux.

## 2.5 Troisième point.

Plaçons nous à nouveau dans le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, muni de l'addition et de la multiplication où $p$ est un entier premier impair.

Reprenons les variables $x$, $y$ et $z$ tels que nous les avons définis plus haut (voir section 2.3 en page 24). Nous remarquons tout d'abord que $x^2+xy+y^2$ est toujours un nombre impair. Posons

$$x^2+xy+y^2 \equiv 0 \quad (p) \tag{2.6}$$

Nous avons alors

$$x^2+xy+y^2 = (x+y)^2 - xy$$

et donc dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

$$(x+y)^2 \equiv xy \quad (p)$$

Par ailleurs, il est clair que si

$$(x+y)-z \equiv 0 \Longleftrightarrow (x+y) \equiv z \quad (p) \tag{2.7}$$

alors

$$\sum_{j=0}^{n-1}(x+y)^{n-1-j}\,z^j \not\equiv 0 \quad (p) \tag{2.8}$$

et réciproquement.

Il est clair également que, compte tenu des hypothèses retenues pour $x$, $y$ et $z$, nous avons

$$\begin{aligned} x &\not\equiv 0 \quad (p)\\ y &\not\equiv 0 \quad (p)\\ x+y &\not\equiv 0 \quad (p)\\ \Longrightarrow z &\not\equiv 0 \quad (p) \end{aligned} \tag{2.9}$$

Les trois premières inégalités sont faciles à établir. Dans le cas de $z$

$$\begin{aligned} z \equiv 0 &\Longrightarrow z^n \equiv 0 \quad (p) \\ &\Longleftrightarrow x^n + y^n \equiv 0 \quad (p) \\ &\Longleftrightarrow (x+y)^n \equiv 0 \quad (p) \\ &\Longleftrightarrow x + y \equiv 0 \quad (p) \end{aligned}$$

Or nous venons de montrer que

$$x + y \not\equiv 0 \quad (p)$$

et donc

$$z \not\equiv 0 \quad (p) \tag{2.10}$$

et de façon évidente dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

$$(\exists a_n \in \mathbb{N}^*)\,(1 \leq a_n < p)$$

tel que

$$\begin{aligned} (x+y)^n &\equiv x^n + y^n \quad (p) \\ &\equiv z^n \quad (p) \\ &\equiv a_n \quad (p) \end{aligned} \tag{2.11}$$

Ecrivons

$$\begin{aligned} x^2 + xy + y^2 \equiv 0 &\Longrightarrow x + y \equiv -y^2 x^{-1} \quad (p) \\ &\Longrightarrow x + y \equiv -x^2 y^{-1} \quad (p) \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} (x+y)^n - z^n \equiv 0 &\Longrightarrow (-1)^n \left(y^2 x^{-1}\right)^n - z^n \equiv 0 \quad (p) \\ &\Longrightarrow (-1)^n \left(x^2 y^{-1}\right)^n - z^n \equiv 0 \quad (p) \end{aligned}$$

et

$$(-1)^n y^{2n} \equiv x^n z^n \Longleftrightarrow (-1)^n x^{2n} \equiv y^n z^n \quad (p)$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} &z^{2n} \equiv (-1)^n \left(x^{2n} + y^{2n}\right) \quad (p) \\ &z^{2n} \equiv x^n y^n \quad (p) \\ &x^{2n} + x^n y^n + y^{2n} \equiv 0 \quad (p) \end{aligned}$$

## 2.6 Une démonstration de la conjecture.

Considérons

$$x^2 + xy + y^2 \equiv 0 \quad (p) \tag{2.12}$$

et reprenons les deux entiers premiers $p$ et $n$ (voir section 2.5 en page 25).

### 2.6.1 $p \neq n$

Nous avons établi (voir 2.11 en page 26)

$$(x+y)^n \equiv z^n \equiv a_n \quad (p) \Longleftrightarrow z^n (x+y)^{-n} \equiv 1 \quad (p)$$

Reprenons la formule 1.34 en page 22 et écrivons

$$(x+y)^n - (x^n + y^n) \equiv 0 \quad (p)$$

La relation 2.3 en page 24 nous permet d'écrire

$$\begin{aligned}(x+y)^n - z^n &= ((x+y) - z) \sum_{j=0}^{n-1} (x+y)^{n-1-j} z^j \\ &= ((x+y) - z) (x+y)^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} (x+y)^{-j} z^j\end{aligned}$$

Deux cas se présentent

#### 2.6.1.1 $(x+y) - z \equiv 0 \ (p)$

Supposons

$$(x+y) - z \equiv 0 \quad (p) \tag{2.13}$$

alors

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n-1} (x+y)^{n-1-j} z^j &\equiv n (x+y)^{n-1} \quad (p) \\ &\equiv n z^{n-1} \quad (p) \\ &\not\equiv 0 \quad (p)\end{aligned}$$

#### 2.6.1.2 $\sum_{j=0}^{n-1} (x+y)^{n-1-j} z^j \equiv 0 \ (p)$

Il est évident que (voir les relations 2.7 et 2.8 en page 25)

$$(x+y) \not\equiv z \quad (p)$$

Ecrivons

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n-1} (x+y)^{n-1-j} z^j \equiv 0 &\Longleftrightarrow (x+y)^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} (x+y)^{-j} z^j \equiv 0 \quad (p) \\ &\Longleftrightarrow \sum_{j=0}^{n-1} (x+y)^{-j} z^j \equiv 0 \quad (p)\end{aligned}$$

Compte tenu des résultats obtenus plus haut (voir les relations 2.1 et 2.2 en page 24). Nous devons avoir

$$\sum_{j=0}^{n-1} (x+y)^{-j} z^j \equiv \sum_{j=0}^{n-1} \alpha^j \equiv 0 \quad (p)$$

avec

$$\alpha = z\,(x+y)^{-1}$$

ce qui implique

$$\alpha \equiv z\,(x+y)^{-1} \equiv 1 \quad (p)$$

et donc

$$x + y \equiv z \quad (p)$$

ce qui, compte tenu du résultat obtenu dans l'étude du cas 2.6.1.1, contredit notre hypothèse de depart. Par conséquent, l'étude des cas 2.6.1.1 et 2.6.1.2 implique que

$$(x+y) - z \equiv 0 \quad (p) \tag{2.14}$$

et

$$\sum_{j=0}^{n-1} (x+y)^{-j}\, z^j \not\equiv 0 \quad (p) \tag{2.15}$$

mais, quels que soient $x$, $y$ et $z$ positifs supérieurs à 1

$$(x+y) - z > 0 \Longrightarrow (x+y) - z < x^2 + xy + y^2$$

et nous aboutissons à une impossibilité.

### 2.6.2 $p = n$, $n > 3$

Supposons maintenant que

$$x^2 + xy + y^2 \equiv 0 \quad (n)$$

Il est bien sur possible que $n$ ne soit pas le seul et unique diviseur premier de $x^2+xy+y^2$. Ayant choisi $n$ strictement supérieur à 3, nous rappelons également nos hypothèses 2.4 en page 24, ce qui nous permet d'écrire

$$x^2 + xy + y^2 > n$$

Posons

$$x^2 + xy + y^2 \equiv 0 \quad (n^k)$$

avec $k \in \mathbb{N}^*$ et $k \geq 1$, où $k$ est le plus grand exposant possible. La relation 2.5 énoncée en page 25 nous permet d'écrire

$$\begin{aligned}(x+y)^n - (x^n + y^n) &= (x+y)^n - z^n \\ &= ((x+y) - z) \sum_{j=0}^{n-1} (x+y)^{n-1-j}\, z^j \\ &\equiv 0 \quad (n^{k+1})\end{aligned}$$

Supposons

$$(x+y) - z \equiv 0 \quad (n^{k+1-r})$$

où $k+1-r$ est là aussi le plus grand exposant possible et où

$$(r \in \mathbb{N}^*)\,(0 < r < k+1)$$

Soit $\rho$ le plus petit des deux nombres $k+1-r$ et $r$. Alors

$$\sum_{j=0}^{n-1}(x+y)^{n-1-j}\,z^j \equiv 0 \Longleftrightarrow n\,(x+y)^{n-1} \equiv nz^{n-1} \equiv 0 \quad (n^\rho)$$

Or, en accord avec l'égalité 2.9 en page 25

$$\begin{aligned}(x+y) \not\equiv 0 \quad (n) &\Longrightarrow (x+y) \not\equiv 0 \quad (n^\rho)\\ &\Longrightarrow (x+y)^{n-1} \not\equiv 0 \quad (n^\rho)\end{aligned}$$

et de même (voir l'égalité 2.10 en page 26)

$$\begin{aligned}z \not\equiv 0 \quad (n) &\Longrightarrow z \not\equiv 0 \quad (n^\rho)\\ &\Longrightarrow z^{n-1} \not\equiv 0 \quad (n^\rho)\end{aligned}$$

et nécessairement $\rho = r = 1$. Et donc

$$(x+y) - z \equiv 0 \quad (n^k)$$

Il existe par conséquent un entier naturel non nul $\lambda_1$, non multiple de $n$, tel que

$$(x+y) - z = \lambda_1 n^k \tag{2.16}$$

Si $n$ est le seul diviseur premier de $x^2+xy+y^2$, alors

$$x^2+xy+y^2 = n^k \tag{2.17}$$

mais, quels que soient $x$, $y$ et $z$ positifs supérieurs à 1

$$(x+y) - z > 0 \Longrightarrow (x+y) - z < x^2+xy+y^2$$

et nous aboutissons à une impossiblité (voir les relations 2.16 et 2.17).

Si $n$ n'est pas le seul diviseur premier de $x^2+xy+y^2$, il existe alors un entier naturel non nul $\lambda_2$, non multiple de $n$, tel que

$$x^2+xy+y^2 = \lambda_2 n^k$$

et nous devrions avoir

$$\lambda_1 < \lambda_2 \tag{2.18}$$

Mais, nous venons d'établir dans la section 2.6.1 en page 27, qu'aucun diviseur premier $p$ divisant $x^2+xy+y^2$ et distinct de $n$ ne peut diviser $\sum_{j=0}^{n-1}(x+y)^{n-1-j}\,z^j$, et donc l'inégalité 2.18 est impossible.

La conjecture est ainsi démontrée pour tout entier premier $n > 3$.**QED**.