Collatz Problemi İspatı

Mesut Kavak[a]

Collatz Problemi ile ilgili soru oldukça açık:

"Pozitif bir tam sayı seçildiğinde, sayı çift ise 2'ye bölünür; aksi takdirde 3 ile çarpılır ve bundan sonra sonuca 1 eklenir. Sonucun tek veya çift olması şartından dolayı problemin gerekli seçeneği ile aynı işlem tekrarlandığında, 0 ve 1'den farklı olan her pozitif tamsayı 1'e indirgenebilir mi?"

[a]kavakmesut@outlook.com.tr

I. Giriş

Teori *Eğer girilen sayı, yalnızca 2^σ gibi bir çift pozitif tam sayı değilse; işlem adedi "σ" olmak üzere, girilen sayı σ kere 2 ile yani doğruca 2^σ ile bölünürse her çift sayı, $(2\alpha+1)\cdot 2^\sigma$ şeklinde yazılabileceğinden mutlaka bir tek sayıya dönecektir; bu nedenle bu problemde ilk baştan yalnızca olası tüm tek sayılarla çalışılmalıdır.*

I.

- $x \in \mathbb{Z}^+$
  $x>0$

tanımı için,

$$a_{n+1} = \frac{3a_n+1}{2} \tag{1}$$

(1) denklemi üzerinden,

$$a_{n+1} = \{2, 5, 8, 11, ..., 3x-1\}$$

olmak zorundadır. f(x)=3x-1 fonksiyonuna bağlı olan bu sayılardan a_n sayısını bir tek sayı yapan sayılar, f(x)=6x-1 fonksiyonuna bağlı olmak üzere sırasıyla

$$a_{n+1} = \{5, 11, 17, ..., 6x-1\}$$

ve a_{n+1} sayısını bir tek sayı yapan sayılar ise f(x)=4x-1 fonksiyonuna bağlı olmak üzere sırasıyla

$$a_n = \{3, 7, 11, 15, ..., 4x-1\}$$

olmak zorundadır. "T" tek sayı ve "Ç" çift sayı olmak üzere aşağıda bu durumun tablosu mevcuttur.

a_n	3	7	11	15	19	23	...
a_{n+1}	5	11	17	23	29	35	...
a_{n+2}	Ç	T	Ç	T	Ç	T	...

Tablo I.

II.

Tablo üzerinde a_{n+1} satırında sırasıyla f(x)=12x-7 ve f(x)=12x-1 gibi 2 fonksiyona bağlı olan sayılar mevcuttur yalnızca.

f(x)=12x-7 fonksiyonuna bağlı sayılar için (1) üzerinden (2) oluşur ve her "x" değeri için sonucu, mutlaka bir çift sayıdır.

$$18x-10 = \frac{3(12x-7)+1}{2} \tag{2}$$

f(x)=12x-1 fonksiyonuna bağlı sayılar için (1) üzerinden (3) oluşur ve her "x" değeri için sonucu, mutlaka bir tek sayıdır.

$$18x-1 = \frac{3(12x-1)+1}{2} \tag{3}$$

II. Sorular

Soru I. *Bu durumda ilk olarak şu soru sorulsun ki;* (4) *için,* a_{n+2} *bir "çift sayı" olduğunda ve* 2^{σ} *ile bölündüğünde oluşan "tek sayı", tek sayılar kümesinde daima* a_{n+1} *tek sayısından küçük ve sayı doğrusundaki sıralamaya göre önce mi yer alır yoksa daha büyük bir tek sayı oluşabilir mi?*

$$a_{n+2} = \frac{3a_{n+1}+1}{2} \qquad (4)$$

Cevaba gelinirse; (4) operasyonunun sonucu çift olursa eğer,

$$\frac{\left(3a_{n+1}+1\right)/2}{2^{\sigma}}$$

operasyonunun sonucu a_{n+1} tek sayısından önce olması için bu sayıya eşit ya da bu sayıdan büyük olamayacağından (5) koşulu mutlaka sağlanmalıdır.

$$1 > \frac{\frac{\left(3a_{n+1}+1\right)/2}{2^{\sigma}}}{a_{n+1}} \qquad (5)$$

Eğer (5) düzenlenirse (6) olur,

$$1 > \frac{1}{2^{\sigma+1}}\left(3+\frac{1}{a_{n+1}}\right) \qquad (6)$$

(6) eşitsizliği, $\sigma > 0$ ve $a_{n+1} > 1$ koşullarıyla bunu daima sağlar.

Sonuç olarak a_{n+2} sayısı, (1) ya da doğrudan ilişkili olarak (4) kuralıyla bir tek sayıya indirgendiğinde bu tek sayı, a_{n+2} sayısını oluşturan a_{n+1} tek sayısından daha küçüktürtür daima. Bu kural, a_{n+3} ve diğer tekrarlar için de geçerlidir.

Soru II. *Şu durumda ikinci bir soru sorulmalıdır ki;* (1) *kuralının sonsuz tekrarında sürekli büyüyen ve bir tek sayı olamayan bir sayı var mı?*

Cevaba gelince, aşağıda ilk tabloda olmayan sayılar için başka ve ikinci bir tablo var. Eğer bu tablodaki sayılar, ilk tabloya eklenirse toplamda tek sayılar kümesi elde edilmiş olur; dolayısı ile hesaplamalara dahil olmayan bir tek sayı kalmamış olacaktır.

5	9	13	**17**	21	25	**29**	...	4x+1

Tablo II.

Kalın yazılmış sayılar, ilk tabloda a_{n+1} satırına ait sayılardır. Diğerleri ise ilk tabloda olmayan tek sayılardır.

Eğer ikinci tabloda f(x)=4x+1 fonksiyonuna bağlı sayılar için bazı gruplar yapılması gerekirse yalnızca aşağıdaki fonksiyonlara bağlı olan "3 grup" oluşacaktır:

- f(x)=12x-3
- f(x)=12x+1
- f(x)=12x-7

I.

$a_{n+1} = 12x-3$ için (7) daima çift sonuç verir.

$$18x-8 = \frac{3(12x-3)+1}{2} \qquad (7)$$

II.

$a_{n+1} = 12x+1$ için (8) de daima çift sonuç verir.

$$18x+2 = \frac{3(12x+1)+1}{2} \qquad (8)$$

III.

$a_{n+1} = 12x-7$ için zaten (2) sonucu olarak çift sayı olduğu söylendi yukarıda.

III. Çözüm

Teori *Çift tamsayılara gelince onlar, daha yukarıda gösterildiği gibi her zaman kendisinden daha küçük bir tek sayıya indirgenebilir* (1) *operasyonuyla; bu nedenle eğer* (1) *tekrar edildiğinde* $a_n = 4x - 1$ *sayılarından her biri bir tek sayıya dönüşerek daima büyümüyorsa bu, 0 ve 1 hariç her pozitif tam sayının* (1) *kuralı ile 1'e indirgenebileceği anlamına gelir.*

I.

Tablo I.'de a_n satırından $8x - 5$ sayıları, (4) üzerinden a_{n+1} sayılarına dönüşür; bu nedenle (1) sonsuz tekrarında her zaman yalnızca tek sayı sonucu alınması için tek ihtimal $8x - 1$ sayılarının kullanılmasıdır. Bunun gerçekleşmesi için Tablo I.'de a_{n+1} satırında a_n sayıları belirmelidir. Ayrıca bunların arasından tek sayı sonucu verenler belirmelidir a_{n+1} satırında.

$4x - 1$ ve $6x - 1$ operasyonları a_n ve a_{n+1} verir (1) üzerinden; bu nedenle beklenen döngü oluşur ya da oluşmaz bunu (9) gösterir $4x_1 - 1 = 6x_2 - 1$ eşitliği üzerinden.

$$x_1 = \frac{6x_2}{4} \tag{9}$$

(9) için $t \in \mathbb{Z}^+ \wedge t > 0$ koşuluyla $x_1 = 3t$ ve $x_2 = 2t$ olur; bu nedenle tüm problem, hemen aşağıdaki Tablo III.'ün kuralına indirgenmiş olur.

2t	2	4	6	8	10	12	...
3t	3	6	9	12	15	18	...

Tablo III.

$4x - 1$ ve $6x - 1$ üzerindeki her sayı, aynı zamanda Tablo III. üzerinde a_n ve a_{n+1} sıra numaralarıdır; bu nedenle Tablo III.'de a_n ya da 2t satırı üzerinde 3t sıra numarasına sahip olan sayı ve a_{n+1} ya da 3t satırı üzerinde 2t sıra numarasına sahip olan sayılar aynı sayılardır.

II.

Tablo III. üzerinde 3t satırındaki tek sayılar, Tablo I. üzerinde çift tam sayı sonucu veren a_{n+1} sayıları olduğundan elenirler ve Tablo III., hemen aşağıdaki Tablo IV.'e dönüşür.

4t	4	8	12	16	20	24	...
6t	6	12	18	24	130	36	...

Tablo IV.

Tablo IV. üzerinde sonsuz döngünün sağlanması için bir "4t" sayısı seçildiğinde hemen altındaki "6t" satırındaki "6t" sayısı da çift olmalı ve aynı zamanda bu "6t" sayısı daha ilerde tekrar "4t" satırında belirmeli. Collatz kuralının kırılması için bu koşul 1 ya da daha fazla sayı için sağlanmalıdır; ki bu durumda 1 ya da daha fazla sayı 1'e indirgenemez demek olur. Bu ise imkansızdır; çünkü $t > 0 \wedge t, n \in \mathbb{Z}^+$ koşulu ile her "t" tam sayısı için $t_{n+1} = \frac{6t_n}{4}$ üzerinden,

$$t_{n+1,t} = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{6t_{n,t}}{4} \tag{10}$$

$t_{n,t} = 4t$; "n", her "t" sayısı için (10) operasyonunun tekrar sayısı; t, döngü oluşturması beklenen sayının sıra numarası olmak üzere ve (11) koşulu ile (10) sağlanmalıdır.

$$t_{n,t}, t_{n+1,t} \in \mathbb{Z}^+ \tag{11}$$

(11) koşuluna gelince bu koşul, her "t" sayısı için sağlanamaz. Örneğin $t_{1,1} = 4$ için $6t_{1,1} = 4t_{2,1}$

ve sonuçta $t_{2,1} = 6$ olur; $t_{2,1} = 6$ içinse aynı şekilde $6t_{2,1} = 4t_{3,1}$ ve sonuçta $t_{3,1} = 9$ olur; $t_{3,1} = 9$ içinse $6t_{3,1} = 4t_{4,1}$ ve sonuçta $t_{4,1} = 27/2$ olur. Görüldüğü gibi $t_{4,1} \notin \mathbb{Z}^+$ olacağından (11) koşulu sağlanamaz.

IV. Sonuç

I.

(10) operasyonu, sonsuz bir döngüye giremez; çünkü bunun için örneğin 4^∞ ya da $(2x+1)\cdot 4^\infty$ gibi sonsuz sayıda ortak böleni olan hayali sayılar gerekmektedir. Görülebileceği gibi $m > 0 \wedge m \in \mathbb{Z}^+$ koşuluyla 4^m gibi bir "t" sayısı kullanarak yalnızca tekrar sayısı artırılabilir; ki eğer "m" artarsa tekrar artar; fakat asla sonsuz bir tekrar oluşmaz.

Sonuç *Her pozitif tam sayı, girilen sayıya göre değişebilecek tekrar sayılarıyla birlikte probleme konu olan "Collatz Operasyonu" ile mutlaka en sonunda 1'e indirgenebilir.*

II.

(1) tekrarları için $m > 0 \wedge m \in \mathbb{Z}^+$ koşuluyla 2^m, Tablo I. üzerinde seçilen a_n sayısının sıra numarası olmak üzere (1) operasyonu, $m+2$ tane tek sayı verir ve sonuncusu çift sayıdır. Tablo V. üzerinde bunun temsili vardır.

m	a_n				
1	$7 \longrightarrow$	$11 \longrightarrow$	17		
2	$15 \longrightarrow$	$23 \longrightarrow$	$35 \longrightarrow$	53	
3	$31 \longrightarrow$	$47 \longrightarrow$	$71 \longrightarrow$	$107 \longrightarrow$	161
:					

Tablo V.

Ayrıca hem tekrar sayıları hem de diğer özellikler için farklı operasyonlar yazılabilir. Hemen aşağıda (12), bunlardan birisidir. (12) için ilk girilen sayı $a = a_0$ olmak üzere "m+1" tane tek sayı ya da tekrar oluşur (1) üzerinde.

$$a = 7 + \sum_{m=3}^{m} 2^m \tag{12}$$

12.06.2023