

POUR LES ELÈVES INGÉNIEURS GÉOMÈTRES
ET GÉOMATICIENS : QUELQUES SUJETS
D'EXAMENS DE GÉODÉSIE ET DE
CARTOGRAPHIE MATHÉMATIQUE DE
L'ÉCOLE ALLEMANDE "*L'Institut de
Géodésie de l'Université de Stuttgart*"

Choisis et Traduits

Par

Abdelmajid BEN HADJ SALEM,
Ingénieur Géographe Général

ABSTRACT : This paper contains a selected collection of exams of geodesy and mathematical cartography. These exams are from the German school, namely from the Institute of Geodesy of the University of Stuttgart where the eminent professor Erik W. Grafarend (1939-2020) taught geodesy courses and in particular mathematical cartography. This is an opportunity for French-speaking students to share the German methodology.

RÉSUMÉ : Ce papier contient une collection choisie d'examens de géodésie et de cartographie mathématique. Ces examens sont de l'école allemande à savoir de l'Institut de Géodésie de l'Université de Stuttgart où l'éminent professeur Erik W. Grafarend (1939-2020) enseignait les cours de géodésie et notamment la cartographie mathématique. C'est l'occasion pour les étudiants francophones de partager la méthodologie allemande.



FIGURE 1 – Prof. Erik Grafarend et son collègue Prof. Helmut Moritz écoutent attentivement les contributions d’une conférence [1]

Version 1, Juin 2023

Abdelmajid BEN HADJ SALEM

Résidence Bousten 8, Bloc B, Avenue Mosquée Raoudha,

1181 Soukra Raoudha,

Tunisia.

e-mail : abenhadsalem@gmail.com

A Tous Mes Collègues et Amis

TABLE DES MATIÈRES

Préface	7
1 Sujets de Géodésie	9
2 Sujets de Cartographie Mathématique	13

PRÉFACE

Dans ce document, j'ai voulu présenter aux élèves ingénieurs géomètres et géomaticiens quelques exemples de sujets de problèmes de géodésie et de cartographie mathématique de l'école allemande plus précisément de l'Institut de Géodésie de l'Université de Stuttgart où l'éminent professeur Erik W. Grafarend (1939-2020) enseignait les cours de géodésie et notamment la cartographie mathématique. Ce dernier était connu pour ses articles demandant une rigoureuse connaissance en particulier en mathématiques.

Je souhaite que ces sujets proposés concernant la géodésie et la cartographie mathématique soient bien reçus par les différents lecteurs.

*Abdelmajid Ben Hadj Salem, Dipl. Ing.
Ingénieur Géographe Général
Juin 2023*

SUJETS DE GÉODÉSIE

Problème 1.0.1. Une simple transformation de coordonnées planes est donnée par le modèle suivant :

$$\begin{aligned}x &= X.m_x.\cos\mu - Y.m_y.\sin\omega + c_1 \\y &= Y.m_y.\cos\omega + X.m_x.\sin\mu + c_2\end{aligned}$$

Les coordonnées des points homologues sont selon le tableau ci-dessous (**Table 1.1**). On demande :

- 1 - Définir les équations analytiques pour déterminer les paramètres inconnus.
- 2 - Calculer les paramètres inconnus à partir des données du tableau.
- 3 - Trouver les coordonnées manquantes du point P_4 .

nom du point	X	Y	x	y
P_1	-1	7	5	7
P_2	1	5	7	5
P_3	-2	6	4	4
P_4	?	?	6	6

TABLE 1.1 – Tableau des données

Problème 1.0.2. Soit un cône circulaire de hauteur h et de rayon $a < h$, paramétré par (u, v) dans une base orthonormée (e_1, e_2, e_3) comme suit :

$$X(u, v) = e_1 \cdot \left(a - \frac{a}{h} \cdot v\right) \cos u + e_2 \cdot \left(a - \frac{a}{h} \cdot v\right) \sin u + v \cdot e_3, \quad u \in [0, 2\pi], v \in [0, h] \quad (1.1)$$

- 1 - Fixer les équations différentielles du premier ordre de la ligne géodésique.
- 2 - A partir de là, développer la série de Legendre pour le paramètre v jusqu'au degré 3 inclus.
- 3 - Soit P un point du cône à hauteur $h/2$ et de P part une ligne géodésique de longueur a sous l'azimut $\pi/4$. Quel est le point final ?

Problème 1.0.3. Soit un caténoïde dont les paramètres (U, V) sont comme suit :

$$\begin{cases} X = \cosh V \cdot \cos U, \\ Y = \cosh V \cdot \sin U, \\ Z = V \end{cases} \quad U \in [0, 2\pi], V \in [-1, +1] \quad (1.2)$$

- 1) Ecrire la première forme fondamentale $ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dU dV$. Ecrire la matrice $g = (g_{ij})$.

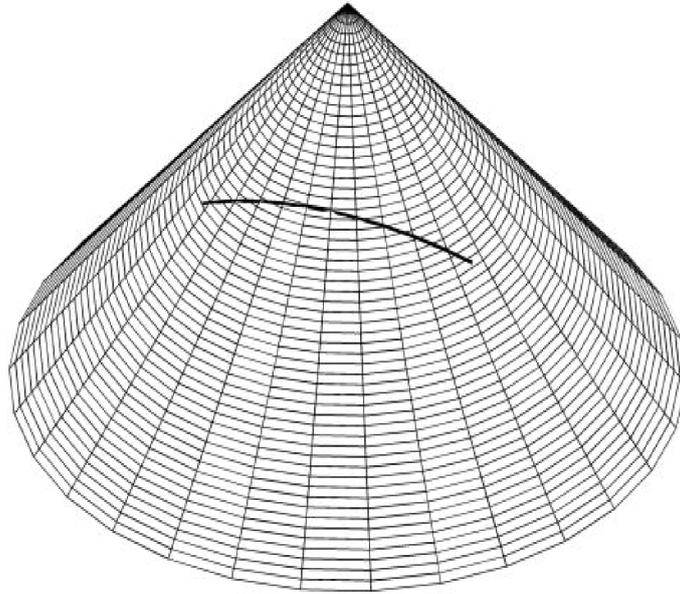


FIGURE 1.1 – Le Cône

2) Fixer les équations différentielles du 1er ordre de la géodésique pour cette zone. L'azimut vérifie :

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \left(\frac{\partial\sqrt{g_{11}}}{\partial V} \cos\theta - \frac{\partial\sqrt{g_{22}}}{\partial U} \sin\theta \right)$$

3) A partir de là, développer la série de Legendre pour les paramètres U, V et θ jusqu'à l'ordre 2.

4) Soit P_0 un point du caténoïde de coordonnées (U, V) telles que $U_0 = 0, V_0 = -0.9$ et soit la ligne géodésique commençant en P_0 , de longueur $S = 0,2$ avec l'azimut de départ $\theta = \pi/4$. Calculer les coordonnées du point final P_1 et l'azimut géodésique en P_1 .

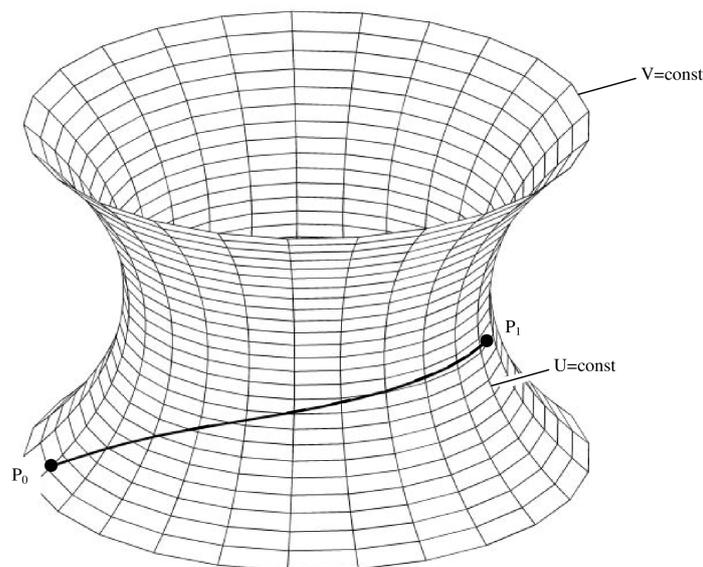


FIGURE 1.2 – Ligne géodésique du caténoïde

Problème 1.0.4. Au cours du stage intégré, on a les coordonnées tridimensionnelles suivantes (X, Y, Z) de quatre points du réseau P_1, \dots, P_4 connues, dont leurs coordonnées planes (x, y) sont connues dans un référentiel local. Un point P_5 a seulement ses coordonnées locales (x_5, y_5) qui sont connues.

1- Préparer un organigramme détaillé montrant comment calculer les coordonnées UTM (Est, Nord) par rapport à l'ellipsoïde WGS84 du point P_5 via la transformation de similarité bidimensionnelle (modèle de Helmert) :

$$\begin{pmatrix} E \\ N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -\sin\alpha & \cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

qui peut être déterminée à partir des points de contrôle P_1, \dots, P_4 . Mettre-y un accent particulier à la description des équations de la transformation entre les systèmes et préciser les dépendances fonctionnelles.

2 - Donner les équations pour calculer les estimations de l'échelle λ , la rotation α et les composantes de la translation T_x et T_y des points de contrôle. On suppose que toutes les coordonnées sont sans erreurs et qu'il n'y a pas de corrélations indiquées.

On donne $a = 6\,378\,137.00$ m, $e^2 = 0.006\,739\,496\,74$ respectivement le demi-grand axe et le carré de la première excentricité de l'ellipsoïde de référence GRS80. Ci-dessous le tableau des coordonnées :

nom du point	X(m)	Y(m)	Z(m)	x(m)	y(m)
P ₁	4 170 011.98	735 405.73	4 754 724.86	0	0
P ₂	4 171 090.25	736 955.64	4 753 545.15	2 892.96	0
P ₃	4 177 771.63	720 750.69	4 750 225.61	-5 275.81	-21 694.22
P ₄	4 171 990.88	704 934.60	4 757 495.86	-28 227.07	-28 115.95
P ₅	—	—	—	-2 637.91	-10 847.11

TABLE 1.2 – Table des données

Problème 1.0.5. Une entreprise communale de distribution d'énergie a décidé de transformer les données du système géodésique DHDN (ellipsoïde de Bessel : demi-grand axe $a = 6\,377\,397.155$ m, le carré de la première excentricité $e^2 = 0.006\,674\,372\,2$) c'est-à-dire des coordonnées de Gauss-Krüger en coordonnées géodésiques UTM de la station de base à l'aide du modèle simplifié de la transformation affine en application. Les coordonnées UTM du futur système spatial ETRS89 (l'ellipsoïde de référence l'ellipsoïde GRS80 : demi-grand axe $A = 6\,378\,137.000$ m, le carré de la première excentricité $E^2 = 0.006\,694\,380\,02$).

1 - Caractériser les coordonnées de départ ainsi que les coordonnées d'arrivée dans le futur système ETRS89. Quelle est la structure des coordonnées ? Quelles sont les propriétés géométriques différentielles ? Quelles sont leurs caractéristiques ? Quelles sont leurs différences et leurs points communs ?

2 - Discuter du modèle de la transformation à appliquer (transformation affine plane) par rapport aux coordonnées cibles choisies.

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}_{\text{ETRS89}} = \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\text{DHDN}} \Leftrightarrow \mathbf{X}_{\text{ETRS89}} = \mathbf{T} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_{\text{DHDN}}$$

S'agit-il d'une transformation conforme ? Prouver votre affirmation ! Mener la discussion à la fois dans le cas général et dans le cas particulier des valeurs numériques des paramètres affines indiquées ci-dessous.

3 - *Démontrer que la transformation de similitude $\mathbf{X}_{\text{ETRS89}} = \mathbf{T} + (1 + s)\mathbf{R}\cdot\mathbf{x}_{\text{DHDN}}$ permet de réaliser une transformation conforme si \mathbf{R} représente une matrice de rotation (orthonormale). Quelles grandeurs géométriques restent invariantes lors de la transformation de similitude ?*

4 - *Transformer, les coordonnées indiquées ci-dessous de Gauss-Krüger du point 2928 (par rapport à DHDN) en coordonnées UTM (par rapport à l'ETRS89) à l'aide de la transformation affine plane.*

On donne :

- Les coordonnées Gauss-Krüger du point 2928 : $(x, y)_{\text{DHDN}} = (3\,599\,071.350 \text{ m}, 5\,880\,851.930 \text{ m})$,

- la matrice $\mathbf{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 0.999\,834 & -6.0503 \times 10^{-6} \\ 5.9730 \times 10^{-6} & 0.999\,834 \end{pmatrix}$,

- le vecteur translation $\mathbf{T} : \begin{pmatrix} T_x = 290.486 \text{ m} \\ T_y = -585.562 \text{ m} \end{pmatrix}$

SUJETS DE CARTOGRAPHIE MATHÉMATIQUE

Problème 2.0.1. Le billet d'avion OACI émis par Deutsche Flugsicherung GmbH/Offenbach contient un extrait d'une carte à l'échelle 1 : 500000. Cette dernière est une représentation plane conique conforme sécante de l'ellipsoïde WGS84 avec deux parallèles équidistants ϕ_1 et ϕ_2 .

1- Déterminer les équations de la représentation en fonction de la longitude λ et de la distance des pôles $\Delta = \pi/2 - \phi$ ainsi que de la constante du cône $n = \sin\phi_0$ et la constante d'intégration c en fonction des distances des pôles $\Delta_1 = \pi/2 - \phi_1$ et $\Delta_2 = \pi/2 - \phi_2$. On suppose que le modèle de la terre n'est pas le sphéroïde de révolution WGS84, mais une sphère de rayon R .

Problème 2.0.2. En 1937, l'Allemand Karl Siemon (?-1937) présente une nouvelle représentation plane de la sphère de rayon R , la projection authalique dite biquadratique (quartic authalic projection [2]) (voir figure ci-dessous), qui est déterminée par les équations de cartographie ci-après :

$$X = R(\lambda - \lambda_0) \frac{\cos\phi}{\cos\frac{\phi}{2}} \tag{2.1}$$

$$Y = 2R\sin\frac{\phi}{2}$$

- 1 - Calculer le module linéaire.
- 2 - Montrer si la représentation est conforme ou non.
- 3 - Indiquer avec une justification dans quelle zone de la carte les distorsions se produisent sont maximales (aucun calcul détaillé requis).
- 4 - Calculer le rapport de la longueur du méridien central à la longueur de l'équateur.
- 5 - Démontrer que les images des cercles parallèles sont des droites parallèles à l'axe des X .
- 6 - Démontrer que les distances entre les cercles parallèles de l'image ne sont pas constantes et montrer comment les distances changent.
- 7 - Prouver que les distances des méridiens dans l'image sont égales pour une latitude constante.

Problème 2.0.3. Un article scientifique dans le Journal of Geodesy a affirmé qu'en regardant les équations de la représentation :

$$X = a.\lambda$$

$$Y = a.\text{Logtg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)$$

autour d'une application cylindrique conforme normale de l'ellipsoïde de révolution (application de Mercator de l'ellipsoïde de révolution) agissent dans le plan, alors que dans la littérature standard, les images ont nettement des équations plus compliquées :

$$X = a.\lambda$$

$$Y = a.\text{Log} \left(\text{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \left(\frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi} \right)^{e/2} \right)$$

L'angle φ est la latitude géodésique habituelle normale à un ellipsoïde, tandis que l'angle ψ est la latitude dite réduite (voir croquis), qui correspond à la latitude géodésique de l'ellipsoïde. On

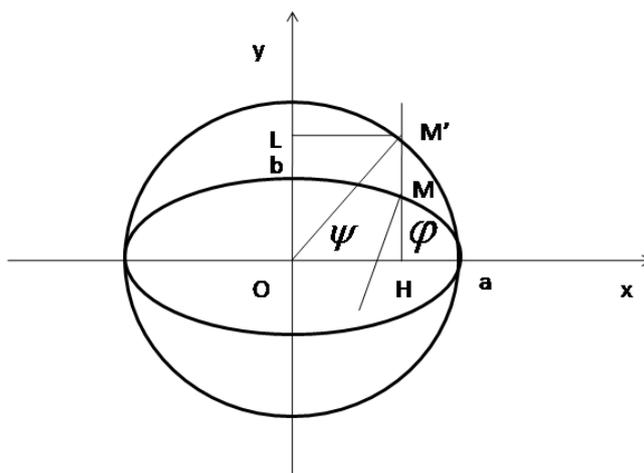


FIGURE 2.1 – Angles φ et ψ .

a les relations suivantes :

$$\text{tg} \psi = \sqrt{1 - e^2} \text{tg} \varphi, \quad 1 - e^2 \sin^2 \varphi = \frac{1 - e^2}{1 - e^2 \cos^2 \psi}$$

$$\sin \varphi = \frac{\sin \psi}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \psi}}, \quad \cos \varphi = \frac{\cos \psi \sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \psi}}$$

e^2 désigne le carré de la 1ère excentricité de l'ellipsoïde.

1 - Prouver ou réfuter l'exactitude de la déclaration ci-dessus.

Problème 2.0.4. En 1935, l'Allemand Karl Siemon (?-1937) introduisit une nouvelle représentation plane de la sphère de rayon R, dite projection loximutale [2], page 90, (voir figures ci-dessous) par les équations de cartographie :

$$x = R(\lambda - \lambda_0) \begin{cases} \cos \varphi_0, & \varphi = \varphi_0, \\ \frac{\varphi - \varphi_0}{\text{Logtg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) - \text{Logtg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_0}{2} \right)}, & \varphi \neq \varphi_0 \end{cases}$$

$$y = R(\varphi - \varphi_0)$$

Elle a la propriété spéciale suivante : de chaque point central $\varphi = \varphi_0, \lambda = \lambda_0$, la loxodromie sortante est représentée par une ligne droite sur la carte et là c'est le véritable azimut.

- 1 - Montrer qu'une loxodromie issue du point central $\varphi = \varphi_0, \lambda = \lambda_0$ est représentée par une ligne droite sur la carte.
- 2 - Montrer que les distorsions extrêmes ne sont généralement pas dans le sens de la des lignes de paramètres apparaissent. (Justification requise!).
- 3 - Déterminer les emplacements où les distorsions dans la direction du paramètre ne sont jamais les distorsions extrêmes en même temps.
- 4 - Démontrer que les distances entre les cercles parallèles de l'image sont constantes.
- 5 - Quel est le rapport entre la longueur du méridien central et la longueur sur la carte de l'équateur ?

Remarque : Sur la sphère, les paramètres loxodromiques sont la longitude λ , la latitude φ et l'azimut nord A avec : $d\lambda = \frac{d\varphi}{\cos\varphi} \operatorname{tg}A$ et $\int \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \operatorname{Logtg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) + \text{cte.}$

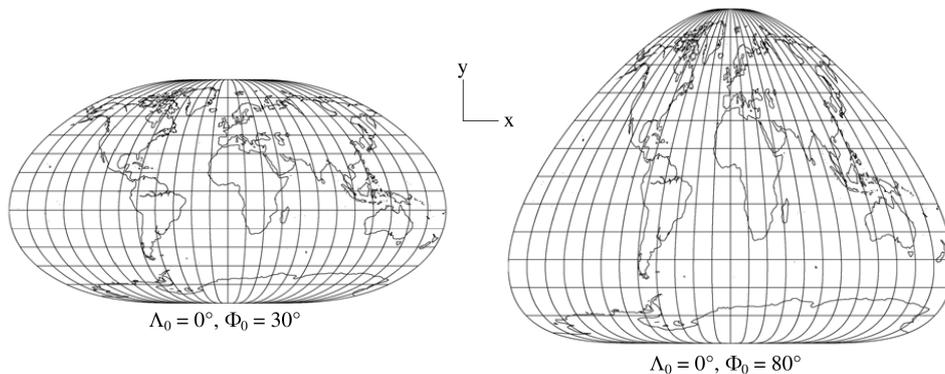


FIGURE 2.2 – Deux exemples de la carte étudiée

BIBLIOGRAPHIE

- [1] [https://leibnizsozietat.de/kolloquium-der-leibniz-sozietat-am-13-02-2015-zum-thema-geodaesie-mathematik-physik-geophysik-kurzbericht/\(2015\)](https://leibnizsozietat.de/kolloquium-der-leibniz-sozietat-am-13-02-2015-zum-thema-geodaesie-mathematik-physik-geophysik-kurzbericht/(2015))
- [2] John P. Snyder. An Album of Map Projections. U.S. Geological Survey Professional Paper n° 1453. First edition 1989, page 84.