

**INITIATION AU POSITIONNEMENT ET À LA
CARTOGRAPHIE**
**Cours donné au personnel de l'Office de
Développement Sylvo-Pastoral du Nord-Ouest, avril
2013**

Abdelmajid BEN HADJ SALEM, Ing. Général

*Office de la Topographie et du Cadastre (OTC),
BP 156, 1080 Tunis Cedex, TUNISIE*

E-mail: abenhadjsale@gmail.com

ABSTRACT: Dans ce cours, on présente les éléments de base nécessaires à la lecture des cartes topographiques et au positionnement terrestre.

Avril 2013

Table des matières

1	ASTRONOMIE DE POSITION	2
1.1	Rappels Historiques	2
1.2	Objectifs de l'Astronomie	3
1.3	Les Systèmes de Référence	3
1.4	Notions d'Astronomie de Position	3
1.4.1	La Sphère Céleste - Mouvement Diurne	3
1.4.2	Définitions :	3
1.5	Rappels d'Unités de Mesures des Arcs	5
1.6	Les Coordonnées Géographiques	5
2	ELÉMENTS DE GÉODÉSIE	7
2.1	Introduction	7
2.2	Rappels et Définitions	7
2.3	Définition des coordonnées planes	8
3	LES DIFFÉRENTS SYSTÈMES GÉODÉSQUES EN TUNISIE	9
3.1	Le Système Géodésique 'VOIROL'	9
3.2	Le Système Géodésique 'CARTHAGE 34'	9
4	LA STRUCTURE DES RÉSEAUX GÉODÉSQUES TUNISIENS APRÈS 1978	10
4.1	La Compensation du Réseau Géodésique Primordial	10
4.2	Le Système CARTHAGE86	11
5	LE NOUVEAU SYSTÈME GÉODÉSIQUE TERRESTRE TUNISIEN :LA NOUVELLE TRIANGULATION TUNISIENNE	11
6	LES ELÉMENTS DE LA GÉODÉSIE ET CARTOGRAPHIE TUNISIENNE	12
7	LES REPRÉSENTATIONS PLANES EN USAGE À L'OTC	12
7.1	La Représentation des Fuseaux ou Représentation de Guillaume Postel	12
7.2	La Représentation Lambert Tunisie	13
7.2.1	Définition et Propriétés	13
7.3	Expressions des Formules $R(\varphi)$ et $\Omega(\lambda)$	13
7.4	Expression des Coordonnées Cartésiennes (X,Y)	14
7.5	Expression des Coordonnées Cartésiennes Translatées (X,Y)	14
7.6	Les Eléments de définition du Lambert Nord Tunisie	15
7.7	Les Eléments de définition du Lambert Sud Tunisie	15
7.8	Module linéaire et Altération linéaire	15
7.9	Relations entre les Coordonnées Translatées (X,Y) et les Coordonnées SST (x,y)	16
7.10	Convergence des Méridiens	16
8	LA REPRÉSENTATION UTM	17
8.1	DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS	17
8.2	Calcul Inverse	17
8.3	Le Module linéaire	18
8.4	Convergence des méridiens	18

Introduction

La question qu'avait posé l'homme depuis l'origine de la vie était : " où suis-je ". Par suite, il s'interrogeait : " où est ma maison, dans quelle direction se trouve-t-elle ? ". A ces questions, l'homme peu à peu trouvait des éléments de réponses et ce à partir de l'astronomie.

1 ASTRONOMIE DE POSITION

1.1 Rappels Historiques

Il n'est pas possible de déterminer la période où l'homme a commencé à s'intéresser aux étoiles et aux astres. Cependant, cet intérêt s'était développé peu à peu. Ainsi, les astronomes chinois s'étaient occupés de l'observation des astres et des étoiles (observation d'une éclipse solaire 2667 avant J.C), de même les peuples habitants la région des rivières le Tigre et l'Euphrate, les peuples d'Egypte, les Grecs. On trouve par exemple *Thales de Miletus* qui prédit l'éclipse solaire en mai 685 avant J.C. *Eratosthenes* (276-195 avant J.C) calcula la conférence de la Terre (3900km), *Hipparchos* (160-125) a trouvé les plus importantes irrégularités du mouvement apparent du soleil et de la lune et il découvrit la précession (mouvement du pôle).

L'astronome *Plotémé* (200 A.C.) a compilé toutes les théories d'astronomie de l'époque que les Arabes ont traduit en un ouvrage appelé "Al-Megiste ". La civilisation islamique a apporté aussi sa contribution dans les connaissances astronomiques surtout sous les règnes d'*Al Mansour* (754-775), *Haroun Al Rachid* (786-809) et *Al Mamoun* (812-833). Parmi les astronomes arabes, nous citons : *Mohamed Ibn Jabir al Battani* (mort en 929) qui a fait des catalogues astronomiques des mouvements des planètes, ses travaux furent traduits en latin et imprimés à Nuremberg (Allemagne) en 1537. Il calcula la durée de l'année solaire à 2 mn près.

Ibn Al Haitam dit Al Hazan en Europe (mort en 1038) avait étudié la réfraction de l'atmosphère et calcula l'altitude de l'atmosphère pour la première fois. Au 15ème siècle, c'est le commencement de l'intérêt en Europe à l'astronomie grâce au monde Arabe. *Nicolas Copernic* (1473-1543) a démenti la théorie qui dit que la Terre est le centre de l'Univers et a démontré que le soleil est le centre du système solaire. *Tycho-Brahé* (1546-1609) a adhéré à la théorie de Plotémé avant l'invention du télescope. *Johannes Kepler* (1571-1630) découvrit la forme elliptique des orbites des planètes. *Galilée* (1564-1642) était le premier astronome qui fait usage du télescope. *I. Newton* (1660) découvrit la loi de la Gravitation.

L'astronomie a connu un grand essor au 18ème siècle grâce aux mathématiciens de cette période comme *Euler*, *Lagrange* et aussi à la création des observatoires astronomiques comme ceux de Paris (1667 par *Cassini*) et de Greenwich (1675). *Halley* (1656-1742) a compilé un catalogue

des positions de l'hémisphère Sud et détecta une comète en 1682 que porta son nom après sa mort.

Actuellement l'astronomie s'est avancée grâce à l'introduction de nouvelles méthodes telles que la photographie ou l'analyse spectrale et l'envoi des satellites artificiels (octobre 1957).

1.2 Objectifs de l'Astronomie

L'astronomie est un moyen de détermination de certaines inconnues d'un lieu stationné à partir d'observations sur les astres ou des étoiles. Donc, les observations astronomiques effectuées permettent de déterminer :

- les 2 inconnues fixant la direction de la verticale physique du lieu (ϕ, λ),
- l'orientation d'une direction (Azimut),

1.3 Les Systèmes de Référence

Le principe fondamental des déterminations astronomiques repose sur le fait que dans le repère lié aux étoiles, celles-ci occupent des positions pratiquement fixes, qu'il est possible de calculer et de les regrouper en des catalogues d'étoiles. Un catalogue d'étoiles comprend les coordonnées (α, δ) des étoiles observées, réduites à une époque moyenne conventionnelle. Un catalogue fondamental est issu de la compilation de plusieurs catalogues provenant de préférence d'observations absolues.

Le système pratique de référence est défini par le catalogue fondamental, adopté à l'échelle internationale. Le catalogue fondamental en usage est le FK5.

1.4 Notions d'Astronomie de Position

1.4.1 La Sphère Céleste - Mouvement Diurne

La sphère céleste est une sphère d'un grand rayon sur laquelle sont fixées les perspectives des étoiles.

On appelle constellation la figure formée par les étoiles.

En regardant les étoiles, on s'aperçoit que les étoiles se déplacent dans leur ensemble : c'est le **mouvement diurne**.

Le mouvement diurne obéit à 3 lois :

- la sphère céleste tourne autour d'un de ses diamètres,
- le mouvement s'effectue dans le sens rétrograde (non direct),
- le mouvement est uniforme et sa période est voisine de 24 h (23h 56 mn).

1.4.2 Définitions :

Axe du monde : le diamètre autour duquel la sphère céleste effectue son mouvement. Pôles célestes : P, P' ; P nord, P' sud.

Equateur céleste : le grand cercle perpendiculaire à l'axe du monde. L'intersection de la sphère céleste par des plans parallèles à EE' est un **parallèle céleste**. Un parallèle céleste est la trajectoire des étoiles en mouvement diurne.

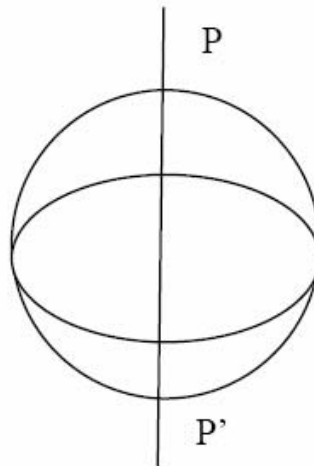


FIG. 1. La Sphère Céleste

Verticale d'un lieu : on appelle verticale d'un lieu la direction donnée par un fil à plomb, Z c'est le zénith, N c'est le nadir.

L'horizon est le grand cercle dont le plan est perpendiculaire à ZN.

Plan méridien d'un lieu : est le plan défini par la verticale et l'axe du monde. Le méridien d'un lieu c'est un grand cercle = le plan méridien la sphère céleste, le méridien est local. Le demi méridien supérieur : c'est le plan passant par PP' et contenant le zénith.

Plan vertical : un plan contenant la verticale ZN.

On appelle **vertical d'un astre** le plan vertical passant par l'astre.

Le méridien est le vertical passant par le pôle ; il rencontre l'horizon en un point n : c'est le Nord géographique, le point opposé au Nord c'est le Sud. Dans la direction perpendiculaire, on a l'Est et l'Ouest. L'Est se trouve à droite de la ligne Sud-Nord.

Pour un astre : le lever dans l'Est, à partir de la culmination il passe dans la région Ouest c'est le coucher.

Azimut d'un astre : L'azimut d'un astre est l'angle formé par le vertical du l'astre et le plan méridien. Il est compté à partir du Nord dans le sens rétrograde (en grades).

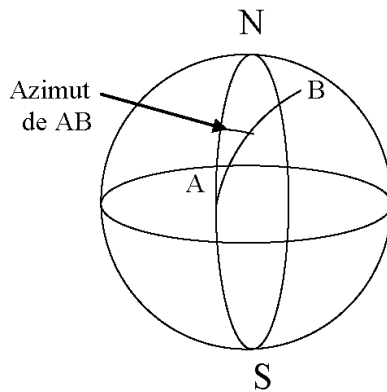


FIG. 2. Azimut d'une direction

1.5 Rappels d'Unités de Mesures des Arcs

Nous donnons ci-dessous les unités de mesures des arcs :

Le Système Centésimal	Le Système Sexagésimal	Le Système Horaire
400gr	360	24h
1 grade = 1/64rd	1 = 1/57rd	1 heure = 15'
1 cg = 1/6400rd	1 minute = 1' = 1/60	1 mn = 1h/60 = 15'
1 dcmg = 1/640000rd	1 seconde = 1'' = 1'/60	1 s = 1mn/60 = 15''

TAB. 1. Tableau des Unités

1.6 Les Coordonnées Géographiques

Soit M un point de la surface de la Terre.

La latitude géographique ϕ : c'est l'angle de la verticale avec le plan de l'équateur (en degrés ou en grades), positivement vers le pôle Nord, négativement vers le pôle Sud.

La longitude géographique λ : c'est l'angle formé par le méridien du lieu avec le méridien origine. Le méridien origine est le méridien passant par l'observatoire de Greenwich. λ est comptée positivement vers l'Est en grades, degrés ou en heures.

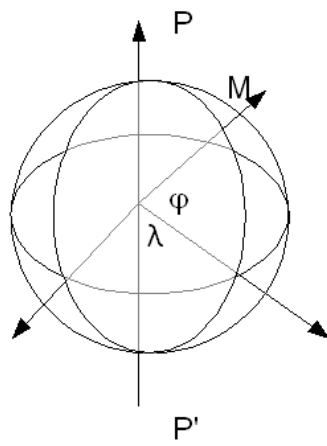


FIG. 3. Latitude et Longitude Géographiques

2 ELÉMENTS DE GÉODÉSIE

2.1 Introduction

Définition : *La géodésie est la science qui concerne la détermination de la forme et des dimensions de la Terre, et la mesure de son champ de gravité, dans un espace tridimensionnel variant avec le temps.*

La géodésie fournit les éléments de base pour la localisation et la représentation du terrain par une cartographie. Nous présentons ci-après quelques notions de cette discipline.

2.2 Rappels et Définitions

Définition d'un système géodésique ou datum géodésique : *C'est un système de coordonnées où sont représentés les points géodésiques signalés par des bornes ou repères au sol.*

Ce système est défini par :

- son origine,
- son orientation,
- l'échelle,
- le type de coordonnées utilisées.

Le système le plus utilisé est le système cartésien formé par un repère (OX, OY, OZ) tel que :

- O soit le centre des masses de la Terre,
- l'axe OZ soit parallèle à l'axe de rotation de la Terre,
- le plan OXZ parallèle au méridien de Greenwich origine des longitudes,
- l'axe OY est tel que le trièdre (OX, OY, OZ) soit orthogonal et direct.

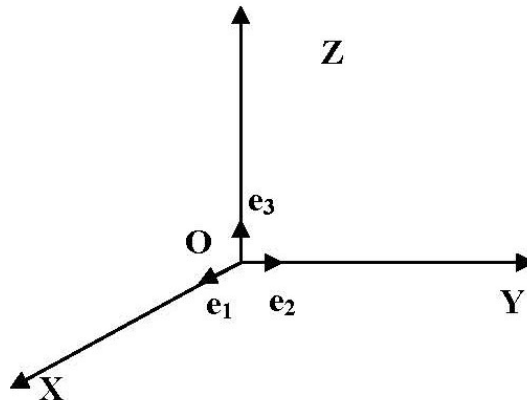


FIG. 4. Le Repère Cartésien

A ce système, on lui associe une base orthonormée (e_1, e_2, e_3) c'est-à-dire :

$$\|e_1\| = \|e_2\| = \|e_3\| = 1 \text{ mètre (l'unité des longueurs)}$$

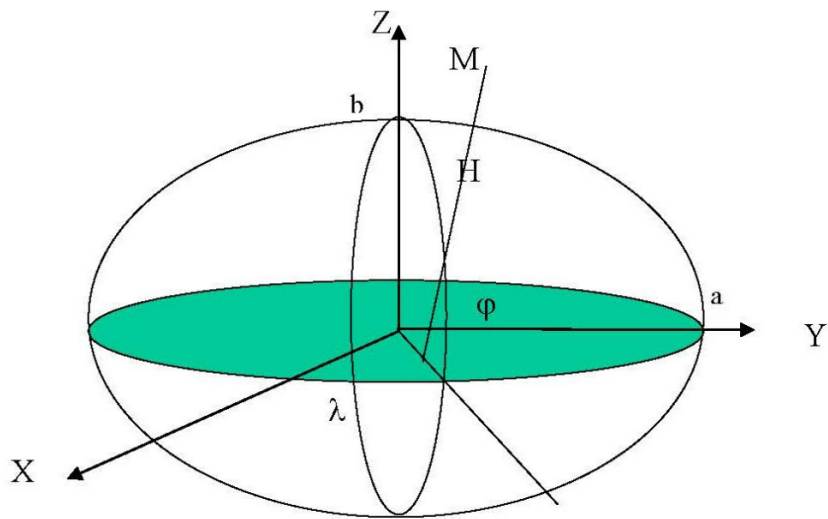


FIG. 5. Ellipsoïde Terrestre de révolution

Ce qui définit l'échelle du système.

A ce repère, on associe un ellipsoïde de référence (E). Par suite à un point M on lui correspondre ses coordonnées géodésiques à savoir :

- la latitude géodésique φ ,
- la longitude géodésique λ ,
- l'altitude ellipsoïdique he .

2.3 Définition des coordonnées planes

Pour faciliter les calculs, une fois qu'on a défini le système géodésique national, on met en place une représentation plane qui à (φ, λ) associe le couple de coordonnées planes (X, Y) . Ces coordonnées sont calculées à partir des formules mathématiques définissant la représentation plane choisie.

$$M(\varphi, \lambda) \implies m \begin{cases} X = X(\varphi, \lambda) \\ Y = Y(\varphi, \lambda) \end{cases} \quad (2.1)$$

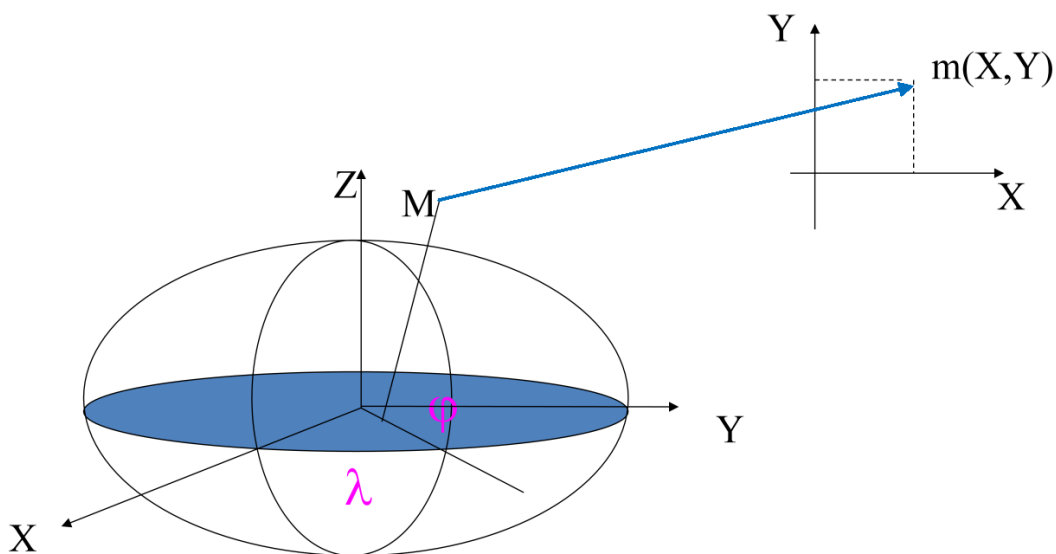


FIG. 6. La représentation Plane

3 LES DIFFÉRENTS SYSTÈMES GÉODÉSQUES EN TUNISIE

3.1 Le Système Géodésique 'VOIROL'

C'était le premier système géodésique en Tunisie [1] caractérisé par :

- le point fondamental (point de départ) : Voirol près d'Alger créé en 1875,
- la surface de référence c'est-à-dire le modèle choisi pour la Terre est l'ellipsoïde de Clarke Français 1880,
- l'orientation de départ est l'azimut de la direction Voirol - Meleb El Kora, mesuré en 1874,
- la mise à l'échelle ou la qualité métrique de réseau : la mesure d'une distance ou base à Blida en Algérie mesurée en 1854.

Une grande partie du premier réseau géodésique Tunisien était calculé dans ce système.

3.2 Le Système Géodésique 'CARTHAGE 34'

A la suite de la détection d'une erreur dans la mise à l'échelle du système Voirol en 1910 et vu sa qualité, le Service Géographique de l'Armée Française (S.G.A.F) a établi un nouveau système géodésique indépendant du système Voirol. Les éléments de définition de ce système sont :

- * le point fondamental : le point Carthage en Tunisie,
- * l'ellipsoïde de référence : l'ellipsoïde de Clarke Français 1880,
- * l'azimut de l'orientation : la direction Carthage - Bir Bou Regba,
- * la mise à l'échelle : les bases de Tunis et de Médenine.

Les calculs des points géodésiques de la partie nord ont été achevés en 1934.

Au point fondamental Carthage, on a les différences suivantes :

$$\varphi_{\text{Voirol}} - \varphi_{\text{Carthage}} = 25.86 \text{ dmgr} \quad (3.1)$$

$$\lambda_{\text{Voirol}} - \lambda_{\text{Carthage}} = 36.19 \text{ dmgr} \quad (3.2)$$

soit en moyenne 245 m en Δx et 280 m en Δy .

4 LA STRUCTURE DES RÉSEAUX GÉODÉSQUES TUNISIENS APRÈS 1978

A partir de 1978, l'OTC a décidé de moderniser les réseaux géodésiques tunisiens afin de satisfaire les besoins cartographiques et topographiques du pays en commençant par le réseau géodésique de base.

Les travaux de revalorisation de la géodésie Tunisienne [2] comprenaient :

- la réfection des anciens points du 1er ordre, du 1er ordre complémentaire, du 2ème ordre et du 2ème ordre complémentaire,

- la construction de nouveaux points sur les sites des anciens points disparus,

- la densification de l'ancien réseau par de nouveaux points,

- les observations angulaires azimutales et zénithales,

- la détermination de 8 points de Laplace,

- la mesure des côtés de 8 triangles géodésiques,

- la détermination de 5 points par la méthode Doppler,

- la compensation des observations terrestres avec les données Doppler pour obtenir les nouvelles coordonnées du nouveau réseau.

Le nouveau réseau géodésique appelé Réseau Géodésique Primordial (RGP) est composé de 312 points comme suit :

1. 143 points anciens,

2. 112 nouveaux points construits sur les sites des anciens points disparus,

3. 58 nouveaux points.

4.1 La Compensation du Réseau Géodésique Primordial

La compensation du RGP effectuée par l'IGNF dans le cadre de la convention 2916 comprenait les compensations planimétrique et altimétrique (Rapport sur les calculs de l'IGNF, 1985).

La compensation planimétrique de 1984 effectuée par l'IGNF a défini un nouveau système géodésique appelé le Système Géodésique 1984. En comparant les coordonnées issues de ce dernier avec celles de CARTHAGE34, on a trouvé que les coordonnées anciennes ont subi un déplacement sous la forme d'une rotation dans le sens des gisements dont le centre se trouve dans la région de J. Semmama et d'un angle de 27 dmgr (2.7/10000 de grade). Les déplacements planimétriques varient de 0 à 12 m en s'éloignant du centre de la rotation.

Ces déplacements ont été jugés inacceptables pour le patrimoine national en matière de cadastre.

4.2 Le Système CARTHAGE86

Les nouvelles coordonnées issues de la compensation de 1984 de l'IGNF n'ont pas été acceptées, la Direction de la géodésie de l'OTC a effectué un calcul de compensation du RGP en trois blocs, en fixant les coordonnées CARTHAGE34 des points anciens. On a obtenu ainsi un nouveau système géodésique appelé CARTHAGE86. Ce système a gardé le même ellipsoïde de référence à savoir l'ellipsoïde de Clarke Français 1880. Par suite, les coordonnées des points du Réseau Géodésique Terrestre Secondaire ont été calculées dans ce système en fixant les points géodésiques primordiaux. Le décalage entre les systèmes CARTHAGE34 et CARTHAGE86 est de l'ordre du mètre.

5 LE NOUVEAU SYSTÈME GÉODÉSIQUE TERRESTRE TUNISIEN :LA NOUVELLE TRIANGULATION TUNISIENNE

Au vue des problèmes des systèmes géodésiques en Tunisie et dans le but de l'unification des systèmes géodésiques en usage en Tunisie, il a été créé en décembre 2002 une commission technique permanente chargée de l'étude de la géodésie à l'OTC. Lors de sa réunion élargie n°10 du 23 mars 2004, la Commission a adopté un nouveau système géodésique terrestre Tunisien appelé ' **NTT** ' pour ' **La Nouvelle Triangulation Tunisienne** ', unifiant les systèmes géodésiques terrestres tunisiens. Ce nouveau système est défini par les éléments suivants :

- ellipsoïde de référence : l'ellipsoïde de Clarke Français 1880 ($a = 6378249.200$ m et $b = 6356515.00$ m) avec a et b sont respectivement le demi-grand axe et le demi- petit axe,

- fixation des coordonnées de 5 points dans CARTHAGE34 (J. Hamid, Bou Rebeh, J. Semmama, Ain Abdour et Henchir Hajjar) avec un écart-type de 50 cm.

- azimuts d'orientation : les 8 azimuts astronomiques observés :

- * J. Gattous vers Nadour de Bizerte,
- * J. Hamid vers Sidi Salem,
- * Bou Rebeh vers Kbar Erroumi,
- * Pilier Astro vers Nef Kelb,
- * J. Semmama vers Kef Anéza,
- * Ain Abdour vers J. Selja,
- * Lafaya vers Toulal Echeikh,
- * Henchir Hajjar vers J. Jiar.

- Les bases 24 distances observées dans les huit triangles :

1. J. Gattous - J. Ichkel - Nadour de Bizerte,
2. Bou Rebeh - Dyr EL Kef - Kbar Erroumi,
3. J. Hamid- Chott Khanfous- Sidi Salem,
4. Pilier Astro-Nef Kelb- Hanyeh,
5. J. Semmama - J. Biréno- Kef Anéza,
6. Ain Abdour - J. Selja - Oued Seli,
7. Lafaya- Toulal Echeikh - M'Chouch,
8. Henchir Hajjar - J. Jiar- Zemlet Hallogua.

- Compensation en un seul bloc des observations angulaires + les distances + les azimuts astronomiques.

6 LES ÉLÉMENTS DE LA GÉODÉSIE ET CARTOGRAPHIE TUNISIENNE

Par l'arrêté du ministre de la défense nationale du 10 février 2009, fixant le système national de référence terrestre unifié de la géodésie, de la projection cartographique et du nivellement, on a :

Article premier - Le système national de référence terrestre unifié de la géodésie, de la projection cartographique et du nivellement est défini comme suit :

A- Le système national de référence terrestre unifié de la géodésie :

- le système national géodésique des coordonnées géographiques : la nouvelle triangulation tunisienne (**N.T.T.**),
- l'ellipsoïde associé : l'ellipsoïde de Clarke 1880 (F),

B- Le système national de référence de la projection cartographique : l'universal transverse Mercator (U.T.M.) fuseau 32 Nord.

C- Le système national de référence du nivellement :

- le système des altitudes orthométriques,
- la référence des altitudes : le repère de nivellement général de la Tunisie situé au site de " Bab Bhar - Tunis ", d'altitude sept mètres (7.000m) au dessus du niveau moyen de la mer.

7 LES REPRÉSENTATIONS PLANES EN USAGE À L'OTC

7.1 La Représentation des Fuseaux ou Représentation de Guillaume Postel

Elle a été utilisée dans le système géodésique Voirol pour le besoin de la triangulation et reste en usage dans les travaux de l'Immatriculation Foncière Facultative pour traiter certains dossiers anciens.

Dans cette représentation, la Tunisie est partagée en six fuseaux, d'une étendue chacun de 0.5 grades (gr) en longitude, subdivisés chacun en onze quadrilatères curvilignes de 0.5 gr de côté en latitude. Soit un ensemble de 66 systèmes de coordonnées.

Chacun système de coordonnées est défini par la donnée des coordonnées géographiques (φ_o, λ_o) du centre du quadrilatère généralement par rapport à l'origine Voirol. Les coordonnées rectangulaires sont obtenues en assimilant le quadrilatère curviligne de l'ellipsoïde (Clarke Français 1880) au plan tangent à l'ellipsoïde au point (φ_o, λ_o) .

Cette représentation plane fût abandonnée en 1922 pour être remplacée par la représentation plane Lambert.

7.2 La Représentation Lambert Tunisie

C'est une représentation conforme (conserve les angles) d'un modèle ellipsoïdique. Afin d'éviter les déformations trop importantes, la représentation Lambert Nord Tunisie a été adoptée pour la partie Nord du pays (latitude comprise entre 37.5 gr et 42.5 gr) et la représentation Lambert Sud Tunisie a été adoptée pour la partie sud (latitude comprise entre 34.5 gr et 39.5 gr). La représentation Lambert Tunisie est nommée à l'OTC sous l'appellation "Origine Unique".

7.2.1 Définition et Propriétés

La représentation plane Lambert est une représentation conique, conforme et directe d'un modèle ellipsoïdique :

- conique : on utilise les coordonnées polaires R et Ω ,
- conforme : conservation des angles ou l'altération angulaire est nulle ou le module linéaire est indépendant de la direction,
- directe : les coordonnées polaires sont des fonctions de la forme :

$$R = R(\varphi) \quad (7.1)$$

$$\Omega = \Omega(\lambda) \quad (7.2)$$

où (φ, λ) sont les coordonnées d'un point sur le modèle ellipsoïdique.

Les images des parallèles sont des arcs de cercles concentriques, celles des méridiens sont des droites concordantes.

Les courbes coordonnées $\varphi = \text{constante}$ et $\lambda = \text{constante}$ sur le modèle sont orthogonales et leurs images dans le plan le sont aussi.

7.3 Expressions des Formules $R(\varphi)$ et $\Omega(\lambda)$

On démontre que :

$$\Omega = (\lambda - \lambda_0) \sin \varphi_0 \quad (7.3)$$

$$R = N_0 \cot g \varphi_0 e^{-\sin \varphi_0 (L - L_0)} \quad (7.4)$$

$$\text{avec } L(\varphi) = \text{Log} \text{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) - \frac{e}{2} \text{Log} \left(\frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi} \right) \quad (7.5)$$

$L(\varphi)$ est appelée la latitude isométrique, avec $L_0 = L(\varphi_0)$ où φ_0 la latitude du parallèle origine et :

$$N_0 = a / (1 - e \sin \varphi_0)^{1/2}$$

a : le demi grand axe de l'ellipsoïde de référence

e : le carré de la première excentricité = $(a - b)/a$

b : le demi petit axe de l'ellipsoïde de référence

N_0 est appelé la grande normale, c'est le deuxième rayon de courbure de l'ellipsoïde de révolution.

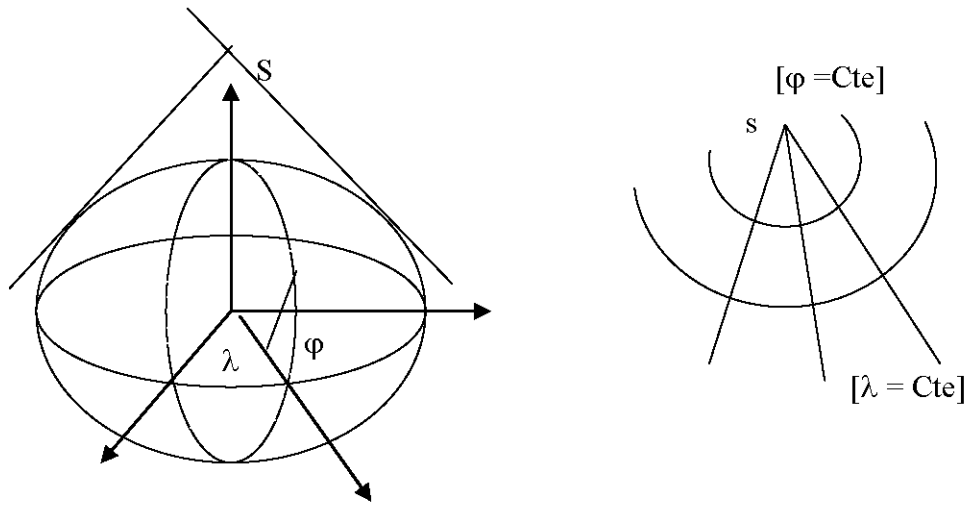


FIG. 7. représentation géométrique de la représentation Lambert

7.4 Expression des Coordonnées Cartésiennes (X,Y)

Dans ce paragraphe, on va décrire les coordonnées cartésiennes (X, Y) en fonction de (Ω, R) . Soit un point $M(\varphi, \lambda)$ ayant pour coordonnées polaires (Ω, R) prenons un système d'axes OXY (Fig. 8) telque OY est porté par l'image du méridien origine et dirigé vers le Nord et l'axe OX par la tangente à l'image du parallèle origine et dirigé vers l'Est.

Alors les coordonnées cartésiennes X et Y sont données par :

$$X_M = R \sin((\lambda - \lambda_0) \sin \varphi_0) \quad (7.6)$$

$$Y_M = R_0 - R \cos((\lambda - \lambda_0) \sin \varphi_0) \quad (7.7)$$

Avec λ comptée positivement à l'Est du méridien origine des longitudes.

7.5 Expression des Coordonnées Cartésiennes Translatées (X,Y)

Les expressions des coordonnées cartésiennes (X, Y) des représentations planes Lambert Tunisie (Nord et Sud) dites coordonnées translatées se diffèrent des formules (7.6) et (7.7) par un facteur d'échelle k et une translation, comme suit :

$$X_M = 500000.00 \text{ m} + k R \sin((\lambda - \lambda_0) \sin \varphi_0) \quad (7.8)$$

$$Y_M = 300000.00 \text{ m} + k (R_0 - R \cos((\lambda - \lambda_0) \sin \varphi_0)) \quad (7.9)$$

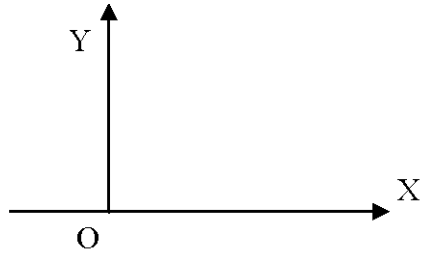


FIG. 8. Le Repère OXY

7.6 Les Eléments de définition du Lambert Nord Tunisie

Ellipsoïde de référence = ellipsoïde Clarke Français ($a = 6378249.200$ m, $b = 6356515.000$ m et $e = 0.0068034877$)

Latitude parallèle origine = $\varphi_0 = 40$ gr = 36°

Longitude méridien origine = $\lambda_0 = 11$ gr Est Greenwich = $9^\circ 54'$

Facteur d'échelle = $k_N = 0.999\ 625\ 544$

Constante translation $X = 500\ 000.00$ m

Constante translation $Y = 300\ 000.00$ m

Amplitude de la latitude = $37.5gr < \varphi < 42.5gr$

7.7 Les Eléments de définition du Lambert Sud Tunisie

Ellipsoïde de référence = ellipsoïde Clarke Français ($a = 6378249.200$ m, $b = 6356515.000$ m et $e = 0.0068034877$)

Latitude parallèle origine = $\varphi_0 = 37$ gr = $33^\circ 18'$

Longitude méridien origine = $\lambda_0 = 11$ gr Est Greenwich = $9^\circ 54'$

Facteur d'échelle = $k_S = 0.999625769$

Constante translation $X = 500000$ m

Constante translation $Y = 300000$ m

Amplitude de la latitude = $34.5gr < \varphi < 39.5gr$

7.8 Module linéaire et Altération linéaire

Le module linéaire en un point $M(\varphi, \lambda)$ est exprimé par le rapport :

$$m = \frac{dS}{ds} = \frac{\text{distance plan}}{\text{distance ellipsoïde}} \quad (7.10)$$

On démontre que l'expression du module linéaire au point M est donnée par la formule ci-dessous :

$$m = k \frac{\sin \varphi_0 R(\varphi)}{N(\varphi) \cos \varphi} \quad (7.11)$$

On appelle altération linéaire la quantité :

$$\varepsilon = m - 1 \quad (7.12)$$

Soit D_e la distance réduite à l'ellipsoïde de référence, D_P la distance réduite au plan de la représentation est donnée par :

$$D_P = mD_e = (1 + \varepsilon)D_e = D_e + \varepsilon D_e \quad (7.13)$$

ε s'exprime généralement en cm/km .

7.9 Relations entre les Coordonnées Translatées (X, Y) et les Coordonnées SST (x, y)

Généralement, les techniciens de l'immatriculation foncière utilisent non pas les coordonnées translatées (X, Y) données par (7.8) et (7.9) mais plutôt les coordonnées (x, y) qu'on nomme coordonnées STT (Service Topographique Tunisien) dont les axes ox et oy sont définis par la figure ci-dessous : On a alors :

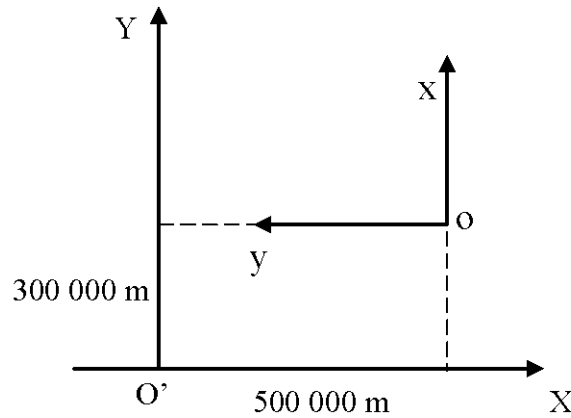


FIG. 9. Les Coordonnées STT

$$X = 500000.00m - y \quad (7.14)$$

$$Y = 300000.00m + x \quad (7.15)$$

avec :

$$y = -kR \sin((\lambda - \lambda_0) \sin \varphi_0) \quad (7.16)$$

$$x = k(R_0 - R \cos((\lambda - \lambda_0) \sin \varphi_0)) \quad (7.17)$$

7.10 Convergence des Méridiens

En un point $M(\varphi, \lambda)$, pour passer de l'azimut géodésique d'une direction sur le modèle ellipsoïdique au gisement de la même direction sur le plan de la représentation, on a la relation suivante :

$$G = Az - \gamma \quad (7.18)$$

avec γ le gisement de l'image du méridien. Or l'image d'un méridien est une droite qui coupe l'axe Ox (du nord) sous l'angle $\Omega = (\lambda - \lambda_0)\sin\varphi_0$, par suite :

$$\gamma = \Omega = (\lambda - \lambda_0)\sin\varphi_0 = \text{convergence des méridiens} \quad (7.19)$$

8 LA REPRÉSENTATION UTM

8.1 DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS

La représentation plane UTM (Universal Transverse Mercator) est l'une des représentations la plus utilisée dans le monde.

C'est une représentation [3] :

- conforme d'un modèle ellipsoïdique,
- transverse : c'est-à-dire l'image de l'équateur (en partie) est l'axe OX (vers l'Est) et l'image d'un méridien appelé méridien central, de longitude que nous supposons égale à 0, est l'axe OY (vers le Nord) du plan.

Les coordonnées rectangulaires d'un point sont des fonctions de la forme :

$$X = X(\varphi, \lambda) \quad (8.1)$$

$$Y = Y(\varphi, \lambda) \quad (8.2)$$

où (φ, λ) sont les coordonnées du point sur le modèle ellipsoïdique.

En général, on applique à X, Y un coefficient de réduction $k = 0.9996$ et une constante de translation en X de $500\,000\text{m}$, les coordonnées obtenues sont :

$$X' = k.X + 500\,000.00\text{m} \quad (8.3)$$

$$Y' = k.Y \quad (8.4)$$

Pour la Tunisie, la représentation UTM est la représentation officielle et ce d'après l'arrêté du 10 février 2009. La Tunisie toute entière se trouve dans le fuseau $n^\circ 32$ de méridien central de longitude 9° à l'Est de Greenwich.

8.2 Calcul Inverse

Ayant les coordonnées (X', Y') en UTM et la longitude λ_0 du méridien central, comment calculer (φ, λ) . On revient à

$$X = (X' - 500\,000)/k \quad (8.5)$$

$$Y = Y'/k \quad (8.6)$$

8.3 Le Module linéaire

Le module linéaire m est telque :

$$m = \frac{\text{distance sur le plan}}{\text{distance sur l'ellipsoïde}} \quad (8.7)$$

La représentation étant conforme, alors le module linéaire est indépendant de la direction, mais ne dépend que du point, on choisit de calculer m le long des parallèles, soit $d\varphi = 0$, ce qui donne : On remplace λ par $\lambda - \lambda_0$, on trouve la formule du module linéaire :

$$m' = k \sqrt{1 + (\lambda - \lambda_0)^2 (1 + e'^2 \cos^2 \varphi) \cos^2 \varphi} \quad (8.8)$$

8.4 Convergence des méridiens

Le gisement de l'image du méridien appelé 'convergence des méridiens' et noté par γ en un point (φ, λ) est donné en première approximation par la formule :

$$tg \gamma = (\lambda - \lambda_0) \sin \varphi \quad (8.9)$$

γ est comptée dans le sens des gisements. De même, on a aussi :

$$G = Az - \gamma \quad (8.10)$$

la relation liant le gisement G à l'azimut Az .

9 EXERCICE

Soit le point A de coordonnées géodésiques $\varphi = 40.9193 \text{ gr}$ et $\lambda = 11.9656 \text{ gr}$ à l'Est de Greenwich. On considère la représentation plane UTM tronquée suivante, de méridien central $\lambda_0 = 9^\circ$ définie par les formules :

$$\begin{cases} X = a_1 \cdot (\lambda - \lambda_0) + a_3 \cdot (\lambda - \lambda_0)^3 \\ Y = g(\varphi) + a_2 \cdot (\lambda - \lambda_0)^2 \end{cases}$$

où φ , λ et λ_0 sont exprimées en rd , avec :

$$a_1 = N(\varphi) \cdot \cos \varphi$$

$$a_2 = \frac{a_1}{2} \cdot \sin \varphi$$

$$a_3 = \frac{a_1 \cos^2 \varphi}{6} (1 - tg^2 \varphi + e'^2 \cdot \cos^2 \varphi)$$

$$N(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi}}$$

$$g(\varphi) = a(1 - e^2)(1.0051353 \cdot \varphi - 0.0025731 \sin 2\varphi)$$

$$a = 6378249.20 \text{ m}, \quad e^2 = 0.0068034877, \quad e'^2 = \frac{e^2}{1 - e^2}$$

1. Montrer que les coordonnées du point A sont : $X = 157833.48\text{ m}$, $Y = 4078512.97\text{ m}$, on justifie les résultats.
2. Soit le point B de coordonnées ($X = 160595.98\text{ m}$; $Y = 4078564.53\text{ m}$). Sachant que B est situé sur le même parallèle que A , calculer la longitude λ' de B .
3. Calculer le gisement G et la distance AB .
4. Sachant que la convergence des méridiens γ est donnée par $tg\gamma = (\lambda - \lambda_0)\sin\varphi$, calculer l'azimut de la direction AB .
5. Calculer l'azimut de B vers A et celui de B vers A .
6. En calculant les coordonnées UTM de A et B , on trouve respectivement $X_A = 657770.34\text{ m}$, $Y_A = 4076891.20\text{ m}$; $X_B = 660531.74\text{ m}$, $Y_B = 4076942.76\text{ m}$. Calculer la distance AB par les coordonnées UTM. En déduire l'erreur relative sur la distance en utilisant les coordonnées de l'UTM tronquée.

Références

- [1] **C. Fezzani**, 1979. La structure astro-géodésiques des réseaux géodésiques tunisiens. Thèse de Docteur Ingénieur. ENSG. IGN France.
- [2] **M. Charfi**, 1984. Les Travaux de la Revalorisation de la Géodésie Tunisienne. OTC.
- [3] **A. Ben Hadj Salem**, 2013. Eléments de Géodésie. (En préparation). 275p.