Sur la Convergence de l'Interpolation Polynômiale

Abdelmajid Ben Hadj Salem[1]

[1]*Résidence Bousten 8, Bloc B, Rue Mosquée Raoudha, 1181 La Soukra Raoudha Tunisia.*

E-mail: abenhadjsalem@gmail.com

ABSTRACT: In this note, we present Runge's phenomenon concerning the approximation of a function by polynomials.

RÉSUMÉ : Dans cette note, on présente le phénomène de Runge concernant l'approximation d'une fonction par des polynômes.

Version 1., May 18, 2023

Table des matières

1 INTRODUCTION 2

2 EXEMPLE DE RUNGE 2

Sur la Convergence de l'Interpolation Polynômiale

-

ABDELMAJID BEN HADJ SALEM

A mon ami Mohamed Amine Bahri

1 INTRODUCTION

On pourrait penser, au vu des formules donnant l'erreur $\epsilon(x)$ de l'interpolation polynômiale d'une fonction que, pour avoir une très bonne approximation il suffit d'augmenter le nombre $n+1$ des points choisis, si l'on veut $\epsilon(x)$ très petit, il faut prendre $n+1$ très grand ; ce qui amène à dire si l'on fait $n \longrightarrow +\infty$, alors $sup_{x\in[,a,b]}|\epsilon(x)| \longrightarrow 0$.

Ceci est complètement faux, même pour les des fonctions très régulières (pour des fonctions anlytiques réelles dans $(a,b]$). Un exemple est donné par le phénomène de Runge.

2 EXEMPLE DE RUNGE

Soit $\alpha > 0$ un nombre réel, considérons la fonction :

$$f(x) = \frac{1}{x^2+\alpha^2}$$

Sur l'intervalle $[-1,+1]$, prenons pour points $x_0, x_1, \ldots, x_n$ les points $\pm\dfrac{2k+1}{2m}$ avec $2m = n+1$ (on suppose n impair) et $k = 0, 1, \ldots, m-1$.

Posons :

$$\prod_n(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$$

Le polynôme d'interpolation de Lagrange s'écrit :

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{j=n} \frac{f(x_j)\prod_n(x)}{(x-x_j).\prod'_n(x_j)}$$

Nous allons étudier la différence $f(1) - P_n(1)$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

Calculons la différence $f(x) - P_n(x)$. Ce calcul est un peu délicat car il utilise un calcul par résidu.

Soit $z \in \mathbb{C}$, considérons la fonction complexe :

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + \alpha^2}$$

Cette fonction n'est pas définie aux points $i\alpha, -i\alpha$. C'est une fonction holomorphe dans tout le plan $\mathbb{C}$ sauf aux deux pôles simples $i\alpha$ et $-i\alpha$ (f est dite fonction méromorphe). Fixons un point $x \in [-1, +1], x \neq x_0, x_1, \ldots, x_n$. Soit γ le cercle de centre O et de rayon R dans $\mathbb{C}$ avec $R \geq |x|, R \geq \alpha$, $R \geq |x_j|$ et considérons l'intégrale :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z) \prod_n(x) dz}{(z - x) \prod_n(z)} \tag{2.1}$$

Le résidu de la fonction intégrée $g(z) = \dfrac{f(z) \prod_n(x)}{(z - x) \prod_n(z)}$ au pôle x est $f(x)$, en chacun des pôles x_i il est égal à :

$$\frac{f(x_j) \prod_n(x)}{(x_j - x) \prod_n'(x_j)}$$

Le résidu en $i\alpha$ est :

$$\frac{\prod_n(x)}{2i\alpha(i\alpha - x) \prod_n(i\alpha)}$$

en $-i\alpha$ est :

$$\frac{\prod_n(x)}{2i\alpha(i\alpha + x) \prod_n(-i\alpha)}$$

Le calcul de $\prod_n(i\alpha)$ donne :

$$\prod_n(i\alpha) = (-1)^m \left(\alpha^2 + \frac{1}{4m^2}\right) \left(\alpha^2 + \frac{9}{4m^2}\right) \ldots \left(\alpha^2 + \frac{(2m-1)^2}{4m^2}\right)$$

Prenons le module de l'équation (2.1), nous obtenons :

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z) \prod_n(x) dz}{(z - x) \prod_n(z)} \right| \leq \frac{1}{2\pi} . \frac{1}{\alpha^2} . C_1 . \frac{1}{RR^{n+1}} 2\pi R \leq \frac{C_2}{R^{n+1}}$$

où C_1, C_2 sont deux constantes.

Donc si $R \longrightarrow +\infty$, l'intégrale (2.1) tend vers 0. Appliquons maintenant le théorème des résidus à l'équation (2.1), on obtient :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)\prod_n(x)dz}{(z-x)\prod_n(z)} = \sum_{j=0}^{j=n}\frac{f(x_j)\prod_n(x)}{(x_j-x)\prod_n'(x_j)} + f(x) + \frac{1}{x^2+\alpha^2}.\frac{\prod_n(x)}{\prod_n(i\alpha)}$$

Si $n \longrightarrow +\infty$, nous obtenons :

$$f(x) - P_n(x) = \frac{1}{x^2+\alpha^2}.\frac{\prod_n(x)}{\prod_n(i\alpha)}$$

et :

$$\prod_n(1) = \frac{1}{2m}.\frac{3}{2m}\frac{5}{2m}\dots\frac{4m-1}{2m}$$

A l'aide de la formule de Sterling :

$$p! \approx \sqrt{2\pi}p^{p-1/2}e^{-p} \quad \text{quand } p \longrightarrow +\infty$$

on montre que $\prod_n(1) \approx \sqrt{2}\left(\frac{2}{e}\right)^n$.

D'autre part,

$$Log\left|\prod_n(i\alpha)\right| = \sum_{k=0}^{k=m-1} Log\left(\alpha^2 + \frac{(2k+1)^2}{4m^2}\right)$$

A l'aide de la formule d'Euler-Maclauren [1], on montre que :

$$\left|\prod_n(i\alpha)\right| \approx C\beta^n, \quad C = constante \neq 0$$

$$Log\beta = \int_0^1 Log(t^2+\alpha^2)dt = \left[tLog(t^2+\alpha^2)\right]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{t^2dt}{t^2+\alpha^2}$$
$$= Log(1+\alpha^2) - 2 + 2\alpha Arctg\frac{1}{\alpha}$$

Remarque que si $\alpha \longrightarrow 0,\ Log\beta \longrightarrow -2$. Donc, il existe $\alpha > 0$ tel que $Log\beta < Log\frac{2}{e} = Log2 - 1$.

De là, prenant un tel α :

$$|f(1) - P_n(1)| \approx \frac{1}{\alpha^2}\sqrt{2}\left(\frac{2}{e}\right)^n.\frac{1}{C\beta^n} \approx C'\left(\frac{2}{e\beta}\right)^n$$

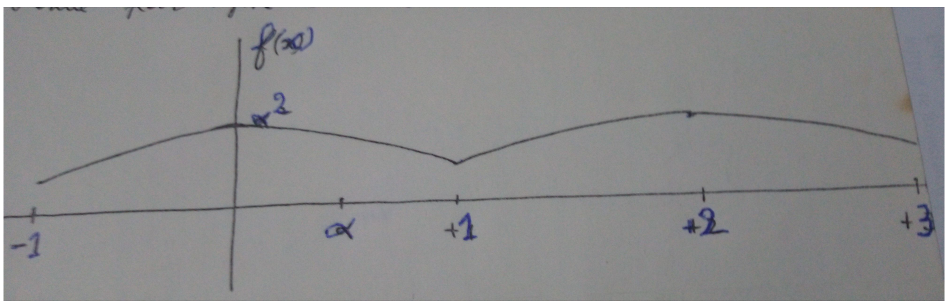
Mais $Log\dfrac{2}{e\beta} = Log2 - Log\beta - 1 > 0 \Longrightarrow \dfrac{2}{e\beta} > 1$ et $\left(\dfrac{2}{e\beta}\right)^n \longrightarrow +\infty$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

D'où :

$$|f(1) - P_n(1)| \longrightarrow +\infty \quad quand \quad n \longrightarrow +\infty$$

Ce phénomène se produit pour l'extrapolation, mais on a le phénomène analogue pour l'interpolation en modifiant l'exemple ci-dessus.

Prenons, dans l'intervalle $[-1, 3]$ la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + \alpha^2}$ si $x \in [-1, +1]$ et la fonction obtenue par symétrie dans l'intervalle $[+1, +3]$.



Si l'on prend pour $\phi_n(x) = P_n(x)$ si $x \in [-1, +1]$ et la fonction obtenue par symétrie pour $x \in [+1, +3]$, on se trouve dans le cas de l'interpolation (au sens stricte) et cependant :

$$|f(1) - \phi_n(1)| \longrightarrow +\infty$$

quand on fait tendre le nombre $2n$ de points vers l'infini.

Références

[1] **Jean Dieudonné**. 1980. Calcul Infinitésimal. Deuxième édition revue et corrigée. Edition Hermann Paris, Collection Méthodes. 479 pages.