GÉODÉSIE DYNAMIQUE:

Hommage A La Mémoire de Mon Professeur de Géodésie, l'Ingénieur Géographe Général, Jacques Le Menestrel (...-2010)

ABDELMAJID BEN HADJ SALEM, INGÉNIEUR GÉOGRAPHE GÉNÉRAL

Version 1., Mai 2023

Abstract: It is a tribute to the memory of my professor of geodesy Jacques Le Menestrel. We give a numerical version of the two first chapters of his booklet "Dynamical Geodesy". It is part of his complete geodesy course, taught in the 70s of the last century, at the *Ecole Nationale des Sciences Géographiques* (ENSG), France.

Abdelmajid BEN HADJ SALEM
e-mail : abenhadjsalem@gmail.com

A la Mémoire de mon
professeur de géodésie
Jacques Le Menestrel,
A mon épouse, à mes enfants

PRÉFACE

C'est avec un grand plaisir que je vous présente cette première version numérique de deux chapitres du fascicule " Géodésie Dynamique " de l'Ingénieur Général Géographe Jacques Le Menestrel.

Le cours de ce fascicule a été enseigné à la fin des années 70 du dernier siècle à l'Ecole Nationale des Sciences Géographiques (ENSG) de l'Institut Géographique National de France, pour les élèves ingénieurs des cycles A et B.

J'étais son élève en première année du cycle B de l'année universitaire 1978-1979 où j'avais suivi donc son cours complet de géodésie (géométrique et dynamique).

Cette version numérique a gardé quasiment le texte original avec quelques légères modifications. Les deux chapitres en question sont :
- Le potentiel de pesanteur.
- Le sphéroïde de référence.

Je dédie cette édition numérique en hommage à la mémoire de Jacques Le Menestrel décédé en décembre 2010.

Tunis,
Mai 2023

A. Ben Hadj Salem
Ingénieur Général Géographe

TABLE DES MATIÈRES

1 LE POTENTIEL DE PESANTEUR

1.1 GÉNÉRALITÉS - LA PESANTEUR

Nous avons vu que les anciens considéraient la terre comme sphérique, mais aussi comme solide ou indéformable et immobile : la sphère céleste tournait autour de la terre supposée fixe.

Le premier Copernic remet en question l'un de ces trois caractères, celui de l'immobilité de la terre ; rejetant l'hypothèse du géocentrisme qui pose la terre au centre du monde (1543), il défend l'idée d'un système héliocentrique ou "centré" sur le soleil. Peu après lui, les théories de Newton conduisent à envisager la forme de la terre comme celle d'un fluide déformable en mouvement sous l'action de trois types de forces :
- Les attractions newtonniennes des masses de la terre elle-même ou la "gravité".
- La force centrifuge due à son mouvement de rotation sur elle-même.
- L'attraction des astres et en particulier de la lune et du soleil.

Si la "gravité" désigne la force d'attraction de la terre, le terme de "pesanteur" est en général utilisé pour représenter l'ensemble de ces trois forces.

Ce sont là les hypothèses fondamentales de la géodésie dynamique. Celle-ci, comme la géodésie géométrique se donne bien comme objet la détermination de la forme de la terre, mais à la différence de la première, elle entend défendre quantitativement cette forme par des mesures dynamiques de forces ou "gravimétrie" et non par des mesures d'angles ou de distances.

Pour l'essentiel, nous verrons que ces forces dérivent d'un potentiel ; ainsi pour la géodésie dynamique, la surface terrestre est conçue comme une surface équipotentielle du champ des forces de pesanteur.

L'objet de la géodésie dynamique est donc le champ de pesanteur ; elle tente d'en déduire la forme des surfaces équipotentielles correspondantes d'une part, une expression mathématique globale du champ extérieur d'autre part.

1.2 L'ACTTRACTION NEWTONNIENNE DES ASTRES

Le troisième terme est la force de marée ou attraction luni-solaire, due à l'attraction différentielle du soleil et de la lune.

Elle présente des périodes caractéristiques de 1 jour, 28 jours, 1 an, etc...(En outre, les mouvements de précession et de nutation, la variation de Ω, les marées terrestres et océaniques provoquent des forces dont on ne tiendra pas compte ici).

L'accélération luni-solaire ne dépasse pas 0.3 $mgal$. Des tables en donnent la valeur en fonction de la date et de l'heure, avec une erreur inférieure à $1/100\, mgal$, ce qui permet de l'éliminer et de conserver une valeur indépendante du temps.

1.3 POTENTIEL NEWTONNIEN

Soit en un point M une masse ponctuelle m que nous supposons égale à l'unité, fixée sur la surface topographique, elle est soumise :
- à la gravité N ou attraction newtonienne due à la masse de la terre :

$$\|N\| = m \int\int\int_{terre} \frac{Gdm}{r^2}$$

où :
* G : constante de la gravitation universelle = 6.673×10^{-11} SI ;
* r : distance de M à l'élément de masse dm.
- N dérive d'un potentiel W_1 dit potentiel de gravité :

$$\begin{cases} N = -mgradW_1 \\ W_1 = \int\int\int_{terre} \frac{Gdm}{r} \end{cases}$$

1.4 EQUATIONS DE LAPLACE

Ce potentiel vérifie l'équation de Laplace : son Laplacien est nul à l'extérieur d'un corps pesant :

$$\boxed{\Delta W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2}}$$

En effet soit μ la masse volumique, le potentiel agissant sur un point matériel A à la distance r de l'élément de volume dv est :

$$W = G \int \frac{\mu dv}{r}$$

La force attractive correspondante s'exprime, en désignant par x_0, y_0, z_0 les coordonnées de A et x, y, z celles de dv ; c'est-à-dire :

$$r = \left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x - x_0}{r}$$

$$N \begin{cases} -\frac{\partial W}{\partial x_0} = -G \int \frac{\mu(x - x_0)}{r^3} dv \\ -\frac{\partial W}{\partial y_0} = -G \int \frac{\mu(y - y_0)}{r^3} dv \\ -\frac{\partial W}{\partial z_0} = -G \int \frac{\mu(z - z_0)}{r^3} dv \end{cases}$$

Les dérivées secondes sont de la forme :

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x_0^2} = G \int \mu \frac{r^3 - 3(x - x_0)^2 r}{r^6} dv$$

d'où par addition :

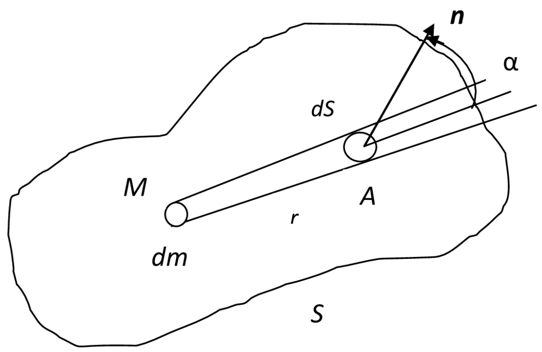
$$\frac{\partial^2 W}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y_0^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z_0^2} = G\mu \int \frac{3r^3 - 3\left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2\right] r}{r^6} dv = 0$$

Soit :

$$\boxed{\Delta W = 0 \ : \ \text{Equation de Laplace}}$$

1.5 POTENTIEL À L'INTÉRIEUR D'UNE MASSE DE DENSITÉ μ : EQUATION DE POISSON

Etudions le flux des forces newtonniennes engendré par l'ensemble des masses dm situées en M intérieur à la surface S.



La masse dm crée en A une force $\frac{Gdm}{r^2}$. Le flux de cette force à travers l'élément de surface dS autour de A est :

$$d\phi = \frac{Gdm}{r^2} cos\alpha dS = Gdm.d\omega$$

où $d\omega$ est l'élément d'angle solide sous lequel on voit dS depuis M et α est l'angle de MA avec la normale n à dS en A.

Le flux total de dm à travers la surface S est donc :

$$\phi = G.dm.d\omega = -4\pi G.dm$$

Le signe négatif indiquant qu'il s'agit d'un flux sortant.

Par ailleurs, la formule d'Ostrogradsky énonce que le flux d'un vecteur gradient à travers une surface est égal à l'intégrale du Laplacien étendue au volume interne à la surface :

$$\int_V \Delta W.dv = \int_S gradW.ndS \Longrightarrow \Delta W.dv = d\pi \Longrightarrow \Delta W.dv = -4\pi G\mu dv$$

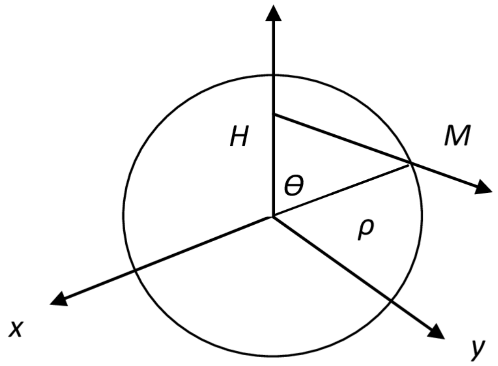
d'où la formule de Poisson :

$$\boxed{\Delta W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = -4\pi G\mu}$$

1.6 FORCE CENTRIFUGE

Elle s'exprime simplement en fonction de la latitude géocentrique ψ et de la vitesse de rotation de la terre Ω. Pour une masse unité en M :

$$F_C = m.\Omega^2.HM, \quad ||HM|| = \rho cos\psi = \rho sin\theta \Longrightarrow ||F_c|| = \Omega^2.\rho.sin\theta$$



Ses composantes dans le trièdre classique (O, X, Y, Z) sont :

$$F_C \begin{cases} \Omega^2 x \\ \Omega^2 y \\ 0 \end{cases}$$

Elles dérivent du potentiel $W_2 = \frac{1}{2}\Omega^2(x^2 + y^2)$ qui peut s'écrire :

$$W_2 = \frac{1}{2}\Omega^2\rho^2 cos^2\psi \quad \text{ou} \quad W_2 = \frac{1}{2}\Omega^2\rho^2 sin^2\theta$$

1.7 PESANTEUR

On appelle donc **pesanteur** la force dont l'expression sur un élément de masse unité est :

$$g = N + F_C$$

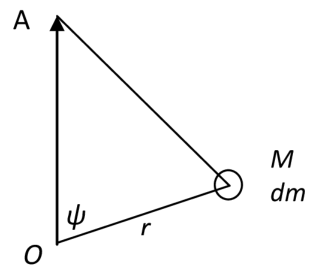
Elle dérive d'un potentiel $W = W_1 + W_2$ dit **potentiel de pesanteur** :

$$W = G\int \frac{dm}{r} + \frac{1}{2}\Omega^2\rho^2 sin^2\theta = G\int \frac{\mu dv}{r} + \frac{1}{2}\Omega^2\rho^2 sin^2\theta$$

1.8 POTENTIEL NEWTONNIEN D'UNE MASSE PONCTUELLE. POLYNÔMES DE LEGENDRE

Evaluons en un point A le potentiel dU d'une masse située en un point M :

$$dU = \frac{Gdm}{MA}$$



Soit une origine O ; A et M données par leurs coordonnées $A(\rho, 0)$ et $M(r, \psi)$:

$$dU = \frac{Gdm}{(\rho^2 + r^2 - 2r\rho cos\psi)^{1/2}} = \frac{Gdm}{\rho\left(1 - 2\frac{r}{\rho}cos\psi + \frac{r^2}{\rho^2}\right)^{1/2}}$$

Expression que l'on développe en séries :

$$dU = Gdm\left(\frac{1}{\rho} + \frac{r}{\rho^2}cos\psi + \frac{r^2}{\rho^3}\frac{3cos^2\psi - 1}{2} + ... + \frac{r^n}{\rho^{n+1}}P_n(cos\psi) + ...\right)$$

Les coefficients de $\frac{r^n}{\rho^{n+1}}, n \geq 0$ sont des polynômes P_n de degré n en $cos\psi$ dits "**polynômes de Legendre**" :

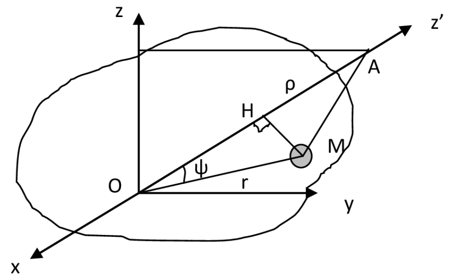
$$P_0 = 1,\ P_1 = cos\psi,\ P_2 = \frac{3cos^2\psi - 1}{2},\ P_4 = \frac{5cos^3\psi - 3cos\psi}{2}$$

1.9 POTENTIEL D'UN SPHÉROÏDE

Sa valeur est donnée par l'expression :

$$U = \int_v dU = \int_v \frac{G\mu dv}{d}$$

avec :
- G : constante de l'attraction universelle,
- μ : densité volumique,
- d : la distance MA,
- r : la distance OM.



Par suite :

$$U = G\int_v \frac{\mu dv}{\rho\left(1 - 2\frac{r}{\rho}cos\psi + \frac{r^2}{\rho^2}\right)^{1/2}} = G\int_v \frac{\mu dv}{\rho}\left(P_0 + P_1(cos\psi)\frac{r^2}{\rho} + \ldots + P_n(cos\psi)\frac{r^n}{\rho^{n+1}} + \ldots\right)$$

où les P_i sont les polynômes de Legendre :

$$\boxed{U = \sum_{n=0}^{n=+\infty} G\int_v P_n(cos\psi)\frac{r^n}{\rho^{n+1}}\mu dv}$$

ou $U = \sum_{n=0}^{n=+\infty} U_n$ avec :

$$U_n = G\int_v P_n(cos\psi)\frac{r^n}{\rho^{n+1}}\mu dv$$

Exprimons les premiers termes de ce développement :

$$U_0 = \frac{G}{\rho}\int_v \mu dv = \frac{GM}{\rho} \qquad M\text{= masse de la terre}$$

C'est le potentiel correspondant à une sphère de masse M.

$$U_1 = \frac{G}{\rho^2}\int_v rcos\psi\,\mu dv$$

$rcos\psi$ représente la projection de OM sur OA. Plaçons nous dans un trièdre tel que OZ' soit dirigé suivant OA. La côte Z' du centre de gravité des masses a pour valeur dans ce trièdre :

$$\int_v rcos\psi\,\mu dv = Z' \quad \text{et} \quad U_1 = \frac{G}{\rho^2}Z'$$

Autrement dit si l'on choisit l'origine au centre des masses du sphéroïde considéré, cette côte est nulle soit :

$$U_1 = \int_v \frac{G}{\rho^2}zdv = 0$$

Le développement général devient :

$$U = \frac{GM}{\rho} + \sum_{n=2}^{n=+\infty} U_n$$

2 LE SPHÉROÏDE DE RÉFÉRENCE

2.1 POSITION DU PROBLÈME

Nous avons vu que la géodésie dynamique se fixait un double objectif :

- déterminer le champ du potentiel à l'extérieur de la terre ceci permettant en particulier le calcul des trajectoires des satellites.

- déterminer la forme de la terre à partir d'éléments de surfaces équipotentielles du champ.

Si le premier de ces objectifs peut prendre la forme de la détermination de termes de degrés de plus en plus élevés du développement du potentiel (polynômes de Legendre, harmoniques, termes en J_n, etc...), en ce qui concerne le second, la forme de la terre est en fait obtenue par une méthode différente faisant intervenir les mesures localisées de la pesanteur réelle ; ces mesures permettent de construire un modèle théorique comme "déformations" d'une surface mathématique de base : sphéroïde ou ellipsoïde de révolution.

Nous verrons que pratiquement le modèle de base choisi sera un ellipsoïde, sans doute sous l'influence des résultats de la géodésie géométrique. Nous procèderons donc ainsi :

- Dans un premier temps, déterminer un sphéroïde ou un ellipsoïde de révolution dit de "référence".

- Dans un deuxième temps, construire un modèle plus complexe rendant compte de déformations locales.

Nous étudions dans ce chapitre les solutions élémentaires correspondant à la première de ces questions.

Le sphéroïde de référence sera déterminé comme surface équipotentielle du champ de pesanteur limité au premier terme de son développement.

2.2 PREMIER TERME DU POTENTIEL DE PESANTEUR - FORMULE DE MAC-CULLAGH

Prenons les 2 premiers termes du potentiel général calculé précédemment :

$$U = \frac{GM}{\rho} + U_2$$

$$U = \frac{GM}{\rho} + G\int_v \frac{3cos^2\psi - 1}{2}\frac{r^2}{\rho^3}\mu dv$$

Calculons U_2 :

$$U_2 = \frac{G}{2\rho^3}\left(\int_v 3r^2\mu cos^2\psi dv - \int_v r^2\mu dv\right)$$

On remarque que les quantités $\displaystyle\int r^2\mu dv = \int r^2 dm$ sont celles intervenant dans le calcul des moments d'inertie.

Si l'on considère les moments d'inertie A, B, C par rapport à 3 axes perpendiculaires Ox, Oy, Oz et I_0 le moment d'inertie par rapport au point O :

$$\int r^2\mu dv = \int r^2 dm = I_O = \frac{1}{2}(A+B+C)$$

D'autre part $\displaystyle\int r^2 cos^2\psi dm = \int OH^2 dm$ en appelant H la projection de M sur OA :

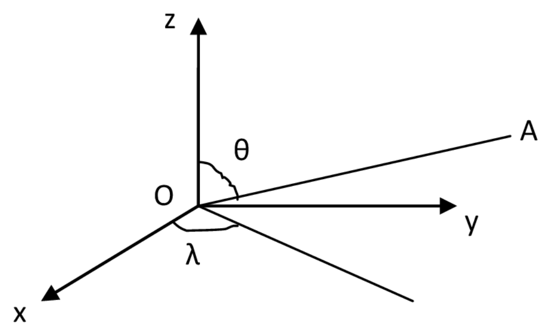
$$\int r^2 cos^2\psi dm = \int (OM^2 - HM^2)dm = I_O - I_{OA} \Longrightarrow U_2 = \frac{G}{2\rho^3}(2I_O - 3I_{OA})$$

Calculons I_{OA}. Si α, β, γ sont les cosinus directeurs de OA :

$$U_2 = \frac{G}{2\rho^3}(A+B+C-3I_{OA}), \quad I_{OA} = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2$$

Repérons la direction OA par les angles θ et λ (colatitude et longitude) d'où :

$$\begin{cases} \alpha = sin\theta cos\lambda \\ \beta = sin\theta sin\lambda \\ \gamma = cos\theta \end{cases}$$



et :

$$I_{OA} = Asin^2\theta cos^2\lambda + Bsin^2\theta sin^2\lambda + Ccos^2\theta$$
$$A+B+C-3I_{OA} = C(1-3cos^2\theta) + A(1-3sin^2\theta cos^2\lambda) + B(1-3sin^2\theta sin^2\lambda)$$

avec :

$$cos^2\lambda = \frac{1+cos2\lambda}{2}, \quad sin^2\lambda = \frac{1-cos2\lambda}{2}$$

On obtient la formule de Mac-Cullagh :

$$\boxed{U_2 = \frac{G}{\rho^3}\left[\left(C - \frac{A+B}{2}\right)\left(\frac{1-3cos^2\theta}{2}\right) - \frac{3}{4}(A-B)sin^2\theta cos2\lambda\right]}$$

2.3 CHAMPS EN J_2 DU SPHÉROÏDE DE RÉVOLUTION

Si le corps est de révolution, les moments d'inertie par rapport aux axes $Ox(A)$ et $Oy(B)$ sont égaux ($A = B$) et le potentiel correspondant est :

$$\begin{cases} U = \dfrac{GM}{\rho} + \dfrac{G}{\rho^3}\dfrac{1-3cos^2\theta}{2}(C-A) \Longrightarrow \\ \boxed{U = \dfrac{GM}{\rho}\left(1 + \dfrac{C-A}{M\rho^2}\dfrac{1-3cos^2\theta}{2}\right)} \end{cases}$$

Le facteur limité aux termes en $\frac{1}{3}\frac{C-A}{Ma^2}$ est appelé terme en J_2. Dans ces conditions, l'expression du potentiel de pesanteur s'écrit :

$$\boxed{W = \frac{GM}{\rho}\left(1 + J_2\frac{1-3cos^2\psi}{2}\right) + \frac{1}{2}\Omega^2 a^2 cos^2\psi}$$

expression dite du champ en J_2.

2.4 LES EQUATIONS DE CLAIRAUT

Le potentiel de la pesanteur est donc en un point de la surface terrestre :

$$W = G\int\int\int \frac{dm}{l} + \frac{1}{2}\Omega^2\rho^2 sin^2\theta$$

Nous considérons une valeur approchée :

$$W = G\left(\frac{M}{\rho} + \frac{1-3cos^2\theta}{2\rho^3}(C-A)\right) + \frac{1}{2}\Omega^2\rho^2 sin^2\theta$$

où C et A sont des constantes (moments d'inertie).

a) 1$^{\text{ère}}$ équation - aplatissement du sphéroïde $\alpha = \dfrac{a-b}{a}$

Nous allons écrire que ce potentiel est telque ses valeurs au pôle et à l'équateur sont égales.

- A l'équateur, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\rho = a$ (grand axe :

$$W_E = G\left(\frac{M}{a} + \frac{C-A}{2a^3}\right) + \frac{\Omega^2 a^2}{2}$$

- Au pôle, $\theta = 0$, $\rho = b$ (petit axe) :

$$W_P = G\left(\frac{M}{b} - \frac{C-A}{b^3}\right)$$

$$W_E = W_P \Longrightarrow G\left(\frac{M}{a} + \frac{C-A}{2a^3}\right) + \frac{\Omega^2 a^2}{2} = G\left(\frac{M}{b} - \frac{C-A}{b^3}\right) \Longrightarrow$$

$$GM\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) + G(C-A)\left(\frac{1}{2a^3} + \frac{1}{b^3}\right) + \frac{\Omega^2 a^2}{2} = 0$$

La quantité $G(C-A)\left(\frac{1}{2a^3}+\frac{1}{b^3}\right)$ est petite par rapport au premier terme en GM et si on néglige la différence entre a et b dans ce terme, on obtient :

$$MG\left(\frac{b-a}{ab}\right)+G(C-A)\frac{3}{2a^3}+\frac{\Omega^2a^2}{2}=0$$

En appelant α le rapport $\frac{a-b}{a}$ et m le rapport des forces centrifuges équatoriales et moyennes :

$$m=\frac{\Omega^2a}{||g||},\quad ||g||\approx G\frac{M}{a^2}\Longrightarrow \boxed{\alpha=\frac{3}{2}.\frac{C-A}{Ma^2}+\frac{1}{2}m}$$

C'est la première équation de Clairaut.

b) 2ème équation - Variation de la valeur du pesanteur

Cette valeur est la dérivée du potentiel suivant la ligne des forces et donc ici approximativement suivant la direction ρ :

$$g=\frac{\partial W}{\partial\rho}\Longrightarrow\frac{\partial W}{\partial\rho}=-G\left(\frac{M}{\rho^2}+\frac{3}{2\rho^4}(1-3cos^2\theta)(C-A)\right)+\Omega^2\rho sin^2\theta$$

- Pesanteur à l'équateur :

$$g_E=-G\left(\frac{M}{a^2}+\frac{3}{2a^4}C-A)\right)+\Omega^2a=-\frac{GM}{a^2}\left(\frac{1+3(C-A)}{2Ma^2}\right)+\Omega^2a$$

- Pesanteur au pôle :

$$g_P=-\frac{GM}{b^2}\left(1-\frac{3(C-A)}{Mb^2}\right)$$

Il est intéressant de calculer le rapport :

$$\begin{cases}\beta=\dfrac{g_P-g_E}{g}\\[2ex] g=g_{moyen}=-\dfrac{GM}{a^2}=-\dfrac{GM}{b^2}\end{cases}\Longrightarrow\boxed{\beta=2\alpha-\frac{9}{2}\frac{C-A}{Ma^2}+m}$$

dite 2ème équation de Clairaut.

c) 3ème équation - Elimination des constantes $C-A$.

$$\boxed{\alpha+\beta=\frac{5}{2}m},\quad m=\frac{\Omega^2a}{g_m}$$

dite 3ème équation de Clairaut.

γ - **Formule générale de la pesanteur théorique**

D'une façon générale nous noterons g la pesanteur réelle telle qu'elle est mesurée par un gravimètre, et γ une pesanteur théorique, calculée à partir d'une formule déterminée.

Ainsi :

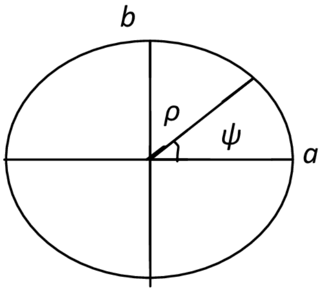
$$\gamma = G\left(-\frac{M}{\rho^2} - \frac{3}{2\rho^4}(1-3cos^2\theta)(C-A)\right) + \Omega^2\rho sin^2\theta$$

Si nous admettons que la surface équipotentielle de la pesanteur est un ellipsoïde, nous allons montrer que cette équation est de la forme :

$$\begin{cases} \gamma = \gamma_0(1+kcos^2\psi) \\ \psi = \dfrac{\pi}{2} - \theta \ : \ \text{latitude géocentrique} \end{cases}$$

2.5 PESANTEUR THÉORIQUE SUR UN SPHÉROÏDE DE RÉVOLUTION

Pour le moment, nous considérons simplement que la surface équipotentielle théorique représentant la Terre est un sphéroïde de révolution dont les rayons équatoriaux et polaires sont a, b et l'aplatissement α.
L'équation de sa méridienne est donc une fonction $\rho(\psi)$ telle que :



$$\rho(0) = a, \quad \rho(\frac{\pi}{2}) = b, \quad \rho(-\psi) = \rho(\psi)$$

Nous pouvons choisir $\rho(\psi) = a(1-\alpha sin^2\psi)$.

En portant cette valeur dans l'équation :

$$\gamma = -G\left(\frac{M}{\rho^2} + \frac{3}{2\rho^4}(1-3sin^2\psi)(C-A)\right) + \Omega^2\rho cos^2\psi$$

il apparaît que γ peut s'exprimer par un polynôme en $sin^2\psi$ ou $cos^2\psi$; γ est de la forme :

$$\gamma = \gamma_0(1+\beta_1 sin^2\psi + \beta_2 sin^2 2\psi + ...)$$

Le premier terme de cette expression [1] s'exprime alors facilement en fonction de :

$$\beta = \frac{\gamma_P - \gamma_E}{\gamma_m}$$

en effet, $\gamma(0) = \gamma_E$ et $\gamma(\pi/2) = \gamma_P$, donc :

$$\boxed{\gamma = \gamma_E(1+\beta sin^2\psi)}$$

1. N.B : Le 2ème coefficient du développement, β_2, le facteur de $sin^2 2\psi$ vaut 0.000 0059.

Cette formule permettra à partir de mesures concrètes de γ réduites au sphéroïde, de calculer β et γ_E d'où l'on déduire α par la 3ème équation de Clairaut.

Les valeurs admises sont :

$$\left.\begin{array}{l} \Omega = \dfrac{2}{24.3600} = 7.2921 \times 10^{-5}\, s^{-1} \\[2ex] a = 6\,378\, km \\ \gamma_E = 978.03\, gal \end{array}\right\} \Longrightarrow \qquad \left.\begin{array}{l} m = 0.003\,4674 \\ \beta = 0.005\,293 \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha = \frac{1}{297.4}$$