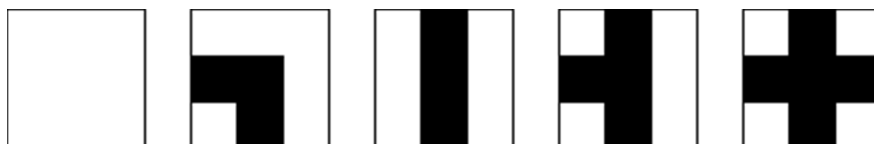


Задача о лабиринте

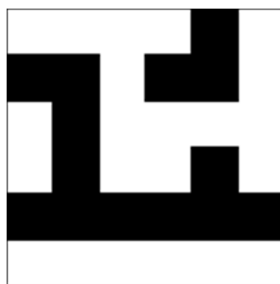
Эльмар Гусейнов (elmarguseinov@yahoo.com)

10.01.21

Рассмотрим следующие изображения:



Будем называть лабиринтом квадрат 6×6 , полученный из четырёх таких изображений с возможностью повторения и поворота изображения на 90° , 180° или 270° . Пример лабиринта:



1

Определить число лабиринтов, отождествляя те их них, которые могут быть получены друг из друга поворотом.

Решение. Пусть L – множество всех лабиринтов без учёта отождествления. Таким образом, $|L| = (1 + 4 + 2 + 4 + 1)^4 = 12^4$. Требуется определить число n классов эквивалентности при действии на L циклической группы C_4 с образующим элементом g , которому сопоставляется поворот на 90° , скажем, по часовой стрелке. Для элемента $a \in C_4$ обозначим как $i(a)$ число элементов L , инвариантных относительно действия a . Таким образом, по лемме Бёрнсайда

$$n = \frac{i(g) + i(g^2) + i(g^3) + i(g^4)}{4} \quad (1)$$

Имеем $i(g^4) = |L|$ (т. к. g^4 соответствует повороту на 360°). Кроме того, т. к. g^3 соответствует повороту на 270° (т. е. на -90°), $i(g) = i(g^3)$. Отсюда достаточно определить $i(g)$ и $i(g^2)$.

Обозначим как M множество всех начальных изображений, включающее их повороты, т. е. $|M| = 12$. Рассмотрим действие C_4 на M , вновь сопоставляющее g поворот на 90° . Пусть x, y, z, t – указанные по часовой стрелке элементы M , используемые при образовании $l \in L$. Нетрудно видеть, что l – фиксируемый g элемент тогда и только тогда, когда (x, y, z, t) – решение системы

$$\begin{cases} y = gx \\ z = gy \\ t = gz \end{cases} \quad (2)$$

Отсюда $i(g)$ – число решений системы **2**, которое, как нетрудно видеть, равно числу способов выбрать x . Отсюда $i(g) = |M| = 12$.

Аналогично $i(g^2)$ – число решений следующей системы, равное числу пар $(x, y) \in M^2$, откуда $i(g^2) = 144$: 2

$$\begin{cases} z = g^2x \\ t = g^2y \end{cases} \quad (3)$$

Подставляя полученные значения в **1**, находим

$$n = \frac{12 + 144 + 12 + 12^4}{4} = 5226$$

Рекомендуемая литература

1. А. Ю. Эвнин, Дискретная математика (конспект лекций), 1998
2. P. Aluffi, Algebra: Chapter 0