L'ESPACE
Idée d'une construction par la théorie des ensembles

Antoine Warnery

December 5, 2022

Contents

1 Introduction

La géométrie est une conceptualisation de l'espace qui peut adopter deux approches: une approche descriptive des objets entre eux et une approche subjective basée sur nos observations des objets.
Les premières géométries comme la géométrie d'Euclide sont descriptives, les objets sont représentés par des points, des droites, des objets géométriques. Les géométries modernes se base sur une représentation quantifié de la réalité de notre espace physique.
La perception de notre espace se faisant par des mesures quantifiées, l'espace a été représenté par des nombres. Cette représentation de l'espace, a influé notre conception de l'espace qui est actuellement défini par l'algèbre comme un espace vectoriel.
L'espace peut être défini par un concept plus général sans référence à la géométrie Euclidienne ou à l'algèbre. Pour cela, il faut définir sémantiquement et explicitement les concepts de la géométrie afin de pouvoir définir des propriétés spatiales.
La conceptualisation de l'espace mathématique peut se faire sur les définitions de la géométrie. Le but est de traduire les définitions géométriques en propriétés algébriques ou géométriques.

1.1 Définition de la géométrie

Littéralement, la géométrie est la science de la mesure de la terre, mais les mathématiques, ont défini la géométrie différement.
Euclide a défini la géométrie en axiomatisant l'espace plan à l'aide de figures géométriques. Plus tard, Hilbert a défini et axiomatisé l'espace géométrique. Actuellement, l'espace de la géométrie est souvent défini à l'aide de structures algébriques.
La géométrie a changé son objet d'étude qui est passé d'une représentation de l'espace à physique à une algébrisation de l'espace. Ce changement de représentation correspond a un changement de concepts géométriques.

Pour définir les concepts et les propriétés géométriques, on peut simplement reprendre les définitions des objets géométriques du Littré, car elles sont suffisamment précises pour en tirer un sens sémantique clair et en déduire des concepts mathématiques précis.

1.2 Définition du point

En géométrie, le point est la plus petite portion de l'espace qu'il soit possible de concevoir.
Le point est une abstraction géométrique. Le point représente la position de l'objet, le point sera symbolisé par une lettre majuscule A, B, C,... Les segments entre deux point par deux lettres AB,... Le plan par trois lettres, ABC.

1.3 Définition de la mesure

Nom donné à l'unité conventionnelle que l'on compare avec les objets pour en connaître le rapport. La mesure est la représentation algébrique d'une réalité physique. Nous allons représenter la mesure par la lettre minuscule (m) représentant un nombre naturel, un quotient ou un nombre réel positif suivant le type de mesure. ($\mathbb{N}^+$, $\mathbb{Q}^+$, ou $\mathbb{R}^+$).

1.4 Définition de la distance mesurée

La distance mesurée est une quantité d'espace mesurée entre deux points.
La distance mesurée est représentée par un nombre algébrique, une représentation mathématique de la distance mesurée entre deux objets réels.
L'ensemble des distances mesurées (Em) n'ont pas de propriétés particulières entre elles à priori. Nous ne pouvons pas présumer de propriétés à ce stade !
La mesure de la distance entre A et B sera donc représentée par la quantité mesurée (m) et par les points A et B (m_{AB}).

1.5 Définition de la distance géométrique

La distance géométrique est la distance minimale entre deux points.
La distance parcourue entre deux points est multiple, seule la distance du chemin minimum entre deux points est unique. La distance géométrique entre A et C est donc forcément inférieur ou égal à la somme des distances de A à B et de B à C.
Les distances entre n'importe quelle points A, B, C satisfont l'inégalité du plus court chemin :

$$d_{AC} \leq d_{AB} + d_{BC}$$

La distance géométrique est un concept différent de celui de la distance mesurée, car les distances satisfont une inégalité. L'ensemble des distances géométrique $Ed(d_{AB}, d_{AC}, \ldots d_{AN}, ...d_{BN}, ...d_{MN})$ n'est donc pas un ensemble quelconque.

1.6 Définition de l'espace

L'espace est un ensemble de distance entre des points.
L'ensemble des distances mesurées est relativement quelconque par contre l'espace des distances géométriques est un ensemble ayant des propriétés géométriques entre les points. Par exemple, les distances entre les points respectent la propriété du plus court chemin ou de distance minimum.

Soit un espace de distance géométrique, est un ensemble $E(d_{AB}, \ldots, d_{ZN})$, tel que:

$$\forall\, A, B, C \in\; E(d_{AB}, \ldots, d_{ZN}), alors\; d_{AB} \leq d_{AC} + d_{CB}$$

Cette définition basée sur les ensembles, les nombres, et les points permet de développer plusieurs types de raisonnement basés sur la théorie des ensembles, la trigonométrie et l'algèbre.
Pour cela, nous allons essayer d'exploiter les propriétés de distance pour déterminer les propriétés spatiales. Une des propriétés que nous allons essayer d'expliciter est l'addition des distances géométriques. Nous allons voir si l'addition des distances n'est pas lié à cette notion de distance géométrique.

2 Propriétés des ensembles et des sous-ensembles de l'espace

Pour trouver les propriétés de l'espace géométrique, il faut étudier les relations entre les ensembles distances, afin de voir si les relations entre les ensembles de distances expliquent les distances entre les points.

2.1 Inégalités triangulaires de l'ensemble espace

Les mesures de distances ne respectent pas forcément l'inégalité triangulaire par exemple la mesure de distance entre A et C peut être supérieur à la somme des mesures des distances de A à B et B à C.

$$m_{AC} > m_{AB} + m_{BC}$$

Si l'on veut déterminer un ensemble de distance géométrique à partir d'un ensemble de mesure il faut parfois corriger la mesure de distance. Dans le cas ci dessus la distance géométrique de A à C est inférieur à la somme des mesures de distance A à B et de B à C. La distance doit être corrigée. La distance géométrique de A à C doit être équivalente à la somme des mesures de distances de A à B et B à C :

$$d_{AC} = m_{AB} + m_{BC}$$

Après avoir fait ces corrections l' ensemble des distances géométriques est toujours la distance minimum entre deux points, alors la distance géométrique entre A et B est toujours inférieure à la somme des distances de A à C et de C à B. Pour trois points (A, B, C) l'inégalité du plus court chemin s'applique à n'importe quelle distance géométrique de l'ensemble espace des distances géométriques (d_{AB}, d_{AC}, d_{CB}), il y a donc trois inégalités :

$$d_{AB} \leq d_{AC} + d_{CB} \ \ et \ \ d_{AC} \leq d_{AB} + d_{BC} \ \ et \ \ d_{BC} \leq d_{BA} + d_{AC}$$

si l'on réécrit ces trois inégalités vis à vis de d_{AB} alors :

$$d_{AB} \leq d_{AC} + d_{CB} \ \ et \ \ d_{AB} \geq d_{AC} - d_{BC} \ \ et \ \ d_{AB} \geq d_{BC} - d_{AC}$$

ces inégalités peuvent être simplifiées en :

$$|d_{AC} - d_{BC}| \leq d_{AB} \leq d_{AC} + d_{CB}$$

La distance d_{AB}, a donc une relation d'inégalité avec les distances d_{AC}, d_{CB} . L'ensemble des distances géométriques n'est pas un ensemble aléatoire, mais un espace ayant des propriétés mathématiques. Nous allons utiliser ces propriétés pour simplifier notre espace en limitant notre ensemble aux seules distances géométriques utiles. C'est-à-dire en supprimant les distances ayant une information redondante dans notre ensemble des distances.

2.2 Propriétés d'alignement d'un sous-ensemble

Nous allons utiliser la propriété d'alignement afin de simplifier des sous-ensembles de notre espace des distances géométriques.

La première propriété dépendant de la définition de la distance est l'alignement. Les éléments (A, B, C) sont dit alignés si la somme des petites distances est égale à la plus grande distance tel que:

$$d_{AB} = d_{AC} + d_{CB} \; ou \; d_{AC} = d_{AB} + d_{CB} \; ou \; d_{CB} = d_{AB} + d_{AC}$$

soit :

$$d_{AB} = d_{AC} + d_{CB} \; ou \; d_{AB} = d_{AC} - d_{BC} \; ou \; d_{AB} = -d_{AC} + d_{BC}$$

Cette propriété d'alignement peut être appliquée à différents sous-ensembles.

2.3 Axiomes d'Euclide

Les postulats d'Euclide peuvent être compris comme une défintion de sous-ensembles ayant des propriétés particulières :

1. Un segment de droite peut être tracé en joignant deux points quelconques.

Quels que soient deux points A, B, il est possible de créer un sous-ensemble segment avec ces deux points. À la différence d'Euclide, le terme segment n'est pas compris a priori et l'ensemble segment doit être défini. L'ensemble segment est défini comme : Quel que soit les points A, B, Il existe un sous-ensemble segment [AB] $(d_{AX1}, ..., d_{AXi})$ tel que :
$\forall \; X \in \; Ensemble \; segment_{AB}(d_{AX1}, ..., d_{AXi}) \; alors \; d_{AB} = d_{AX} + d_{XB}$.

2. Un segment de droite peut être prolongé indéfiniment en une ligne droite.

Soit un sous espace droite alors il est possible de trouver une infinité de points, répondant au critère critère alignement. Quelque soit A, B, Il existe un sous-ensemble prolongement de droite]AB[$(d_{AX1}, ..., d_{AXi})$ tel que :

$$d_{AX} = d_{AB} + d_{BX} \; ou \; d_{BX} = d_{BA} + d_{AX}$$

Ce postulat est une affirmation de l'infinité de la droite. Ce postulat avec le postulat 1 sont la définition de la droite.

3. Étant donné un segment de droite quelconque, un cercle peut être tracé en prenant ce segment comme rayon et l'une de ses extrémités comme centre.

Les termes que nous allons employer vont différer un peu du postulat, car l'espace Euclidien est à priori un plan et donc les points à égale distance d'un point O définissent un cercle, ce qui n'est pas le cas dans la théorie des ensembles, ou l'espace n'est pas à priori un plan. Les points à égale distance d'un point O ne définissent pas un cercle, mais une sphère. Il est possible de créer un ensemble de points à égale distance d'un point particulier. On défini un sous-ensemble sphère $(d_{AX1}, ..., d_{AXi})$ tel que :
$\forall X \in$ *Ensemble sphere*$_{AB}(d_{AX1}, ..., d_{AXi})$ *alors* $d_{OX} = d_{AB}$.

Ce postulat est une définition de l'objet Euclidien cercle ou d'une manière plus général, il permet de définir le sous-ensemble sphère.

4. Tous les angles droits sont congruents.

Ce postulat met en relation deux notions, l'angle droit et la congruence. L'angle est l'espace entre deux droites et la congruence se dit si l'un est l'image de l'autre par une isométrie. L'angle droit doit être congruent, c'est-à-dire que l'ensemble des espacements (distances) doivent être équivalents de part et d'autre de la droite, les points de part et d'autre de la droite doivent avoir le même espacement. Il est possible de définir l'angle droit de cette manière :

Soit pour deux sous-ensembles droite (AB), (CD), ayant une intersection en O. Alors les droites sont dits à angle droit si et seulement si:
$\forall X \in$ *l'ensemble droite*(AB) et $Y, Z \in$ *l'ensemble droite*(CD) si $d_{OY} = d_{OX}$ et $d_{OZ} = d_{OX}$ alors $d_{XY} = d_{XZ}$.

Cette équivalence d'espacement de part et d'autre de l'intersection O permet de définir l'angle droit. Ce postulat définit ce qu'est un angle droit en tant rapport entre deux ensembles droites ayant des espacements entre eux équivalents.

5. Si deux lignes droites sont sécantes avec une troisième de telle façon que la somme des angles intérieurs d'un côté est inférieure à deux angles droits, alors ces deux lignes sont forcément sécantes de ce côté.

Il s'agit de montrer que l'intersection des deux droites ne peut pas être du côté des angles intérieurs supérieurs à deux angles droits. Pour cela, il faut définir ce que veut dire deux angles intérieurs inférieurs à deux angles droits, nous allons d'abord définir un angle aigue inférieur à un angle droit puis nous allons définir deux angles inférieurs à un angle droit.

Définition de l'angle aigu et obtu :

Un angle aigu est un angle qui a moins d'espacement qu'un angle dit obtu.
Pour deux ensembles droites (OA), (OB) avec $C \in (OA)$, ayant un point commun en (O), tel que $d_{OA} = d_{OB} = d_{OC}$ alors pour $d_{BC} > d_{AB}$. l'angle (AÔB) aigu est du côté de la petite distance d_{AB} et l'angle obtus (BÔC) est du côté de la grande distance d_{BC} de l'intersection.

Définition :
L'angle AÔB est aigu si pour deux ensembles droite (OA) et (OB) avec $C \in (OA)$ et $C \neq A$:

$$pour\ d_{OA} = d_{OB} = d_{OC}\ alors\ d_{AB} < d_{BC}$$

La définition fonctionne même si d_{OB} est différent de d_{OA}.

Par contre, il est important de remarquer que contrairement à la géométrie Euclidienne, l'angle entre deux ensembles droite n'est pas forcément unique. En effet, il est difficile d'affirmer que pour deux éléments X, Y quelconques si $d_{OX} = d_{OY}$ alors $d_{OX}/d_{XY} = constante\ \forall X \in (OA)$,et $Y \in (OB)$.

La distance géométrique d_{OX} est déterminé par une des équations de l'ensemble droite par exemple $d_{OX} = d_{OA} + d_{AX}$. Par contre la distance géométrique d_{XY} n'est pas unique, elle doit uniquement respecter les contraintes liées au plus court chemin. à savoir les inégalités triangulaires tel que : $d_{XY} < d_{XD} + d_{XD}$ avec (D) un point quelconque. Cette inégalité ne permet pas à priori d'affirmer que le rapport d_{OX}/d_{XY} est unique.
Pour un ensemble espace quelconque, l'angle entre deux ensembles droite n'est pas unique même si ce rapport doit respecter certaines contraintes.

Les postulats d'Euclide, et le théorème de Thalès peuvent laisser penser que pour la géométrie Euclidienne deux droites ont l'une vis à vis de l'autre un angle unique. Cette affirmation peut être formalisée dans une proposition ci-dessous.

Proposition Euclidienne :
Deux ensembles segment de droite ont l'un vis à vis de l'autre un seul angle. Pour deux ensembles segment de droite (OA) et (OB) $\forall\ X, Y \in (AB)\ et\ Z \in (BC)$ et $X \neq Y$:

$$alors\ pour\ d_{OX} = d_{OZ} = d_{OY}\ ,le\ rapport\ d_{XZ}/d_{ZY} est\ unique$$

Contrairement à la proposition Euclidienne, l'espace que nous décrivons avec la théorie des ensembles ne nous permet pas d'affirmer que l'angle entre deux ensembles droite est à priori unique. Par contre, il existe entre deux droites un ensemble de contraintes liés aux distances géométriques qui va contraindre le rapport de distance entre les deux droites. Ces contraintes vont dépendre de l'ensemble des distances géométriques de notre ensemble espace. C'est pour cela que les angles seront définis entre des points et non entre des droites.

Définition somme d'angle aigu :

Deux ensembles droite (O,A,B), (O',A',B') sécant en A=A' ou B=B' alors les angles AÔO' et l'angle A'Ô'O sont inférieurs à deux droits, si pour des points AB choisis tel que :

$$d_{OA} = d_{OB} \; et \; d_{O'A'} = d_{O'B'}$$

$$alors \; d_{OA'} + d_{O'A} < d_{OB'} + d_{O'B}$$

Problème des parallèles :

Ou est le point d'intersection, du côté A ou du côté B ?
Il existe trois conditions, deux sur les ensembles droites et une condition sur la somme des angles. Nous allons voir les positions du point d'intersection compatible avec les conditions d'angle et de droite.

Position de l'intersection en B (=B') :

1/ Equation d'angle

$$d_{OA'} + d_{O'A} < d_{OB'} + d_{O'B}$$

Si l'intersection est en B alors

$$d_{O'B'} = d_{O'B} \; et \; d_{OB} = d_{OB'}$$

$$d_{OA'} + d_{O'A} < d_{OB} + d_{O'B'}$$

comme $d_{OA} = d_{OB} \; et \; d_{O'A'} = d_{O'B'}$

$$d_{OA'} + d_{O'A} < d_{OA} + d_{O'A'} \; equation1$$

2/ Condition sur les droites

Comme (A,O,B) est une droite alors le plus court chemin passe par BOA ou B'OA

$$d_{B'O} + d_{OA} < d_{BO'} + d_{O'A}$$

Comme (O',A',B') est une droite alors le plus court chemin passe par B'O'A' ou BO'A'

$$d_{BO'} + d_{O'A'} < d_{B'O} + d_{OA'}$$

addition

$$d_{BO'} + d_{O'A'} + d_{B'O} + d_{OA} < d_{BO'} + d_{O'A} + d_{B'O} + d_{OA'}$$

d'ou

$$d_{O'A'} + d_{OA} < d_{O'A} + d_{OA'}$$

ce qui est en contradiction avec l'équation 1

$$d_{OA'} + d_{O'A} < d_{OA} + d_{O'A'}$$

Du côté de B (du côté de la somme des angles inférieurs à deux droits) les droites ne peuvent pas se croiser.

Evidement de l'autre côté l'inégalité est respectée. Si les angles sont droit alors l'égalité ($d_{O'A'} = d_{O'B'}$, $d_{OA'} = d_{OB}$) ne peut pas être équivalente à une inégalité, dans ce cas il n'y a donc pas de point d'intersection (d'un côté ou de l'autre).
L'axiome des parallèles est démontrée par l'absurde en effet, on a montré que le point B ne peut être équivalent au point B'. Cette démonstration n'est pas démontrable avec une figure, car il n'est physiquement pas possible de construire sur un plan une figure impossible.
La démonstration est possible, car nous avons recours à une notation littérale qui représente la quantité de distance entre A et B séparément des deux points A et B. Cela permet de créer des hypothèses de figures fausses et donc d'utiliser le raisonnement par l'absurde.

3 Propriétés algébriques

Les sous-ensembles de l'espace segment, sphère ont des propriétés algébriques particulières. Ces propriétés sont assez simples à décrire, car nous n'avons qu'un seul type de variable dans ces ensembles. Comme dans la géométrie Euclidienne, nous allons utiliser les propriétés de ces sous-ensembles pour décrire les propriétés de l'espace.

3.1 Addition dans un sous-ensemble droite

Il est difficile de décrire les propriétés de l'espace de l'ensemble des distances nous allons créer des sous-ensembles ayant des propriétés particulières.

Définition de la droite :
Une droite est un ensemble de distances entre des points alignés. L'ensemble des distances de la droite est un sous-ensemble de l'espace qui comprend un ensemble de distance ($d_{AB}, d_{AC}, \ldots, d_{AN}, d_{BC}$) dont les points sont alignés.$\forall X \in ensembledroite(AB)$ alors X satisfait une des équations suivantes :

$$d_{AB} = d_{AX} + d_{XB} \; ou \; d_{AX} = d_{AB} + d_{BX} \; ou \; d_{BX} = d_{BA} + d_{AX}$$

Cet ensemble est intéressant, car les distances des points alignés ont des distances additionnables. Si l'on additionne les différentes distances entre les points d'une droite on devrait retrouver la distance entre des points éloignés. Le sous-ensemble droite pourrait être simplifié afin de ne contenir qu'un nombre limité de distance, mais pour cela, il faut comprendre comment les points sont organisés dans l'ensemble droite.

3.2 Position des points alignés

Le but est d'exprimer l'ensemble des distances de la droite avec le plus petit nombre de distances possibles. Pour exprimer n'importe quelle distance, il est nécessaire que tous les distances aient un même point de référence

Définition du point de référence :
Le point de référence d'un sous-ensemble droite est le point présent dans l'ensemble des distances géométriques.

Par exemple pour l'ensemble $E(d_{BX}, d_{CX}, d_{DX}, ...)$ X est le point de référence. Ce point de référence nous permet de donner une valeur de la distance pour n'importe quel point en utilisant les formules de l'alignement par exemple

$$d_{BC} = d_{AB} + d_{AC} \; ou \; d_{BC} = -d_{AB} + d_{AC} \; ou \; d_{BC} = d_{AB} - d_{AC}$$

Définition du point d'extrémité :
Pour avoir un point de référence efficace, on peut prendre un point extrême qui correspond à la plus grande distance de l'ensemble $E(d_{AB}, d_{AC}, d_{AD}, d_{CB}, d_{DB}...)$.

Par exemple si d_{AZ} est la plus grande distance, nous pouvons prendre A comme point de référence et enlever toutes les distances ne contenant pas le point A, de l'ensemble droite.
On peut ainsi classer les distances du sous-ensemble $E(d_{AB}, d_{AC}, d_{AD}, ...)$ dans un ordre croissant vis-à-vis d'un point de référence. Les distances peuvent être ordonnées suivant la valeur de la distance vis à vis d'un point par exemple:

$$d_{AB} < d_{AC} < d_{AD} < ... < d_{AX} < d_{AY} < d_{AZ}$$

Une fois un classement de ce type réalisé, il est possible trouver la formule de n'importe quelle distance (d_{BC}) en fonction de distance ayant un point de référence (A). En effet la formule $d_{BC} = d_{AC} - d_{AB}$ est applicable suivant la définition de l'alignement, car d_{AC} est la plus grande distance d'ou $d_{AC} = d_{AB} + d_{BC}$ est la formule applicable car :
1./ d_{AC} est plus grand que d_{AB} suivante le classement.
2./ d_{AC} est plus grand que d_{BC} car sinon d_{BZ} serait plus grand que d_{AZ} . En effet, nous avons classé en fonction de la plus grande distance d_{AZ} d'ou $d_{AZ} = d_{AC} + d_{CZ} > d_{BC} + d_{CZ}$.

Le sous-ensemble $E(d_{AB}, d_{AC}, d_{AD}, ...)$ réalisé avec un point d'extrémité comme point de référence est très efficace, car cela permet de trouver une distance quelconque sur la droite à partir d'un ensemble de distances limités. Souvent, l'ensemble des points n'est pas fini et il est difficile de connaître la plus grande distance, il est alors impossible de trouver un point d'extrémité et il faut trouver une solution alternative.

Problème du sens :
La plus grande distance n'est pas toujours déterminée ce qui aboutit à ne pas savoir quelle expression mathématique est juste ($d_{BC} = d_{AC} - d_{AB} \; ou \; d_{BC} = -d_{AC} + d_{AB}$).

Ce qui ne nous permet pas d'exprimer la distance de manière systématique. Pour obtenir une expression mathématique systématique, il faut exprimer la variation de signe dans l'expression mathématique. Il faut donc remplacer ou compléter la variable distance avec une variable ayant un signe.
On va définir la variable chemin c_{XY} comme étant la composé de la variable de distance d_{XY} ($d_{XY} \in \mathbb{N}^+$, ou $\mathbb{Q}^+$, ou $\mathbb{R}^+$,) et de la variable signe (s) avec $s_{XY} \in E(1,-1)$ et $s_{XY} = -s_{YX}$ tel que : $c_{XY} = s_{XY} * d_{XY}$, d'ou $c_{XY} \in \mathbb{N}$, ou $\mathbb{Q}$, ou $\mathbb{R}$,.
En effet compte tenu du sens, il faut remarquer que $c_{AC} = c_{AB}+c_{BC}$ est différent de $c_{AC} = c_{BA} + c_{BC}$. Nous choisissons une convention du signe naturel qui nous permet d'additionner les chemins en utilisant un point de référence O tel que le chemin de B à C est équivalent au chemin de B à O plus le chemin de O à C, soit :

$$c_{BC} = c_{BO} + c_{OC}$$

Définition de l'origine et de l'orientation :
Nous pouvons définir la position qui est la distance au point de référence. Ces positions par rapport au point de référence permettent de définir l'ensemble des distances. Nous pouvons enlever toutes les distances ne contenant pas le point O de l'ensemble des distances de la droite. En effet, toutes les distances de l'ensemble peuvent être retrouvées, car elles sont exprimées avec une équation unique, quelle que soit la distance entre les points B et C :

$$c_{BC} = c_{OC} - c_{OB}$$

L'ensemble des chemins de la droite $E(\ldots, c_{OB}, ..., c_{OC}, \ldots, c_{OQ}, ...)$ peut être exprimé avec l'ensemble des distances $E(\ldots, d_{OB}, .., d_{OC}, \ldots, d_{OQ}, ...)$ et l'ensemble des signes $E(\ldots, s_{OB}, ..., s_{OC}, ..., s_{OQ}, ...)$. Pour définir les éléments (c), il est nécessaire de déterminer les signes (s) associés aux distances (d).

Pour cela, on peut classer les distances en fonction de leur éloignement des extrémités (A):

$$d_{AB} < d_{AC} < d_{AD} ... d_{AX} < d_{AY} < d_{AZ}$$

On peut organiser les signes en fonction des distances les plus importantes. Il y a trois cas suivant que les soient plus grande ou plus petite que d_{AO} :
1./ $d_{NP} > d_{OP}, d_{ON}$ alors $d_{NP} = +d_{OP} + d_{ON}$ avec $c_{NP} = c_{OP} - c_{ON}$ soit $s_{OP} > 0$ et $s_{ON} < 0$
2./ $d_{OQ} > d_{BQ}, d_{OP}$ alors $d_{PQ} = +d_{OQ} - d_{OP}$ avec $c_{PQ} = c_{OQ} - c_{OP}$ soit $s_{OQ} > 0$ et $s_{OP} > 0$
3./ $d_{OM} > d_{ON}, d_{NM}$ alors $d_{NM} = -d_{ON} + d_{OM}$ avec $c_{NM} = c_{ON} - c_{OM}$ soit $s_{ON} < 0$ et $s_{OM} < 0$

Avec la convention $s_{NP} * d_{NP} = s_{OP} * d_{OP} - s_{ON} * d_{ON}$, les signes (s_{XY}) sont positifs pour des distances inférieures à (d_{AO}) et les signes (s_{XY}) sont positifs pour des distances supérieures à (d_{AO}) . Le même raisonnement peut être fait en prenant l'autre extrémité (Z), la distance de référence devient (d_{ZO}) produisant naturellement des signes inversés.

Définition de l'ensemble droite :
L'ensemble de position des points $E_{position}(...c_{ON}, c_{OP}, c_{OQ}, \dots)$ est réalisé avec les variables $(c) \in \mathbb{R}$ et l'ensemble des distances de la droite $E_{droite} = (...d_{OB}, d_{OC}, ...d_{ON}, d_{OP}, d_{OQ} \dots)$ avec $(d) \in \mathbb{R}^+$ et l'ensemble des signes de la droite$E_{signe}(...s_{ON}, s_{OP}, s_{OQ} \dots)$ avec $(s) \in (1, -1)$, il est possible de retrouver l'ensemble des distances $E_{distance}(d_{AB}....d_{ON}, \dots d_{ZB})$ de la droite grâce à l'équation :

$$s_{NP} * d_{NP} = s_{OP} * d_{OP} - s_{ON} * d_{ON} \; ou \; c_{NP} = c_{OP} - c_{ON}$$

La valeur (c_{OX}) du sous-ensemble droite permet de définir une position d'un point sur une droite, c'est-à-dire d'un point vis à vis des autres points de la droite. Il est aussi nécessaire de différencier les points d'une droite vis à vis des autres droites.

Différentiation des droites :
Il est possible d'avoir un point commun appartenant à deux sous-ensembles droites distincts. Pour distinguer ces deux sous-ensembles droite on va indiquer une direction. Cette direction sera symbolisé par un vecteur orientation $(\vec{o})$ sans dimension, tel que :
pour O, A, B non alignés alors : $o_{\vec{OA}} \neq o_{\vec{OB}}$

Cette différentiation des droites est intéressant dans le sens ou elle permet de montrer que les contraintes algébriques des droites ne sont applicable qu'a l'intérieur de l'ensemble droite.
Mais pour trouver les rapports entre les droites il est possible dutiliser la proposition Euclidienne qui défini que les droites ont un unique angle, une unique direction tel que:

Pour O, A, B alignés alors : $o_{\vec{OA}} = o_{\vec{OB}}$
OA est aligné avec AO et AB avec BA : $o_{\vec{OA}} = o_{\vec{AO}}$ et $o_{\vec{AB}} = o_{\vec{BA}}$

Cette manière de noter les directions des sous-ensembles droite permet d'opérer des opérations adaptées au sous-espace, par exemple l'addition des segments de droite. Cela permet aussi de repérer les sous-espaces qui ne sont pas additionnables entre eux.

3.3 Axiomes de Peano

Il est utile de comprendre les règles que vont devoir respecter les opérations de bases avec les ensembles droite. Nous allons développer les propriétés correspondant aux règles de composition interne et externe afin de pouvoir évaluer les similitudes et les différences avec les règles applicables aux espaces vectoriels.

La distance entre deux points :
La distance entre deux points ne dépend pas du parcours du chemin le long des points, mais uniquement de la distance du chemin entre le point de départ et le point d'arrivée.
La distance du chemin de A à B est défini comme équivalent à la distance du chemin de A à C puis de C à B quels que soient le point C.
Cette affirmation peut être résumé en une équation du chemin proche de la relation de Chasles, mais qui présente une notation différente, l'idée générale étant exactement la même.

$$c_{\vec{AB}} = o_{\vec{AC}} + o_{\vec{AB}}$$

Avec : $c_{\vec{AB}}, o_{\vec{AC}}, o_{\vec{AB}}$ chemin de AB, AC, CB.

Nous savons additionner dans un sous-ensemble droite. Nous allons voir comment additionner suivant deux sous-ensembles ayant deux directions distinctes. Dans un premier temps, nous démontrerons les règles algébriques de calculs applicables aux chemins notamment les règles d'associativités et de distributivités.

Associativité
La distance du chemin du point A au point A :

$$c_{\vec{AA}} = c_{AA} * o_{\vec{AA}} = 0 * o_{\vec{AA}} = 0$$

La distance du chemin du point A au point A est l'élément neutre, car la distance de A à A est nulle et qu'il n'y a pas d'orientation ou de signe de A à A. Une manière de prouver cela est aussi de dire que suivant la définition de la distance le plus court chemin de A à A est toujours inférieur à la plus petites distances de A à X car $d_{AA} < d_{AX} + d_{XA}$ comme la plus petite distance égal 0 alors la distance de A à A égal 0.

Le chemin de A à B vis à vis du chemin de B à A :

$$c_{\vec{AB}} = s_{AB} * d_{AB} * o_{\vec{AB}} = -s_{BA} * d_{AB} * o_{\vec{AB}}$$

Le chemin de A à B est le négatif de B à A, car le signe de A vers B est inverse de celui de B vers A.

Addition dans les deux sens. En effet suivant l'équation du Chasles :
$c_{\vec{AB}} + o_{\vec{BC}} = o_{\vec{AC}}$ et $c_{\vec{BC}} + o_{\vec{AB}} = -(c_{\vec{BC}} + o_{\vec{AB}}) = -o_{\vec{AC}}$, d'ou
$c_{\vec{AB}} + o_{\vec{BC}} = c_{\vec{BC}} + o_{\vec{AB}}$

Addition avec un élément nul ne change pas le résultat en effet $o_{\vec{AA}} + c_{\vec{AB}} = o_{\vec{AB}}$. Suivant l'équation du Chasles la distance du chemin n'est pas modifié.

Addition avec un élément de signe opposé $c_{\vec{AB}} - c_{\vec{AB}} = c_{\vec{AB}} + c_{\vec{BA}} = c_{\vec{AA}} = 0$. Suivant équation de Chasles la distance du chemin est nul si l'on revient au point de départ.

Pas d'ordre préférentiel des opérations d'addition $c_{\vec{AB}} + (c_{\vec{BC}} + c_{\vec{CD}}) = (c_{\vec{AB}} + c_{\vec{BC}}) + c_{\vec{CD}}$. Suivant équation de Chasles : $c_{\vec{AB}} + (c_{\vec{BC}} + c_{\vec{CD}}) = c_{\vec{AB}} + c_{\vec{BD}} = c_{\vec{AD}}$ et $(c_{\vec{AB}} + c_{\vec{BC}}) + c_{\vec{CD}} = c_{\vec{AC}} + c_{\vec{CD}} = c_{\vec{AD}}$

Les opérations du chemin ont les propriétés de la loi de composition interne des espaces vectoriels en effet : $0 + \vec{c} = \vec{c}, \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}, (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}), \vec{u} + \vec{u'} = 0$ avec $\vec{u}$ élément opposé au vecteur $\vec{u'}$. Mais les ensembles de distances géométriques ont d'autres propriétés que certains espaces vectoriels ne respectent pas, notamment l'axiome des parallèles.

<u>Distributivité</u>
Nous avons vu les règles d'addition, nous allons voir les règles du produit suivant différentes directions :

La règle du produit avec l'unité. Le chemin de A à C est équivalent à une fois le chemin de A à C. En effet le chemin de A à C est équivalent à la distance du chemin dans la direction et dans le sens de A à C. Et 1 fois la distance de A à C est équivalent à la distance de A à C d'où : $1*c_{\vec{AC}} = 1*c_{AC}*o_{\vec{AC}} = c_{\vec{AC}}$

$(\lambda * \mu)$ fois le chemin de A à C est équivalent à (μ) fois le chemin de A à C fois (λ). En effet le chemin de A à C est équivalent à la distance du chemin dans la direction et dans le sens de A à C. Et $(\lambda * \mu)$ fois la distance de A à C est équivalent à la (λ) fois la distance de A à C fois (μ) d'où :

$$(\lambda * \mu) * c_{\vec{AC}} = \lambda * \mu * c_{AC} * o_{\vec{AC}} = \lambda * (\mu * c_{AC}) * o_{\vec{AC}} = \lambda * (\mu * c_{\vec{AC}})$$

$$soit\ (\lambda * \mu) * c_{\vec{AC}} = \lambda * (\mu * c_{\vec{AC}})$$

Si le chemin de A à C est multiplié par $(\lambda + \mu)$ alors il est équivalent à (λ) fois le chemin de A à C plus (μ) fois le chemin de A à C. En effet, le chemin de A à C est équivalent à la distance du chemin dans la direction et dans le sens (AC). Et $(\lambda + \mu)$ fois la distance de A à C est équivalent à (λ) fois la distance de A à C plus (μ) fois la distance de A à C d'où :

$(\lambda + \mu) * c_{\vec{AC}} = (\lambda + \mu) * c_{AB} * o_{\vec{AB}} = (\lambda * c_{AB} + \mu * c_{AB}) * o_{\vec{AB}} = \lambda * c_{AB} * o_{\vec{AB}} + \mu * c_{AB} * o_{\vec{AB}} = \lambda * c_{\vec{AB}} + \mu * c_{\vec{AB}}$

Un cas plus complexe, il faut essayer de comprendre la distributivité sur des chemins qui n'ont pas la même orientation par exemple, si le chemin de A à B et de B à C est multiplié par (λ) alors il est équivalent au chemin de A à B multiplié par (λ) et au chemin de B à C multiplié par (λ).

$$\lambda * (c_{\vec{AB}} + c_{\vec{BC}}) = \lambda * c_{\vec{AB}} + \lambda * c_{\vec{BC}}$$

Dans le cas trivial ou (ABC) sont alignés alors

$\lambda * (c_{\vec{AB}} + c_{\vec{BC}}) = \lambda * (c_{AB} + c_{BC}) * o_{\vec{AB}} = (\lambda * c_{AB} + \lambda * c_{BC}) * o_{\vec{AB}} = \lambda * c_{AB} * o_{\vec{AB}} + \lambda * c_{BC} * o_{\vec{AB}} = \lambda * c_{AB} * o_{\vec{AB}} + \lambda * c_{BC} * o_{\vec{BC}} = \lambda * c_{\vec{AB}} + \lambda * c_{\vec{BC}}$

Dans le cas général, c'est-à-dire que A, B, et C ne sont pas alignés, nous ne pouvons pas dire que les chemins sont additionnables suivant différentes orientations. Dans le cas général, il faut avoir une démonstration différente. Nous allons voir le cas où la valeur ($\lambda = N$ avec $N \in \mathbb{N}$) alors :
$N * (c_{\vec{AB}} + c_{\vec{BC}}) = (c_{\vec{AB}} + c_{\vec{BC}}) + ... + (c_{\vec{AB}} + c_{\vec{BC}}) = N * (c_{\vec{AB}}) + N * (c_{\vec{BC}})$

Pour $(r, \lambda) \in \mathbb{R}$ il faut remarquer que λ est distributif avec les nombres naturels $\mathbb{N}$ et que les nombre naturel $\mathbb{N}$ est distributif avec les chemins alors λ est distributif avec les chemins :

$$r * N * (c_{\vec{AB}} + c_{\vec{BC}}) = r * N * (c_{\vec{AB}}) + r * N * (c_{\vec{BC}})$$

Les opérations du chemin sont relativement similaires à la loi de composition externe des espaces vectoriels tel que :
$1 * \vec{c} = \vec{c}$, $(l * m) * \vec{c} = l * (m * \vec{c})$, $(l + m) * \vec{u}) = l * \vec{u} + m * \vec{u}$ et l*$\vec{u} + \vec{v}) = l * \vec{u} + l * \vec{v}$

Les opérations du chemin sont associatives et distributives, soit des caractéristiques comparables aux axiomes de Peano (composition interne et externe) des espaces vectoriels. Par contre, les espaces vectoriels n'ont pas toutes les contraintes des distances géométriques et notamment l'axiomes des parallèles. Avec ces opérations, nous allons pouvoir établir plus facilement les propriétés algébriques et trigonométriques de cet espace.

3.4 Produit des sous-ensembles droite

Le produit de distances dans deux sous-ensembles droite n'est pas assimilable à une simple multiplication de distance car l'espacement entre les deux sous-ensembles droites n'est pas directement proportionnelle à la distance. Pour évaluer le produit, nous allons utiliser l'inégalité triangulaire, et les propriétés des chemins.

Produit :
Pour comprendre le produit dans deux directions, il est plus simple d'utiliser le concept d'unité représentant une direction et un signe. On pose l'unité ($\vec{u}$) comme état la composition de l'orientation ($\vec{o}$) et du signe (s) soit::

$$u_{\vec{XY}} = s_{XY} * o_{\vec{XY}}$$

. N'importe quel chemin dans n'importe quelle direction est donc égal à :
$\vec{c}_{AB} = d_{AB} * s_{AB} * \vec{o}_{AB}$, $\vec{c}_{AB} = d_{AB} * u_{\vec{AB}}$, $c_{AB} = d_{AB} * s_{AB}$
On peut lier cette notation à une notation de norme et de valeur absolu:

$$d_{AB} = |c_{AB}| = ||\vec{c}_{AB}||$$

Les opérations pour les éléments alignés $d \in \mathbb{R}$, et $s \in E(1,-1)$, et la direction $(\vec{o})$ est à définir ainsi que le vecteur unité $(\vec{u})$. La multiplication peut être posée ainsi :

$$(\vec{c}_{AB} * \vec{c}_{BC}) = (d_{AB} * d_{BC}) * (\vec{u}_{AB} * u_{\vec{BC}})$$

$$(\vec{u}_{AB} * u_{\vec{BC}}) = \frac{(c_{\vec{AB}} * c_{\vec{BC}})}{(d_{AB} * d_{BC})}$$

Cette équation définie notre produit d'unité, elle correspond aussi au cosinus dans les espaces euclidien $(cos(\alpha) = (\vec{c}_{AB} * c_{\vec{BC}})/(d_{AB} * d_{BC})\ )$. Le produit ne nous est pas connu, mais nous allons essayer de voir l'étendu du produit respectant l'inégalité triangulaire de l'ensemble espace.

Étendu du produit :

L'équation du chemin$(c_{\vec{AC}} = c_{\vec{AB}} + c_{\vec{BC}})$ doit répondre aux contraintes de la distance. Suivant l'inégalité du plus court chemin alors :

$$|d_{AB} - d_{AC}| \leq ||(c_{\vec{AB}} + c_{\vec{BC}})|| \leq (d_{AB} + d_{AC})$$

$$(d_{AB} - d_{AC})^2 \leq (c_{\vec{AB}} + c_{\vec{BC}})^2 \leq (d_{AB} + d_{AC})^2$$

En faisant le produit de deux chemins vecteurs alors :

$$d_{AB}^2 - 2*d_{AB}*d_{BC} + d_{BC}^2 \leq c_{\vec{AB}}^{\ 2} + 2*c_{\vec{AB}}*c_{\vec{BC}} + c_{\vec{BC}}^{\ 2} \leq d_{AB}^2 + 2*d_{AB}*d_{BC} + d_{BC}^2$$

$$d_{AB}^2 - 2*d_{AB}*d_{BC} + d_{BC}^2 \leq d_{AB}^2 + 2*u_{\vec{AB}}*u_{\vec{BC}}*d_{AB}*d_{BC} + d_{BC}^2 \leq d_{AB}^2 + 2*d_{AB}*d_{BC} + d_{BC}^2$$

$$-d_{AB} * d_{BC} \leq d_{AB} * d_{BC} * u_{\vec{AB}} * u_{\vec{BC}} \leq d_{AB} * d_{BC}$$

$$-1 \leq u_{\vec{AB}} * u_{\vec{BC}} \leq 1$$

Nous voyons l'étendu du produit dans deux directions différentes. Quand le produit est égal à 1 ou -1 cela correspond à un ensemble droite. Ce produit correspond aussi à l'étendue de la fonction $cos(\alpha)$ quel que soit α.

4 Calculs trigonométriques & algébriques

Nous allons calculer le produit pour deux sous-ensembles ayant des directions différentes.

4.1 Pythagore

Nous allons prendre un cas particulier de points de deux ensembles droite (AB), (BC) ayant un produit nul :

$$u_{\vec{AB}} * u_{\vec{BC}} = 0$$

:

Le produit nul est conforme à l'étendu du produit $-1 \leq u_{\vec{AB}} * u_{\vec{BC}} \leq 1$. Dans ces conditions de produit nul l'ensemble droite (AB) sera dit perpendiculaire à l'ensemble droite (BC) ce qui correpond à ($cos(\alpha) = 0$) alors :

$$c_{\vec{AC}}{}^2 = (c_{\vec{AB}} + c_{\vec{BC}})^2$$

$$d_{AC}^2 = d_{AB}^2 - 2 * d_{AB} * d_{BC} * u_{\vec{AB}} * u_{\vec{BC}} + d_{BC}^2$$

$$d_{AC}^2 = d_{AB}^2 + d_{BC}^2$$

Cette équation correspond au théorème de Pythagore, et est conforme à l'inégalité du plus court chemin $|d_{AC} - d_{CB}| \leq d_{AC} \leq d_{AB} + d_{BC}$. Nous pouvons la réécrire afin de faire apparaître le cosinus et le sinus. Le cosinus correspond au rapport du côté adjacent à l'angle sur l'hypothénuse, et le sinus correspond au rapport du côté opposé à l'angle sur l'hypoténuse :

$$1 = (\frac{d_{AB}}{d_{AC}})^2 + (\frac{d_{BC}}{d_{AC}})^2$$

Ce qui correspond à l'équation $1 = cos^2(\alpha) + sin^2(\alpha)$, et à la définition du cosinus et du sinus.

La distance entre les points présent dans deux ensembles droite (AB) (BC) dont les directions ont un produit nul peut être exprimée en reprenant l'équation précédente.

$$d_{AC} = \sqrt{d_{AB}^2 + d_{BC}^2}$$

4.2 Théorème du cosinus

Il faut traiter le cas général ou les directions des droites (AB) et (BC) sont quelconques. Nous allons montrer comment les ensembles et la trigonométrie correspondent.

Conjecture : Pour ABC un triangle quelconque alors on peut trouver un point C' tel que (ABC') alignés et ABC' perpendiculaire à CC'. Pour trois ensembles droite (AB), (BC), (AC) il est possible de trouver un point C' $\in$ ensemble droite (AB) et tel que $u_{\vec{AB}} * u_{\vec{CC'}} = 0$ alors :

$$1 = (\frac{d_{C'A}}{d_{AC}})^2 + (\frac{d_{C'C}}{d_{AC}})^2,\ d_{BC}^2 = d_{BC'}^2 + d_{C'C}^2$$

comme ABC' alignés alors $c_{BC'} = -c_{AB} + c_{AC'}$ d'ou $d_{BC'} = |-c_{AB} + c_{AC'}|$

$$d_{BC}^2 = (-c_{AB} + c_{AC})^2 + d_{C'C}^2$$

$$d_{BC}^2 = c_{AB}^2 - 2 * c_{AB} * c_{AC'} + c_{AC'}^2 + d_{C'C}^2$$
$$d_{BC}^2 = d_{AB}^2 - 2 * c_{AB} * c_{AC'} + d_{AC'}^2 + d_{C'C}^2$$
$$d_{BC}^2 = d_{AB}^2 - 2 * c_{AB} * c_{AC'} * \frac{d_{AC}}{d_{AC}} + d_{AC}^2 * \frac{d_{AC'}^2}{d_{AC}^2} + d_{AC}^2 * \frac{d_{C'C}^2}{d_{AC}^2}$$
$$d_{BC}^2 = d_{AB}^2 - 2 * d_{AB} * d_{AC} * s_{AB} * s_{AC'} * \frac{d_{AC'}}{d_{AC}} + d_{AC}^2$$

Soit équivalent au théorème du cosinus ($a^2 = b^2 - 2 * bc * cos(\alpha) + c^2$) avec a, b, c côté du triangle et $|cos(\alpha)| = d_{AC'}/d_{AC}$ à un signe près. Il faut montrer que le produit $s_{AB} * s_{AC'}$ à le même signe que $cos(\alpha)$.
Ce qui revient à chercher quand le produit change de signe soit quand $s_{AC'}$ n'a pas le même signe s_{AB}. Le produit change de signe quand $d_{BC'} = d_{AB}$ soit quand l'angle $(\vec{AB}\vec{AC})$ est obtus .

L'intérêt de l'équation est qu'il est possible de retrouver les distances avec des points appartenant à deux ensembles droites ayant des directions quelconques. Nous pouvons exploiter cette caractéristique afin de généraliser le concept de distance et de position.

4.3 Coordonnées généralisées

Nous avons vu les propriétés algébriques des sous-ensembles droite et des sous-ensembles plan. Dans le sous-ensemble droite (OX), n'importe quelle distance correspond à l'addition de deux distances du sous-ensemble. D'où la position de B, C peut être défini par une unique distance vis à vis d'un point de référence et d'un signe.

Pour une droite
La position sur une droite dépend uniquement de la distance à un point de référence et un signe d'où :

$$c_{BC} = c_{OC} - c_{OB}$$

avec : $c_{OX} = d_{OX} * s_{OX}$, $s \in (1, -1)$ et $d \in \mathbb{R}^+$,$c \in \mathbb{R}$

De la même manière, nous pouvons décrire les propriétés de positions pour un plan.

Pour un plan
Dans le sous-ensemble plan (OAX), n'importe quel chemin est l'addition de deux chemins dans deux directions différentes, pour chaque direction une distance est l'addition de deux distances du sous-ensemble. D'où la position de X par rapport à la référence O est une position dépendant de deux nombres réels.

$$c_{\vec{OX}} = c_{\vec{OA}} + c_{\vec{AX}} \ , \ c_{\vec{OX}} = c_{OA} * o_{\vec{OA}} + c_{AX} * o_{\vec{AX}}$$

avec OA perpendiculaire AX : $o_{\vec{OA}} * o_{\vec{AX}} = 0 \; et \; d^2_{OX} = d^2_{OA} + d^2_{AX}$

Les distances sont des combinaisons linéaires en une dimension pour l'ensemble droite ou en deux dimensions pour l'ensemble plan. Suivant le même principe, on peut imaginer un sous-ensemble plus grand étant une combinaison linéaire dans trois directions.

Pour un volume

$$c_{\vec{OX}} = c_{\vec{OA}} + c_{\vec{AB}} + c_{\vec{X}}$$

$$o_{\vec{OA}} * o_{\vec{AB}} = 0 \; , \; o_{\vec{OA}} * o_{\vec{XB}} = 0 \; , \; o_{\vec{AB}} * o_{\vec{BX}} = 0$$

$$alors \; d^2_{OX} = d^2_{OA} + d^2_{AX} \; et \; d^2_{AX} = d^2_{AB} + d^2_{BX} \; d'ou \; d^2_{OX} = d^2_{OA} + d^2_{AB} + d^2_{BX}$$

Suivant le même principe, on peut imaginer un ensemble plus grand étant une combinaison linéaire de N directions.

Pour un volume N dimensions

$$c_{\vec{OX}} = c_{\vec{OA}} + c_{\vec{AB}} + ... + c_{\vec{MX}}$$

$$o_{\vec{OA}} * o_{\vec{AB}} = 0 \; , \; o_{\vec{OA}} * o_{\vec{BC}} = 0 \; , ..., \; o_{\vec{NM}} * o_{\vec{MX}} = 0$$

$$alors \; d^2_{OX} = d^2_{OA} + d^2_{AX} \; et \; d^2_{AX} = d^2_{AB} + d^2_{BX}, \; etc,$$

$$d'ou \; d^2_{OX} = d^2_{OA} + d^2_{AB} + ... + d^2_{MX}$$

Cette notation permet d'exprimer la position des points uniquement avec des nombres. La position r_{OX} peut être exprimée par un ensemble de nombres $r_{\vec{OX}} = [c_{OA}, c_{AB}, ..., c_{MX}]$. L'algèbre privilégie cette notation. En utilisant cette notation, l'algèbre s'abstrait de la notation symbolique. Elle remplace les symboles par des coordonnées permettant d'identifier tous les points.
La notation par coordonnées et le systématisme du calcul algébrique par les ordinateurs a favorisé l'utilisation de l'algèbre dans les raisonnements géométriques et dans les algorithmes.
Les ensembles de distances géométriques et les espaces vectoriels peuvent être décrit avec de nombreuses dimensions. Bien que les ensembles de distances géométriques et les espaces vectoriels aient des propriétés communes, les deux espaces ne sont pas assimilables. Les propriétés des ensembles de distances géométriques sont plus des espaces Euclidien alors que les espaces vectoriels ne sont pas forcément Euclidien.

5 Propriétés de l'espace physique

Contrairement aux espaces vectoriels et aux ensembles de distances géométriques, l'espace physique a un nombre limité de dimensions. Il est difficile de trouver les raisons algébriques ou géométriques justifiant le nombre limité de dimension. Par contre des démonstrations physiques existent et montrent que l'espace physique est limité à un nombre fixe de dimension.

5.1 Nombre de dimensions

Les démonstrations du nombre limité de dimension se base sur la constante du flux d'une force. Le flux de la force traversant une surface doit être constant quel que soit la distance au point générateur de cette force. Suivant l'expression de la force, il est possible de déterminer le nombre de dimension de notre espace. Par exemple en physique classique, les forces électromagnétiques et de gravité étant des fonctions inverses de la distance $(1/r^2)$ alors pour que le flux soit constant, le flux doit traverser une surface (r^2) en deux dimensions. L'espace est en trois dimensions, une dans la direction du flux et deux correspondant à la surface traversée.
Nous pouvons adapter cette idée à la géométrie des espaces physiques, en remplaçant le concept de force par le concept d'accélération. L'accélération de gravité selon Hook est de la forme $(1/r^2)$ et l'accélération électromagnétique étant aussi de la forme $(1/r^2)$ la surface doit être de la forme (r^2) pour que le flux d'accélération soit constant.

Au delà de la démonstration du nombre dimensions ce raisonnement est intéressant, car il imagine la géométrie comme dépendant du mouvement des objets dans l'espace. Il ne s'agit pas de changer la géométrie en fonction de la relativité de nos observations, mais de découvrir les propriétés géométriques de l'espace à travers l'interactions physiques des objets.

5.2 Contraintes cinématiques

Nous allons tester les propriétés géométriques vis à vis de la cinématique. Lorsque l'on décrit le déplacement des particules dans l'espace, on impose à l'espace des propriétés cinématiques. En effet quand les particules se déplacent dans l'espace, nous supposons que les propriétés de l'espace s'appliquent aux distances, mais aussi aux vitesses, et aux d'accélérations.
Si les distances peuvent être additionnées dans l'espace alors les vitesses et les accélérations doivent aussi pouvoir être additionnées dans l'espace.
La vitesse étant la dérivée de la distance suivant le temps et l'accélération étant la dérivée de la vitesse suivant le temps, nous pouvons formaliser les additions de distances, de vitesses et d'accélérations ainsi :

$$c_{\vec{OY}}(t) = c_{\vec{OX}}(t) + c_{\vec{XY}}(t),\ c'_{\vec{OY}}(t) = c'_{\vec{OX}}(t) + c'_{\vec{XY}}(t),\ c''_{\vec{OY}}(t) = c''_{\vec{OX}}(t) + c''_{\vec{XY}}(t)$$

Nous allons choisir deux directions $o\vec{_{OX}}$, $o\vec{_{XY}}$ perpendiculaires ainsi nous exprimons $c(\vec{t})$ $s(\vec{t})$ avec des fonctions dérivables c(t), les fonctions correspondent à une géométrie Euclidienne précédement décrite.

$c\vec{_{OY}}(t) = c_{OX}(t)o\vec{_{OX}} + c_{XY}(t)o\vec{_{XY}}$

$$\frac{c_{OY}}{d_{OY}}o\vec{_{OY}} = \frac{c_{OX}(t)}{d_{OY}}o\vec{_{OX}}+\frac{c_{XY}(t)}{d_{OY}}o\vec{_{XY}},\ soit\ \frac{c_{OY}(t)}{d_{OY}}o\vec{_{OY}} = cos(t)o\vec{_{OX}}+sin(t)o\vec{_{XY}}$$

$$\frac{c'_{OY}(t)}{d_{OY}}o\vec{_{OY}} = \frac{c'_{OX}(t)}{d_{OY}}o\vec{_{OX}}+\frac{c'_{XY}(t)}{d_{OY}}o\vec{_{XY}},\ soit\ \frac{c'_{OY}(t)}{d_{OY}}o\vec{_{OY}} = cos(t)'o\vec{_{OX}}+sin(t)'o\vec{_{XY}}$$

$$\frac{c'_{OY}(t)}{d_{OY}}o\vec{_{OY}} = -sin(t)o\vec{_{OX}}+cos(t)o\vec{_{XY}}$$

$$\frac{c''_{OY}(t)}{d_{OY}}o\vec{_{OY}} = \frac{c''_{OX}(t)}{d_{OY}}o\vec{_{OX}}+\frac{c''_{XY}(t)}{d_{OY}}o\vec{_{XY}},\ soit\ \frac{c''_{OY}(t)}{d_{OY}}o\vec{_{OY}} = -sin(t)'o\vec{_{OX}}+cos(t)'o\vec{_{XY}}$$

$$\frac{c''_{OY}(t)}{d_{OY}}o\vec{_{OY}} = -cos(t)o\vec{_{OX}}-sin(t)o\vec{_{XY}}$$

$$\frac{c''_{OY}(t)}{d_{OY}}o\vec{_{OY}} = -cos(t)o\vec{_{OX}}-sin(t)o\vec{_{XY}}$$

$$d'ou\ c''_{OY}(t)o\vec{_{OY}} = -c_{OY}(t)o\vec{_{OY}}$$

$$d'ou\ c''''_{OY}(t) = c_{OY}(t)$$

On peut résoudre l'équation différentielle $c''(t) = -c(t)$ avec une méthode formelle. On calcule le $\Delta = a^2-4b$ (pour l'équation différentielles y"+ ay'+by=0) soit$\Delta = -4$ d'ou il n'y a pas de solution réel, mais des solutions complexes : $r_1 = (-a - S\Delta)/2\ et\ r_2 = (-a + S\Delta)/2\ soit\ r_1 = i\ et\ r_2 = -i$

Soit la fonction des solutions dans les nombres complexes :

$$c_{OY}(t) = \lambda_1 e^{-it} + \lambda_2 e^{it}; avec; \lambda_1\ et\ \lambda_2 \in \mathbb{C}$$

Pour vérifier nous allons tester une solution simple e^{it} sur la formule de base. $\frac{c_{OY}(t)}{d_{OY}}o\vec{_{OY}} = cos(t)o\vec{_{OX}} + sin(t)o\vec{_{XY}}$ nous obtenons:

$$c_{OY}(t)o\vec{_{OY}} = d_{OY} * cos(t)o\vec{_{OX}} + d_{OY} * sin(t)o\vec{_{XY}}$$

$$e^{it}o\vec{_{OY}} = cos(t)o\vec{_{OX}} + sin(t)o\vec{_{XY}}$$

Si l'on développe le cosinus et le sinus et l'exponentiel suivant la formule de Taylor :

$$e^{it} = (1 + it - \frac{t^2}{2!} - i\frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + i\frac{t^5}{5!} - \frac{t^6}{6!}...)$$
$$cos(t) = (1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!}...)$$
$$sin(t) = (t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!}...)$$

$$(1+it-\frac{t^2}{2!}-i\frac{t^3}{3!}+\frac{t^4}{4!}+i\frac{t^5}{5!}-\frac{t^6}{6!}...)*o_{\vec{O}Y} = (1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}-\frac{t^6}{6!}...)o_{\vec{O}X}+(t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}-...)o_{\vec{X}Y}$$

L'ensemble (OY) est représenté par un nombre complexe. Dans le plan complexe la partie imaginaire n'est pas additionnable avec la partie réel, de la même manière les directions $o_{\vec{O}X}$ et $o_{\vec{X}Y}$ ne sont pas additionnables. Pour représenter des directions non additionnables, il convient d'associer les imaginaires avec une direction et les réel avec une autre direction, par exemple en prenant $o_{\vec{O}X} = 1 \; et \; o_{\vec{X}Y} = i$. Ce qui correspond à la formule d'Euler :

$$e^{it} = cos(t) + i * sin(t)$$

La formule d'Euler est intéressante, car elle permet de retrouver la plupart des formules trigonométriques dans les espace Euclidien. L'exemple développé exprime le fait que l'on peut exprimer une distance, une vitesse une accélération à l'aide de deux directions. Cette transposition dans les complexes est possible uniquement dans les conditions du plan (OXY) que l'on a défini au départ de cette exercice.

Dans l'absolu, il serait interessant de développer la solution générale($s_{OY}(t) = \lambda_1 e^{-it} + \lambda_2 e^{it}$) des équations différentielles. Le but n'est pas de développer cette géométrie, mais juste de montrer que la cohérence physique dépend du point de vue que l'on s'est donnée. Si l'on se focalise sur la mesure, l'approche relativiste semble pertinente, mais avec des distances géométriques l'approche de la géométrie Euclidienne semble cohérente avec la cinématique.

Les propriétés physiques des espaces peuvent être construits sur des concepts cinématiques. Ce concept cinématique n'est pas nouveau mais il a plus été employé avec une approche subjective relativiste. Mais peut tout à fait être utilisé dans une approche basée sur la distance entre des objets physiques.

6 Conclusion

Le concept de distance géométrique et la définition de notre ensemble espace permettent de retrouver les équivalents des axiomes d'Euclide. La proposition Euclidienne, de l'unicité de l'angle entre deux ensembles droite, nous permet de retrouver un équivalent des axiomes de Peano des espaces vectoriels.

Nous avons retrouvé les concepts généraux applicables à la géométrie et certaines propriétés des espaces vectoriels grâce à la théorie des ensembles. Cette théorie est suffisamment générale pour éclairer le concept d'espace d'un point de vue algébrique ou géométrique.
La théorie des ensembles crée un lien simple et explicite entre la géométrie Euclidienne et les géométries algébriques. L'avancé est théorique mais aussi pratique.

La géométrie est transformée en problème logique, utilisant uniquement deux types de variables, les variables d'observation de la mesure représentée par des nombres et les variables désignant des objets, des points, représentées symboliquement par des lettres, du texte. Cette articulation entre objet et mesure, entre le texte et le nombre permet d'utiliser indifféremment le calcul algébrique et la logique géométrique.
Comme pour la géométrie algébrique, il est possible de réaliser des calculs algébriques, mais il est aussi possible d'utiliser la théorie des ensembles en utilisant les opérations sur les ensembles (intersection, réunion, différences). L'utilisation de la théorie des ensembles en géométrie a le défaut de devoir nommer tous les points caractéristiques. Par contre cette méthode à l'avantage de pouvoir répéter la même routine de calcul algorithmique, ce qui permet de réutiliser un même raisonnement géométrique une même logique géométrique afin d'économiser du calcul algébrique.

La géométrie algébrique est extrêmement efficace pour trouver des solutions par le calcul et ces calculs peuvent être réalisés par des ordinateurs, car elle a un nombre limité d'opération (+, -, *, /) et les méthodes algébriques sont très répétitives ce qui facilite la programmation.
Par contre ces méthodes ont tendance à multiplier les calculs, ce qui a tendance a être consommateur en temps. Pour accélérer le processus, les processeurs graphiques (GPU) multiplient les calculs parallélisés. La théorie proposée permet d'envisager d'autres solutions.
Nous pourrions exploiter mathématiquement les propriétés des ensembles et des portes logiques textuelles afin de chercher une efficacité calculatoire. En effet, les calculs algébriques nécessitent énormément de processus logique alors que l'application de la théorie des ensembles est très économe en processus logique.