Proof of the existence of dark numbers
(bilingual version)

W. Mückenheim
University of Applied Sciences Augsburg
wolfgang.mueckenheim@hs-augsburg.de

Abstract: We will prove by means of Cantor's mapping between natural numbers and positive fractions that his approach to actual infinity implies the existence of numbers which cannot be applied as defined individuals. We will call them dark numbers.

1. Outline of the proof

(1) We assume that all natural numbers are existing and are indexing all integer fractions in a matrix of all positive fractions.
(2) Then we distribute, according to Cantor's prescription, these indices over the whole matrix. We observe that in every step prescribed by Cantor the set of indices does not increase and the set of not indexed fractions does not decrease.
(3) Therefore it is impossible to index all fractions in a definable way. Indexing many fractions together "in the limit" would be undefined and can be excluded according to section 2 below. Reducing the discrepancy step by step would imply a first event after finitely many steps.
(4) In case of a complete mapping of $\mathbb{N}$ into the matrix, i.e., when every index has entered its final position, only indexed fractions are visible in the matrix.
(5) We conclude from the invisible but doubtless present not indexed fractions that they are attached to invisible positions of the matrix.
(6) By symmetry considerations also the first column of the matrix and therefore also $\mathbb{N}$ contains invisible, so-called dark elements.
(7) Hence also the initial mapping of natural numbers and integer fractions cannot have been complete. Bijections, i.e., complete mappings, of actually infinite sets and $\mathbb{N}$ are impossible.

2. Rejecting the limit idea

When dealing with Cantor's mappings between infinite sets, it is argued usually that these mappings require a "limit" to be completed or that they cannot be completed. Such arguing has to be rejected flatly. For this reason some of Cantor's statements are quoted below.

"If we think the numbers *p/q* in such an order [...] then every number *p/q* comes at an absolutely fixed position of a simple infinite sequence" [E. Zermelo: "Georg Cantor – Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts", Springer, Berlin (1932) p. 126]

"The infinite sequence thus defined has the peculiar property to contain the positive rational numbers completely, and each of them only once at a determined place." [G. Cantor, letter to R. Lipschitz (19 Nov 1883)] "thus we get the epitome (ω) of all real algebraic numbers [...] and with respect to this order we can talk about the νth algebraic number where not a single one of this epitome (ω) has been forgotten." [E. Zermelo: "Georg Cantor – Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts", Springer, Berlin (1932) p. 116]

"such that every element of the set stands at a definite position of this sequence" [E. Zermelo: "Georg Cantor – Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts", Springer, Berlin (1932) p. 152]

The clarity of these expressions is noteworthy: all and every, completely, at an absolutely fixed position, νth number, where not a single one has been forgotten.

"In fact, according to the above definition of cardinality, the cardinal number $\underline{M}$ remains unchanged if in place of an element or of each of some elements, or even of each of all elements m of M another thing is substituted." [E. Zermelo: "Georg Cantor – Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts", Springer, Berlin (1932) p. 283]

This opportunity will be utilized to replace the pairs of the bijection by matrices or to attach a matrix to every pair of the bijection, respectively.

3. The proof

If all positive fractions m/n are existing, then they all are contained in the matrix

$$\begin{matrix} 1/1, & 1/2, & 1/3, & 1/4, & ... \\ 2/1, & 2/2, & 2/3, & 2/4, & ... \\ 3/1, & 3/2, & 3/3, & 3/4, & ... \\ 4/1, & 4/2, & 4/3, & 4/4, & ... \\ 5/1, & 5/2, & 5/3, & 5/4, & ... \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix} .$$

If all natural numbers k are existing, then they can be used as indices to index the integer fractions $m/1$ of the first column. Denoting indexed fractions by X and not indexed fractions by O, we obtain the matrix

$$\begin{matrix} X & O & O & O & ... \\ X & O & O & O & ... \\ X & O & O & O & ... \\ X & O & O & O & ... \\ X & O & O & O & ... \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix} .$$

Cantor claimed that all natural numbers k are existing and can be applied to index all positive fractions m/n. They are distributed according to

$$k = (m + n - 1)(m + n - 2)/2 + m .$$

The result is a sequence of fractions

1/1, 1/2, 2/1, 1/3, 2/2, 3/1, ...

This sequence is modelled here in the language of matrices. The indices are taken from their initial positions in the first column and are distributed in the given order.

Index 1 remains at fraction 1/1, the first term of the sequence. The next term, 1/2, is indexed with 2 which is taken from its initial position 2/1

XXOO...
OOOO...
XOOO...
XOOO...
XOOO...
⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋱.

Then index 3 is taken from its initial position 3/1 and is attached to 2/1

XXOO...
XOOO...
OOOO...
XOOO...
XOOO...
⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋱.

Then index 4 is taken from its initial position 4/1 and is attached to 1/3

XXXO...
XOOO...
OOOO...
OOOO...
XOOO...
⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋱.

Then index 5 is taken from its initial position 5/1 and is attached to 2/2

XXXO...
XXOO...
OOOO...
OOOO...
OOOO...
⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋱.

And so on. When finally all exchanges of X and O have been carried out and, according to Cantor, all indices have been issued, it turns out that no fraction without index is visible any longer

XXXX...
XXXX...
XXXX...
XXXX...
XXXX...
$\vdots \; \vdots \; \vdots \; \vdots \; \ddots$

but by the process of lossless exchange of X and O *no* O *can have left the matrix as long as finite natural numbers are issued as indices*. Therefore there are not less fractions without index than at the beginning.

We know that all O and as many fractions without index are remaining, but we cannot find any one. Where are they? The only possible explanation is that they are attached to dark positions.

By means of symmetry considerations we can conclude that every column including the integer fractions and therefore also the natural numbers contain dark elements. Cantor's indexing covers only the potentially infinite collection of visible fractions, not the actually infinite set of all fractions. This concerns also every other attempt to index the fractions and even the identical mapping. Bijections, i.e., complete mappings, of actually infinite sets and $\mathbb{N}$ are impossible.

4. Counterarguments

Now and then it is argued, in spite of the preconditions explicitly quoted in section 2, that a set-theoretical or analytical[1] limit should be applied. This however would imply that all the O remain present in all definable matrices until "in the limit" these infinitely many O have to leave in an undefinable way; hence infinitely many fractions have to become indexed "in the limit" such that none of them can be checked – contrary to the proper meaning of indexing.

Some set theorists reject it as inadmissible to "limit" the indices by starting in the first column. But that means only to check that the set of natural numbers has the same size as the set of integer fractions. In contrast to Cantor's procedure the origin of the natural numbers is remembered. But this – the only difference to Cantor's approach – does not interfere with the indexing prescription and would not destroy the bijection if it really existed.

Finally, the counter argument that in spite of lossless exchange of X and O a loss of O could be tolerated suffers from deliberately contradicting basic logic.

[1] Note that an analytical limit like 0 is approached by the sequence ($1/n$) but never attained. A bijective mapping of sets however must be complete, according to section 2.

Beweis der Existenz dunkler Zahlen

W. Mückenheim
Hochschule Augsburg
wolfgang.mueckenheim@hs-augsburg.de

Abstract: Im Folgenden wird am Beispiel von Cantors Abbildung zwischen natürlichen Zahlen und positiven Brüchen bewiesen, dass seine Sichtweise aktual unendlicher Mengen die Existenz von nicht individuell verwendbaren Zahlen impliziert. Wir wollen sie dunkle Zahlen nennen.

1. Grundzüge des Beweises

(1) Wir nehmen an, dass alle natürlichen Zahlen existieren und alle ganzzahligen Brüche in einer Matrix aller positiven Brüche indizieren.
(2) Dann verteilen wir diese Indizes nach Cantors Vorschrift über die gesamte Matrix. Dabei ergibt sich, dass in jedem der von Cantor vorgegebenen Schritte die Menge der Indizes nicht zu- und die Menge der nicht indizierten Brüche nicht abnimmt.
(3) Also ist es nicht möglich, alle Brüche definierbar zu indizieren. Eine gemeinsame Indizierung vieler Brüche "im Grenzfalle" wäre undefinierbar und kann nach dem folgenden Abschnitt 2 ausgeschlossen werden. Eine schrittweise Verminderung der Diskrepanz im Verlauf der Folge würde hingegen eine erste Verminderung nach endlich vielen Schritten erfordern.
(4) Bei vollständiger Abbildung von $\mathbb{N}$ in die Brüche, d.h. wenn jeder Index seinen endgültigen Platz bezogen hat, sind in der Matrix aber nur indizierte Brüche erkennbar.
(5) Nun schließen wir aus dem Fehlen erkennbarer nicht indizierter Brüche, dass sie sich auf nicht erkennbaren Positionen innerhalb der Matrix befinden.
(6) Aus Symmetrieüberlegungen ergibt sich, dass auch die erste Spalte der Matrix und damit auch die Menge der natürlichen Zahlen nicht erkennbare, sogenannte dunkle Elemente enthält.
(7) Bijektionen zwischen aktual unendlichen Mengen und $\mathbb{N}$ können daher nicht existieren.

2. Ausschluss der Limes-Idee

Wenn man Cantors Abbildungen unendlicher Mengen behandelt, so werden stets nur allzubald Argumente angeführt, wonach diese Abbildungen nur im Grenzfalle gelten oder überhaupt niemals vollendet sind. Solche Argumente müssen mit Entschiedenheit zurückgewiesen werden. Es geht im Folgenden ausschließlich um Cantors Behauptungen, die hier zu diesem Zwecke eingefügt werden.

"Werden nun die Zahlen *p/q* in einer solchen Reihenfolge gedacht, [...] so kommt jede Zahl *p/q* an eine ganz bestimmte Stelle einer einfach unendlichen Reihe," [E. Zermelo: "Georg Cantor – Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts", Springer, Berlin (1932) S. 126]

"Die so definirte unendliche Reihe hat nun das merkwürdige an sich, sämmtliche positiven rationalen Zahlen und jede von ihnen nur einmal an einer bestimmten Stelle zu enthalten." [G. Cantor, Brief an R. Lipschitz (19 Nov 1883)] "so erhält man den Inbegriff (ω) aller reellen algebraischen Zahlen [...] und kann mit Rücksicht auf diese Anordnung von der νten algebraischen Zahl reden, wobei keine einzige aus dem Inbegriffe (ω) vergessen ist." [E. Zermelo: "Georg Cantor – Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts", Springer, Berlin (1932) S. 116]

"so daß jedes Element der Menge an einer bestimmten Stelle dieser Reihe steht" [E. Zermelo: "Georg Cantor – Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts", Springer, Berlin (1932) S. 152]

Man beachte diese an Klarheit nichts zu wünschen übrig lassenden Formulierungen: sämtliche, alle, und jede an einer bestimmten Stelle, νte Zahl, wobei keine einzige vergessen ist.

"In der Tat bleibt nach der obigen Definition der Mächtigkeit die Kardinalzahl $\underline{M}$ ungeändert, wenn an Stelle eines Elementes oder auch an Stelle mehrerer, selbst aller Elemente m von M je ein anderes Ding substituiert wird." [E. Zermelo: "Georg Cantor – Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts", Springer, Berlin (1932) S. 283]

Diese Möglichkeit werden wir ausnützen, um die Paare der Bijektion durch Matrizen zu ersetzen bzw. an jedes Paar der Bijektion eine Matrix anzuschließen.

3. Beweis

Wenn alle positiven Brüche m/n existieren, dann befinden sich alle in der Matrix

$$\begin{array}{lllll}
1/1, & 1/2, & 1/3, & 1/4, & ... \\
2/1, & 2/2, & 2/3, & 2/4, & ... \\
3/1, & 3/2, & 3/3, & 3/4, & ... \\
4/1, & 4/2, & 4/3, & 4/4, & ... \\
5/1, & 5/2, & 5/3, & 5/4, & ... \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \ .
\end{array}$$

Wenn alle natürlichen Zahlen k existieren, dann können wir sie verwenden, um damit die Ganzzahlbrüche m/1 in der ersten Spalte zu indizieren. Bezeichnen wir indizierte Brüche mit X und nicht indizierte mit O, so ergibt sich die Matrix

$$\begin{array}{lllll}
X & O & O & O & ... \\
X & O & O & O & ... \\
X & O & O & O & ... \\
X & O & O & O & ... \\
X & O & O & O & ... \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \ .
\end{array}$$

Cantor behauptet, dass alle natürlichen Zahlen k existieren und verwendet werden können, um alle positiven Brüche m/n zu indizieren. Das erfolgt nach der Formel

$$k = (m + n - 1)(m + n - 2)/2 + m$$

und ergibt eine Folge von Brüchen

1/1, 1/2, 2/1, 1/3, 2/2, 3/1, 2/2, ...

Diese Folge wird hier als eine Folge von Matrizen modelliert. Wir verteilen die Indizes aus der ersten Spalte nach Cantors Vorschrift in der Matrix, so dass die Brüche in der gegebenen Reihenfolge indiziert werden.

Der Index 1 bleibt bei 1/1, dem ersten Term der Folge. Der nächste Term, 1/2, erhält den Index 2, der seiner Ausgangsposition 2/1 entnommen wird

XXOO...
OOOO...
XOOO...
XOOO...
XOOO...
⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋱ .

Dann wird der Index 3 von 3/1 für die Indizierung von 2/1 verwendet

XXOO...
XOOO...
OOOO...
XOOO...
XOOO...
⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋱ .

Dann wird der Index 4 von 4/1 für die Indizierung von 1/3 verwendet

XXXO...
XOOO...
OOOO...
OOOO...
XOOO...
⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋱ .

Dann wird der Index 5 von 5/1 für die Indizierung von 2/2 verwendet

XXXO...
XXOO...
OOOO...
OOOO...
OOOO...
⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋱ .

Und so weiter. Nach Abschluss der Indizierung, d.h. bei vollständiger Abbildung von $\mathbb{N}$ in die Brüche, wobei jeder Index seinen endgültigen Platz bezogen hat

$$\begin{matrix} X & X & X & X & \ldots \\ X & X & X & X & \ldots \\ X & X & X & X & \ldots \\ X & X & X & X & \ldots \\ X & X & X & X & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix},$$

stellt sich heraus, dass in der Matrix nur noch indizierte Brüche X erkennbar sind, aber kein Bruch ohne Index. Doch ist klar, dass durch den Prozess des verlustlosen Austauschens von X und O *kein* O *die Matrix verlassen kann, solange nur natürliche Zahlen als Indizes verwendet werden*. Also sind nicht weniger Brüche ohne Index in der Matrix als am Anfang.

Wir wissen, dass alle O und ebensoviele Brüche ohne Index in der Matrix noch vorhanden sind, können aber keinen einzigen finden. Die einzig mögliche Erklärung dafür ist, dass sie sich an dunklen Positionen befinden.

Aufgrund von Symmetrieüberlegungen können wir schließen, dass jede Spalte einschließlich der Ganzzahlbrüche und daher auch die natürlichen Zahlen selbst dunkle Elemente enthalten. Cantors Indizierung betrifft nur die potentiell unendliche Kollektion aller sichtbaren Brüche, nicht aber die aktual unendlichen Menge aller Brüche. Dies gilt ebenso für jede andere Indizierungsmethode, ja sogar für die identische Abbildung. Bijektionen, also vollständige Abbildungen, zwischen aktual unendlichen Mengen und $\mathbb{N}$ sind nicht möglich.

4. Gegenargumente

Zuweilen wird behauptet, dass trotz der in Abschnitt 2 explizit zitierten Voraussetzungen die Verwendung eines mengentheoretischen oder analytischen[1] Grenzwertes erforderlich sei. Das bedeutet jedoch, dass alle O in allen definierten Matrizen enthalten sind, bis sie "im Grenzfalle" die Matrix-Folge in nicht nachprüfbarer Weise verlassen. Daraus ergibt sich, dass "im Grenzfalle" unendlich viele Brüche indiziert werden, ohne dass einer von ihnen einen identifizierbaren Index erhielte – im Gegensatz zur eigentlichen Bedeutung des Begriffs Indizierung.

Manche Vertreter der Mengenlehre halten es für unzulässig, die Menge der natürlichen Zahlen mit Hilfe der Ganzzahlbrüche der ersten Spalte zu "limitieren". Es handelt sich jedoch lediglich darum sicherzustellen, dass die Menge der natürlichen Zahlen genau so groß wie die Menge der Ganzzahlbrüche ist. Der einzige Unterschied zu Cantors Verfahren besteht also darin, dass im vorliegenden Falle auch die Herkunft der natürlichen Zahlen festgehalten wird. Dies bedeutet aber keine Beeinträchtigung der Indizierungsvorschrift und würde eine Bijektion nicht zerstören, wenn sie tatsächlich bestände.

Der Einwand schließlich, dass bei einem verlustlosen Austausch von O und X doch Verluste erfolgen könnten, verstößt eklatant gegen die Grundlagen der Logik.

---

[1] Man beachte, dass ein analytischer Grenzwert wie 0 von der Folge $(1/n)$ angestrebt, aber niemals erreicht wird. Eine bijektive Abbildung zwischen Mengen soll dagegen nach Abschnitt 2 vollständig abgeschlossen sein.