Формальное доказательство законов де Моргана для булевых алгебр

Эльмар Гусейнов (elmarguseinov@yahoo.com)

01.10.21

Чтобы не допустить путаницы по ходу изложения, далее мы будем использовать не самые распространённые обозначения известных понятий. Отметим, что законами де Моргана в логике являются теоремы $\neg(x+y)=(\neg x)\cdot(\neg y)$, $\neg(x\cdot y)=(\neg x)+(\neg y)$, относящиеся ко множеству $\{0,1\}$ с определённой на нём дизъюнкцией $x+y$, конъюнкцией $x\cdot y$ и отрицанием $\neg x$. Убедиться в истинности приведённых предложений можно посредством таблиц истинности. В свою очередь законами де Моргана, например, в теории конечных множеств являются теоремы $\iota\backslash(x\cup y)=(\iota\backslash x)\cap(\iota\backslash y)$, $\iota\backslash(x\cap y)=(\iota\backslash x)\cup(\iota\backslash y)$, относящиеся к булеану конечного множества ι с определённым на нём объединением $x\cup y$, пересечением $x\cap y$ и разностью $x\backslash y$. Доказательство в этом случае опирается на принцип экстенциональности $x\subseteq y, y\subseteq x\Rightarrow x=y$.

Заметим, что обе рассмотренные структуры являются булевыми алгебрами, т.е. удовлетворяют следующим аксиомам:

1. $x\vee(y\vee z)=(x\vee y)\vee z$
2. $x\wedge(y\wedge z)=(x\wedge y)\wedge z$
3. $x\vee y=y\vee x$
4. $x\wedge y=y\wedge x$
5. $x\vee(x\wedge y)=x$
6. $x\wedge(x\vee y)=x$
7. $x\vee(y\wedge z)=(x\vee y)\wedge(x\vee z)$
8. $x\wedge(y\vee z)=(x\wedge y)\vee(x\wedge z)$
9. $x\vee\overline{x}=\mathbf{1}$
10. $x\wedge\overline{x}=\mathbf{0}$

В случае с логикой мы полагаем $x\vee y=x+y$, $x\wedge y=x\cdot y$, $\overline{x}=\neg x$, $\mathbf{0}=0$, $\mathbf{1}=1$, в случае со множествами – $x\vee y=x\cup y$, $x\wedge y=x\cap y$, $\overline{x}=\iota\backslash x$, $\mathbf{0}=\emptyset$, $\mathbf{1}=\iota$. Из сделанного замечания следует, что доказательство теорем $\overline{x\vee y}=\overline{x}\wedge\overline{y}$, $\overline{x\wedge y}=\overline{x}\vee\overline{y}$ для булевых алгебр избавляет нас от необходимости осуществлять доказательства, упомянутые вначале. Более того, нам не придётся доказывать законы де Моргана всякий раз, когда на соответствующей структуре может быть определена булева алгебра.

Начнём, таким образом, с доказательства соотношений $\mathbf{0} \vee x = \mathbf{1} \wedge x = x \vee x = x \wedge x = x$, $\mathbf{1} \vee x = \mathbf{1}$, $\mathbf{0} \wedge x = \mathbf{0}$. Имеем:

11. $\mathbf{0} \vee x = x \vee \mathbf{0}$ [3]
12. $\mathbf{0} \vee x = x \vee (x \wedge \overline{x})$ [10, 11]
13. $\mathbf{0} \vee x = x$ [5, 12]

14. $\mathbf{1} \wedge x = x \wedge \mathbf{1}$ [4]
15. $\mathbf{1} \wedge x = x \wedge (x \vee \overline{x})$ [9, 14]
16. $\mathbf{1} \wedge x = x$ [6, 15]

17. $x \vee x = x \vee (x \wedge \mathbf{1})$ [4, 16]
18. $x \vee x = x$ [5, 17]

19. $x \wedge x = x \wedge (x \vee \mathbf{0})$ [3, 13]
20. $x \wedge x = x$ [6, 19]

21. $\mathbf{1} \vee x = \mathbf{1} \vee (\mathbf{1} \wedge x)$ [16]
22. $\mathbf{1} \vee x = \mathbf{1}$ [5, 21]

23. $\mathbf{0} \wedge x = \mathbf{0} \wedge (\mathbf{0} \vee x)$ [13]
24. $\mathbf{0} \wedge x = \mathbf{0}$ [6, 23]

Покажем далее, что $(\overline{x} \wedge \overline{y}) \vee \overline{x \vee y} = (\overline{x} \wedge \overline{y}) \wedge \overline{x \vee y}$:

25. $(x \vee y) \vee \overline{x \vee y} = \mathbf{1}$ [9]
26. $(\overline{x} \wedge \overline{y}) \wedge \Big((x \vee y) \vee \overline{x \vee y}\Big) = (\overline{x} \wedge \overline{y}) \wedge \mathbf{1}$ [25]
27. $(\overline{x} \wedge \overline{y}) \wedge \Big((x \vee y) \vee \overline{x \vee y}\Big) = \overline{x} \wedge \overline{y}$ [4, 16, 26]
28. $\Big((\overline{x} \wedge \overline{y}) \wedge (x \vee y)\Big) \vee \Big((\overline{x} \wedge \overline{y}) \wedge \overline{x \vee y}\Big) = \overline{x} \wedge \overline{y}$ [8, 27]
29. $\Big(\big((\overline{x} \wedge \overline{y}) \wedge x\big) \vee \big((\overline{x} \wedge \overline{y}) \wedge y\big)\Big) \vee \Big((\overline{x} \wedge \overline{y}) \wedge \overline{x \vee y}\Big) = \overline{x} \wedge \overline{y}$ [8, 28]
30. $(\overline{x} \wedge \overline{y}) \wedge \overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$ [2, 4, 10, 13, 24, 29]

31. $(\overline{x} \wedge \overline{y}) \vee \mathbf{0} = \overline{x} \wedge \overline{y}$ [3, 13]
32. $(\overline{x} \wedge \overline{y}) \vee \left((x \vee y) \wedge \overline{x \vee y}\right) = \overline{x} \wedge \overline{y}$ [10, 31]
33. $\left((\overline{x} \wedge \overline{y}) \vee (x \vee y)\right) \wedge \left((\overline{x} \wedge \overline{y}) \vee \overline{x \vee y}\right) = \overline{x} \wedge \overline{y}$ [7, 32]
34. $\left(\left((\overline{x} \wedge \overline{y}) \vee x\right) \vee y\right) \wedge \left((\overline{x} \wedge \overline{y}) \vee \overline{x \vee y}\right) = \overline{x} \wedge \overline{y}$ [1, 33]
35. $\left((x \vee \overline{y}) \vee y\right) \wedge \left((\overline{x} \wedge \overline{y}) \vee \overline{x \vee y}\right) = \overline{x} \wedge \overline{y}$ [3, 7, 9, 16, 34]
36. $(\overline{x} \wedge \overline{y}) \vee \overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$ [1, 3, 9, 16, 22, 35]

37. $(\overline{x} \wedge \overline{y}) \vee \overline{x \vee y} = (\overline{x} \wedge \overline{y}) \wedge \overline{x \vee y}$ [30, 36]

Покажем, что 37 влечёт $\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$, для чего докажем следующую лемму.

<u>Лемма 1.</u> Для булевых алгебр истинно утверждение $x \vee y = x \wedge y \Rightarrow x = y$.

<u>Доказательство</u>

3

a. $x \vee y = x \wedge y$ [гипотеза]
b. $x \vee (x \wedge y) = x \vee (x \vee y)$ [a]
c. $x = x \vee (x \vee y)$ [5, b]
d. $x = x \vee y$ [1, 18, c]
e. $y \wedge (y \vee x) = y \wedge (y \wedge x)$ [3, 4, a]
f. $y = y \wedge (y \wedge x)$ [6, e]
g. $y = x \wedge y$ [2, 4, 20, f]
h. $x = y$ [a, d, g]
i. $x \vee y = x \wedge y \Rightarrow x = y$ [a, h]

■

Отсюда получаем первый закон де Моргана:

38. $\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$ [37, Лемма 1]

В заключение докажем закон двойного отрицания $\overline{\overline{x}} = x$ и применим его к 38:

39. $\overline{x} \vee \overline{\overline{x}} = \mathbf{1}$ [9]
40. $\left(\overline{x} \vee \overline{\overline{x}}\right) \wedge x = x$ [16, 39]
41. $\left(\overline{x} \vee \overline{\overline{x}}\right) \wedge x = x \wedge \overline{\overline{x}}$ [4, 8, 10, 13]
42. $x \wedge \overline{\overline{x}} = x$ [40, 41]
43. $\overline{x} \wedge \overline{\overline{x}} = \mathbf{0}$ [10]
44. $\left(\overline{x} \wedge \overline{\overline{x}}\right) \vee x = x$ [13, 43]
45. $\left(\overline{x} \wedge \overline{\overline{x}}\right) \vee x = x \vee \overline{\overline{x}}$ [3, 7, 9, 16]
46. $x \vee \overline{\overline{x}} = x$ [44, 45]
47. $x \vee \overline{\overline{x}} = x \wedge \overline{\overline{x}}$ [42, 46]
48. $\overline{\overline{x}} = x$ [47, Лемма 1]

49. $\overline{\overline{\overline{x} \vee \overline{y}}} = \overline{\overline{\overline{x}} \wedge \overline{\overline{y}}}$ [38]
50. $\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$ [48, 49]

Можно заметить, что утверждение 38 (48) удаётся получить из следующей ослабленной формы Леммы 1, применив её к утверждениям 30, 36 (42, 46).

<u>Лемма 2.</u> Для булевых алгебр истинно утверждение $x \vee y = x, x \wedge y = x \Rightarrow x = y$.

<u>Доказательство.</u> Определим следующие отношения на структуре, удовлетворяющей 1-10:

$$x \rho_1 y \leftrightharpoons x \vee y = y$$

$$x \rho_2 y \leftrightharpoons x \wedge y = x$$

Докажем, что данные отношения совпадают. В самом деле, пусть $x \vee y = y$. Тогда $x \wedge y = x \wedge (x \vee y) =_6 x$. Напротив, при $x \wedge y = x$ получаем $x \vee y = (x \wedge y) \vee y =_{3,4,5} y$.

Пусть теперь $x \vee y = x$ и $x \wedge y = x$. Имеем $x \rho_2 y$, откуда следует $x \rho_1 y$, т.е. $x \vee y = y$. Из последнего непосредственно получаем $x = y$ ■

Рекомендуемая литература

1. N. Bourbaki, Théorie des Ensembles
2. P.G. Hinman, Fundamentals of Mathematical Logic
3. K. Kuratowski, A. Mostowski, Teoria mnogości
4. E. Mendelson, Introduction to Mathematical Logic