Построение абелевых графов

Эльмар Гусейнов (elmarguseinov@yahoo.com)

04.01.21

Замечательной иллюстрацией связи симметрии и теории групп служит доказанная в 1939 г. Робертом Фрухтом теорема о том, что каждая конечная группа G изоморфна группе автоморфизмов некоторого графа [1]. В конструкции Фрухта естественным образом используется граф Кэли G. Однако ещё более простого построения удаётся добиться, если ограничиться абелевыми группами и фундаментальной теоремой конечных абелевых групп (FTFAG), из которой следует возможность представления любой коммутативной группы в виде прямого произведения циклических групп [2].

<u>Определение 1.</u> Пусть m и n – положительные целые числа и $m \geq 2$. Определим (m,n)-клещей и их сердца:

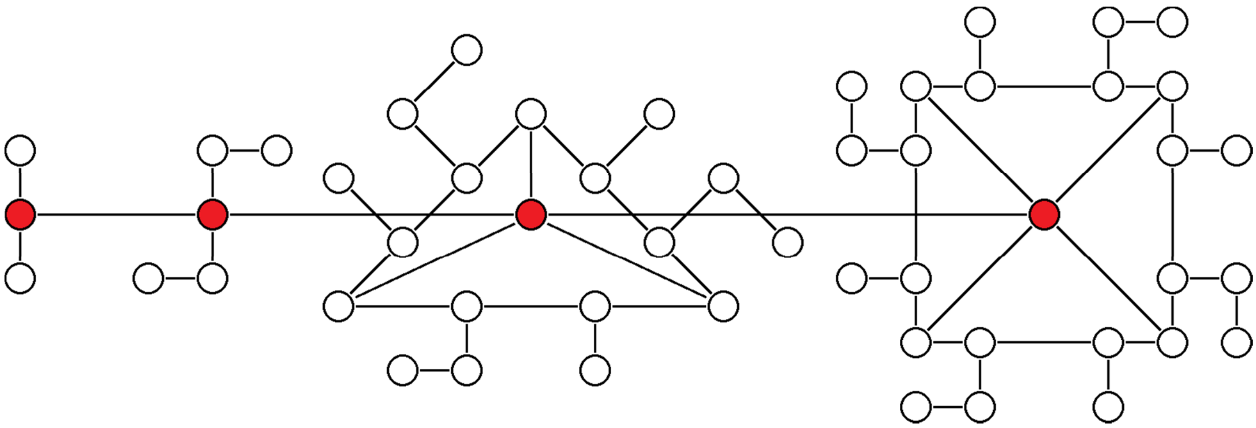
- Если $m = 2$, то (m,n)-клещ – цепь длины $2n$, а сердце – центральная вершина цепи.
- Если $m > 2$, то для получения (m,n)-клеща добавим сперва m рёбер к висячим вершинам $K_{1,m}$, так чтобы образовался m-цикл. После этого к каждому ребру полученного цикла добавим две вершины, от первой из которых проведём цепь длины n, а от второй длины $n+1$, так чтобы при движении по циклу длины цепей чередовались. Сердцем клеща будет центральная вершина $K_{1,m}$.

<u>Определение 2.</u> Пусть (m_1,n_1), …, (m_k,n_k) – пары положительных чисел, такие что $m_1 \geq 2$, …, $m_k \geq 2$. Отрядом (m_1,n_1), …, (m_k,n_k) будем называть граф, полученный соединением рёбрами сердец соседних клещей в последовательности k клещей размера (m_1,n_1), …, (m_k,n_k).

<u>Теорема 1.</u> Каждая нетривиальная конечная абелева группа изоморфна группе автоморфизмов некоторого отряда.

<u>Доказательство.</u> В соответствии с FTFAG каждая рассматриваемая группа G изоморфна некоторому произведению циклических групп, скажем, произведению n_1 циклических групп порядка m_1, …, n_k циклических групп порядка m_k. Нетрудно видеть, что отряд $(m_1,1), \dots, (m_1,n_1), \dots, (m_k,1), \dots, (m_k,n_k)$ обладает группой автоморфизмов, изоморфной G ■

Пример 1. Ниже изображён отряд (2,1), (2,2), (3,1), (4,1), группа автоморфизмов которого изоморфна $C_2 \times C_2 \times C_3 \times C_4$:



Литература

1. R. Frucht, Herstellung von Graphen mit vorgegebener abstrakter Gruppe

2. https://en.wikipedia.org/wiki/Abelian_group#Classification