English version: https://vixra.org/pdf/2205.0150v1.pdf

in Russian

Понятие мультипликала

Дмитрий Владимирович Гурьянов

dmitriigur76@gmail.com

Аннотация. Цель настоящей работы представить и описать понятие математического анализа «Мультипликал». К моему удивлению я пришёл к выводу о том, что к настоящему времени данное понятие в своём прямом и явном виде не сформулировано и не существует среди математических понятий и операторов. Тем не менее существует ряд областей его практического применения, где рассматриваемое понятие подходило бы и потенциально могло быть использовано в своём прямом и явном виде, специально в проводимых статистических, финансово-экономических исследованиях и анализах и во многих других областях. Более того, по моему мнению данное понятие органично вписывается в стройную систему стандартных математических понятий и операторов и должно занять там свое по праву ему причитающееся место. В настоящей статье также затронуты прочие связанные вопросы, сделаны некоторые интересные выводы.

Ключевые слова: Мультипликал, Подмультипликальная функция, Мультиплицирование, Факториал, Фактор-первообразная, Факторирование, Фактор-производная, Арифметический рост функции, Геометрический рост функции, Акселента, Ускорение, Замедление**.**

Следующие связанные статьи:

- Сингулярные свойства
- Анализ гипероператора

Краткое содержание

1. Мультипликал 2
2. Пример использования мультипликала 8
3. Правило согласования произвольного множителя **B** 8
4. Так называемый «непрерывный факториал» 10
5. Геометрический рост функции 12
6. Акселента 15
7. Мультиплицирование при нулевых значениях функции 18

Мультипликал

Понятие математического анализа мультипликал имеет такое же отношение к оператору произведения $\prod$, какое отношение имеет понятие математического анализа «интеграл» к оператору суммирования $\sum$ (как непрерывное к дискретному), а также имеет такое же отношение к понятию интеграл какое отношение имеет оператор произведение к оператору суммирование (как перемножающий к суммирующему). Определение мультипликала подчинено, обусловлено его положением в нижнем правом углу нижеприведённой таблицы, которая при других обстоятельствам могла бы быть ребусом.

Таблица взаимоотношений математических понятий и операторов

	Дискретный	Непрерывный
Суммирующий	$\sum$	$\int$
Перемножающий	$\prod$	$\wr$

Мультипликал - это эквивалент произведения бесконечного количества бесконечно близких к единице, по причине бесконечно малого размера показателя степени, множителей, соответствующих значениям подмультипликальной функции в степени элемента мультиплицирования, и в общем виде записывается следующим образом:

$$F^{\bullet}(\mathrm{x}) = \wr f(\mathrm{x})^{\mathrm{dx}}, \quad (1.1)$$

$$F^{\bullet}(\mathrm{x}) = \bullet\int f(\mathrm{x})^{\mathrm{dx}}, \quad (1.2)$$

где ***f*** – подмультипликальная функция; **dx** – элемент мультиплицирования; $\wr$ - основной знак мультипликала; **•∫** - альтернативный знак мультипликала, используемый в обстоятельствах отсутствия символа основного знака, здесь буллит отличает его от знака интеграла; $\boldsymbol{F^{\bullet}}$ – неопределённый мультипликал или фактор-первообразная ***f***.

$\boldsymbol{F^{\bullet}(x)}$ именуются как «мультипликал ***f*****(x)**» или «мультипликал ***f*****(x)** по **x**».

Действие по поиску неопределённого мультипликала или фактор-первообразной называется «мультиплицированием» функции, обратное действие по поиску фактор-производной называется «факторированием» функции. Факторирование (разложение на коэффициенты - factors) функции имеет такое же отношение к мультиплицированию (умножению коэффициентов) функции, какое отношение имеет дифференцирование (разложение на приращения - differences) функции к интегрированию (складыванию, собиранию приращений) функции. То есть это взаимно обратные операции математического анализа.

Факториал функции f отражает относительное изменение функции с изменением аргумента функции или с изменением элемента мультиплицирования и имеет следующее общее определение:

$$\mathbf{f}f(\mathrm{x}) = \frac{f(\mathrm{x} + \mathbf{d}\mathrm{x})}{f(\mathrm{x})}. \qquad (2)$$

По аналогии с тем как всё подинтегральное выражение ***f*(x)dx** является дифференциалом первообразной **d*F*(x)**, всё подмультипликальное выражение ***f*(x)**$^{\mathbf{dx}}$ является факториалом фактор-первообразной **fF**$^{\bullet}$**(x)**, который в действительности является одним из бесконечного количества бесконечно близких к единице множителей, что были упомянуты в определении мультипликала:

$$F^{\bullet}(\mathrm{x}) = \bullet\int \mathbf{f}\boldsymbol{F}^{\bullet}(\mathbf{x}), \quad (3)$$

По моему мнению в контексте приведённых определений понятие факториал достаточно фундаментально, что бы этим термином именовать **x!.** Далее по тексту настоящей работы и по умолчанию под факториалом не подразумевается **x!.**

Также как и интеграл мультипликал может иметь определённый и неопределённый вид. По аналогии с тем, как при проведении интегрирования в направлении, противоположном росту аргумента **x**, то есть при **dx<0**, значение арифметического знака **d*F*(x)** меняется на противоположное, или другими словами этот дифференциал не прибавляется к результату интегрирования, а вычитается из него, так при проведении мультиплицирования в направлении, противоположном росту аргумента **x** значение **f*F***$^{\bullet}$**(x)** меняется на обратное ему значение, или другими словами проводится не умножение результата мультиплицирования на этот факториал, а деление на него. Таким образом подобно тому, как вычисленный в обратном направлении определённый интеграл противоположен по арифметическому знаку вычисленному в прямом направлении для одного и того же отрезка интегрирования, вычисленный в обратном направлении определённый мультипликал обратный вычисленному в прямом направлении для одного и того же отрезка мультиплицирования при условии непрерывности операции мультиплицирования:

$$\bullet\int_{\mathrm{x}_0}^{\mathrm{x}_1} f(\mathrm{x})^{\mathrm{dx}} = 1/\bullet\int_{\mathrm{x}_1}^{\mathrm{x}_0} f(\mathrm{x})^{\mathrm{dx}}, \quad (4)$$

где $\mathbf{x_0}$ – начальное значение отрезка мультиплицирования; $\mathbf{x_1}$ - конечное значение отрезка мультиплицирования.

Подобно тому, как решение для определённого интеграла может быть выражено через разницу неопределённого интеграла для конечного и начального значениям отрезка интегрирования соответственно, решение для определённого мультипликала может быть выражено через отношение неопределённого мультипликала для конечного к начальному значения отрезка мультиплицирования соответственно:

$$\bullet\int_{\mathrm{x}_0}^{\mathrm{x}_1} f(\mathrm{x})^{\mathrm{dx}} = \frac{F^{\bullet}(\mathrm{x}_1)}{F^{\bullet}(\mathrm{x}_0)}. \qquad (5)$$

Подобно тому, как интеграл суммы или разности равен сумме или разности интегралов соответственно, мультипликал произведения или отношения равен произведению или отношению мультипликалов соответственно:

$$\bullet\int (f_1(\mathrm{x}) \times f_2(\mathrm{x}))^{\mathrm{dx}} = \bullet\int f_1(\mathrm{x})^{\mathrm{dx}} \times \bullet\int f_2(\mathrm{x})^{\mathrm{dx}}, \qquad (6.1)$$

$$\bullet\int \left({f_1(\mathrm{x})}/{f_2(\mathrm{x})} \right)^{\mathrm{dx}} = {\bullet\int f_1(\mathrm{x})^{\mathrm{dx}}}/{\bullet\int f_2(\mathrm{x})^{\mathrm{dx}}}, \qquad (6.2)$$

Подобно тому, как определённый интеграл отрезка равен сумме определённых интегралов составных отрезков без пропусков и при условии одной направленности интегрирования и его непрерывности, определённый мультипликал отрезка равен произведению определённых мультипликалов составных отрезков без пропусков, но при условии его непрерывности и однонаправленности мультиплицирования:

$$\bullet\int_{\mathrm{x}_0}^{\mathrm{x}_2} f(\mathrm{x})^{\mathrm{dx}} = \bullet\int_{\mathrm{x}_0}^{\mathrm{x}_1} f(\mathrm{x})^{\mathrm{dx}} \times \bullet\int_{\mathrm{x}_1}^{\mathrm{x}_2} f(\mathrm{x})^{\mathrm{dx}}, \qquad (7.1)$$

$$\bullet\int_{\mathrm{x}_2}^{\mathrm{x}_0} f(\mathrm{x})^{\mathrm{dx}} = \bullet\int_{\mathrm{x}_1}^{\mathrm{x}_0} f(\mathrm{x})^{\mathrm{dx}} \times \bullet\int_{\mathrm{x}_2}^{\mathrm{x}_1} f(\mathrm{x})^{\mathrm{dx}}. \qquad (7.2)$$

Подмультипликальной функции запрещено иметь отрицательные значения в отрезке интегрирования по двум причинам: во-первых возникает неопределённость знака **f*F*$^\bullet$(x)** при бесконечно малом не обязательно рациональном показателе **dx**, во-вторых, если всё же знак **f*F*$^\bullet$(x)** определён как отрицательный, то все равно бессмысленно представлять мультипликал как произведение бесконечного количества отрицательных множителей, ибо тогда неизбежно возникает неопределённость в чётности или нечётности количества этих множителей, а следовательно и неопределённость состояния положительности или отрицательности результата мультиплицирования. Поэтому в качестве подмультипликальной функции при оказии подставляется модуль анализируемой функции, и по этой же причине отсутствует обозначение модуля функции в записи самого мультипликала, вся ответственность подстановки разрешённого вида функции в качестве подмультипликальной лежит на аналитике.

Интегрирование константы даёт линейную зависимость, в свою очередь мультиплицирование константы даёт показательную зависимость. Неопределённый мультипликал функции f(x) = A имеет следующий общий вид:

$$F^\bullet(\mathrm{x}) = \mathrm{B} \cdot \mathrm{A}^{\mathrm{x}} \quad (8),$$

где **A** - константа, **B** - отличный от нуля конечный произвольный множитель, который необходимо включать в выражение любого неопределённого мультипликала по точной аналогии с тем, как в выражение неопределённого интеграла включают произвольное слагаемое. **B может быть отрицательным**, что даёт нам возможность получить неопределённый мультипликал как функцию, возвращающую свои значения ниже оси абсцисс.

Диапазон для произвольных элементов

Произвольный элемент	Недостижимо малое	Нейтральное	Недостижимо большое
Произвольное слагаемое интеграла **C**	$-\infty$	0	$+\infty$
Модуль произвольного множителя мультипликала **B**	0	1	$+\infty$

Мультипликал можно выразить через интеграл, однако такая запись по определению косвенная и громоздкая, требует две дополнительные операции: возведения числа «**e**» в степень интеграла натурального логарифма исходной функции:

$$F^{\bullet}(x) = e^{\int \ln(f(x))dx}. \quad (9)$$

Тем, кто полагает то, что мультипликал - это излишняя и бесполезная сущность, я предлагаю в равной мере критически подойти и к рассмотрению обоснованности существования оператора произведения $\prod$, поскольку его можно выразить аналогичным образом через оператор суммы $\sum$, и с учётом этого, кто знает, может быть он тоже лишний по их мнению. Выражение может показаться несколько сложным, но принципиально не сложнее выражения мультипликала через интеграл, но главное, работает же:

$$\prod_{i=1}^{N} a_i = sign([a_1; a_2; ..a_N]) \cdot e^{\sum_{i=1}^{N} \ln|a_i|}, \quad (10)$$

где **sign** – вспомогательная функция, возвращающая **–1** в случае, если количество отрицательных множителей в передаваемом в качестве аргумента массиве нечётно, и **+1** в противном случае. В данном случае в «нагрузку» возвращает 0 в случае, если по крайней мере один из множителей массива равен **0**.

Как бы то ни было качестве компромисса мультипликал можно рассматривать как сокращённую запись вышеприведённого записанного с использованием интеграла выражения. Лично сам считаю то, что сокращённая запись интуитивна, первична по сути, является тем, что непосредственно отражает математический смысл проводимой операции. По моему мнению, мультипликал имеет полное право занять своё принадлежащее ему место в стройной системе стандартных математических понятий и операторов, а выражение мультипликала с использованием интеграла является (являлось до сих пор) посредственным выражением в условиях отсутствия требуемого математического аппарата.

Справедливости ради необходимо отметить то, что выражение мультипликала через интеграл дает нам возможность аналитически описать формулы неопределённых мультипликалов для большого числа аналитически заданных функций используя существующие операторы и существующие функции.

Перевод произвольного множителя **B** мультипликала в произвольное слагаемое **C** неопределённого интеграла в посредственном выражении мультипликала $\mathbf{e}^{\int \ln(\mathbf{f}(\mathbf{x}))\mathbf{dx}}$ и обратно осуществляется по следующим формулам:

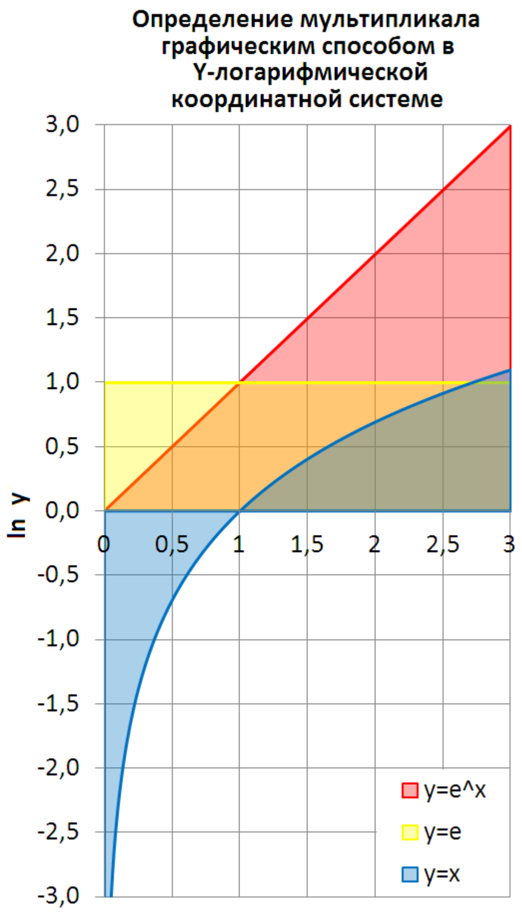
$$C = \ln |B|, \quad (11.1)$$

$$B = \pm e^{C}. \quad (11.2)$$

При $x_0 = x_1$ определённый интеграл возвращает ноль, а определённый мультипликал возвращает единицу. Это утверждение согласуется с тем, что так же как результат действия операции суммирования представляет собой определённое изменение относительно нуля, результат действия оператора произведения представляет собой определённое изменение относительно единицы, то произведение нулевого количества умножителей даёт в качестве результата 1 (то есть без изменения единицы), и что также подтверждается уравнениями 5 и 9:

$$\int_{x_0}^{x_1} \ln f(x)dx = 0 \text{ , при } x0 = x1 \quad (12.1)$$

$$F^{\bullet}(x) = e^{\int_{x_0}^{x_1} \ln f(x)dx} = e^{0} = 1. \quad (12.2)$$



Также как и определённый интеграл определённый мультипликал может быть решён графически. Так, если построить график функции в координатной системе где ось Y представлена через функцию **ln y** (натурально-логарифмическая шкала по оси **y**), затем если измерить площадь криволинейной трапеции образованной графиком функции в данной системе координат и ограниченной слева и справа x_0 и x_1 соответственно и затем возвести число **e** степень, равной полученной площади, то получим значение определённого мультипликала. Другими словами натуральный логарифм определённого мультипликала равен площади криволинейной трапеции, образованной анализируемой функцией и геометрически измеренной в данной (логарифмической) системе координат. Причём поскольку нейтральным элементом мультипликала является 1, (0 для оси ординат в единицах **ln y**), то измеренная ниже этой отметки по оси ординат площадь криволинейной трапеции считается как отрицательная. Сказанное подтверждается формулой посредственного выражения мультипликала с использованием интеграла.

Согласно определения самого понятия мультипликала решение определённого мультипликала можно получить через предел оператора произведения:

$$\bullet\int_{x_0}^{x_1} f(x)^{dx} = \lim_{\Delta x \to 0}\Big(\prod_{i=1}^{N} f(x_i)^{\Delta x}\Big), \quad (13.1)$$

$$N = (x_1 - x_0) / \Delta x, \quad (13.2)$$

$$x_i = x_0 + \Delta x \cdot (i - ½). \quad (13.3)$$

При конечных значениях Δx (длине элементарного отрезка) и для несколько большей практической точности предлагается брать значения функции в середине элементарного отрезка, как это показано выше. Ещё численно более точный вариант с использованием в качестве множителей в итерациях средне-геометрического значение от пары значений подмультипликальной функции тех, что в начале, и что в конце элементарного отрезка соответственно. Если использовать этот метод, то из-за наличия в выражении произведения двух (чётного числа) близ стоящих друг к другу значений функции появляется соблазн мультиплицировать отрицательную область функций, что запрещено.

Оператору суммирования и оператору произведения можно дать общее определение рекурсивного приращивающего итератора первого и второго порядка в соответствии с порядком используемого гипероператора в их основе. Приращивающие, поскольку используют прямой, а не обратный гипероператор, а рекурсивные, поскольку приращивают результат предыдущей своей итерации, то есть ссылаются себя. Интегралу и мультипликалу можно дать общее определение непрерывного рекурсивного приращивающего итератора первого и второго порядка соответственно. А также дифференциалу и факториалу, а также первообразной и фактор-первообразной, а также производной и фактор-производной можно дать обобщающие определения: приращения первого и второго порядка, а также первообразной первого и второго порядка, а также производной первого и второго порядка соответственно.

Примеры фактор-первообразных для известных функций

Функция	Фактор-первообразная
0	не существует
1	B
a	$B \cdot a^{x}$
$a \cdot x^{n}$	$B \cdot e^{n \cdot x \cdot (\ln(\sqrt[n]{a} \cdot x) - 1)}$
$a^{n \cdot x}$	$B \cdot a^{(½ \cdot n \cdot x^2)}$
$e \nearrow^{x}$	$B \cdot e \nearrow^{x}$

где ↗ - обозначение оператора степенная башня с левой ассоциативностью.

Пример использования мультипликала

$$\mathrm{I}(\mathrm{t}_0, \mathrm{t}_1) = \bullet\int_{\mathrm{t}_0}^{\mathrm{t}_1} (1 + \mathrm{i}(\mathrm{t}))^{\mathrm{dt}}, \quad (16.1)$$

где **t** - время, год; $\mathbf{t_0}$ – начальная временная метка контрольного периода, год; $\mathbf{t_1}$ – конечная временная метка контрольного периода, год; **i(t)** – функция от времени темпа роста инфляции / темпа роста экономики / ставка ссудный процент в годовом исчислении, д.е.; $\mathbf{I(t_0,\ t_1)}$ – коэффициент обесценивания денежных средств / роста экономики / показательныго роста задолженности за контрольный период, д.е.

$$S(\mathrm{t}_1) = \bullet\int_{0}^{\mathrm{t}_1} (1 - \mathrm{m}(\mathrm{t}))^{\mathrm{dt}}, \quad (16.2)$$

где **t** – возраст, год; **m(t)** – функция смертности в элементарной группе от возраста людей элементарной группы в годовом исчислении, д.е.; $\mathbf{t_1}$ – возраст, год; $\mathbf{S(t_1)}$ – функция ожидаемой доли выживших от общего числа родившихся в зависимости от возраста $\mathbf{t_1}$, д.е.

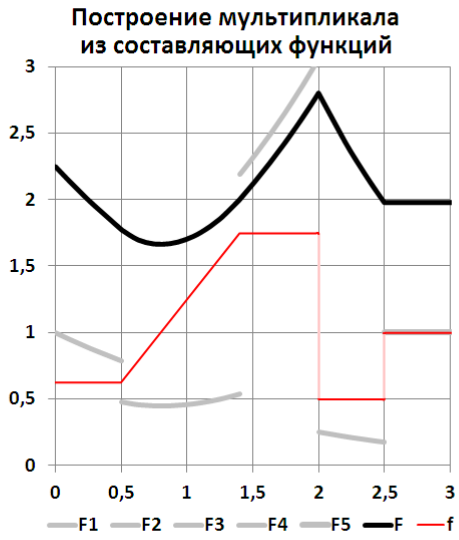
Правило согласования произвольного множителя «B»

Если анализируемая функция задана по средствам ряда функций, применимых по одной для каждого из ряда стоящих в стык друг к другу диапазонов значений аргумента анализируемой функции (различный областях анализируемой функции), другими словами если аналитическая функция задана с прерываниями, то построении её неопределённого мультипликала подразумевает взятие неопределённых мультипликалов для каждой из числа составляющих функций с целью их использования в качестве составляющих неопределённого мультипликала анализируемой функции в соответствующих им областях. Далее если анализ подразумевает построение непрерывного мультипликала анализируемой функции, то следует обязательная для этого случая процедура взаимного согласования произвольных множителей составляющих неопределённых мультипликалов, очевидно необходимой для обеспечения непрерывности функции неопределённого мультипликала анализируемой функции. Согласование множителей всех пар смежных составляющих неопределённых мультипликалов производится по парно и должно отвечать следующему равенству:

$$\mathrm{B}_1 \cdot F^{\bullet}{}_1(\mathrm{x}) = \mathrm{B}_2 \cdot F^{\bullet}{}_2(\mathrm{x}), \quad (14)$$

где **0** и **1** – индексы смежных предыдущего и следующего составляющих неопределённых мультипликалов и их произвольных множителей; **x** - точка стыка смежных предыдущего и следующего составляющих неопределённых мультипликалов под индексами **0** и **1**.

Решение вышеприведённого уравнения осуществляется для каждого стыка составляющих неопределённых мультипликалов, причём последовательно в порядке значений аргумента в точках стыков по одному из двух направлений: в сторону их роста или в сторону их убывания. Таким образом определяется произвольный множитель для каждого следующего составляющего неопределённого мультипликала по уже известному значению для каждого предыдущего. Значение произвольного множителя для первого в расчётной последовательности составляющего неопределённого мультипликала устанавливается аналитиком.



На рисунке приведен пример согласования произвольных множителей. Здесь подмультипликальная функция (красным) составлена из пяти аналитически заданных линейных функций, для каждой из которых построен неопределённый мультипликал (серым), после чего произведено согласование их произвольных множителей в направлении слева на право. Так для первого слева составляющего неопределённого мультипликала произвольный множитель установлен на значении 2.25, для второго его расчётное значение составило 3.709623, для третьего оно составило 0.914782, для четвёртого 11,20608 и для пятого 1,980973. Из пяти составляющих неопределённых мультипликалов по результату согласования их произвольных множителей построена непрерывная функция неопределённого мультипликала анализируемой функции (чёрным). Подобная описанной процедура должна проводится по отношению к неопределённому интегралу в подобной ситуации, но в отношении произвольных слагаемых С последнего. Можно обратить внимание на то, что мультипликал не имеет прерывания производной в точках излома подмультипликальной функции, поскольку нет прерывания самой подмультипликальной функции в качестве фактор-производной мультипликала функции. В точках, где подмультипликальная функция имеет прерывание, её мультипликал имеет изломы (прерывания производной).

Так называемый «непрерывный факториал»

На диаграмме представлена серия графиков (серым) из бесконечного множества графиков неопределённого мультипликала функции **f(x) = x** (посредственно **y = ±e**$^{\mathbf{x\cdot\ln(x)-x+C}}$) (красным), каждый отличающиеся от других из серии значением произвольного множителя «**B**». Для одного из них - того, что проходит через точку (**x=1,y=1**) (чёрным) построена производная (оранжевым).

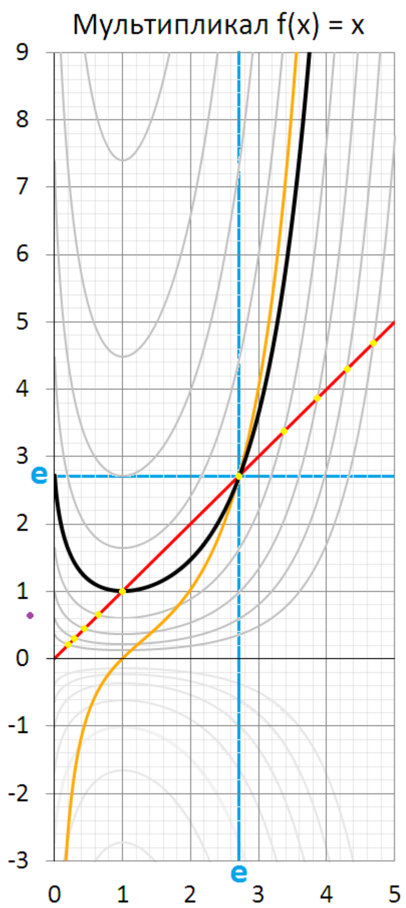
Для неопределённого мультипликала функции **f(x) = x** соблюдается следующее примечательное отношение:

$$\frac{F^{\bullet}(0) = F^{\bullet}(e) = F^{\bullet\prime}(e)}{F^{\bullet}(1) = F^{\bullet\prime\prime}(1)} = e, \qquad (17.1)$$

а также значением его производной является:

$$F^{\bullet\prime}(1) = 0, \qquad (17.2)$$

где **F•(x)** – неопределённый мультипликал **f(x) = x**; **F•'(x)** – производная **F•(x)**; **F•''(x)** – вторая производная **F•(x)**.



В отношении мультипликала функции **f(x) = x** меня не покидает мысль о том, что именно эта красивая функция может претендовать на роль функции так называемого «непрерывного факториала».

Сдвинутая на единицу влево «**Гамма**» функция («**Пи**» функция) является обобщением **x!** для вещественных чисел и на мой взгляд не подходит на роль функции «непрерывного факториала». Так, если для **x!** первой, так скажем, опорной точкой, при которой соблюдается условие **y = x**, является точка при **x = 1**, а вторая такая точка при **x = 2**, то для мультипликала **f(x) = x**, в частности $e^{x\cdot\ln(x)-x+1}$ (чёрным на диаграмме) вторая такая опорная точка находится при **x = e**, что показывает на исключительность последней по сравнению с обобщением для **x!**.

Казалось бы, какое отношение может иметь число **e** к построению функции «непрерывного факториала». И как оказалось, самое непосредственное, ибо мультиплицирование функции **f(x) = x** – это один из способов нахождения числа **e**. Признаться, приведённые здесь графики построены не через выражение $\pm e^{x\cdot\ln(x)-x+C}$, о котором тогда ещё не задумывался, то есть не по средствам использования заведомо известного числа **e**, а именно мультиплицированием **f(x) = x** численным методом начиная от **x = 1** в обе стороны по оси абсцисс. И каково же было моё изумление, когда вышел на число **e** при **x** стремящемся к нулю. Но с другой стороны, чему тут удивляться, какое другое конечное число можно было бы ожидать, ведь появление любого другого конечного числа вызвало бы удивление с восторгом ещё большее, ибо такое число могло бы быть новой замечательной математической постоянной по определению.

Решение задачи обобщения **x!** для вещественных чисел возвращает нас к мысли о том, что **x!** в первую очередь является дискретной функция, и что само по себе поднимает два связанных с этим фактом вопроса. Во-первых, почему при построении ряда не рассмотреть ряд множителей начиная не от 1, а с какого-то другого вещественного числа, например от 0.5, как следует: 0.5, 1.5, 2.5 и т.д., и во-вторых почему шаг ряда составляет 1, а не любое другое положительное вещественное число? Чем именно единица примечательна в качестве начальной точки ряда и размера его шага? Под этим углом зрения обобщение **x!** для вещественных чисел предстаёт перед нами как частное построение.

Изменение величины шага ряда означает изменение количества множителей ряда, используемых при вычислении результата функции для подставляемого аргумента. Для того, что бы сохранить тождественность порядка возвращаемого результата функции для подставляемого аргумента, и поскольку мы имеет дело с рядом именно множителей, при изменении шага ряда необходимо возводить каждый множитель ряда в степень кратности изменения (увеличения) величины шага ряда, в данном случае при изменении шага ряда относительно от единицы как величины по умолчанию. В этой связи можно записать общее определение функции **x!**:

$$x! = \prod_{i=0}^{N(x)} (b + s \cdot i)^{S}, \quad (18.1)$$

$$N(x) = \mathrm{round}\left(\frac{(x - b)}{s}\right), \quad (18.2)$$

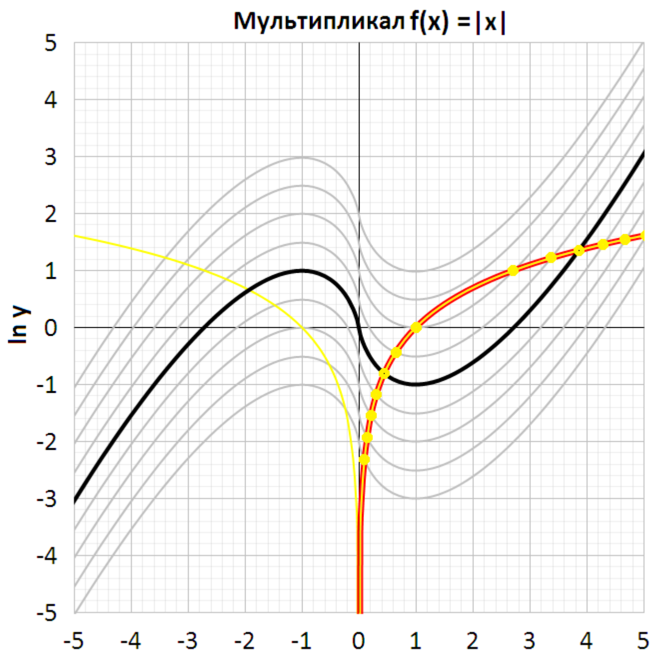
где **b** – начальная точка ряда, по умолчанию равная 1; **s** – величина шага ряда, по умолчанию равная 1; **N** – функция количества итераций оператора суммирования включая нулевую итерацию в зависимости от значения аргумента

Примеры рядов: $2.5^2 \cdot 4.5^2 \cdot 6.5^2 \cdot 8.5^2 \cdot 10.5^2$ и т.д. или: $1.1^{0.1} \cdot 1.2^{0.1} \cdot 1.3^{0.1} \cdot 1.4^{0.1} \cdot 1.5^{0.1} \cdot 1.6^{0.1} \cdot 1.7^{0.1} \cdot 1.8^{0.1}$ и т.д. или $1 \cdot 2^1 \cdot 3^1 \cdot 4^1 \cdot 5^1 \cdot 6^1$ С описанной точки зрения последний ряд, а именно тот, что используется в первоначальной версии функции **x!** – есть ряд по умолчанию, но одновременно представляет собой частное построением из множества возможных.

Уменьшение величины шага ряда делает возвращаемые значения функции для подставляемого аргумента ближе друг у другу при сравнении двух близких, но не равных шагах. Характерная особенность построения ряда с использованием мультипликала f(x) = x заключается в том, что величина шага ряда (величина элемента мультиплицирования) стремится к 0, что в первую очередь обеспечивает нам искомую непрерывность функции, и также делает возвращаемый результат функции для подставляемого аргумента уже индифферентным к количеству множителей в ряду, к величине шага ряда. Возвращаемые результаты для поставляемого аргумента стремятся к взаимному равенству. Данное обстоятельство приводит геометрические места точек множества получаемых с использованием мультипликала f(x) = x функций для множества начал ряда в однозначное, обобщённое положение с соблюдением вышеприведённого общего для всех них равного числу **e** замечательного отношения, и что наблюдается вне зависимости от выбора точки условного начала ряда. В данном случае выбор точки начала ряда единственно предопределяет значение произвольного множителя **B**, то есть выделяет одну функцию из их множества, или наоборот, множитель **B** определяет одну или две точки начала ряда из их множества. Так из любой точки (кроме точки 0) прямой графика функции **f(x) = x** можно провести график её мультипликала с предопределённым для данной точки множителем **B**.

На диаграмме точки пересечения (жёлтым) графика функции **f(x) = x** с графиками своего мультипликала, являются примерами выбора условного начала ряда, из которых строится график так называемого «непрерывного факториала» в влево от точек пересечения. Также видно то, что не для всех значений множителя **B** существует решение начальной точки построения ряда. Речь идёт о графиках мультипликала, не пересекающих прямую **f(x) = x**.

На второй диаграмме для наглядности в натурально логарифмической по оси ординат системе координат показана серия графиков неопределённого мультипликала (серым в общем и чёрным при **B = 0**) модуля (жёлтым) функции **f(x) = x** (красным) для различных значений произвольного множителя **B**. Жёлтым показан график модуля **y = x**.



Геометрический рост функции

Производная функции показывает на рост функции в точке. Но как выясняется, рост функции в точке может быть разного рода, как говориться, рост росту рознь. Поэтому следует уточнить то, что данный рост является арифметическим, то есть показывает на сколько единиц вырастет функция, если аргумент функции вырастет на 1, и при гипотетическом условии того, что данный арифметический рост функции на протяжении роста аргумента не изменится и будет соответствовать своему значению в выбранной точке функции. Графически это решается проведением касательной к графику функции в выбранной точке, а если выражаться точнее то, проведением к графику функции в выбранной точке не просто касательной, не просто касательной прямой, а именно касательного графика линейной функции общего вида:

$$y = b \cdot x + c, \quad (37)$$

где **b** и **c** – константы касательной линейной функции, определение которых обеспечивает её касание к анализируемой функции в выбранной точке.

b численно показывает на абсолютное приращение функции при увеличении аргумента на 1, показывает на арифметический рост функции в точке. Тангенс угла наклона касательной прямой в выбранной точке отражает значение арифметического роста функции в данной точке.

Упомянутая выше фактор-производная показывает на геометрический рост функции в точке. Он показывает во сколько раз вырастет функция, если аргумент функции вырастет на 1, и при гипотетическом условии того, что данный геометрический рост функции на протяжении роста аргумента не изменится и будет соответствовать своему значению в выбранной точке функции. Графически это решается проведением к графику функции в выбранной точке касательного графика показательной функции общего вида:

$$y = b \cdot a^x, \quad (38.1)$$

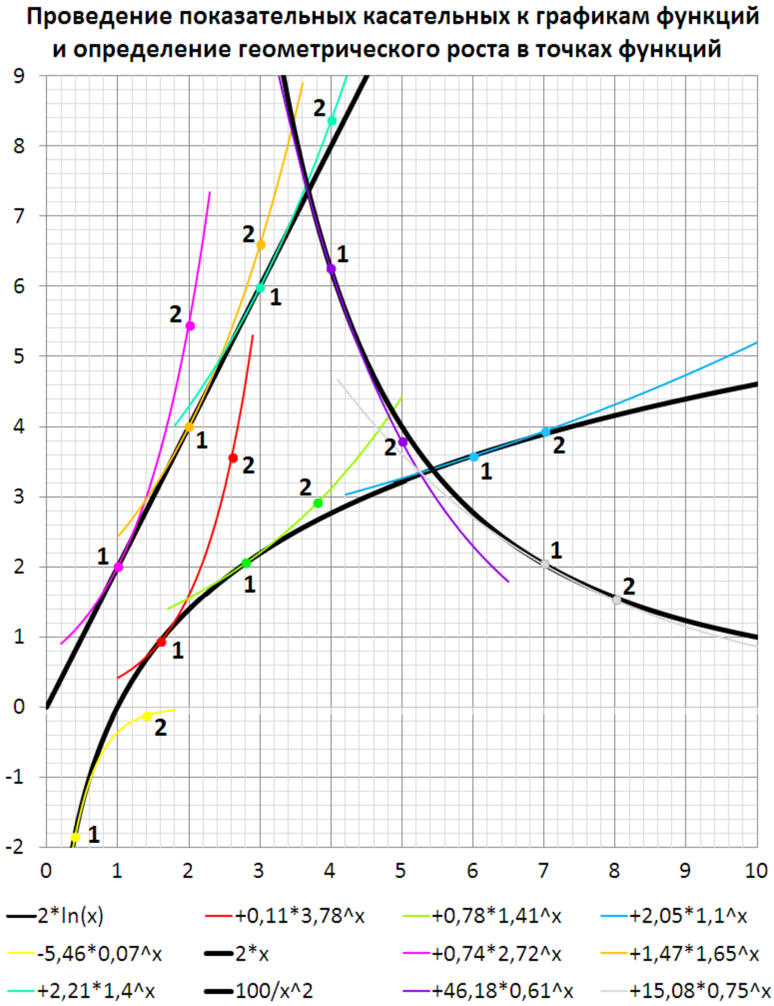
$$a = e^{\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)}, \quad (38.2)$$

$$b = \frac{f(x)}{|f(x)|} \cdot a^{\left(\frac{\ln|f(x)|}{\ln a}\right) - x}, \quad (38.3)$$

где **a** и **b** – константы касательной показательной функции, основание степени и множитель, определение которых обеспечивает её касание анализируемой функции; **f'(x)** –производная анализируемой функций; **f(x)** – анализируемая функция.

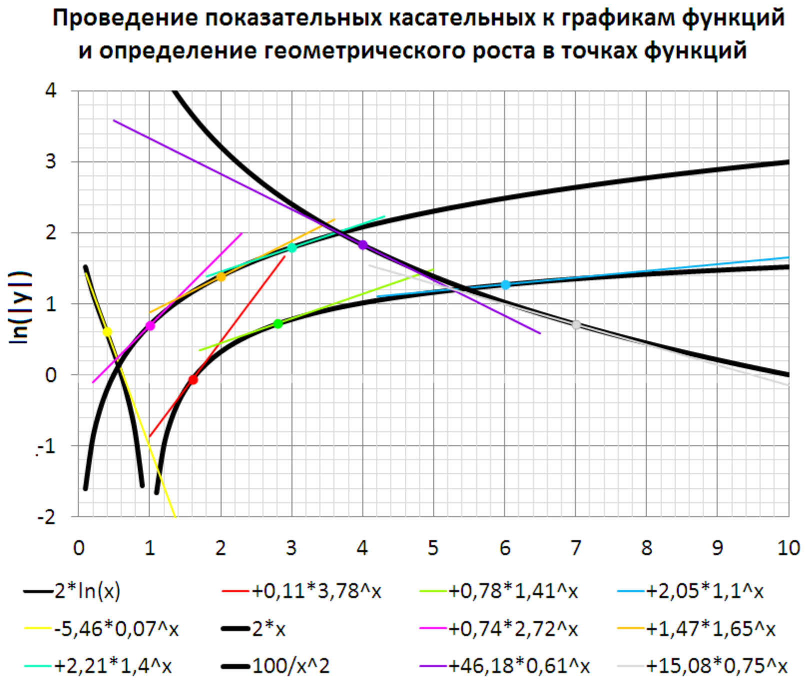
a численно показывает на относительное приращение функции, следовательно на геометрический рост функции. Фактор-производная не может быть отрицательной.

На диаграмме к графикам трёх функций: **f(x) = 2·ln(x), f(x) = 2·x и f(x) = 100/x²** (чёрным) проведены показательные касательные (цветами). Абсолютная разница между 2-ой и 1-ой точками одного цвета по оси абсцисс отражает приращение аргумента на единицу. Относительная разница их высоты, измеренная относительно положения оси абсцисс или то во сколько раз точка 2 находится дальше точки 1 по отношению к оси абсцисс показывает на значение геометрического роста функции в точке касания (в 1-ой точке). Очевидно то, что через одну пару точек 1 и 2 можно провести только одну экспоненту $y = b \cdot a^x$.



Построение выше анализируемых функции в координатной системе, где ось ординат размечена в единицах **ln|y|** (натурально логарифмическая шкала по оси ординат для значений функций по модулю), визуально «деградирует» линейные зависимости до логарифмических, показательные до линейных, а геометрические приращения до арифметических. Число **e** возведённое в степень тангенса угла наклона касательной визуально прямой в выбранной точке графика покажет на значение геометрического роста функции в данной точке, или другими словами натуральный логарифм геометрического роста равен тангенсу угла наклона касательной прямой.

В точках, где функция пересекает ось абсцисс её фактор-производная имеет прерывания. Так можно обратить внимание на то, что фактор производная функции **y = 2 · ln(x)** имеет прерывание при **x = 1** стремясь к **0** ($e^{-\infty}$) при приближении аргумента к точке с лева и к + ∞ ($e^{+}\infty$) при приближении аргумента к точке права.



По аналогии с тем как при поиске производной функции опускается общее постоянное слагаемое, при поиске фактор-производной опускается общий постоянный множитель.

Примеры фактор-производных

Функция	Фактор-производная
0	Неопределённость
b	1
$b \cdot x^{a}$	$e^{a/x}$
$b \cdot a^{x}$	a
$b \cdot e↗^{x}$	$e↗^{x}$

где ↗ - обозначение оператора степенной башни с левой ассоциативностью.

Желающие могут поупражняться в поиске формулировок фактор-производных и фактор-первообразных для известных функций.

При посредничестве анализируемой функции между её производной (арифметическим ростом) и её фактор-производной (геометрическим ростом) существует взаимозависимость при отсутствии каких либо критических значений участвующих в уравнении величин:

$$f^{\bullet}(x) = e^{\frac{f\prime(x)}{f(x)}}, \quad (39.1)$$

$$f'(x) = f(x) \cdot \ln f^{\bullet}(x), \quad (39.2)$$

при $f(x) \neq 0$ и $f^{\bullet}(x) \neq 0$ и $f(x) \neq \infty$ и $f^{\bullet}(x) \neq \infty$ и $f'(x) \neq \infty$

где **f(x)** - анализируемая функция; **$f^{\bullet}$(x)** – фактор-производная анализируемой функции; **f′(x)** – производная анализируемой функции.

Очевидно то, что не возможно восстановить функцию при её известных производной или фактор-производной по отдельности, но можно восстановить функцию в случае, если они известны обе вместе, а также и то, что фактор-производная имеет отличное от единицы конечное значение и отсутствуют выше приведённые критические значения:

$$f(\mathrm{x}) = \frac{\mathrm{f}'(\mathrm{x})}{\ln \mathrm{f}^{\bullet}(\mathrm{x})}$$ при $f(x) \neq 0$ и $f^{\bullet}(x) \neq 0$ и $f^{\bullet}(x) \neq 1$ и $f(x) \neq \infty$ и $f^{\bullet}(x) \neq \infty$ и $f'(x) \neq \infty$. (39.3)

Аналогично тому как производная функции может быть выражена через её дифференциал: ***f'*(x) = d*f*(x) / dx**, фактор-производная может быть выражена через её факториал, при этом используя не оператор деления, а ожидаемо оператор извлечения корня, стоящий на один порядок выше оператора деление:

$$f^{\bullet}(\mathrm{x}) = \sqrt[\mathrm{dx}]{\mathbf{f}f(\mathrm{x})}\,. \quad (40)$$

И таким же образом наоборот, факториал функции может быть выражен через её фактор-производную, что подобно тому, как дифференциал функции может быть выражен через её производную: **d*f*(x) = *f'*(x) · dx**, но опять таки, не используя оператор умножения, а вместо него оператор возведения в степень, также стоящий на один порядок выше оператора умножения:

$$\mathbf{f}f(\mathrm{x}) = f^{\bullet}(\mathrm{x})^{\mathrm{dx}} \quad (41)$$

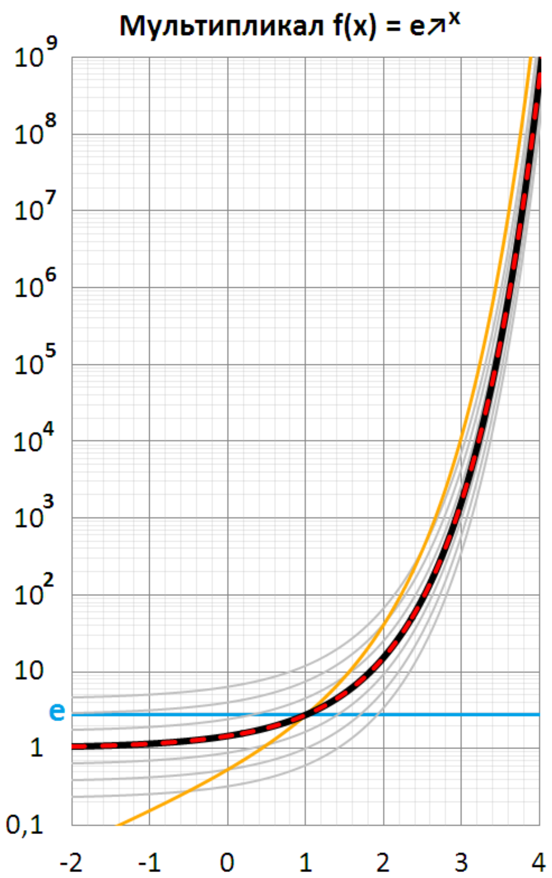
Акселента

Поставил задачу найти/сформулировать функцию, геометрических рост которой или другими словами её фактор-производная, а автоматически значит и мультипликал были бы равны значениям самой функции при любом значении аргумента. Первая такая функция напрашивается сама собой, и это функция y = 1, что существует по аналогии со существованием функции y = 0 для задачи поиска производной и первообразной равной самой функции, где 1 и 0 очевидно значения нейтральных произвольных элементов для мультипликала и интеграла соответственно. Также по аналогии с поиском производной вторая функция с подобным свойством предположительно должна быть показательной и также как его имеет функция $\mathbf{e}^{\mathbf{x}}$ иметь в своём основании число **e**, и как мы уже знаем, число **e** действительно имеет непосредственное отношение к мультиплицированию и факторированию функций.

Как известно операции интегрирования и дифференцирования используют операторы сложения и вычитания, то есть бинарные операторы первого порядка, а операции мультиплицирования и факторирования используют операторы умножение и деления, то есть бинарные операторы второго порядка. Показательная функция $\mathbf{e}^{\mathbf{x}}$ представляет собой одно действие с оператором возведения в степень, то есть с прямым бинарным оператором третьего порядка, а также имеет число **e** в качестве первого операнда и аргумент **x** в качестве второго. Можно заметить то, что в данной функции используется прямой бинарный оператор, стоящий на два порядка выше от операторов, используемых для операций интегрирования и дифференцирования. Далее делаем смелое предположение о том, что искомая нами функция в точности повторяет функцию $\mathbf{e}^{x}$ в части операндов, и также как $\mathbf{e}^{x}$ представляет собой одно действие прямого бинарного оператора, стоящего на два порядка выше операторов, используемых при мультиплицировании и факторировании, то есть действие с неким прямым бинарным оператором четвёртого порядка. Таким образом является гипер-показательной функцией четвертого порядка с основанием **е**. Запишем данную функцию и в частности предполагаемый оператор следующим образом:

$$y = e\nearrow^{x}, \quad (43)$$

где ↗ - обозначение гипероператора четвёртого порядка, называемого собственным именем «Ускорение» или «Акселерация»; х – «ускоритель»; е – «ускоряемое»; у – «ускорение». Выражение может читаться как: «число **е** в ускорении **х**» , «число **е** в **х**-вом ускорении», «**х**-ое ускорении числа **е**», «число **е**, ускоренное в **х** раз», «ускоренное в **х** раз число **е**», «ускорение **е** в **х**». Кривая графика $y = a\nearrow^{x}$ называется «Ускорительной» или «Акселентой».



Моё предположение оказалось верным, выяснилось то, что $\mathbf{y} = \mathbf{e}\nearrow^{x}$ отвечает предъявленному к ней требованию, но при условии того, что Ускорение - это <u>степенная башня с левой ассоциативностью.</u> Не следует её путать с Тетрацией – степенной башней с правой ассоциативностью.

На диаграмме можно увидеть построение акселенты $y = e\nearrow^{x}$ (красным пунктиром) и множества её мультипликалов (светло-серым), один из которых с произвольным равным 1 множителем (чёрным) совпадает с самой функцией, для чего собственно и пришлось показать её пунктиром. Можно также заметить то, что логарифмическая шкала визуально «деградирует» акселенту на один порядок вниз до визуальной экспоненты, сдвинутой в право по оси абсцисс на единицу.

Специально отмечу то, что оператор «Ускорение» получен по необходимости формулирования аналога функции $\mathbf{y=e^{x}}$ для операций мультиплицирования и факторирования, получен методом не экстраполяции, но методом сдвига на один порядок вверх ряда из трех последовательных гипероператоров в направлении предполагаемого математического анализа, по аналогии с тем, как надвигают пролёты моста при его строительстве. Именно проводимый математический анализ предопределяет внутреннюю логику данного оператора четвёртого порядка, а не наоборот, например, когда уже есть готовый оператор, и затем его пробуют применить.

Иллюстрация сдвига ряда гипероператоров

Оператор	Сложение	Умножение	Степень	Ускорение
Исходное состояние	Сумма и Интеграл	Операция с элементом интегрирования; Линейное уравнение касательной арифметического роста	Арифметический рост функции совпадает с самой функцией e^x	
Надвижка на один порядок вверх (вправо)		Произведение и Мультипликал	Операция с элементом мультиплицирования; Показательное уравнение касательной геометрического роста	Геометрический рост функции совпадает с самой функцией $e\nearrow^x$

Ускорение можно компактно выразить через операторы низших порядков:

$$a \nearrow^{\mathrm{n}} = a^{\left(a^{(\mathrm{n}-1)}\right)}. \quad (44)$$

Гиперкорень четвёртого порядка называемый собственным именем «Замедление» или «Деселерация» обозначается следующим образом:

$$a \searrow_n, \quad (45)$$

где ↘ - обозначение оператора «Замедление»; **n** – «замедлитель»; **a** – «замедляемое». Результат операции «замедление». Выражение может читаться как: «число **a** в замедлении **n**», «число **a** в **n**-ом замедлении», «**n**-ное замедление числа **a**», «число **a**, замедленное **n** раз», «замедленное **n** раз число **a**», «замедление **a** в **n**».

Замедление показывает на число, которое необходимо возвести в степень самого себя на единицу меньшее количество раз, чем значение замедлителя для того что-бы получилось замедляемое число при этом применяя левую ассоциативность в последовательности возведения в степень.

Замедление в свою очередь решается рекуррентно с использованием оператора извлечения корня (обратного оператора одного порядка ниже) и также компактно:

$$a \searrow_n = \sqrt[\left((a\searrow_n)^{(n-1)}\right)]{a}, \quad (46)$$

в чём нет ничего необычного, поскольку извлечение корня также решается рекуррентно, по такой же схеме, но что отличительно и закономерно, с использованием оператора деления (обратного оператора одного порядка ниже):

$$\sqrt[n]{a} = \frac{a}{\left(\sqrt[n]{a}\right)^{(n-1)}}. \quad (47)$$

Следствием общей для двух обратных гипероператоров схемы решения и аналогично тому, как запрещено подавать в подкоренное выражение величину меньше 0, в качестве замедляемого запрещено подавать величину меньше 1. Вспоминая то, как было образовано множество комплексных чисел, представляется интересным то, какое множество чисел может быть образовано с использованием замедляемого меньше 1.

Логарифм четвёртого порядка с собственным именем «Извлечение ускорителя» и «Извлечение натурального ускорителя» определятся как вложенный логарифм соответственно:

$$c \nwarrow_a = \log_a(\log_a c) + 1, \quad (48.1)$$

$$c \nwarrow = \ln(\ln c) + 1, \quad (48.2)$$

Мультиплицирование при нулевых значениях функции

Особый аналитический интерес представляет процесс мультиплицирования модулей функций, пересекающих ось абсцисс в окрестности данного пересечения (далее нулевой точки).

В окрестности нулевой точки пересекающую функцию можно приближённо представить в виде многочлена:

$$y = b_1 \cdot (x - c)^1 + b_2 \cdot \mathrm{sign}(x - c)\cdot(x - c)^2 + b_3 \cdot (x - c)^3 + ... + b_n \cdot \mathrm{sign}(x - c) \cdot |x - c|^n, \quad (15.1)$$

где $\mathbf{b_1}$, $\mathbf{b_2}$, $\mathbf{b_3}$, $\mathbf{b_n}$ – множители многочлена; **c** – координата нулевой точки; **sign** –функция, возвращающая **–1**, если аргумент отрицателен, **+1** в противном случае.

В предельном приближение к нулевой точке многочленную функцию можно сократить до функции одного члена – первейшего слева, что с ненулевым множителем **b**. Также в виду того, что положение нулевой точки на оси абсцисс не принципиально в рассматриваемом случае, то для сокращения записи примем C=0 (нулевая точка расположена в точке начала координат). После упрощения уравнение имеет общий вид зависимой от арифметического знака аргумента степенной функции:

$$y = b_n \cdot \mathrm{sign}(x) \cdot |x|^n \text{ при } n>0, \quad (15.2)$$

Так как позволяется проводить мультиплицирование только положительных областей функций, то преобразуем функцию до её модуля, и получим разрешённую для мультиплицирования подмультипликальную функцию (далее подмультипликальная функция). К тому же данное преобразование описывает случай не пересечения функциями оси абсцисс, но её касание. Таким образом проводимый анализ описывает все случаи контакта графика функции и оси абсцисс в одной точке:

$$y = |b_n| \cdot |x|^n. \quad (15.3)$$

Далее подмультипликальная функция разделяется на две области: на ту, что левее, и ту, что правее нулевой точки, представляемые следующими применимыми при соответствующих условиях составляющими уравнениями:

$$y = |x|^n \cdot b \text{ при } b_n \cdot x \geq 0, \quad (15.4)$$

$$y = -|x|^n \cdot b \text{ при } b_n \cdot x \leq 0, \quad (15.5)$$

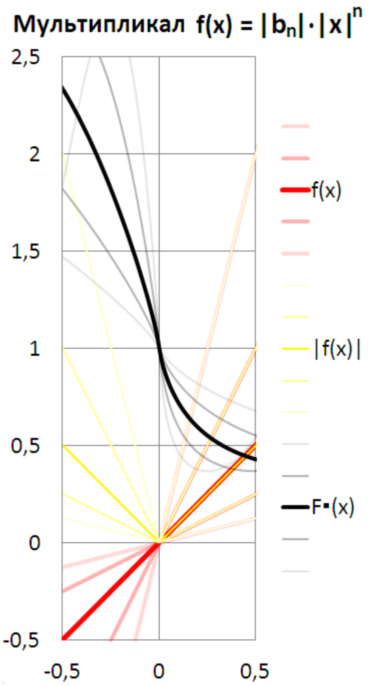
Неопределённый мультипликал каждого из составляющих уравнений:

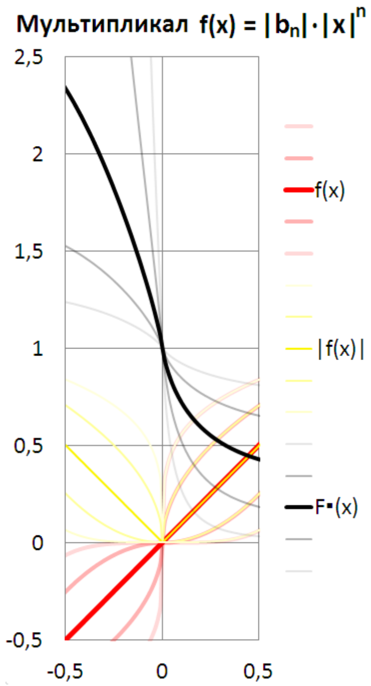
- $\int(|x|^n \cdot b)^{dx} = B \cdot e^{n\cdot x\cdot(\ln(x\cdot \mathrm{sign}(b)\cdot \sqrt[n]{|b|})-1)}$ при $b_n \cdot x > 0$, (15.6)
- $\int(-|x|^n \cdot b)^{dx} = B \cdot e^{n\cdot x\cdot(\ln(-x\cdot \mathrm{sign}(b)\cdot \sqrt[n]{|b|})-1)}$ при $b_n \cdot x < 0$, (15.7)

Поскольку оба из этих неопределённых мультипликалов не существуют в нулевой точке (x = 0), то определим их значения при бесконечно близком приближении к этой точке слева и справа по отдельности используя предыдущие уравнения:

$$\lim_{x\to 0} B \cdot e^{n\cdot x\cdot(\ln(x\cdot \mathrm{sign}(b)\cdot \sqrt[n]{|b|})-1)} = B \text{ при } (x\cdot b) \geq 0, \qquad (15.8)$$

$$\lim_{x\to 0} B \cdot e^{n\cdot x\cdot(\ln(-x\cdot \mathrm{sign}(b)\cdot \sqrt[n]{|b|})-1)} = B \text{ при } (x\cdot b) \leq 0, \qquad (15.9)$$





На первой (левой) диаграмме представлены: функция **$y = b_n \cdot \mathrm{sign}(x) \cdot |x|^n$** при **n=1** и различных **b** (от 0.25 до 4 оттенками красного и ярко красным при **b=1**), её модуль: **$y = |b_n| \cdot |x|^n$** (оттенками жёлтого и ярко жёлтым при **b_n=1**), неопределённый мультипликал её модуля при **B=1** и различных и **b** (оттенками чёрного и ярко чёрным при **b=1**).

На второй (правой) диаграмме представлены: функция **$y = b_n \cdot \mathrm{sign}(x) \cdot |x|^n$** при **$b_n$=1** и различных **n** (от 0.25 до 4 оттенками красного и ярко красным при **n=1**), её модуль: **$y = |b_n| \cdot |x|^n$** (оттенками жёлтого и ярко жёлтым при **n=1**), неопределённый мультипликал её модуля при **B=1** и различных и **n** (оттенками чёрного и ярко чёрным при **n=1**).

Нетрудно заметить то, что при приближении к нулевой точке неопределённый мультипликал подмультипликальной функции (далее мультипликал) с обеих сторон от этой точки стремится к некоторому конечному значению, и мало того, с обеих сторон он стремится к одному и тому же значению, зависящему только от единого для двух составляющих мультипликалов значения произвольного множителя **B**, и что примечательно, ни каким образом не зависящему от **b_n** и от **n**, то есть от значений всех производных подмультипликальной функции. В окрестности нулевой точки составляющие мультипликалы двух областей подмультипликальной функции расположены в стык друг к другу. При этом две области все же разделены нулевой точкой, где присутствует прерывание составляющих мультипликалов, а возможно и прерывание мультипликала, но операция мультиплицирования обошла эту точку стороной, оставив вопрос открытым.

Казалось бы, в процессе мультиплицирования переход через эту имеющую нулевое значение точку подмультипликальной функции как через множитель для промежуточного результата мультиплицирования (далее промежуточного результата) должен обнулить этот результат и автоматически прихлопнуть до нуля всю расположенную правее нулевой точки область мультипликала, тем самым полностью обессмыслить процесс мультиплицирования правее этой точки, при условии того, что мы проводим мультиплицирование функции в направлении роста аргумента. Данное утверждение было бы справедливым при условии того, если ноль был бы нулем как множителем.

Но как известно, когда мы проводим мультиплицирование, мы разбиваем линейный отрезок мультиплицирования по оси абсцисс на бесконечно малые, но не нулевой длины отрезки **dx**. С этой позиции проблемой безразмерной точки и одновременно разрешением проблемы для нас является тот факт, что точка, будучи безмерной величиной, оставляет на оси абсцисс проекцию нулевой длины.

Один, так называемый, геометрический подход сводится к следующему простому умозаключению. Поскольку мы проводим мультиплицирование по линейному континууму оси абсцисс, воздействуя на состояние функции тем, что также имеет измерение отнесённое на линейных размер оси абсцисс, оставляет там свой след. И если при этом что-то оставляет на оси проекцию нулевой длины, то это нечто, без значения что это, эффективно не оставляет ровным счётом ничего, оно просто не существует для проводимой операции. И при условии того, что функция с обеих сторон стремится к конечному и к тому же одинаковому значению, данная точка может быть проигнорирована, функция «склеена», и констатирована непрерывность последней.

Другой, так называемый, абстрактный подход не игнорирует состоянии функции в точке, и подразумевает переход с анализа свойств функций в предельно малых линейных отрезках на анализ их свойств в безразмерных точках. Данный подход предполагает нахождение «связующего» множителя в безразмерной точке, при проходе через которую в процессе мультиплицирования промежуточный результат умножается на данный множитель или делится на него в зависимости от направления мультиплицирования: в сторону роста или убывания аргумента соответственно. Таким образом от состояния и значения данного множителя зависит «судьба» проводимого мультиплицирования.

Очевидно то, что размер множителя в нулевой точке равен значению подмультипликальной функции, измеренному в нулевой точке, то есть нулю, в степени элемента мультиплицирования, размер которого также имеет нулевое значение. Очевидно о дифференциале аргумента **dx** в данном случае речь не идёт, поскольку таковой с нулевой длиной не имеет смысла, но вот обязательно прилагающейся в качестве степени к значению подмультипликальной функции элемент мультиплицирования никто не отменял, пусть даже и имеющий нулевое значение. Таким образом задача определения значения множителя сводится к определению результата $\mathbf{0^0}$.

Оператор возведения в степень – это гипероператор, а именно оператор произведения $\prod$ с количеством итераций, соответствующим показателю степени. В нашем случае результат действия $\prod$ является множителем для промежуточного результата. С одной стороны можно предположить то, что результат 0^0 – это ничто, неопределённость, поскольку отсутствую множители, пусть даже нулевые множители. В данном случае вообще нет операции умножения на ноль, поскольку сами нули отсутствуют, учитывая это уже понятно то, что в мультипликал не обернется нулём. Но мультипликал может перестать существовать в результате умножения на неопределённость. С другой стороны, если у $\prod$ нулевое количество множителей, как в нашем случае, то он очевидно бездействует, не проводит итераций и ничего не приращивает, а раз так, то он должен оставить без изменения тот результат, множителем которого он является, пропустить через себя его значение транзитом, но не уничтожить его.

Выходит так, что представление о результате возведения в нулевую степень зависит от нашего представления о функции оператора о логике оператора, от его формального определения, что в свою очередь обусловлено контекстом его применения. Выше давалось определение оператора произведения как рекурсивного приращивающего итератора, что подразумевает под собой некое начальное состояние результата оператора, по отношению к чему производится приращение начиная с первой итерации. Математический анализ подразумевает транзит без изменения в случае бездействия, что есть в полном соответствии с тем, как оператор суммы $\sum$ не возвращает неопределённость при отсутствии слагаемых, то есть при отсутствии итераций, при своём бездействии, а возвращает ноль в качестве нейтральной величины, тем самым не изменяет результат предыдущего суммирования, а пропускает его через себя транзитом.

Так, единственным, оставляющим без изменения результат умножения, множителем является единица. А это значит то, что $\prod$ с нулевым количеством множителей вне зависимости от их возможного состояния (в том числе состояния неопределённости) и значения должен возвращать единицу в качестве результата своего бездействия, в качестве нейтральной величины. Таким образом установлен факт того, что искомый множитель в нулевой точке равен единице. К сведению, ниже проведён анализ гипероператора, где затронута тема нейтральных элементов (величин) гипероператоров.

Выделим саму нулевую точки и бесконечно малую её окрестность по обе стороны от неё в отдельную третью область подмультипликальной функции, ту, что не входит в первые две. Условно обозначим её как [0;0] от ноля включительно до ноля включительно. Далее необходимо сделать предположение/допущение о том, что конечное значение множителя в особенной точке, в нашем случае в нулевой точке, можно распространить на бесконечно малую окрестность этой точки в сторону той её границы, на которой мультипликал имеет такое же, при этом конечное, значение как и в нулевой точке. Утверждение основано на допущении о том, что внутри рассматриваемого бесконечно малого интервала функция монотонна при поставленных условиях, ей просто некуда деваться, не существует известных причин для иного поведения функции. В нашем случае, что справа от нулевой точки, что слева от неё составляющие мультипликалы первой и второй областей стремятся к единице (конечной величине) при приближении к ней с обоих сторон, следовательно значение множителя в нулевой точке распространяется на всю бесконечно малую окрестность нулевой точки, то есть на всю ранее определённую третью область подмультипликальной функции.

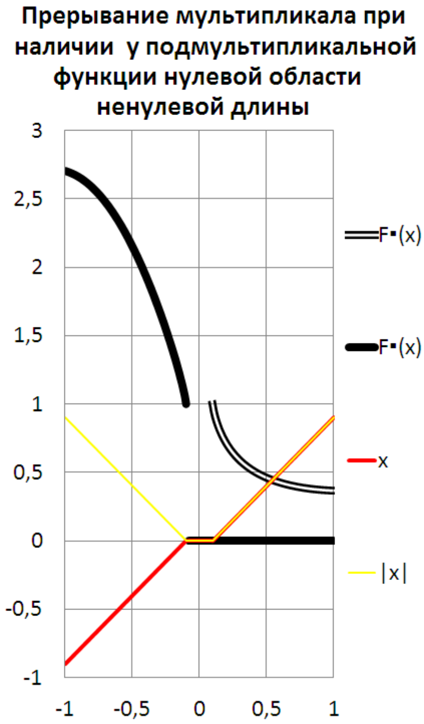
Под распространением значения множителя на бесконечно малую окрестность не следует понимать построение монотонной функции с постоянным значением внутри этого интервала, равным значению множителя, но следует понимать то, что при мультиплицировании промежуточный результат на входе в эту окрестность умножается либо делится на данный множитель в зависимости от направления мультиплицирования, затем и передаётся на выход из данной окрестности.

В случае, если распространение значения функции возможно только в одном из двух направлений окрестности, то нет смысла говорить о том, что множитель нужно дробить на два множителя, каждый из которых равен корню квадратному от изначального его значения, поскольку невозможность распространить значение множителя в обе стороны для одной и той же особенной точки свидетельствует о наличии прерывания, что в свою очередь обессмысливает аналитическую работу по поиску непрерывности функции в особенной точке. В этой связи в целях упрощения говоря о множителе можно опустить упоминание об окрестности точки, и считать множитель свойством именно точки, а исследуемую область, областью именно точки. С точки зрения данного подхода отпадает вопрос от том, каким образом распространять значение множителя на окрестность точки, поскольку будет производится однократное умножение или деление промежуточного результата на множитель при проходе через особенную точку.

При построении мультипликала модуля функции результат мультиплицирования третьей абстрактной области подмультипликальной функции требует согласования своего произвольного множителя с произвольными множителями двух других составляющий определённых мультипликалов. Далее «склеиваем» все составляющие мультипликалы от всех трёх областей подмультипликальной функции и получаем непрерывный неопределённый мультипликал анализируемой функции.

Свидетельством тождественности множителя единице в нулевой точке также является тождество результатов мультиплицирования, полученных через два разных подхода: через так называемый геометрический, и через так называемый абстрактный с анализом свойств функций в безразмерных точках.

Можно утверждать то, что в процессе мультиплицирования переход через нулевое значение подмультипликальной функции, обусловленный пересечением функцией оси абсцисс или контакта оси абсцисс в одной точке, не приводит к каким-то бы ни было изменениям промежуточного результата мультиплицирования. На этот результат не влияет даже возможный излом функции (прерывание первой производной), поскольку значение мультипликала в нулевой точке не зависит от **b**. Но что примечательно, излом функции в особенной точке, такой как нулевая, приводит к излому мультипликала в этой точке, но очевидно, не к излому его фактор-производной (подмультипликальной функции), и что не наблюдается при изломе функции вне особенный точках, где лишь вторая производная мультипликала имеет прерывание. Можно сделать вывод от том, что поведение производной и фактор-производной различно в особенных точках, там взаимозависимость между ними нарушается.



А сейчас давайте рассмотрим несколько иной случай, а именно такой, где подмультипликальная функция имеет нулевое значение на протяжении не нулевого по длине интервала. Так внутри данного интервала промежуточный результат мультиплицирования умножается на равный нулю множитель $\mathbf{0^{dx}}$, поскольку **dx** в данном случае бесконечно малая, но не нулевая величина.

В этом случае мультипликал «схлопывается» до нуля правее точки входа подмультипликальной функции в горизонтальный отрезок с нулевым значением. Далее мультипликал не восстанавливается, даже не смотря на последующий выход подмультипликальной функции на ненулевые значения, ибо что-бы то ни было (промежуточный результат мультиплицирования), однажды умноженное на ноль в качестве в результате потом даёт только ноль (сплошной чёрный график на диаграмме). В этой связи можно говорить о том, что точка именно касания неопределённым мультипликалом оси абсцисс (речь не о бесконечно близком приближения к оси) означает по сути точку его прерывания. Если проводить мультиплицирование в направлении обратном направлению роста аргумента, то в точке входа слева в интервал с нулевым значением подмультипликальной функции промежуточный результат мультиплицирования перестанет существовать в следствии попытки произведения операции деления на ноль, что также является для мультипликала точкой его прерывания, после которой, левее, он также не восстановится (полый чёрный график на диаграмме). Таким образом для горизонтального интервала подмультипликальной функции с нулевым значением существует две точки, в которых мультипликал прерывается, это точки начала и конца данного интервала. Сам интервал является областью неопределённости мультипликала Также можно утверждать и то, что мультипликал функции **y=0** не есть **y=0**, а таковой просто не существует, поскольку вся область определения подмультипликальной функции от $-\infty$ до $+\infty$ является областью неопределённости её мультипликала.

Ссылки:

[1] Интеграл: https://ru.wikipedia.org/wiki/Интеграл
[2] Производная функции: https://ru.wikipedia.org/wiki/Производная_функции
[3] Дифференциал функции: https://ru.wikipedia.org/wiki/Дифференциал_(математика)
[4] Факториал: https://ru.wikipedia.org/wiki/Факториал
[5] Сумма: https://ru.wikipedia.org/wiki/Сумма_(математика)
[6] Умножение: https://ru.wikipedia.org/wiki/Умножение
[7] Тетрация: https://ru.wikipedia.org/wiki/Тетрация