MAGTOUF REZGUI ET ABDELMAJID BEN HADJ SALEM

NOTIONS SUR LA THÉORIE DES ERREURS - POUR LES ADJOINTS TECHNIQUES

Abstract : In this fascicle, we give elements of the Theory of Errors for Technical Assistants working in the field of surveying and topography- version 1.0 December 2021

Abdelmajid BEN HADJ SALEM
e-mail : abenhadjsalem@gmail.com

A la mémoire de nos parents,
A nos épouses, à nos enfants,
A tous nos professeurs.

Table des matières

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

1.1 MESURES - FAUTES - ERREURS

1.1.1 Mesures directes et indirectes

On distingue les mesures directes effectuées par comparaison de la grandeur à mesurer avec un étalon (exemple : mesure d'une longueur à l'aide d'un mètre) et les mesures indirectes dans lesquelles le résultat est issu de mesures indirectes par l'intermédiaire d'un calcul ou d'un graphique (exemple : mesure d'une longueur par le procédé parallactique).

1.1.2 Faute

La faute est l'inexactitude qui résulte d'une maladresse, d'un oubli ou d'une méprise : exemple : on lit 35 au lieu de 53. Comme on n'est jamais certain de ne pas faire de fautes, il est indispensable de prévoir des moyens de contrôle et de vérification et ce par des chemins différents.

1.1.3 Erreur

On appelle erreur toute discordance entre la valeur exacte X d'une quantité et la valeur mesurée x, on la note par e.

$$e = \text{ valeur mesurée - valeur exacte} = x - X \tag{1.1}$$

Généralement la valeur exacte X est une inconnue, et les erreurs sont impossibles à connaître exactement, on cherche seulement dans quelles limites elles sont comprises. On connaît quelques fois X ; par exemple la somme des angles d'un triangle plan vaut $200\,grades$.

Les erreurs sont généralement petites, mais leurs accumulations peuvent devenir importantes.

Les erreurs dans les mesures sont de deux types :

a- **Erreur systématique :**

Elle dépend des méthodes et des instruments utilisés (Exemple : mesurer une distance avec une chaîne très courte).

L'erreur systématique est toujours de même signe, dans les mêmes conditions de mesure par conséquent cumulative. Les erreurs systématiques proviennent de trois sources distinctes à savoir :

- La nature : les mesures peuvent être affectées par des phénomènes naturels comme le vent, la dilatation des matériaux, l'influence de l'air (réfraction, humidité,...).

- L'instrument : l'imperfection dans la construction et le réglage des instruments affectent la précision des mesures.

- L'opérateur : les erreurs personnelles des limites et des habitudes propres à l'opérateur. Exemple : lecteur du vernier par coïncidence trop à gauche ou trop à droite.

b- **Erreur accidentelle :**

Cette erreur découle uniquement du hasard et par conséquent elle échappe à tout contrôle de l'opérateur, elle sujette aux lois de probabilités. Lorsqu'on réitère plusieurs fois la même mesure, on obtient des valeurs légèrement différentes.

Répétons la même mesure un très grand nombre de fois et partout sur un graphique les différentes valeurs obtenues. On constate que ces valeurs sont dispersées entre deux valeurs extrêmes A et B et qu'entre ces deux bornes, la répartition des valeurs n'est pas uniforme, que les points représentatifs admettent un point d'accumulation O vers le milieu de AB. Si on groupe les mesures par couples symétriques :

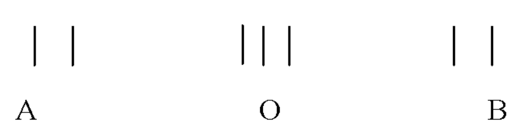


Fig. 1.1 Répartition des valeurs des erreurs

$$\begin{aligned} x_1 + x_n \\ x_2 + x_{n-1} \\ \dots \\ x_p + x_{n-p} \end{aligned}$$

On constate que ces sommes sont à peu prés égales et que $\dfrac{x_p + x_{n-p}}{2}$ a sensiblement la valeur trouvée au point d'accumulation O.

c- **Postulat de la moyenne :**

Soit X la vraie valeur de la quantité mesurée, cette valeur nous reste inconnue, mais les observations faites nous donneront pour elle les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Définition 1.1 *On appelle erreurs vraies les quantités e_i inconnues :*

$$\begin{aligned} X - x_1 &= e_1 \\ X - x_2 &= e_2 \\ &\dots \\ X - x_n &= e_n \end{aligned}$$

La remarque, faite ci-dessus relativement au point d'accumulation O, nous conduit à adapter comme valeur la plus plausible de X :

$$x_0 = \frac{x_1 + x_n}{2} = \frac{x_2 + x_{n-1}}{2} = \dots = \frac{x_p + x_{n-p}}{2} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n}{n} \quad (1.2)$$

L'adaptation pour X de la valeur ainsi trouvée constitue le **postulat de la moyenne**.

d- **Erreur apparente :**

Définition 1.2 *On appelle erreurs apparentes ou résidus les quantités :*

$$\begin{aligned} x_1 - x_0 &= v_1 \\ x_2 - x_0 &= v_2 \\ &\dots \\ x_n - x_0 &= v_n \end{aligned} \quad (1.3)$$

Les erreurs vraies échappent à nos investigations, par contre les erreurs apparentes peuvent être calculées, si on ajoute membre à membre les relations (1.3), on en déduit que :

$$\sum_{i=1}^{i=n} v_i = v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1} + v_n = 0 \quad (1.4)$$

La somme algébrique des erreurs est nulle. D'autre part à toute erreur positive correspond une erreur négative égale. Il en résulte de ces considérations :

1/ l'erreur accidentelle d'une mesure peut-être considérée comme la différence entre la mesure et la moyenne arithmétique de toutes les mesures,
2/ la somme algébrique des erreurs est nulle,
3/ à toute erreur positive correspond une erreur négative égale,
4/ les erreurs les plus petites sont les plus nombreuses,
5/ les erreurs ne dépassent pas un certain maximum.

Définition 1.3 *On appelle dispersion l'intervalle AB entre les valeurs extrêmes des erreurs.*

1.2 Distribution Statistique des Erreurs Accidentelles

Avant de pousser plus loin l'étude des erreurs, nous étudions un exemple précis. Il s'agit de la répartition de l'erreur de fermeture de 484 triangles géodésiques. Dans cette étude, le résultat théorique de la mesure est connu d'avance : la somme des 3 angles mesurés doit être égale à $200\,gr$ plus l'excès sphérique du triangle, alors :

$$A+B+C-(\varepsilon+180^\circ) = \text{fermeture du triangle ABC en degrés sexagésimaux} \tag{1.5}$$

où ε est l'excès sphérique du triangle ABC.

La répartition des erreurs de fermeture est la suivante :

Magnitude : 0"	5"	10"	15"	20"	25"	30"
Fermeture + : 105	84	40	9	3	2	
Fermeture - : 103	86	34	13	3	2	

Tableau 1 : dispersion des fermetures des triangles géodésiques

Pour représenter graphiquement cette répartition, portons sur un axe horizontal les divisions $-30", -25", \ldots, 0", \ldots, +25", +30"$ et construisons sur chaque intervalle un rectangle ayant pour hauteur le nombre des erreurs, la surface de ces rectangles est donc proportionnelle aux nombres des erreurs.

Traçons une courbe joignant les points moyens des petits côtés des rectangles, on obtient une courbe ayant la forme d'une cloche Fig.1.2 (c'est la courbe de Gauss d'équation :$y = f(x) = \dfrac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}$ où h s'appelle le module de précision et qui détermine la forme de la courbe). Cette courbe représenterait en ordonnée le nombre

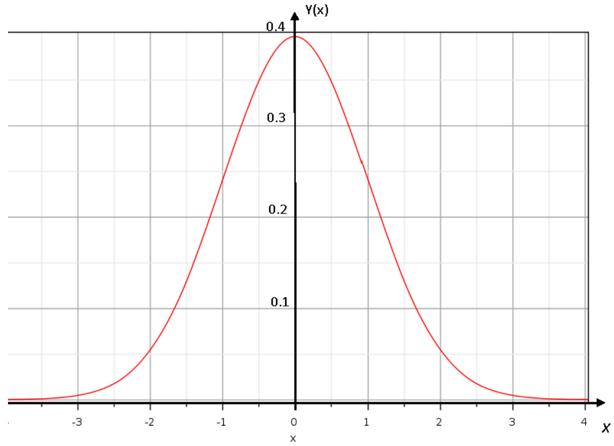


Fig. 1.2 La Courbe de Gauss ($source : https : //fr.wikipedia.org/wiki/Loi normale$)

des erreurs égales à son abscisse, si ce nombre était très grand. Les ordonnées de la courbe normale des fréquences sont proportionnelles aux nombres $25, 16, 7$ et 2. Si cette proportionnalité n'est pas trouvée avec une certaine approximation, alors les erreurs ne sont pas accidentelles.

On peut par des considérations mathématiques arriver à l'équation :

$$y = f(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} \tag{1.6}$$

1.3 DÉFINITIONS IMPORTANTES CONCERNANT CERTAINES ERREURS

1.3.1 Rappels

1.3.1.1 Fonction, dérivée en un point et différentielle

Deux variables x et y sont fonctions l'une de l'autre, si à toute valeur de l'une on peut correspondre une valeur ou un ensemble de valeurs de l'autre. On note la fonction y de la variable x par :

$$y = f(x) \tag{1.7}$$

La dérivée d'une fonction en un point M de la courbe $y = f(x)$ est la limite de rapport de l'accroissement Δy de la fonction à l'accroissement Δx de la variable quand ce dernier tend vers 0.

$$y = lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{1.8}$$

La dérivée d'une fonction en un point est la pente de la tangente au graphe de la fonction en ce point :

$$y' = \frac{dy}{dx} = tg\alpha \tag{1.9}$$

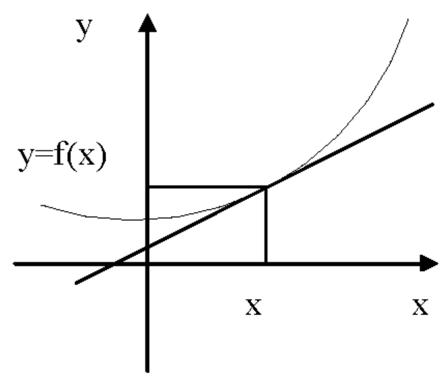


Fig. 1.3 Dérivée d'une fonction en un point

La différentielle d'une fonction $y = f(x)$ est le produit de la dérivée de la fonction par un accroissement arbitraire donnée à la variable :

$$dy = dx.tg\alpha = f'(x).dx = y'.dx \tag{1.10}$$

Cette définition n'est pas intéressant que si l'accroissement donné à x est infiniment petit : dx au lieu de Δx.

1.3.1.2 Dérivées et différentielles usuelles :

1.3.1.3 Fonctions composées

Fonctions	Dérivées	Différentielles
$y = f(x)$	$y' = f'(x)$	$dy = y'dx$
$y = constante$	$y' = 0$	$dy = 0$
$y = ax$	$y' = a$	$dy = adx$
$y = ax^m$	$y' = mx^{m-1}$	$dy = x^{m-1}dx$
$y = \frac{1}{x}$	$y' = \frac{-1}{x^2}$	$dy = -\frac{dx}{x^2}$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$dy = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$
$y = a^x$	$y' = a^x.Loga$	$dy = a^x.Loga.dx$
$y = sinx$	$y' = cosx$	$dy = cosx.dx$
$y = cosx$	$y' = -sinx$	$dy = -sinx.dx$
$y = tgx$	$y' = 1 + tg^2x$	$dy = (1 + tg^2x).dx$
$y = cotgx$	$y' = \frac{-1}{sin^2x}$	$dy = \frac{-dx}{sin^2x}$
$y = Logx$	$y' = \frac{1}{x}$	$dy = \frac{dx}{x}$

Tableau 1.1 Dérivées et différentielles usuelles

Fonctions	Dérivées	Différentielles
$y = f(u)$	$y' = f'(u).u'(x)$	$dy = y'dx$
$y = au^m$	$y' = mu^{m-1}u'(x)$	$dy = u^{m-1}u'(x).dx$
$y = \frac{1}{u}$	$y' = \frac{-u'(x)}{u^2}$	$dy = -\frac{u'(x)dx}{u^2}$
$y = \sqrt{u(x)}$	$y' = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u}}$	$dy = \frac{u'dx}{2\sqrt{u}}$
$y = u + v$	$y' = u' + v'$	$dy = (u' + v')dx$
$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	$dy = y'dx$
$y = Logu$	$y' = \frac{u'}{u}$	$dy = \frac{u'dx}{u}$

Tableau 1.2 Dérivées et différentielles des fonctions composées

CHAPITRE 2

Les Types d'Erreurs Moyennes

2.1 L'Erreur Moyenne Arithmétique

Désignons par $v_1, v_2, ..., v_n$ les erreurs apparentes.

Définition 2.1 *On appelle erreur moyenne arithmétique ou écart moyen arithmétique d'un grand nombre de mesure l'expression :*

$$\varepsilon_a = \frac{|v_1| + |v_2| + \ldots + |v_n|}{n} \tag{2.1}$$

à laquelle on substitue :

$$\varepsilon'_a = \frac{|v_1| + |v_2| + \ldots + |v_n|}{n-1} \tag{2.2}$$

pour un petit nombre de mesures $(n < 10)$.

2.2 L'Erreur Moyenne Quadratique ou Ecart-Type

Définition 2.2 *On appelle erreur moyenne quadratique ou écart-type d'un grand nombre de mesures l'expression emq ou σ telle que :*

$$emq = \sigma = \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2}{n}} \tag{2.3}$$

Pour un petit nombre de mesure (échantillon), on démontre que la meilleure estimation de l'écart-type s'obtient par :

$$emq' = \sigma' = \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2}{n-1}} \tag{2.4}$$

2.3 L'Erreur probable ou écart équiprobable

Classons toutes les erreurs accidentelles d'une même expérience par ordre de croissance en valeur absolue : Considérons la valeur qui occupe le rang médian

$$\underbrace{|v_1| < |v_2| < \ldots < |v_{n/2-1}| <}_{\frac{n}{2}} |v_{n/2}| \underbrace{< |v_{n/2+1}| < \ldots < |v_{n-1}| < |v_n|}_{\frac{n}{2}}$$

tel qu'il aura autant d'erreurs plus petites à sa gauche que d'erreurs plus grandes à sa droite. C'est par définition **l'écart équiprobable ou l'erreur probable ε_p**. Il correspond à la probabilité $1/2$ d'être dépassé en valeur absolue ou la probabilité $1/4$ d'être dépassé lorsque son signe est fixé. Il a donc sur la courbe de Gauss, tel-qu'entre 0 et ε_p il y'ait 25% d'erreurs ; de même entre 0 et -ε_p il y'ait 25% d'erreurs.

Si on se reporte à la courbe de Gauss, le calcul montre pour un total de 50% d'erreurs :

- qu'entre 0 et ε_p il y'a 25% d'erreurs,
- qu'entre ε_p et $2\varepsilon_p$ il y'a 16% d'erreurs,
- qu'entre $2\varepsilon_p$ et $3\varepsilon_p$ il y'a 7% d'erreurs,
- qu'entre $3\varepsilon_p$ et $4\varepsilon_p$ il y'a $1,5\%$ d'erreurs,
- qu'au delà de $4\varepsilon_p$ il y'a $0,5\%$ d'erreurs.

2.4 L'Erreur Maximum

Définition 2.3 *On appelle erreur maximum l'erreur qui correspond à :*

$$\varepsilon_M = 4\varepsilon_p \tag{2.5}$$

Elle a donc la probabilité $2x0,5\%$ d'être dépassée en valeur absolue.

Cette erreur maximum fixe la tolérance que l'on accorde à une série de mesures. C'est-à-dire on écarte les mesures qui donnent des écarts supérieurs à ε_M. On a aussi :

$$\varepsilon_M = 4\varepsilon_p = 4 \times \frac{2}{3} emq \approx 2.7 emq \tag{2.6}$$

On démontre en outre que la courbe de Gauss admet un point d'inflexion au point d'abscisse *emq*, milieu de l'intervalle $[\varepsilon_p, 2\varepsilon_p]$ car :

$$emq = 1.5\varepsilon_p \tag{2.7}$$

La probabilité pour qu'une erreur soit en valeur absolue inférieur à *emq* est :

$$2(25 + \frac{16}{2}) = 66\%$$

Nous avons dressé plus haut (Tab. 1) le tableau de répartition des erreurs positives et des erreurs négatives de la triangulation de 484 triangles géodésiques du Réseau Géodésique Primordial de la Tunisie.

Appliquons à ces observations la loi mathématique :

Pour cela, il faut calculer le module de précision h, les observations nous donne l'erreur probable 6". En effet, pour 242 erreurs, on a en moyenne :

$$121 \text{ sont inférieures à } 6" \quad \text{et} \quad 121 \text{ sont supérieurs inférieures à } 6"$$

La relation $\varepsilon_p = \frac{0.4761}{h}$ permet de trouver h et de construire la courbe de Gauss soit $h = 0.07931$.

2.5 ERREURS ABSOLUES ET ERREURS RELATIVES

Les erreurs que nous venons de considérer sont des nombres concrêts, on les désigne souvent sous le nom d'erreurs absolues. Souvent on caractérise une mesure par son erreur relative : quotient de l'erreur absolue par la quantité à mesurer.

$$\varepsilon_r = \frac{1}{n \times 10^6} \tag{2.8}$$

est la forme générale de l'erreur relative.

2.6 LES ERREURS EN CAS DE MESURE INDIRECTES

Soit une quantité y inconnue en fonction d'une quantité mesurée x soit $y = f(x)$. On dit que la mesure de y est indirecte.

Si on mesure x avec une erreur Δx, il en résulte une erreur Δy telle que :

$$\Delta y = f'(x).\Delta x$$

Application :

Erreur sur la dénivelée ΔH entre 2 points A et B.

La distance $D = AB$ est mesurée sans erreurs et l'angle de site α avec une erreur $d\alpha$, on peut donc écrire :

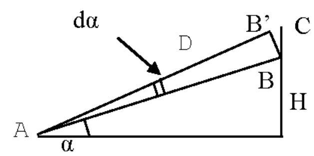


Fig. 2.1 Erreur sur la dénivelée H entre 2 points A et B

$BB' = D.d\alpha$ (Triangle ABB'), d'où :

$$dH = BC = BB'cos\alpha = D.cos\alpha.d\alpha$$

Cette expression peut être déduite directement par la différentiation de la relation $H = D.sin\alpha$ avec D sans erreur :

$$dH = D.cos\alpha.d\alpha \Longrightarrow \Delta H = D.cos\alpha.\Delta\alpha$$

<u>Application numérique :</u>

$D = 500m; \Delta\alpha = 0.01\,gr$; $\alpha = 3.5\,gr$, alors : $\Delta H = 500.cos(3.5^{gr}) \times 10^{-2}.\frac{\pi}{200} = 0.078\,m = 7.8\,cm$. Dans le cas où une inconnue A dépendrait de plusieurs variables, exemple :

$$A = F(x,y,z) \Longrightarrow dA = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz \Longrightarrow$$
$$\Delta A = F(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - F(x,y,z) \approx \frac{\partial F}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial F}{\partial z}$$

Si on prend l'exemple précédent avec $H = D_h.tg\alpha$, avec D_h distance horizonthale déterminée par la méthode parallactique, alors :

$$\begin{aligned} dH &= dD_h.tg\alpha + D_h(1+tg^2\alpha)d\alpha \Rightarrow \\ \Delta H &= \Delta D_h.tg\alpha + D_h(1+tg^2\alpha)\Delta\alpha \end{aligned} \tag{2.9}$$

2.7 COMPOSITION DES ERREURS MOYENNES QUADRATIQUES

Soit $A = F(x,y,z)$ et x,y,z quantités mesurées avec des emq $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ et ε_z. En passant par les dérivées et les différentielles, on démontre que l'emq sur A est ε_A^2 telle que :

$$\varepsilon_A^2 = F_x'^2\varepsilon_x^2 + F_y'^2\varepsilon_y^2 + F_z'^2\varepsilon_z^2 \tag{2.10}$$

2.7.1 erreur moyenne quadratique sur une somme

Considérons $A = F(x,y,z) = x+y+z$. D'après (2.10), on aura :

$$\varepsilon_A^2 = \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 \tag{2.11}$$

APPLICATION : α mesurée avec l'emq ε_α, la distance suivant D est mesurée avec l'emq ε_D. L'altitude H est donnée par $H = Dsin\alpha = F(D,\alpha)$. Appliquons (2.10), on aura :

$$\begin{aligned} \varepsilon_H^2 &= F_D'^2\varepsilon_D^2 + F_\alpha'^2\varepsilon_\alpha^2 \Longrightarrow \\ \varepsilon_H^2 &= sin^2\alpha\varepsilon_D^2 + D^2cos^2\alpha\varepsilon_\alpha^2 \\ \varepsilon_H &= \pm\sqrt{sin^2\alpha\varepsilon_D^2 + D^2cos^2\alpha\varepsilon_\alpha^2} \end{aligned} \tag{2.12}$$

Si la somme A contient n termes et on suppose que :

$$\varepsilon_{x_1} = \varepsilon_{x_2} = \varepsilon_{x_3} = \ldots = \varepsilon_{x_n} = \varepsilon$$

Alors :

$$\varepsilon_A = \pm\sqrt{n\varepsilon^2} = \pm\varepsilon\sqrt{n} \tag{2.13}$$

Exemple : On chaîne une longueur l de $100\,m$ avec un décamètre, à chaque portée l'emq de la mesure est de $1\,cm$.

1. Quelle est l'emq sur l. Soit l' la longueur d'une portée. On a donc $l = 10l'$ et $\varepsilon_{l'} = 0.01\,m$, par suite :

$$\varepsilon_l = \pm ep_{l'}\sqrt{10} = \pm 0.01 \times 3.1622 = \pm 3.2\,cm \tag{2.14}$$

2. Quelle est l'erreur moyenne relative correspondante ?

$$e_r = 0,032/100 = 3.2\times 10^{-4} = \frac{3.2}{10000}$$

2.7.2 Erreur moyenne quadratique sur une moyenne

Soit :

$$A = F(x,y,z,\ldots,u) = \frac{x+y+z+\ldots+u}{n} \tag{2.15}$$

On applique la formule (2.10), on obtient :

$$\varepsilon_A^2 = \frac{\varepsilon_x^2}{n^2} + \frac{\varepsilon_y^2}{n^2} + \ldots + \frac{\varepsilon_u^2}{n^2} \tag{2.16}$$

Si $\varepsilon = \varepsilon_x = \varepsilon_y = \ldots = \varepsilon_u$, alors :

$$\varepsilon_A^2 = n\frac{\varepsilon^2}{n^2} \Longrightarrow \varepsilon_A = \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \tag{2.17}$$

Exemple : 10 mesures directes d'un même longueur l ont donné les valeurs suivants :

$N°$ de la mesure	Valeur de la mesure en m
1	117.235
2	117.237
3	117.248
4	117.234
5	117.229
6	117.230
7	117.233
8	117.240
9	117.241
10	117.234

Tableau 2.1 Tableau des mesures

1- Quelle est la moyenne arithmétique x_0 de ces 10 mesures ?
2- Quelle est l'erreur moyenne quadratique sur une mesure isolée ?
3- Quelle est l'emq sur la moyenne ?

Réponses :

1- On obtient x_0 par $x_0 = \frac{\sum_{i=1}^{i=10}}{10} = 117.236m$

On établit le tableau suivant : 2- l'emq sur une mesure est : $emq' = \sigma' = \sqrt{\frac{\sum_{i=1,10}(l_i - x_0)^2}{10-1}} = \pm\sqrt{288.9/9} = \pm 5.7\,mm$

3- l'emq sur la moyenne est $\sigma" = \pm\frac{\sigma'}{\sqrt{10}} = \pm 1.8\,mm$.

N° de la mesure	Valeur de la mesure en m	$l_i - x_0$ *en mm*	$(l_i - x_0)^2$ *en mm*^{2}
1	117.235	-1.1	1.21
2	117.237	0.9	0.81
3	117.248	11.9	141.61
4	117.234	-2.1	4.41
5	117.229	-7.1	50.41
6	117.230	-6.1	37.21
7	117.233	-3.1	9.61
8	117.240	3.9	15.21
9	117.241	4.9	24.01
10	117.234	-2.1	4.41

Tableau 2.2 Tableau des resultats

CHAPITRE 3

Observations d'Inégales Précisions – Moyennes Pondérées

Supposons qu'une quantité a été déterminée par un certain nombre de mesures effectuées en plusieurs séries (trois pour fixer les idées) et dans les mêmes conditions :
- 1ère série, composée de p_1 mesures donne A_1,
- 2ème série, composée de p_2 mesures donne A_2,
- 3ème série, composée de p_3 mesures donne A_3.

La valeur de A la plus probable est :

$$A = \frac{p_1A_1 + p_2A_2 + p_3A_3}{p_1 + p_2 + p_3} \tag{3.1}$$

Ce rapport s'appelle la **moyenne pondérée**. p_1, p_2, p_3 étant les **poids** des moyennes partielles A_1, A_2, A_3.

D'après (2.17) l'emq de la moyenne partielle A_1 est :

$$n_1 = \pm \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{p_1}}$$

d'où :

$$p_1 = \frac{\varepsilon^2}{n_1^2}, \quad p_2 = \frac{\varepsilon^2}{n_2^2}, \quad p_3 = \frac{\varepsilon^2}{n_3^2} \tag{3.2}$$

Théorème 3.1 *Les poids sont inversement proportionnels aux carrés des emq auxquels ils correspondent.*

D'où :

$$A = \frac{\frac{\varepsilon^2}{n_1^2}A_1 + \frac{\varepsilon^2}{n_2^2}A_2 + \frac{\varepsilon^2}{n_3^2}A_3}{\frac{\varepsilon^2}{n_1^2} + \frac{\varepsilon^2}{n_2^2} + \frac{\varepsilon^2}{n_3^2}} = \frac{\frac{1}{n_1^2}A_1 + \frac{1}{n_2^2}A_2 + \frac{1}{n_3^2}A_3}{\frac{1}{n_1^2} + \frac{1}{n_2^2} + \frac{1}{n_3^2}} \tag{3.3}$$

Exemple 1 :

On a mesuré un angle d'un tours d'horizon successivement avec 8 réitérations ce qui a donné une moyenne de $\alpha_1 = 43^{gr},293\,5$ et avec 4 réitérations a donné une moyenne $\alpha_2 = 43^{gr},294\,1$. Quelle est la valeur α de l'angle à adopter sachant que ces mesures ont même précisions individuelles ?

Réponse : On trouve $\alpha = \dfrac{8\alpha_1 + 4\alpha_2}{8+4} = 43,293\,7\,gr$

Exemple 2 :

On a mesuré un même angle avec deux théodolites différents :

- le premier théodolite donne pour une mesure d'angle une emq de 4 secondes, on a effectué 16 réitérations ce qui donne une moyenne $\alpha_1 = 43,293\,8\,gr$,

- le deuxième théodolite donne pour une mesure d'angle une emq de 8 secondes, on a effectué 32 réitérations ce qui donne une moyenne $\alpha_2 = 43,293\,5\,gr$.

Quelle est la valeur adoptée α de l'angle ?

Les emq sur les moyennes de 16 et 32 réitérations sont respectivement :

$$\varepsilon_1 = \frac{4}{\sqrt{16}} = 1, \quad \varepsilon_2 = \frac{8}{\sqrt{32}} = \frac{8}{4\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

d'après le théorème 3.1,nous déduisons les poids p_1 et p_2 :

$$p_1 = \frac{1}{\varepsilon_1^2} = 1, \quad p_2 = \frac{1}{(\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2}$$

d'où :

$$\alpha = \frac{p_1\alpha_1 + p_2\alpha_2}{p_1 + p_2} = \frac{43.2938 + 0.5 \times 43.2935}{1 + 1/2} = 43,2937\,gr$$

CHAPITRE 4

REMARQUES GÉNÉRALES

Avant d'entreprendre la réalisation d'un projet, le topomètre doit se préoccuper des points suivants :

a/ Connaître le but de projet.

b/Savoir quel est le degré de précision requis quant à sa réalisation. Il ne faut pas oublier qu'une augmentation de précision entraîne nécessairement une augmentation de la durée des travaux et leur coût.

Exemple : Il est inutile d'employer des instruments trop précis dont l'erreur moyenne serait très inférieure à l'erreur graphique. La précision de la mesure sera perdue dans l'erreur graphique.

En effet, soit à reporter $D = 100\,m$ à l'échelle $1/5000$. Si on chaîne cette distance avec un décamètre ruban d'acier on a une erreur résultante de $1cm\sqrt{10} \approx 3\,cm$.

Mais l'erreur graphique s'effectue avec une erreur de $0.1\,mm$. Soit $0,50\,m$, qui fait perdre les bénéfices de l'opération assez compliquée du chaînage. On se contentera des procédés ou d'instruments plus simples, dont l'emploi se traduit par une économie du temps.

c/ déterminer la précision relative de chacune des mesures.

Exemple : Une distance de $1\,150\,m$ a été mesurée par un appareil de $\sigma = \pm 10\,mm \pm 10\,ppm$. On détermine l'emq de cette mesure :

$$emq = \pm\sqrt{10^2 + (10 \times 1.150)^2} = \pm 15\,mm$$

L'erreur probable est estimée par :

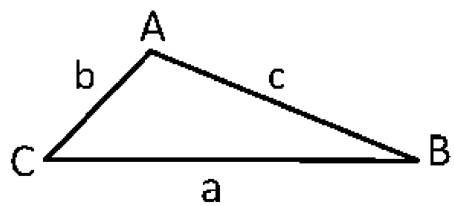
$$\varepsilon_p = \frac{2}{2} emq = 10\,mm = 1\,cm$$

d/ identifier les sources d'erreurs.

e/ trouver des moyens adéquats pour vérifier et réduire les erreurs.

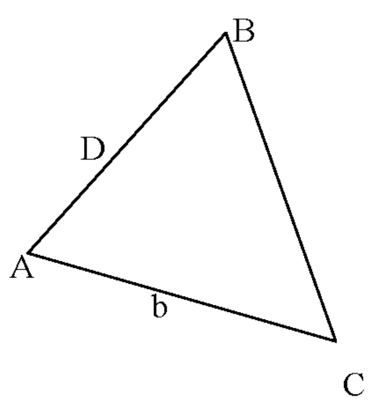
4.1 Exercices

Exercice 4.1 *1/ Quelle est la longueur du côté a du terrain triangulaire suivant ?*



On donne $AC = 60.45\,m$ et les angles $A = 95°00'00"$ et $B = 35°00'00"$.
2/ quel est l'écart-type de a si $\sigma_b = \pm 0,005\,m$ et $\sigma_A = \sigma_B = 3"$.

Exercice 4.2 *Dans le triangle équilatéral suivant déterminer la formule permettant de déterminer l'erreur relative dD/D si on connaît $b, \sigma_b, \sigma_C = \sigma_A = \sigma = emq$.*



Littérature

1. **R. D'Hollander**. 1976. *Cours de Topographie- Topométrie*. Premier Fascicule. Ecole Nationale des Sciences Géographiques. Publications de l'Institut Géographiques National de France.

2. **A. Ben Hadj Salem**. 2021. *Rappels Mathématiques de Base Pour Les Adjoints Et Agents Techniques*. 46 pages. https ://vixra.org/pdf/2109.0129v1.pdf

3. **C. Fezzani** et **A. Ben Hadj Salem**. 2021. *Théorie des Erreurs pour les Techniciens Supérieurs - Notions de la théorie des Moindres Carrés*. 93 pages. https ://vixra.org/pdf/2110.0038v1.pdf