Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier ma directrice de thèse, madame Fatima Zohra MEZEGHRANI Maitre de conférence classe A à l'université Oran1, pour avoir accepté de diriger cette thèse, pour son soutien et son aide considérables et pour ses conseils précieux et ses remarques pertinentes qui m'ont guidé durant la réalisation de ce mémoire, qu'elle trouve ici l'expression de mon grand respect et ma profonde admiration pour toutes ses qualités scientifiques et humaines.

Mes remerciements vont également à l'égard de monsieur Kacem BELGHABA, Professeur à l'université Oran1 et directeur du laboratoire de Mathématiques et ses Applications, pour sa coopération permanente, son appui inconditionnel et pour l'honneur qu'il me fait de présider le jury de cette thèse. Ses encouragements m'ont été précieux.

Je tiens également à remercier monsieur Mohammed Hichem MORTAD Professeur à l'université Oran1, avec une profonde sympathie, pour avoir accepté de juger ce travail.

Mes remerciements vont également à l'égard de madame Setti AYAD Maitre de conférence classe A à l'université Oran1, pour avoir accepté d'évaluer ce travail et de m'avoir fait l'honneur de participer au jury.

Mes remerciements s'adressent également à monsieur Mehdi BENABDALLAH Professeur à l'université des sciences et de la technologie d'Oran et monsieur Ali HAKEM Professeur à l'université de Sidi Bel Abbes d'avoir accepté d'examiner cette thèse et d'en rédiger un rapport.

Enfin, je tiens aussi à remercier tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin à la réalisation de ce modeste travail.

Table des matières

Introduction

0.1 Objectif principal de la thèse

Considérons dans un espace de Banach complexe X, le problème abstrait de type elliptique

$$u''(x) + Au(x) = f(x), \quad x \in [0,1], \tag{1}$$

avec les conditions aux limites de type mêlé

$$u(0) = u_0, \qquad u'(0) = u'(1). \tag{2}$$

Dans tout ce travail, A est un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A)$ non nécéssairement dense dans X satisfaisant l'hypothèse d'éllipticité suivante

$$[0, +\infty[\subset \rho(A) \text{ et } \exists C > 0 : \left\|(A - \lambda I)^{-1}\right\|_{L(X)} \leq \frac{C}{1+\lambda}. \tag{3}$$

Ici u_0 est un élément donné dans X et $f \in C^\alpha([0,1]; X)$, $0 < \alpha < 1$.

Ici une solution stricte du problème (1)-(2), telle que

$$u \in C^2([0,1]\,; X) \cap C([0,1]\,; D(A)),$$

et vérifiant (1)-(2), est obtenue. De plus on donne les conditions nécéssaires et suffisantes pour avoir la propriété de régularité maximale :

$$u'', Au \in C^\alpha([0,1]; X).$$

Ce travail est basé fondamentalement sur une représentation explicite de la solution, en utilisant la racine carrée de l'opérateur $-A$ et la méthode de Krein. On analyse alors avec prudence, toutes les composantes de la solution, dans les deux cas, en utilisant les résultats de Dore-Venni et Sinestrari [12], [46], le théorème de réitération de Lions, voir [31] et [48], la théorie des semi-groupes et quelques techniques appliquées dans [18] et [19].

Comme application, on obtient quelques résultas liés aux équations aux dérivées partielles.

Comme cité précédement, la racine carrée de l'opérateur $-A$ apparait naturellement dans les équations du second ordre avec différentes conditions aux limites, mais quand on a à étudier l'équation (1) avec les conditions de Dirichlet, l'utilisation de la racine carrée n'est pas nécessaire. Par exemple dans le travail de Labbas [28], les techniques sont basées sur le noyau de Green. Dans notre cas, l'apparence de $\sqrt{-A}$ est due aux conditions aux limites de Neumann.

Notons que dans ce travail on n'a pas la densité de $D(A)$ dans X, c'est pour cette raison que l'on doit utiliser la racine carrée de $-A$ avec prudence. On rappelle le papier sur les puissances fractionnaires d'opérateurs à domaines non denses par Martinez-Sanz [33].

Une deuxième partie de notre travail est consacrée à introduire une nouvelle approche basée sur les techniques du noyau de Green, au l'équation (1) avec les conditions aux limites

$$u(0) = u_0, \qquad u'(1) = u'_1. \tag{4}$$

où u_0 et u'_1 sont des éléments donnés dans X et $f \in L^p(0,1;X)$, $1 < p < \infty$. Dans cette partie

$$X \text{ est un espace } UMD \tag{5}$$

et l'opérateur A vérifie l'hypothèse (3) et :

$$\begin{cases} \forall s \in \mathbb{R}, (-A)^{is} \in L(X) \text{ et } \exists C \geqslant 1, \alpha \in]0,\pi[, \\ \left\|(-A)^{is}\right\|_{L(X)} < Ce^{\alpha|s|}. \end{cases} \tag{6}$$

On montre alors qu'il existe une unique solution stricte u de (1)-(4) autrement dit une fonction u telle que

$$u \in W^{2,p}(0,1;X) \cap L^p(0,1;D(A)),$$

et vérifiant (1)-(4).

D'un autre côté, on donne les conditions nécéssaires et suffisantes pour avoir une solution stricte ayant la propriété de régularité maximale suivante

$$u'', Au \in L^p(0,1;X).$$

A titre illustratif, lorsque $X = L^q(0,1), 1 < q < \infty$,

$$\begin{cases} D(A) = \{\varphi \in W^{2,q}(0,1) : \varphi(0) = \varphi(1) = 0\}, \\ A\varphi = \varphi''. \end{cases}$$

l'équation abstraite (1) devient celle du Laplacien avec des conditions aux limites de type mêlé

$$\begin{cases} \Delta u = f, \\ u(0,y) = u_0(y), \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,y) = u_1'(y), \\ u(x,0) = 0, \\ u(x,1) = 0. \end{cases}$$

où

$$f \in L^p(0,1;L^q(0,1))$$

on dit que f est dans un espace anisotropique. Dans le cas où $p = q$ on obtient

$$L^p(0,1;L^q(0,1)) = L^p((0,1)\times(0,1)).$$

0.2 Historique

Pendant les dernières décenies, plusieurs chercheurs ce sont interessés à la résolution l'équation (1) dans les deux cas décrits précédement :

$$f \in C^\alpha([0,1];X) \text{ ou } f \in W^{2,p}(0,1;X), \quad 0<\alpha<1, 1<p<\infty.$$

Plusieurs d'entre eux ont étudié l'équation (1) comme un problème abstrait de type elliptique, i.e. sous l'hypothèse (3), avec différentes conditions aux limites dans les deux cas f holdérienne ou f dans $L^p(0,1;X)$ en utilisant les puissances fractionnaires d'opérateurs ou le calcul fonctionnel de Dunford. Nous citons en premier la théorie des sommes d'opérateurs de Da Prato et P.Grisvard [9] qui traite comme application notre problème avec $u_0 = u_1' = 0$ mais, en imposant une condition non naturelle au second membre du type $f(0) = f(1) = 0$.

On trouve aussi une étude complète de l'équation (1) sous les conditions aux limites de Dirichlet dans le cas d'opérateurs à coefficients variables, voir Labbas [28]. Cet auteur a utilisé les techniques du noyau de Green . Aussi, l'équation (1) a été étudié avec les conditions Dirichlet-Neumann dans [34] et [35] et ceci, en utilisant les techniques des semi-groupes. Notre travail s'inspire de cette dernière référence.

Récemment, une nouvelle approche basée sur les techniques des semi-groupes et les puissances fractionnaires d'opérateurs, a été développée par Favini, Labbas, Tanabe et Yagi [16], [18] concernant l'équation complète

$$u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) = f(x), \quad x \in (0,1),$$

sous les conditions aux limites de Dirichlet.

On cite par exemple, le premier travail remarquable de S. G. Krein en 1967 (voir [27] p. 249) qui utilise une réduction de l'ordre et les propriétés de la racine carrée $\sqrt{-A}$ (le domaine de A est supposé dense dans X). Le même Problème a été étudié comme un exemple d'une situation plus générale (dans le cadre des sommes d'opérateurs) par G. Da Prato et P. Grisvard en 1975 (voir [9]). Ici les outils utilisés sont basés sur le calcul fonctionnel de Dunford et les espaces d'interpolation. Cependant, de part le cadre général qu'il traitent, ces auteurs ont imposé une condition non naturelle au second membre du type : $f(0) = f(1) = 0$.

Il est à noter que, dans les exemples concrets régis par des EDP, les espaces d'interpolation sont souvent plus faciles à expliciter que les domaines de puissances fractionnaires d'opérateurs. Le travail de R. Labbas en 1986 (voir [28]) clarifie complètement cette situation en donnant des conditions nécessaires et suffisantes sur les données pour avoir une solution classique ayant de plus une régularité optimale, voir aussi Rabah Labbas [28].

Dans le cas où $B = 0$ et A variable, l'équation non autonome

$$u''(x) + A(x)\,u(x) = f(x), \qquad x \in (0,1),$$

a été traitée dans le travail sur les sommes d'opérateurs de Da Prato-Grisvard (cadre non commutatif), avec les conditions aux limites de type

$$\begin{cases} a_0 u(0) - b_0 u'(0) = d_0 \\ a_1 u(1) + b_1 u'(1) = d_1 \end{cases}$$

avec $a_i, b_i \geqslant 0$ et $a_i + b_i > 0$ $(i = 0,1)$, où pour chaque $x \in [0,1]$, $(-A(x))$ est supposé vérifiant l'hypothèse d'ellipticité dite de Krein (voir [27], (2.2), p. 249) et des hypothèses de différentiabilité sur la résolvante de type Tanabe et Yagi (voir Da Prato et Grisvard [9], p. 373 et 375).

Le travail de R. Labbas en 1986 (voir [28]) étudie et clarifie ce cas mais avec une autre hypothèse sur les opérateurs elliptiques $(-A(x))$, sans supposer la différentiabilité des résolvantes ni la densité des domaines. Cette hypothèse s'inspire sur les travaux de P. Acquistapace et B. Terreni pour l'étude du problème de Cauchy abstrait (voir [1]). Concrètement, cette hypothèse traduit que les domaines des opérateurs varient " d'une manière höldérienne" mais que les coefficients des actions de ces opérateurs peuvent être peu régulières. Cette situation a été considérée et étudiée dans un cadre plus général d'une somme d'opérateurs par R. Labbas et B. Terreni, (voir [29]). On peut dire que les deux approches sont complémentaires l'une de l'autre.

0.3 Outils et méthodes de travail

Cette thèse utilise beaucoup d'outils d'analyse fonctionnelle, en particulier la théorie des semi-groupes, les puissances fractionnaires d'opérateurs, la théorie de l'interpolation, la théorie des sommes d'opérateurs linéaires et le calcul fonctionnel de Dunford.

Les techniques utilisées s'inspirent de beaucoup de travaux ayant trait à l'étude des équations différentielles abstraites posées dans des espaces de Banach. On cite à titre indicatif les travaux récents développés dans [15], [16], [17] et [18].

0.4 Description des sections et résultats principaux

Cette thèse comporte 4 chapitres.

Le premier chapitre est consacré à des rappels d'usage sur les outils mathématiques utilisés dans ce mémoire. Nous citons certains résultats classiques sur les semi- groupes, les espaces holdériens, les espaces d'interpolation et les espaces fractionnaires, ainsi que les pricipaux théorèmes de la théorie des sommes d'opérateurs linéaires dans le cas des espaces de Banach quelconques ([9] ;[29]) et dans le cas des espaces de Banach UMD ([11] ;[37]).

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude du problème (1)-(2) dans le cas

$$f \in C^{\alpha}([0,1]\,;X), \quad 0 < \alpha < 1.$$

On cherche une solution stricte u de (1)-(2), i.e. une fonction telle que

$$u \in C^{2}([0,1]\,;X) \cap C([0,1]\,;D(A)),$$

vérifiant le problème (1)-(2). Cette solution stricte aura la propriété de régularité maximale si elle vérifie de plus

$$u'',\ Au \in C^{\alpha}([0,1]\,;X).$$

Le troisième chapitre concerne le cas $L^p(0,1;X)$. Plus précisément, on s'intéresse à l'équation différentielle abstraite du second ordre de type elliptique (1) avec les conditions aux limites de type mêlé (4) où A est un opérateur linéaire fermé sur un espace de Banach complexe X et u_0, u_1' sont des éléments donnés dans X. Ici

$$f \in L^p(0,1;X), 1 < p < \infty,$$

et X a la proporiété géométrique dite UMD. On suppose que A est un opérateur *Bip* et on montre que (1)-(4) admet une unique solution stricte, sous certaines hypothèses naturelles d'ellipticité de l'opérateur et de régularité sur les données, on donne alors, une représentation explicite de la solution stricte.

La formule de représentation de la solution est donnée par deux méthodes, la première se base sur le calcul fonctionnel de Dunford et la deuxième sur la méthode de Krein[27], l'unicité de la représentation est démontrée.

Dans ce chapitre, on fait une nouvelle approche du problème (1)-(4) en utilisant le théorème de Mikhlin. Dans cette partie on utilise les techniques des multiplicateurs de Fourier et la théorie de Mikhlin pour majorer les puissances imaginaires pures d'opérateurs.

Le quatrième chapitre illustre notre théorie abstraite par quelques exemples concrets d'applications en EDP dans le cas des espaces L^p et C^α.

Le mémoire se termine par **une bibliographie** relative à l'ensemble des travaux présentés ici.

Chapitre 1

Rappels

1.1 Notions sur les opérateurs linéaires

On va effectuer quelques rappels sur les opérateurs linéaires bornés et fermés afin que les notations utilisées au cours de cette thèse soient claires. On donnera aussi une définition des opérateurs sectoriels. Les démonstrations ne sont pas données, on renvoie par exemple à Dunford-Schwartz [13]. Soient $(X, ||.||_X)$, $(Y, ||.||_Y)$ deux espaces vectoriels normés complexes.

1.1.1 Opérateurs linéaires

Définition 1.1.1. *1. Un opérateur linéaire de X dans Y est une application linéaire A définie d'un sous-espace vectoriel $D(A) \subset X$ et à valeurs dans X , i.e. tel que pour tout x, $y \in D(A)$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ on a*

(a) $A(x + y) = Ax + Ay$

(b) $A(\lambda x) = \lambda Ax$

(On note que, par abus, on écrit toujours $A(x) = Ax$ pour tout $x \in D(A)$)

2. $D(A)$ est appelé le domaine de A. On dit que A est à domaine dense si $\overline{D(A)} = X$, i.e. si pour tout $x \in X$, il existe une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $D(A)$ telle que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} x_n = x$

3. On appelle noyau de A le sous-espace de X, noté $Ker(A)$, défini par :

$$Ker(A) = \{x \in D(A) : Ax = 0\}$$

Définition 1.1.2. *soit $A : D(A) \subset X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire ,*

1. On appelle graphe de A le sous espace de $X \times Y$, noté $G(A)$, défini par :

$$G(A) = \{(x, y) \in X \times Y/x \in D(A), y = Ax\}$$

2. *On peut munir $D(A)$ d'une norme notée $||.||_{D(A)}$ et appelée norme du graphe, elle est définie pour tout $x \in D(A)$ par :*

$$||x||_{D(A)} := ||x||_X + ||Ax||_Y$$

Proposition 1.1.1. *Si A est un opérateur linéaire fermé, alors $\left(D, ||.||_{D(A)}\right)$ est un espace de Banach.*

Définition 1.1.3. *Soient A et B deux opérateurs linéaires de X dans Y .*

1. *On dit que B est une extension ou un prolongement de A et on note $A \subset B$ si*

$$\begin{cases} D(A) \subset D(B) \\ et \\ \forall x \in D(A), Ax = Bx \end{cases}$$

2. *On dira que A admet un prolongement fermé (ou A est fermable) si B est fermé*

Définition 1.1.4. *Soient $A : D(A) \subset X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire. On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}, A^n$ la n-ième puissance de A, par :*

$$\begin{cases} D(A^0) = X \ et \ A^0 = I \\ D(A^1) = D(A) \ et \ A^1 = A \\ \forall n \geqslant 2, D(A^n) = \{x \in D(A^{n-1}) : A^{n-1}x \in D(A)\} \ et \ A^n = AA^{n-1} \end{cases}$$

Si A est injectif, on peut définir l'inverse de A, noté A^{-1} par :

$$\begin{array}{rll} A^{-1}: & A(D(A)) & \longrightarrow D(A) \\ & y & \longmapsto A^{-1}y = x \text{ où } x \in D(A) \ est \ défini \ par \ Ax = y \end{array}$$

Remarque 1.1.1. *Il est à noter que le domaine $D(A^n)$ peut être trivial même si $D(A)$ est dense. Un exemple qui est paru dans (Exemple 10.1.3 dans [38]) est le suivant : Si la transformée de Fourier F est restreinte à l'espace des fonctions infiniment dérivables à support compact, alors $D(F^2) = 0$.*
Même si A est fermé ceci reste insuffisant comme peut être consulté dans les références([7], [10], [39]et [45])

1.1.2 Opérateurs linéaires bornés

Définition 1.1.5. *Un opérateur linéaire A défini de X dans Y et dit borné s'il existe une constante positive C, telle que :*

$$||Ax||_Y \leqslant C\,||x||_X\,, \forall x \in X$$

On note $\mathcal{L}(X,Y)$ l'espace des opérateurs linéaires bornés de X dans Y . On pose $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X,X)$.
On définit alors une norme sur $\mathcal{L}(X,Y)$ notée $||.||_{\mathcal{L}(X,Y)}$ et définie pour tout $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ par :

$$||A||_{L(X,Y)} := \sup_{x\in X, x\neq 0} \frac{||Ax||_Y}{||x||_X} = \sup_{||x||_X \leqslant 1} ||Ax||_Y = \sup_{||x||_X=1} ||Ax||_Y.$$

Proposition 1.1.2. *soit A un opérateur linéaire borné et si $||A||_{L(X)} < 1$ alors $(I-A)$ est inversible dans $\mathcal{L}(X)$ et $(I-A)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A^n$*

1.1.3 Opérateurs linéaires fermés

Définition 1.1.6.
1. *Un opérateur linéaire de X dans Y est fermé si son graphe est un sous-espace vectoriel fermé de $X \times Y$.*
2. *A est dit fermable si et seulement s'il admet une extension fermée, ce qui équivaut à dire que pour toute suite $(x_n)_n \in D(A)$ telle que*

$$\begin{cases} x_n \longrightarrow 0 \\ Ax_n \longrightarrow y \end{cases} \Longrightarrow y = 0.$$

Les convergences des suites x_n et Ax_n sont au sens de la norme de l'espace X. La notion de fermabilité des opérateurs linéaires est importante dans la résolution de certaines équations aux dérivées partielles car elle permet d'avoir des solutions distributions, (voir [24]).

Proposition 1.1.3. *Un opérateur linéaire $A : D(A) \subset X \longrightarrow Y$ est fermé si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ d'éléments de $D(A)$ telle que*

$$\begin{cases} x_n \longrightarrow x \text{ dans } X. \\ Ax_n \longrightarrow y \text{ dans } Y. \end{cases}$$

On a $x \in D(A)$ et $Ax = y$.

Proposition 1.1.4. *Tout opérateur fermable A admet une plus petite extension fermée notée $\overline{A}$. De plus, on a $G(\overline{A}) = \overline{G(A)}$*

Définition 1.1.7. *Soit A un opérateur linéaire fermé sur X.*

1. *On appelle ensemble résolvant de A l'ensemble*

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C}/(\lambda I - A) \; est \; inversible \; dans \; \mathcal{L}(X)\}.$$

   Un élément de $\rho(A)$ est appelé valeur résolvante de A.

2. *Si $\lambda \in \rho(A)$, on définit la résolvante $R_\lambda(A)$ de A au point λ par :*

$$R_\lambda(A) := (\lambda I - A)^{-1}.$$

3. *Le spectre $\sigma(A)$ de A est l'ensemble*

$$\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$$

   Un élément de $\sigma(A)$ est une valeur spectrale de A.

4. *On dit que $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de A si $(\lambda I - A)$ n'est pas injectif. Autrement dit, l'ensemble des valeurs propres $Vp(A)$ de A est donné par*

$$Vp(A) := \{\lambda \in \mathbb{C}/ker(\lambda I - A) \neq \{0\}\}$$

5. *On appelle le rayon spectral de A, noté $r(A)$, et défini par*

$$r(A) := sup\{|\lambda|/\lambda \in \sigma(A)\}.$$

1.1.4 Opérateurs sectoriels

On étudie maintenant une classe d'opérateurs fermés. Les résultats énoncés ici sont issus de M. Haase [22] et A. Lunardi [32].

Définition 1.1.8. *soit $\omega \in [0, \pi]$, on note*

$$S_\omega = \begin{cases} \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0 \; et \; |\arg(z)| < \omega\} & si \; \omega \in \,]0, \pi] \\ \mathbb{R}_+^* & si \; \omega = 0 \end{cases}$$

Ainsi, si $\omega > 0$, S_ω désigne le secteur ouvert, symétrique autour de l'axe réel positif, d'angle 2ω.

Définition 1.1.9. *Soit $\omega \in \; [0, \pi[$. Un opérateur linéaire A sur X est dit sectoriel d'angle ω, noté $A \in Sect(\omega)$ si :*

1. $\sigma(A) \subset \overline{S_\omega}$
2. $\exists M > 0, \sup_{\lambda \in \mathbb{C}\setminus\overline{S_{\omega'}}} \| \lambda R(\lambda, A) \|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant M < \infty$, *pour tout* $\omega' \in]\omega, \pi[$

Proposition 1.1.5. *Soit* $\omega \in [0, \pi[$. *Les propriétés suivantes sont alors vérifiées :*

1. $A \in Sect(\omega)$ *et* A *injectif* $\Longleftrightarrow A^{-1} \in Sect(\omega)$
2. $A \in Sect(\omega)$, $c \geqslant 0 \Longrightarrow cA \in Sect(\omega)$.
3. $A \in Sect(\omega)$, $\varepsilon \geqslant 0 \Longrightarrow A + \varepsilon I \in Sect(\omega)$.

Proposition 1.1.6. *Soit* A *un opérateur linéaire fermé sur* X.

1. *Si* $\mathbb{R}^*_- \subset \rho(A)$ *et* $M(A) = \sup_{\lambda>0} ||\lambda(\lambda I + A)^{-1}|| < \infty$, *alors*
$$M(A) \leqslant 1 \text{ et } A \in Sect(\pi - \arcsin(M(A)^{-1}))$$
2. *Si* X *est réflexif, alors* $\overline{D(A)} = X$ *et* $X = \ker(A) \oplus \overline{Im(A)}$
3. *Soit* $\omega \in [0, \pi[$. *Si* $A \in Sect(\omega)$ *est injectif et* X *est réflexif, alors*
$$\overline{Im(A)} = \overline{D(A)} = X = \overline{D(A^n) \cap Im(A^n)}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1.2 Semi-groupes

Dans cette section, nous rappelons quelques définitions et résultats importants sur les semi-groupes. On trouve les démonstrations et d'autres propriétés de Semi-groupes dans K.-J. Engel et R. Nagel [14], A. Pazy [41]

1.2.1 Semi-groupes fortement continus

Définition 1.2.1. *On appelle semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur* X *une famille* $(T(t))_{t\geqslant 0} \subset \mathcal{L}(X)$ *vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *T(0)= I*
2. $\forall t, s \in \mathbb{R}^+$ *T(t+s)= T(t)T(s)*

Remarque 1.2.1. *si* $t \in \mathbb{R}$, $(T(t))$ *est dit groupe.*

Définition 1.2.2. *Un semi-groupe* $(T(t))_{t\geqslant 0}$ *d'opérateurs linéaires bornés est dit fortement continu (ou* C_0*-semi-groupe) si*

$$\lim_{t\longrightarrow 0^+} ||T(t)x - x||_X = 0, \ \forall x \in X.$$

Définition 1.2.3. *Un semi-groupe $(T(t))_{t\geqslant 0}$ d'opérateurs linéaires bornés est dit uniformément continu si*

$$\lim_{t\longrightarrow 0^+} ||T(t)-I||_{\mathcal{L}(X)} = 0$$

Proposition 1.2.1. *Soit $(T(t))_{t\geqslant 0}$ un C_0 semi-groupe sur X. Alors il existe des constantes $w \geqslant 0$ et $M \geqslant 1$ telles que :*

$$\text{pour tout } t \geqslant 0,\ ||T(t)||_{\mathcal{L}(X)} \leqslant Me^{wt},$$

Définition 1.2.4. *Un C_0 semi-groupe $T(t)_{t\geqslant 0}$ est appelé semi groupe de contractions si*

$$\text{pour tout } t \geqslant 0,\ ||T(t)||_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \leqslant 1$$

corollaire 1.2.1. *si $(T(t))_{t\geqslant 0}$ est un C_0 semi-groupe,alors l'application*

$$[0,+\infty[\ni t \longmapsto T(t)x \in X$$

est continue sur $[0,+\infty[$, quel que soit $x \in X$ i.e. pour tout $t_0 \in \mathbb{R}^+$ on a

$$\lim_{t\longrightarrow t_0^+} ||T(t)x - T(t_0)x|| = 0.$$

1.2.2 Générateurs infinitésimaux

Définition 1.2.5. *On appelle générateur infitésimal d'un C_0 semi-groupe $(T(t))_{t\geqslant 0}$, un opérateur A défini sur l'ensemble*

$$\begin{cases} D(A) := \left\{ x \in X : \lim\limits_{t\longrightarrow 0^+} \dfrac{T(t)x-x}{t} \text{ existe dans} X \right\} \\ Ax :=: \lim\limits_{t\longrightarrow 0^+} \dfrac{T(t)x-x}{t}, x \in D(A) \end{cases}$$

Proposition 1.2.2. *Soient $(T(t))_{t\geqslant 0}$ un C_0 semi-groupe et A son générateur infinitésimal. Si $x \in D(A)$, alors $T(t)x \in D(A)$ et on a l'égalité :*

$$T(t)Ax = AT(t)x, \forall t \geqslant 0.$$

Proposition 1.2.3. *Soient $(T(t))_{t\geqslant 0}$ un C_0 semi-groupe et A son générateur infinitésimal. Alors :*

1. *pour tout $x \in D(A)$ et $t, s \geqslant 0$,*

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)Axd\tau = \int_s^t AT(\tau)xd\tau$$

2. *l'application :*
$$[0,+\infty[\ni t \longmapsto T(t)x \in X$$
est dérivable sur $[0,+\infty[$, *pour tout* $x \in D(A)$ *et nous avons :*
$$\frac{d}{dt}T(t)x = T(t)Ax = AT(t)x, \forall t \geqslant 0.$$

Lemme 1.2.1. *Soit* $(T(t))_{t\geqslant 0}$ *un* C_0 *semi-groupe et* A *son générateur infinitésimal. Alors :*
$$\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)xds = T(t)x$$
quels que soient $x \in X$ *et* $t \geqslant 0$.

Proposition 1.2.4. *Soient* $(T(t))_{t\geqslant 0}$ *un* C_0 *semi-groupe et* A *son générateur infinitésimal. Si* $x \in X$, *alors*
$\int_0^t T(s)xds \in D(A)$*et on a l'égalité :*
$$A\int_0^t T(s)xds = T(t)x - x$$

Théorème 1.2.1. *Soient* $(T(t))_{t\geqslant 0}$ *un* C_0 *semi-groupe et* A *son générateur infinitésimal. Alors*
$$x \in D(A) \text{ et } Ax = y \text{ si et seulement si } T(t)x - x = \int_0^t T(s)yds, \forall t \geqslant 0.$$

corollaire 1.2.2. *Soient* $(T(t))_{t\geqslant 0}$ *est un* C_0 *semi-groupe et* A *son générateur infinitésimal. Alors :*

1. $\overline{D(A)} = X$
2. A *est un opérateur fermé.*

Théorème 1.2.2. *Soient deux* C_0 *semi-groupes* $(T(t))_{t\geqslant 0}$ *et* $(S(t))_{t\geqslant 0}$ *ayant pour générateur infinitésimal le même opérateur* A. *Alors :* $T(t) = S(t)$, $\forall t \geqslant 0$.

Remarque 1.2.2. *Soit* A *un opérateur linéaire borné sur* X. *Alors*
$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{n!}A^n,$$
existe et détermine d'une manière unique un semi-groupe uniformément continu $(e^{tA})_{t\geqslant 0}$ *dont* A *est le générateur infinitésimal.*
Réciproquement, $(T(t))_{t\geqslant 0}$ *étant un semi-groupe uniformément continu, on a pour tout* $x \in X$, $\frac{1}{t}\int_0^t T(s)xds$ *converge uniformément vers* $T(0)x = x$ *quand* $t \longrightarrow 0^+$.
Donc pour tout $t>0$, $\frac{1}{t}\int_0^t T(s)xds$ *est inversible et pour tout* $y \in X$, *il existe* $x \in X$*et* $t > 0$ *tel que*
$$y = \frac{1}{t}\int_0^t T(s)xds$$
donc $y \in D(A)$. *Ainsi* $D(A) = x$ *et* A *est borné*

1.2.3 Théorème de Hille-Yosida

Théorème 1.2.3. (***Hille - Yosida***) *Un opérateur linéaire :* $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ *est le générateur infinitésimal d'un* C_0*-semi-groupe de contractions* $(T(t))_{t\geqslant 0}$ *sur* X *si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :*

1. A *est un opérateur fermé et* $\overline{D(A)} = X$
2. *L'ensemble résolvant de l'opérateur* A *contient la demi-droite* $]0; +\infty[$ *et on a*

$$\forall \lambda > 0,\ ||(\lambda I - A)^{-1}||_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{1}{\lambda}$$

Remarque 1.2.3. *Soit* $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ *un opérateur linéaire est le générateur infinitésimal d'un* C_0*-semi-groupe de contractions* $(T(t))_{t\geqslant 0}$ *sur* X*. tel que* $\{\lambda \in \mathbb{C} : Re(\lambda) > 0\} \subset \rho(A)$ *et pour* $Re(\lambda) > 0$ *ona :*

$$||(\lambda I - A)^{-1}||_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{1}{Re(\lambda)}, \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

Théorème 1.2.4. *Soit* $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ *un opérateur linéaire est le générateur infinitésimal d'un* C_0*-semi-groupe* $(T(t))_{t\geqslant 0}$ *sur* X *qui satisfait* $||T(t)||_{\mathcal{L}(X)} \leqslant Me^{wt}$ *si et seulement si*

1. A *est un opérateur fermé et* $\overline{D(A)} = X$
2. $\rho(A)$ *contient l'ensemble* $]\omega; +\infty[$ *et pour tout* $\lambda \in]\omega; +\infty[$ *on a*

$$||(\lambda I - A)^{-n}||_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{M}{(\lambda - w)^n}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

1.2.4 Semi-groupes différentiables

Définition 1.2.6. *Un* C_0*-semi -groupe* $(T(t))_{t\geqslant 0}$ *dans* X *est dit différentiable si l'application* $t \in]0, +\infty[\longmapsto T(t)x \in X$ *est différentiable* $\forall x \in X$

Remarque 1.2.4. *Si* $(T(t))_{t\geqslant 0}$ *est différentiable alors* $D(A) = X$ *et* A *est nécessairement un opérateur borné.*

Théorème 1.2.5. *Soient* $(T(t))_{t\geqslant 0}$ *est un* C_0 *semi-groupe qui satisfait* $||T(t)||_{\mathcal{L}(X)} \leqslant Me^{wt}$ *et* A *son générateur infinitésimal. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. $(T(t))_{t\geqslant 0}$ *est un* C_0*-semi-groupe différentiable*
2. $Im(T(t)) \subset D(A),\ \forall t > 0.$

Proposition 1.2.5. *Soient* $(T(t))_{t\geqslant 0}$ *est un* C_0 *semi-groupe différentiable qui satisfait* $||T(t)||_{\mathcal{L}(X)} \leqslant Me^{wt}$. *Alors l'application :*

$$t \in]0,+\infty[\longmapsto T(t)x \ \in \mathcal{L}(X)$$

est continue pour la topologie de la convergence uniforme.

Théorème 1.2.6. *Soient* $(T(t))_{t\geqslant 0}$ *est un* C_0 *semi-groupe différentiable qui satisfait* $||T(t)||_{\mathcal{L}(X)} \leqslant Me^{wt}$ *et* A *son générateur infinitésimal. Alors :*

1. $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$ *et* $\forall\ x \in X$, *on a* $T(t)x \in D(A^n)$ *et* $A^nT(t)x = \left[AT(\frac{t}{n})\right]^n x, \forall t > 0.$
2. *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *l'application :* $t \in]0,+\infty[\longmapsto T(t) : X \longrightarrow D(A^n)$ *est* n *fois différentiable pour la topologie de la convergence uniforme et :*
$$T(t)^n = \frac{d^n}{dt^n}T(t) = A^nT(t) \in \mathcal{L}(X), \forall t > 0.$$
3. *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *l'application :* $t \in]0,+\infty[\longmapsto T(t)^n \in \mathcal{L}(X)$ *est continue pour la topologie de la convergence uniforme.*

Remarque 1.2.5. *Si* $(T(t))_{t\geqslant 0}$ *est un* C_0 *semi-groupe différentiable qui satisfait* $||T(t)||_{\mathcal{L}(X)} \leqslant Me^{wt}$. *Alors l'application :* $t \in]0,+\infty[\longmapsto T(t) \in \mathcal{L}(X)$ *est de classe* $C^{\infty}_{]0,+\infty[}$

1.2.5 Semi-groupes analytiques

Soit X un espace de Banach complexe.

Définition 1.2.7. *Soit le secteur* $S_\alpha := \{z \in \mathbb{C}^* : |\arg z| < \alpha\}$. *Une famille d'opérateurs* $(T(z))_{z\in S_\alpha} \subset \mathcal{L}(X)$ *est appelée semi-groupe analytique d'angle* α *telle que* $0 < \alpha < \pi$ *dans* X *si elle vérifie les propriétés suivantes :*

1. *L'application* $z \longrightarrow T(z)$ *est analytique dans* S_α
2. $T(0) = I$
3. $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2), \forall z_1, z_2 \in S_\alpha$
4. $\forall \varepsilon > 0, \lim\limits_{z\longrightarrow 0, z\in S_{\alpha-\varepsilon}} T(z)x = x, \forall x \in X$

Si en plus
$\forall \varepsilon > 0, \sup\limits_{z\in S_{\alpha-\varepsilon}} ||T(z)|| < +\infty$, *i.e on dit que* $(T(z))_{z\in S_{\alpha-\varepsilon}}$ *est uniformément borné dans* $S_{\alpha-\varepsilon}$ *alors* $(T(z))_{z\in S_\alpha}$ *est appelé semi-groupe analytique borné de type* α *dans* X.

Définition 1.2.8. *Soient $A : D_A \subset X \longrightarrow X$ un opérateur linéaire fermé à domaine D_A dense dans X et $\alpha \in]0, \pi[$. On définit la famille d'opérateurs linéaires $T((t))_{t\geqslant 0}$, notée $(e^{tA})_{t\geqslant 0}$ par*

$$\begin{cases} T(0) = I \\ \forall x \in X, \ \forall t > 0, \ T(t)x = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_\gamma e^{t\lambda}(\lambda I - A)^{-1}x d\lambda = e^{tA}x, \end{cases}$$

où γ est un contour de S_α orienté de $+\infty e^{i\alpha}$ à $+\infty e^{-i\alpha}$ telle que $\gamma \subset \rho(A)$.

Théorème 1.2.7. *Soit $A : D_A \subset X \longrightarrow X$ un opérateur linéaire vérifiant :*

1. *A est fermé*
2. *D_A est dense dans X*
3. *$\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C}^*/Re\lambda \geqslant 0\} = \Psi$ il existe $C \geqslant 0$ tel que $\forall \lambda \in \Psi$*

$$\| (\lambda I - A)^{-1} \|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{C}{|\lambda|}.$$

Alors A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique, uniformément borné $(T(t))_{t\geqslant 0}$. On note en général $(T(t))_{t\geqslant 0}$ par $(e^{tA})_{t\geqslant 0}$.

Théorème 1.2.8. *Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $(T(z))_{z\in\overline{S_\alpha}}$ uniformément borné sur X. Alors les conditions suivantes sont équivalentes*

1. *Il existe $\alpha \in]0, \pi[$ tel que $(T(t))_{t\geqslant 0}$ soit prolongeable en $(T(z))_{z\in\overline{S_\alpha}}$ semi-groupe sur X, analytique dans S_α uniformément borné dans $\overline{S_\alpha}$.*
2. *Il existe $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ et $C > 0$ tel que*

$$S_{\frac{\pi}{2}+\delta} \subset \rho(A),$$

et

$$\forall \lambda \in S_{\frac{\pi}{2}+\delta}, \ ||(\lambda I - A)^{-1}||_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{C}{|\lambda|}$$

3. *$(T(t))_{t\geqslant 0}$ est un C_0 semi-groupe différentiable et il existe une constante positive C tel que pour tout $t > 0$:*

$$||AT(t)||_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{C}{|\lambda|}.$$

1.2.6 Semi-groupes analytiques généralisés

Définition 1.2.9. *Soient A un opérateur linéaire fermé dans X de domaine non dense, $\omega \in \mathbb{R}$ et $\delta \in]0, \frac{\pi}{2}[$*

$$\begin{cases} S_{\delta,\omega} \subset \rho(A) \\ \sup\limits_{\lambda \in S_{\delta,\omega}} \|(\lambda-\omega)(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < +\infty, \end{cases}$$

où $S_{\delta,\omega} = \left\{\lambda \in \mathbb{C}\backslash\omega : |\arg(\lambda-\omega)| < \frac{\pi}{2} + \delta\right\}$.
On dira dans ce cas que $(e^{xA})_{x\geqslant 0}$ est un semi-groupe analytique généralisé de A et dans ce cas $(e^{xA})_{x\geqslant 0}$ n'est pas supposé un semi-groupe fortement continu (voir A. Lunardi [32], E. Sinestrari [46]).

Remarque 1.2.6. *Soient A un opérateur linéaire fermé sur X, $\omega \in \mathbb{R}$ et $\delta_0 \in]0, \delta[$. En fixant $r > 0$, alors $(e^{xA})_{x\geqslant 0}$ est défini par*

$$e^{xA} = \begin{cases} \dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_\gamma e^{\lambda x}(\lambda I - A)^{-1} d\lambda & si\ x > 0, \\ I \qquad ; & si\ x = 0, \end{cases}$$

où γ est le bord de $S_{\delta_0,\omega}\backslash B(0,r)$ orienté négativement.

1.3 Espaces UMD

Afin d'utiliser certains résultats sur les opérateurs, les espaces de Banach sont insuffisants. On utilisera les espaces UMD (Unconditional Martingale Differences) construis à partir de la théorie des martingales à valeurs vectorielles. On donne dans cette section plusieurs définitions équivalentes à la notion d'espaces UMD qui caractérisent les propriétés géométriques de ces espaces. Celle-ci utilise la transformée de Hilbert. L'équivalence entre les deux définitions est démontrée dans Burkholder ([5]) et Bourgain ([4]).
Soit (X, ||.||) un espace de Banach complexe.

Définition 1.3.1. *Soit $\varepsilon \in]0, 1[$ et $p \in]1, \infty[$. On définit l'opérateur $H_\varepsilon \in L(L^p(\mathbb{R}, X))$ par*

$$\forall\ f \in\ L^p(\mathbb{R}, X), (H_\varepsilon f)(x) := \frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon<|s|<\frac{1}{\varepsilon}} \frac{f(x-s)}{s} ds\ p.p.x \in \mathbb{R}$$

soit $f \in L^p(\mathbb{R}, X)$. si $\lim\limits_{\varepsilon\longrightarrow 0^+} H_\varepsilon f$ exicte dans $L^p(\mathbb{R}, X)$, alors cette limite est notée Hf et est appelée la transformée de Hilbert de f sur $L^p(\mathbb{R}, X)$.

Définition 1.3.2. *On dit que X est un espace UMD si*

$$\exists\ p \in]1, \infty], \forall\ f \in L^p(\mathbb{R}, X), \lim_{\varepsilon\longrightarrow 0^+} H_\varepsilon f\ exicte\ dans\ L^p(\mathbb{R}, X)$$

Dan ce cas

$$\begin{array}{llll} H: & L^p(\mathbb{R},X) & \longrightarrow & L^p(\mathbb{R},X) \\ & f & \longmapsto & Hf = \lim\limits_{\varepsilon \longrightarrow 0^+} H_\varepsilon f \end{array}$$

est dans $L(L^p(\mathbb{R},X))$, d'aprés le Théorème de Banach-Steinhaus, et est appelée la transformée de Hilbert sur $L^p(\mathbb{R},X)$.

Proposition 1.3.1. *On suppose que X est un espace UMD. Alors*

$$\forall\ p \in \,]1,\infty[,\ \forall\ f \in\ L^p(\mathbb{R},X),\ \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0^+} H_\varepsilon f \text{ existe dans } L^p(\mathbb{R},X).$$

Il est bon d'avoir aussi une caractérisation géométrique des espaces UMD, à cette fin on introduit la notion de ζ-convexité

Définition 1.3.3. *On dit que X est ζ-convexe si et seulement s' il existe une fonction $\zeta : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$, vérifiant*

1. *$\zeta(0,0) > 0$ et pour tout x, y de X,*
2. *$\zeta(x,.)$ et $\zeta(.,y)$ sont convexes sur X. $\forall\ x,y\ \in X$,*
3. *$\zeta(x,y) \leqslant \|x+y\|$ si $\|x\| = \|y\| = 1$. $\forall\ x,y\ \in X$.*

Le résultat fondamental de D.L. Burkholder (voir [5] et [4]) est le suivant :

Théorème 1.3.1. *X est un espace UMD si et seulement si X est ζ-convexe.*

Exemple 1.3.1. *Il est possible de donner de nombreux exemples d'espaces de Banach classiques qui ont la propriété UMD, ainsi :*

1. *Tout espace de Hilbert est un espace UMD.*
2. *Tout sous-espace fermé d'un espace UMD est un espace UMD.*
3. *Tout espace isomorphe à un espace UMD est un espace UMD.*
4. *Tous les espaces construits sur L^p, sont UMD si $1 < p < \infty$.*
5. *Si les espaces X et Y sont UMD alors les espaces interpolés (cas réel $(X,Y)_{\theta,p}$ ou complexe $[X,Y]_{\theta,p}$) sont UMD si $1 < p < \infty$.*

1.4 La théorie des sommes d'opérateurs

On rappelle dans la suite les principaux résultats de la théorie des sommes d'opérateurs linéaires dans les espaces de Banach quelconques.

Soient A et B deux opérateurs linéaires fermés dans X, de domaine respectifs $D(A)$ et $D(B)$. On s'intéresse alors à l'équation

$$Au + Bu = g, \tag{1.1}$$

où g est un vecteur donné de X.

L'opérateur somme $L = A + B$ est défini par

$$\begin{cases} D(L) = D(A) \cap D(B) \\ Lu = Au + Bu \text{ si } u \in D(L), \end{cases}$$

et (1.1) s'écrit encore

$$Lu = g. \tag{1.2}$$

Remarque 1.4.1. *On note que le domaine $D(L)$ peut être trivial même quand A et B sont auto-adjoint (voir exemple dans ([26])*

Une solution stricte de (1.1) est un élément $u \in D(L)$ satisfaisant (1.1). L'idéal est de trouver une telle solution lorsque g est quelconque dans X, mais ce n'est pas toujours possible ; on introduit donc une nouvelle notion :

u est une solution forte de (1.1) si et seulement si, il existe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $D(L)$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = u \text{ et } \lim_{n\to+\infty} Lu_n = g. \tag{1.3}$$

Evidemment, une solution stricte de (1.1) est une solution forte de (1.1). La notion de solution forte est donc plus faible (mais le terme de solution faible ne sera pas utilisé ici, il est en général réservé aux solutions variationnelles, la notion de solution forte correspond plutôt à une solution distribution).

Notons que si L est fermé les deux notions de solution stricte et forte sont équivalentes, mais la somme de deux opérateurs fermés n'est pas nécessairement fermée.

D'autre part si l'on suppose que L est fermable et si on note $\overline{L}$ sa fermeture (i.e. $\overline{L}$ est la plus petite extension fermée de L) alors (1.3) équivaut à :

$$u \in D(\overline{L}) \text{ et } \overline{L}u = g.$$

Enfin dans le cas où L est fermable, les propositions suivantes sont équivalentes :

1. Pour tout g de X, il existe une solution forte de (1.1).
2. $0 \in \rho(\overline{L})$.

Et si L est fermé les propositions suivantes sont équivalentes :

1. pour tout g de X, il existe une solution stricte de (1.1).
2. $0 \in \rho(L)$.

Dans ce contexte, on comprend l'importance de trouver des conditions raisonnables sur les opérateurs A et B, qui assurent que L est fermable (voire fermé) et que $0 \in \rho(\overline{L})$.

Les deux théorèmes de G. Da Prato et P. Grisvard, énoncés plus loin, répondent positivement à ce problème sur les sommes d'opérateurs sous des conditions adéquates.

1.4.1 La théorie des sommes d'opérateurs de Da Prato et Grisvard

notation 1.4.1. *On suppose qu'il existe $r > 0$ et un angle $\theta \in]0, \pi]$. On note le secteur S_θ par*

$$S_\theta = \{z \in \mathbb{C} \backslash \{0\} : |z| \geqslant r \text{ et } |\arg(z)| < \pi - \theta\}.$$

Les hypothèses sur A et B

On suppose que les opérateurs A et B vérifient les hypothèses de base (dites de Da Prato et Grisvard [21]) suivantes :

Parabolicité-ellipticité :

$$(DP.1) \left\{ \begin{array}{l} \exists r, C_A, C_B > 0, \theta_A, \theta_B \in \,]0, \pi[\, : \\ i) \ \rho(A) \supset S_{\theta_A} = \{z : |z| \geqslant r, |\arg(z)| < \pi - \theta_A\}, \\ \forall z \in S_{\theta_A}, \left\|(A - zI)^{-1}\right\|_{L(E)} \leqslant C_A / |z|. \\ ii) \ \rho(B) \supset S_{\theta_B} = \{z : |z| \geqslant r, |\arg(z)| < \pi - \theta_B\}, \\ \forall z \in S_{\theta_B}, \left\|(B - zI)^{-1}\right\|_{L(E)} \leqslant C_B / |z|. \\ iii) \ \ \theta_A + \theta_B < \pi \\ iv) \ \overline{D(A) + D(B)} = E. \end{array} \right.$$

Commutativité au sens des résolvantes :

$$(DP.2) \left\{ \begin{array}{l} \forall \lambda \in \rho(-A), \forall \mu \in \rho(-B) \\ (A + \lambda I)^{-1}(B + \mu I)^{-1} = (B + \mu I)^{-1}(A + \lambda I)^{-1}, \end{array} \right.$$

et

$$(DP.3) \ \ \sigma(A) \cap \sigma(-B) = \emptyset,$$

où $\sigma(A)$ (resp $\sigma(-B)$) désigne le spectre de A (resp de $(-B)$) et $\rho(A)$, $\rho(-B)$ leurs ensembles résolvants.

La première hypothèse est dite d'ellipticité-parabolicité, la deuxième indique le cadre commutatif.

Théorème de Da Prato et Grisvard

L'opérateur linéaire continu défini par l'intégrale de Dunford suivant :

$$S : u \longrightarrow -\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma}(B+zI)^{-1}(A-zI)^{-1}\,gdz,$$

provenant naturellement de l'extension de la formule de Cauchy dans le cadre opérationnel, vérifie les propriétés :

1. $\forall u \in D(A)\cap D(B)$ on a $S(Au+Bu)=u$,
2. $\forall v \in D(A)+D(B)$ on a :

   $$S(v)\in D(A)\cap D(B),$$

   et

   $$A(S(v))+B(S(v))=v,$$

3. Pour $v \in D_A(\theta,p)+D_B(\theta,p)\,,\theta\in\,]0,1[\,,p\in[1,+\infty]$, on a :

   $$Sv\in D(L)\ \text{ et }\ L(Sv)=v,$$

4. L est fermable et $\left(\overline{L}\right)^{-1}=S$ ($\overline{L}$ est la fermeture de $A+B$), de plus :

   $$(D(L);E)_{\theta,p}=(D(A);E)_{\theta,p}\cap(D(B);E)_{\theta,p}\,,$$

   Γ est une courbe sectorielle séparant les spectres de A et $(-B)$ et demeurant dans $\rho(A)\cap\rho(-B)$ (voir Da Prato-Grisvard [9]).

La fonction u est alors l'unique solution forte de (1.1).

Théorème 1.4.1. *Sous les hypothèses* $(DP1)\sim(DP3)$ *et pour* $\theta\in]0,1[$, $p\in[1,+\infty]$, *on a :*

1. *Si* $g\in D_B(\theta,q)$ *alors* $u\in D(L)$ *et* $Au,\ Bu\in D_B(\theta,p)$.
2. *Si* $g\in D_A(\theta,q)$ *alors* $u\in D(L)$ *et* $Au,\ Bu\in D_A(\theta,p)$.

1.4.2 La théorie des sommes d'opérateurs de Dore et Venni

Théorème de Dore-Venni

Position du problème Il s'agit, comme dans la théorie des sommes de G. Da Prato et P. Grisvard de résoudre l'équation

$$Au+Bu=g,$$

où $g\in X$ et A, B sont deux opérateurs linéaires fermés dans X. On suppose entre autre que X est un espace UMD. Le Théorème de Dore-Venni (voir [11]) montre que, sous de bonnes hypothèses sur les opérateurs, $A+B$ est fermé, à inverse borné.

Les hypothèses sur A et B On suppose cette fois-ci que les opérateurs A et B vérifient

$$(DV.1)\begin{cases} i)\rho(A) \supset \left]-\infty,0\right] \text{ et } \exists M_A>0: \\ \forall\lambda \geqslant 0, \left\|(A+\lambda)^{-1}\right\|_{L(E)} \leq M_A/(1+\lambda), \\ ii)\rho(B) \supset \left]-\infty,0\right] \text{ et } \exists M_B>0: \\ \forall\lambda \geqslant 0, \left\|(B+\lambda)^{-1}\right\|_{L(E)} \leq M_B/(1+\lambda), \\ \overline{D(A)}=\overline{D(B)}=X. \end{cases}$$

$$(DV.2)\begin{cases} \forall\lambda\in\rho(-A), \forall\mu\in\rho(-B) \\ (A+\lambda)^{-1}(B+\mu)^{-1}-(B+\mu)^{-1}(A+\lambda)^{-1}=0. \end{cases}$$

$$(DV.3)\begin{cases} i)\forall s\in\mathbb{R},\ A^{is}\in\mathcal{L}(E) \text{ et } \exists K>0,\theta_A>0: \\ \forall s\in\mathbb{R}, \|A^{is}\|_{L(E)} \leq Ke^{|s|\theta_A}, \\ ii)\forall s\in\mathbb{R},\ B^{is}\in\mathcal{L}(E) \text{ et } \exists K>0,\theta_B>0: \\ \forall s\in\mathbb{R}, \|B^{is}\|_{L(E)} \leq Ke^{|s|\theta_B}, \\ iii)\theta_A+\theta_B<\pi. \end{cases}$$

On note par $Bip(E,\theta)$ (Bounded imaginary power), l'ensemble des opérateurs sectoriels sur E, vérifiant $(DV.1)$ et $(DV.3)$. On a alors le Théorème remarquable suivant dû à Dore et Venni.

Théorème 1.4.2. *Si X est un espace UMD et sous les hypothèses $(DV.1)$, $(DV.2)$ et $(DV.3)$ l'opérateur*

$$L=A+B,$$

est fermé et

$$L^{-1}\in\mathcal{L}(X).$$

L'opérateur inverse de L est défini explicitement par l'intégrale :

$$L^{-1}=\int_\gamma \frac{A^{-z}B^{z-1}}{\sin\pi z}dz,$$

où γ est une courbe verticale contenue dans la bande

$$\{z\in\mathbb{C}:0<Rez<1\},$$

et orientée de $\infty e^{-i\frac{\pi}{2}}$ vers $\infty e^{i\frac{\pi}{2}}$.

1.5 Espaces d'interpolation

1.5.1 Espaces de Moyenne

On rappelle ici la notion d'espace d'interpolation développée par J. L. Lions et J. Peetre [31]

Définition 1.5.1. *Soit X un espace de Banach complexe, et pour $p \in [0, +\infty[$. On définit l'espace $L^p_*(\mathbb{R}_+, X)$ par :*

$$L^p_*(\mathbb{R}_+, X) := \left\{ f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow X \ fortement\ mesurable, \int_0^{+\infty} ||f(t)||^p \frac{dt}{t} < \infty \right\},$$

pour $f \in L^p_*(\mathbb{R}_+, X)$, on note

$$||f(t)||_{L^p_*(\mathbb{R}_+, X)} = \left(\int_0^{+\infty} ||f(t)||^p \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}},$$

et si $p = +\infty$. On a

$$L^\infty_*(\mathbb{R}_+, X) := \left\{ f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow X \ fortement\ mesurable\ t.q. \sup_{t \in \mathbb{R}_+} ess ||f(t)|| < \infty \right\},$$

pour $f \in L^\infty_*(\mathbb{R}_+, X)$, on note

$$||f(t)||_{L^p_*(\mathbb{R}_+, X)} = \sup_{t \in \mathbb{R}_+} ess ||f(t)||.$$

Soient $(X_0, ||.||_{X_0})$ et $(X_1, ||.||_{X_1})$ deux espaces de Banach s'injectant continûment dans un même espace topologique séparé $\mathcal{K}$.

Proposition 1.5.1. *$(X_0 \cap X_1, ||.||_{X_0 \cap X_1})$ et $(X_0 + X_1, ||.||_{X_0 + X_1})$ sont des espaces de Banach*

$$\begin{cases} ||x||_{X_0 \cap X_1} = \max\{||x||_{X_0}, ||x||_{X_1}\} \ si\ x \in X_0 \cap X_1 \quad , \\ ||x||_{X_0 + X_1} = \inf_{x_0 \in X_0, x_1 \in X_1, x_0 + x_1 = x} \{||x_0||_{X_0} + ||x_1||_{X_1}\} \ si\ x \in X_0 + X_1 \quad . \end{cases}$$

Et de plus

$$X_0 \cap X_1 \subset X_0, X_1 \subset X_0 + X_1 \quad ,$$

(avec injections continues).

Définition 1.5.2. *Pour $p \in [1, +\infty]$ et $\theta \in]0, 1[$. On appelle espace d'interpolation entre X_0 et X_1 l'espace $(X_0, X_1)_{\theta,p}$ défini par :*
$x \in (X_0, X_1)_{\theta,p}$ si et seulement si :

$$\begin{cases} i)\forall t>0, \exists u_0(t)\in X_0, \exists u_1(t)\in X_1 \text{ tels que } x=u_0(t)+u_1(t),\\ ii)t^{-\theta}u_0\in L^p_*(\mathbb{R}_+,X_0), t^{1-\theta}u_1\in L^p_*(\mathbb{R}_+,X_1). \end{cases}$$

Proposition 1.5.2. *soient* $p\in[1,+\infty]$ *et* $\theta\in]0,1[$. *Posons :*

$$\begin{cases} \|x\|_{\theta,p}=\inf\limits_{\substack{u_i:\mathbb{R}_+\longrightarrow X_i,\ i=0,1:\\ \forall t>0, u_0(t)+u_1(t)=x}}\left(\left\|t^{-\theta}u_0\right\|_{L^p_*(\mathbb{R}_+,X_0)}+\left\|t^{1-\theta}u_1\right\|_{L^p_*(\mathbb{R}_+,X_1)}\right),\\ si\ x\in(X_0,X_1)_{\theta,p}\,. \end{cases}$$

Alors $((X_0,X_1)_{\theta,p},||.||_{\theta,p})$ *est un espace de Banach vérifiant*

$$X_0\cap X_1\subset(X_0,X_1)_{\theta,p}\subset X_0+X_1,$$

avec injections continues.
Notons que $(X_0,X_1)_{\theta,p}=(X_1,X_0)_{1-\theta,p}$.

Définition 1.5.3. *Soient* $p\in[1,+\infty]$, $\theta\in]0,1[$ *et soit* A *un opérateur linéaire fermé de domaine* $D(A)\subset X$ *muni de la norme du graphe :* $||x||_{D(A)}=||x||_X+||Ax||_X$. *On définit alors*

$$D_A(\theta,p)=(X,D(A))_{\theta,p}=(D(A),X)_{1-\theta,p}.$$

Lorsque A vérifie certaines propriétés spectrales, on sait donner des caractérisations explicites de $D_A(\theta,p)$ pour $p\in[1,+\infty]$ et $\theta\in]0,1[$ ainsi :

Théorème 1.5.1. *Soient* $p\in[1,+\infty]$, $\theta\in]0,1[$ *et soit* A *un opérateur linéaire fermé de domaine* $D(A)\subset X$

1. *Supposons que* $\mathbb{R}^*_+\subset\rho(A)$ *et* $\exists C>0$ *telle que :*

$$\forall\lambda>0, ||(A-\lambda I)^{-1}||_{\mathcal{L}(X)}\leqslant\frac{C}{\lambda}.$$

Alors

$$D_A(\theta,p)=\{x\in X: t^\theta A(A-tI)^{-1}x\in L^p_*(\mathbb{R}_+,X)\},$$

(*voir Grisvard* [21]).

2. *Supposons que* A *génère un semi-groupe fortement continu borné dans* X

$$D_A(\theta,p)=\{x\in X: t^{-\theta}(e^{tA}-I)x\in L^p_*(\mathbb{R}_+,X)\},$$

(*voir Lions* [30]).

3. *Si* A *génère un semi-groupe analytique borné dans* X. *Alors :*

$$D_A(\theta,p)=\{x\in X: t^{1-\theta}Ae^{tA}x\in L^p_*(\mathbb{R}_+,X)\},$$

(*voir Butzer – Berens* [6])

1.5.2 Espaces de Besov

Dans les applications, on doit souvent expliciter les espaces $D_A(\theta; p)$. Ceux-ci peuvent être par exemple, des espaces de Hölder, des espaces de sobolev, ... ou encore des espaces de Besov. On trouve dans Grisvard [21], [20] les définitions suivantes.

Définition 1.5.4. *Soient $n \in \mathbb{N}^*, s > 0$ et $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. On définit l'espace de Besov*

$$B_p^1(\mathbb{R}^n) = \left\{ \varphi \in L^p(\mathbb{R}^n), (x,y) \longrightarrow \frac{\varphi(x) + \varphi(y) - 2\varphi(\frac{x+y}{2})}{|x-y|^{1+\frac{n}{p}}} \in L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \right\},$$

puis pour $s > 1$ entier

$$B_p^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ \varphi \in W^{s-1,p}(\mathbb{R}^n), D^\alpha \varphi \in B_p^1(\mathbb{R}^n), |\alpha| = s-1 \right\},$$

et enfin pour s non entier

$$B_p^s(\mathbb{R}^n) = W^{s,p}(\mathbb{R}^n).$$

Définition 1.5.5. *Soient $n \in \mathbb{N}^*, s > 0$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On définit*

$$B_p^s(\Omega) = \left\{ \varphi = \psi_{|\Omega} : \psi \in B_p^s(\mathbb{R}^n) \right\}.$$

Définition 1.5.6. *Soient $n, m \in \mathbb{N}^*, s > 0$, $1 \leqslant p, q \leqslant +\infty$. On définit les espaces de Besov*

$$B_{p,q}^1(\mathbb{R}^n) = \left\{ \varphi \in L^p(\mathbb{R}^n) : \sum_{k=1}^n \left(\int_0^{+\infty} t^{-q} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x+te_k) + \varphi(x-te_k) - 2\varphi(x)|^p dx \right)^{\frac{q}{p}} \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} < +\infty \right\}$$

et pour $0 < s < 1$

$$B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ \varphi \in L^p(\mathbb{R}^n) : \sum_{k=1}^n \left(\int_0^{+\infty} t^{-sq} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x+te_k) - \varphi(x)|^p dx \right)^{\frac{q}{p}} \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} < +\infty \right\},$$

puis

$$B_{p,q}^m(\mathbb{R}^n) = \left\{ \varphi \in W^{m-1,p}(\mathbb{R}^n), D^\alpha \varphi \in B_{p,q}^1(\mathbb{R}^n), |\alpha| = m-1 \right\},$$

et enfin pour $m < s < m+1$,

$$B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ \varphi \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n), D^\alpha \varphi \in B_{p,q}^{s-m}(\mathbb{R}^n), |\alpha| = m \right\},$$

où $(e_1, ..., e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.5.7. *Soient $n \in \mathbb{N}^*, s > 0$, $1 \leqslant p, q \leqslant +\infty$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On définit*

$$B^s_{p,q}(\Omega) = \left\{\varphi = \psi_{|\Omega} : \psi \in B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)\right\}.$$

Dans le cas particulier $p = q$, on a le résultat suivant.

Proposition 1.5.3. *Soient $n \in \mathbb{N}^*, s > 0$, $1 \leqslant p, q \leqslant +\infty$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On a :*

$$B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) = B^s_p(\mathbb{R}^n),$$

$$B^s_{p,q}(\Omega) = B^s_p(\Omega).$$

Théorème 1.5.2. ([*21*]) *pour $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ et $1 \leqslant q \leqslant +\infty$, on a :*

$$(W^{m,p}(\mathbb{R}^n); L^p(\mathbb{R}^n))_{\theta,p} = B^{m(1-\theta)}_{p,q}(\mathbb{R}^n).$$

1.6 Calcul fonctionnel

Dans le cadre des opérateurs non bornés, on pourra consulter le livre de N. Dunford et J. Schwartz [13] pour l'étude des premiers développements du calcul fonctionnel. Ici, on s'est inspiré du livre de M. Haase [22].

1.6.1 Calcul fonctionnel pour les opérateurs linéaires bornés

Définition 1.6.1. ***(Formule de Cauchy)*** *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, on note $H(U)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur U et K un compact de U à bord orienté positivement γ. On pose alors pour $f \in H(U)$ on a :*

$$f(\lambda_0) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(\lambda)}{\lambda - \lambda_0}d\lambda,$$

pour tout point λ_0 à l'intérieur de K.

On cherche à construire $f(A)$ avec A un opérateur linéaire borné et f une fonction holomorphe sur un ouvert contenant $\sigma(A)$, le spectre de A. Pour cela, on définit l'intégrale de Dunford-Riesz sur le modèle de la formule de Cauchy.

Définition 1.6.2. ***(Intégrale de Dunford-Riesz)*** *Soient $A \in \mathcal{L}(X)$, on note $H(U)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur U et K un compact de U contenant $\sigma(A)$ (le spectre de A). Alors pour $f \in H(U)$ on a :*

$$f(A) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(\lambda)(\lambda I - A)^{-1}d\lambda,$$

où γ le bord de K orienté positivement (γ une courbe finie entourant $\sigma(A)$).

Remarque 1.6.1. *Dans la définition précédente, puisque la fonction* $\lambda \longmapsto (\lambda I - A)^{-1}$ *est analytique sur* $\rho(A)$*, alors* $f(A)$ *ne dépend que de la fonction* f *et non de l'ouvert* U*.*

1.6.2 Calcul fonctionnel pour les opérateurs sectoriels

Définition 1.6.3. *Soient* $\varphi, \omega \in\ ]0, \pi[$ *et* $A \in Sect(\omega)$*.*

1. $\mathcal{DR}(S_\varphi)$ *est l'espace des fonctions* f *de* $H(S_\varphi)$ *qui sont bornées sur* S_φ *et vérifiant*

$$\exists C \geqslant 0,\ \exists s > 0,\ \forall z \in S_\varphi,\ |f(z)| \leqslant C \min\left\{|z|^s,\ |z|^{-s}\right\}.$$

2. $\mathcal{DR}_0(S_\varphi)$ *est l'espace des fonctions* f *de* $H(S_\varphi)$ *qui sont bornées sur* S_φ*, qui admettent un prolongement holomorphe sur un voisinage de* 0 *et qui vérifiant*

$$\exists s > 0,\ |f(z)| \leqslant O(|z|^{-s})\ (\textit{quand}\ |z| \longrightarrow +\infty).$$

La notation $\mathcal{DR}$ *est mise pour Dunford-Riesz.*

Définition 1.6.4. *Soient* $f \in \mathcal{DR}(S_\varphi) \cup \mathcal{DR}_0(S_\varphi), \varphi \in]\omega, \pi[, \omega \in]0, \pi[$ *et* $A \in Sect(\omega)$*. On pose alors*

$$f(A) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(\lambda)(\lambda I - A)^{-1} d\lambda,$$

où la courbe γ *est définie comme suit.*

1. *Si* $f \in \mathcal{DR}(S_\varphi)$*, on fixe* $\omega' \in]\omega, \varphi[$ *et on prend pour* γ*, le bord orienté positivement de* $S_{\omega'}$
2. *Si* $f \in \mathcal{DR}_0(S_\varphi)$*, on fixe* $\omega' \in]\omega, \varphi[$ *et on prend pour* γ*, le bord orienté positivement de* $S_{\omega'} \cup B(0, r), r > 0$ *tel que* f *est holomorphe au voisinage de* $B(0, r)$

$f(A)$ *ainsi défini ne dépend pas du choix de* ω' *ou* r*.*

Définition 1.6.5. *Soient* $A \in Sect(\omega)$ *et* $\varphi, \omega \in\ ]0, \pi[$*. Si* $f \in \mathcal{DR}(S_\varphi) + \mathcal{DR}_0(S_\varphi)$ *alors il existe* $g \in \mathcal{DR}(S_\varphi), h \in \mathcal{DR}_0(S_\varphi)$ *tels que* $f = g + h$*. On pose alors*

$$f(A) = g(A) + h(A).$$

Proposition 1.6.1. *soient* $f, g \in \mathcal{DR}(S_\varphi) + \mathcal{DR}_0(S_\varphi)$ *et* $a, b \in \mathbb{C}$

1. $f(A) \in \mathcal{L}(X)$,
2. $(af + bg)(A) = a(f(A)) + b(g(A))$.

1.6.3 Extension du calcul fonctionnel

Définition 1.6.6. *Soient $A \in Sect(\omega)$ et $\varphi, \omega \in \,]0, \pi[$. On pose*

$$\mathcal{K}(S_\varphi) = \left\{ f \in H(S_\varphi)/\exists n \in \mathbb{N}, \frac{f(z)}{(1+z)^n} \in \mathcal{DR}(S_\varphi) + \mathcal{DR}_0(S_\varphi) \right\}.$$

On note que $\mathcal{K}(S_\varphi)$ contient $\mathcal{DR}(S_\varphi) + \mathcal{DR}_0(S_\varphi)$ et aussi toutes les fonctions rationnelles dont les pôles sont hors de $\overline{S_\varphi}$ et en particulier les constantes.

Définition 1.6.7. *Soient $A \in Sect(\omega)$ et $\omega \in \,]0, \pi[$. Pour tout $f \in \mathcal{K}(S_\varphi)$ où $\varphi \in]\omega, \pi[$, on définit $f(A)$ comme suit*

$$f(A) = (1+A)^n \left(\frac{f(z)}{(1+z)^n} \right)(A).$$

Les principales propriétés de ce calcul fonctionnel étendu sont données ci-dessous.

Proposition 1.6.2. *Soient $A \in Sect(\omega)$ et $\omega \in \,]0, \pi[$. Si $f, g \in \mathcal{K}(S_\varphi)$ avec $\varphi \in \,]\omega, \pi[$. Alors :*

1. *$f(A)$ est un opérateur fermé sur X.*
2. *Si A est borné alors $f(A)$ est borné.*
3. *$f(A) + f(g) \subset (f+g)(A)$ et $f(A)g(A) \subset (fg)(A)$.*
4. *$1(A) = I, (z^n)(A) = A^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$.*
5. *$\forall \lambda \notin \overline{S_\varphi}, \left(\dfrac{f(z)}{\lambda - z} \right)(A) = f(A)(\lambda I - A)^{-1}$*

Dans le cas particulier où A est injectif et dans l'optique de définir A^α, pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, on s'intéresse à une nouvelle classe de fonctions.

Définition 1.6.8. *Soient $A \in Sect(\omega)$ et $\omega \in \,]0, \pi[$.*

1. *Pour tout $\varphi \in \,]0, \pi[$. On définit*
$$\mathcal{M}(S_\varphi) = \left\{ f \in H(S_\varphi)/\exists n \in \mathbb{N}, \frac{z^n f(z)}{(1+z)^{2n}} \in \mathcal{DR}(S_\varphi) \right\}.$$
2. *Si A est injectif, pour tout $f \in \mathcal{M}(S_\varphi), \varphi \in]\omega, \pi[$. On définit*
$$f(A) = \left((1+A)^2 A^{-1} \right)^n \left(\frac{z^n f(z)}{(1+z)^{2n}} \right)(A).$$

Proposition 1.6.3. *Soient $A \in Sect(\omega)$ et $\omega \in \,]0, \pi[$. Si $f \in \mathcal{M}(S_\varphi)$ avec $\varphi \in]\omega, \pi[$. Alors :*

1. *$f(A)$ est un opérateur fermé sur X.*
2. *Si A est un opérateur borné et inversible alors $f(A)$ est borné.*

Notons enfin que si $f \in \mathcal{K}(S_\varphi) \cap \mathcal{M}(S_\varphi)$. Alors $f(A)$ admet deux formules de définition et ces formules coïncident.

1.6.4 Puissances fractionnaires d'opérateurs

On utilisera dans ce travail les puissances fractionnaires d'opérateurs sectoriels, en particulier les puissances 1/2. On renvoie à M. Haase [22], H. Komatsu [25] et A.V Balakrishnan [3].
Soit A un opérateur linéaire fermé à domaine dense dans X, tel que

$$\begin{cases} \exists C > 0 /]0, +\infty[\subset \rho(A) \text{ et pour } \lambda \geqslant 0, \\ ||(A-\lambda I)^{-1}||_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{C}{1+\lambda}, \end{cases}$$

alors pour $0 < \alpha \leqslant \dfrac{1}{2}$, $-(-A)^{\alpha}$ défini précédemment génère un semi-groupe analytique $G_{\alpha}(t)$ défini par :

$$G_{\alpha}(t) = \int_0^{\infty} (A-\lambda I)^{-1} g(\lambda, t, \alpha) d\lambda,$$

où $g(\lambda, t, \alpha) = \frac{1}{\pi} \sin(t\lambda^{\alpha} \sin \pi\alpha) e^{(-t\lambda^{\alpha} \cos \pi\alpha)}$. est analytique.

Remarque 1.6.2. *Pour $\alpha = \frac{1}{2}$ ona*

$$G_{\frac{1}{2}}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (A-\lambda I)^{-1} \sin t\sqrt{\lambda} d\lambda.$$

Puissances fractionnaires à parties réelles positives

Soient $A \in Sect(\omega)$, $\omega \in]0, \pi[$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. Il s'agit alors, sous certaines conditions, d'activer la formule

$$A^{\alpha} = (z^{\alpha})(A). \tag{1.4}$$

Ici z^{α} désigne la détermination principale de la fonction "puissance α" caractérisée par

$$z^{\alpha} = e^{\alpha(\ln r + i\beta)} \text{ si } z = re^{i\beta}, r > 0 \text{ et } \beta \in]-\pi, \pi[. \tag{1.5}$$

Proposition 1.6.4. *Soient $A \in Sect(\omega)$, $\omega \in]0, \pi[$. Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, tels que $Re(\alpha) > 0$ et $Re(\beta) > 0$, les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. *A^{α} est un opérateur linéaire fermé dans $D(A^{\alpha})$.*
2. *Si $A \in \mathcal{L}(X)$, alors $A^{\alpha} \in \mathcal{L}(X)$.*
3. *$A^{\alpha+\beta} = A^{\alpha} A^{\beta} = A^{\beta} A^{\alpha}$.*
4. *Si $0 \in \rho(A)$, alors $0 \in \rho(A^{\alpha})$.*
5. *Si $Re(\alpha) < Re(\beta)$, alors $D(A^{\beta}) \subset D(A^{\alpha})$.*
6. *Si A est injectif alors A^{α} l'est aussi et $(A^{-1})^{\alpha} = (A^{\alpha})^{-1}$.*

7. *Si* $\alpha \in]0, \pi/\omega[$, *alors* A^α *existe et* $A^\alpha \in Sect(\alpha\omega)$.
8. *Si* $\alpha \in]0, \pi/\omega[$, *alors* $(A^\alpha)^\beta = A^{\alpha\beta}$.

On note que A.V Balakrishnan [3] fournit une représentation intégrale de A^α pour $0 < Re(\alpha) < 1$.

Puissances fractionnaires avec partie réelle quelconque

Soient $A \in Sect(\omega)$, où $\omega \in]0, \pi[$ et $\alpha \in \mathbb{C}$, z^α est donnée par (1.5) et si A est injectif, alors on définit encore A^α par la formule (1.4)

Proposition 1.6.5. *Soient A un opérateur injectif, $\omega \in]0, \pi[$ et $A \in Sect(\omega)$. Pour tous α, $\beta \in \mathbb{C}$, les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. A^α *est un opérateur linéaire fermé dans* X.
2. $A^{\alpha+\beta} \subset A^\alpha A^\beta$ *avec* $D(A^\beta) \cap D(A^{\alpha+\beta}) = D(A^\alpha A^\beta)$.
3. *Si* $\alpha \in \mathbb{R}$ *et* $|\alpha| < \pi/\omega$, *alors* $A^\alpha \in Sect(|\alpha|\omega)$ *et* $(A^\alpha)^\beta = (A^{\alpha\beta})$.
4. A^α *est injectif et* $(A^{-1})^\alpha = (A^\alpha)^{-1} = A^{-\alpha}$.

On note que H. Komatsu [25] fournit une représentation intégrale de A^α pour $0 < |Re(\alpha)| < 1$.

1.6.5 Opérateurs BIP

Les définitions et les propriétés de cette section se réfèrent à J. Prüss [42] et J. Prüss H. Sohr [44]

Définition 1.6.9. *soit* $\alpha \in [0, \pi[$. *On dit que* $A \in BIP(X, \alpha)$ *si*

1. $]-\infty, 0[\subset \rho(A)$ *et* $\exists C > 0 / ||(A - \lambda I)^{-1}||_{\mathcal{L}(X)} < \frac{C}{1+\lambda}$, $\forall \lambda \geqslant 0$.
2. A *est injectif.*
3. $\overline{D(A)} = \overline{Im(A)} = X$.
4. $\forall s \in \mathbb{R}$, $A^{is} \in \mathcal{L}(X)$.
5. $\exists C > 0$, $\forall s \in \mathbb{R}$, $||A^{is}||_{\mathcal{L}(X)} \leq Ce^{|s|\alpha}$.

En disant que A a des puissances imaginaires bornées (Bounded Imaginary Powers).

Proposition 1.6.6. *Soient* $\alpha \in [0, \pi[$. *Les propriétés suivantes sont alors vérifiées :*

1. $A \in BIP(X, \alpha)$, *injectif* $\Longleftrightarrow A^{-1} \in BIP(X, \alpha)$.
2. $A \in BIP(X, \alpha)$, $0 < \theta < \dfrac{\pi}{\alpha} \Longrightarrow A^\alpha \in BIP(X, \theta\alpha)$.
3. $A \in BIP(X, \alpha)$, $c \geqslant 0 \Longrightarrow cA \in BIP(X, \alpha)$.
4. $A \in BIP(X, \alpha)$, $\varepsilon \geqslant 0 \Longrightarrow A + \varepsilon I \in BIP(X, \alpha)$.

1.7 Espaces fonctionnels

Soient Ω un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ et $(X, ||.||)$ un espace de Banach Complexe. Les définitions et résultats énoncés ici sont issus de W. Arendt, C. J. K. Batty, M. Hieber et F. Neubrander [2].

1.7.1 Espaces de hölder

Soient Ω un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$, X un espace de Banach complexe et $C(\Omega; X)$ l'espace de Banach des fonctions continues.

Définition 1.7.1. *Les espaces de Hölder des fonctions continues $C^\alpha(\Omega; X)$ de Ω dans X avec $\alpha \in \,]0,1[$ est défini par*

$$C^\alpha(\Omega; X) = \left\{ f \in C(\Omega; X) / \sup_{x,y\in\Omega, x\neq y} \frac{||f(x) - f(y)||_X}{|x-y|^\alpha} < +\infty \right\},$$

muni de la norme

$$||f||_{C^\alpha(\Omega;X)} = ||f||_{C(\Omega;X)} + \sup_{x,y\in\Omega, x\neq y} \frac{||f(x) - f(y)||_X}{|x-y|^\alpha}.$$

Proposition 1.7.1. *Soient Ω un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \,]0,1[$. Alors*

$$C^\alpha(\Omega; X) \subset C(\Omega; X).$$

Définition 1.7.2. *Le petit espace de Hölder des fonctions continues $h^\alpha(\Omega; X)$ de Ω dans X avec $\alpha \in \,]0,1[$ et $k \in \mathbb{N}$ est défini par :*

$$h^\alpha(\Omega; X) = \left\{ f \in C^\alpha(\Omega; X) / \lim_{\sigma \longrightarrow 0} \sup_{x,y\in\Omega, x\neq y, |x-y|<\sigma} \frac{||f(x) - f(y)||_X}{|x-y|^\alpha} = 0 \right\},$$

et

$$h^{k+\alpha}(\Omega; X) = \left\{ f \in C^k(I; X) / f^{(k)} \in h^\alpha(\Omega; X) \right\}.$$

L'ensemble des fonctions k fois continûment dérivables à dérivées bornées et de dérivée k-ème le petit espace de Hölder de Ω dans X.

Proposition 1.7.2. *Soient Ω un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ et $\alpha, \beta \in \,]0,1[$ tels que $\alpha > \beta$. Alors*

$$C^\alpha(\Omega; X) \subset h^\beta(\Omega; X).$$

1.7.2 Intégrales de Bochner

Soit X un espace de Banach complexe muni de la norme $||.||_X$.

Définition 1.7.3. *Une fonction $f : \Omega \subset \mathbb{R} \longrightarrow X$ est dite étagée s'il existe une famille finie $(\Omega_i)_{i\in I} \subset \Omega$ d'ensembles mesurables vérifiant*

$$\begin{cases} \Omega_i \cap \Omega_j = \varnothing \ \forall i,j \in I, i \neq j \quad , \\ \Omega = \bigcup\limits_{i\in I} \Omega_i \quad , \end{cases}$$

et des nombres $\alpha_i \in X$

$$f(x) = \sum_{i\in I} \alpha_i \mathbb{I}_{\Omega_i} \quad ,$$

où $\mathbb{I}_{\Omega_i}$ est la fonction caractéristique de Ω_i .

Définition 1.7.4. *Une fonction $f : \Omega \subset \mathbb{R} \longrightarrow X$ est dite fortement mesurable au sens de Bochner (ou Bochner-mesurable) s'il existe une suite de fonctions étagées $f_n : \Omega \subset \mathbb{R} \longrightarrow X$ telles que*

$$f_n(x) \longrightarrow f(x) \text{ quand } n \longrightarrow +\infty \text{ p.p } x \in \Omega \ .$$

Définition 1.7.5. *Une fonction $f : \Omega \subset \mathbb{R} \longrightarrow X$ est dit Bochner-intégrable, s'il existe une suite de fonctions étagées $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que*

1. *$f_n \longrightarrow f$ quand $n \longrightarrow +\infty$ p.p $x \in \Omega$,*
2. $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \int_\Omega ||f_n(x) - f(x)||dx = 0.$

Proposition 1.7.3. *Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R} \longrightarrow X$ un fonction Bochner-mesurable . Alors f Bochner-intégrable si et seulement si l'application $x \in \Omega \longmapsto ||f(x)||_X$ est intégrable au sens de Lebesgue.*

Proposition 1.7.4. *Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R} \longrightarrow X$ un fonction Bochner-mesurable . Alors, pour tout $x \in \Omega$. Ona :*

$$\left|\left|\int_\Omega f(x)dx\right|\right| \leqslant \int_\Omega ||f(x)||\, dx.$$

1.7.3 Espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev étant construits à partir des espaces L^p, dont on donne ici la définition.

Définition 1.7.6. *Soient $f : \Omega \longrightarrow X$, Ω un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^*$, avec $1 \leqslant p \leqslant +\infty$*

1. *Pour $1 \leqslant p < +\infty$ on définit*

$$L^p(\Omega; X) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow X \text{ Bochner-mesurable telleque} \int_\Omega ||f(x)||^p \, dx < +\infty \right\},$$

et pour $p = +\infty$

$$L^\infty(\Omega; X) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow X \text{ Bochner-mesurable telleque } \sup_{x\in\Omega} \; ess \, ||f(x)||^p \, dx < \infty \right\},$$

2. *On définit l'espace de Sobolev*

$$W^{k,p}(\Omega; X) = \left\{ f \in L^p(\Omega; X), [f]^{(j)} \in L^p(\Omega; X), j = 0, 1...., k \right\},$$

où pour $j = 0, 1...., k, [f]^{(j)}$ est la dérivée j-ème au sens des distributions de f et $[f]^{(j)} \in L^p(\Omega; X)$ signifie qu'il existe $g_j \in L^p(\Omega; X)$ tel que $[f]^{(j)} = [g_j]$.

Définition 1.7.7. *Soient A un opérateur linéaire sur X de domaine $D(A)$, $p \in [1, +\infty]$ et Ω un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$. On définit :*

$$L^p(\Omega; D(A)) = \{ \varphi \in L^p(\Omega; X) / \varphi(x) \in D(A) \text{ p.p.} x \in \Omega \text{ et } x \longmapsto A\varphi(x) \in L^p(\Omega; X) \}.$$

Proposition 1.7.5. *Soient $f : \Omega \longrightarrow X$, Ω un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^*$, avec $1 \leqslant p \leqslant +\infty$*

1. *$L^p(\Omega; X)$ est un espace de Banach muni de la norme $\| \, . \, \|_{L^p(\Omega;X)}$ définie par*

$$\| f \|_{L^p(\Omega;X)} = \begin{cases} \left(\int_\Omega ||f(x)||^p \, dx \right)^{1/p} & si \; p \in [1, +\infty[, \\ \sup\limits_{x\in\Omega} \; ess \, ||f(x)|| \, dx & si \; p = +\infty, \end{cases}$$

2. *$W^{k,p}(\Omega; X)$ est un espace de Banach muni de la norme $\| \, . \, \|_{W^{k,p}(\Omega;X)}$ définie par*

$$\| f \|_{W^{k,p}(\Omega;X)} = \begin{cases} \left(\sum_{j=1}^k \| [f]^{(j)} \|^p_{L^p(\Omega;X)} \right)^{1/p} & si \; p \in [1, +\infty[, \\ \max\limits_{j=1,...k} \| [f]^{(j)} \|^p_{L^\infty(\Omega;X)} & si \; p = +\infty, \end{cases}$$

Chapitre 2

Résolution d'une équation différentielle abstraite dans un espace holdérien

2.1 Introduction et hypothèses

On s'intéresse dans ce chapitre á l'équation différentielle abstraite du second ordre :

$$u''(x) + Au(x) = f(x), \quad x \in [0, 1] \tag{2.1}$$

avec les conditions aux limites suivantes :

$$u(0) = u_0, \ u'(1) = u'(0). \tag{2.2}$$

où A est un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A)$ non nécéssairement dense dans un espace de Banach complexe X vérifiant l'hypothèse d'ellipticité suivante :

$$\forall \lambda \geqslant 0, \exists (A - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(X) : ||(A - \lambda I)^{-1}||_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{c}{1 + \lambda}, \tag{2.3}$$

et u_0 est un élément donné dans l'espace X, $f \in C^\alpha([0, 1]; X)$ avec $\alpha \in]0, 1[$.
Dans ce chapitre, on étudie le problème (2.1)-(2.2) sous l'unique hypothèse (2.3).
On cherche les conditions nécéssaires et suffisantes sur les données pour avoir une solution stricte u du problème (2.1)-(2.2), i.e une fonction telle que

$$u \in C^2([0, 1]; X) \cap C([0, 1]; D(A)),$$

vérifiant la propriété de régularité maximale :

$$u'', Au \in C^\alpha([0.1]; X).$$

2.2 Quelques résultats

Lemme 2.2.1. *Soit A un opérateur linéaire fermé de domaine D_A non nécessairement dense alors :*

$$\overline{D_A} = \overline{D_{(-A)^{1/2}}}.$$

Preuve 2.2.1. *On rappelle que :*

$$D_A \subset D_{(-A)^{1/2}},$$

donc

$$\overline{D_A} \subset \overline{D_{(-A)^{1/2}}},$$

cette inclusion est évidente.
Soit $x \in \overline{D_{(-A)^{1/2}}}$, *alors*

$$x = \lim_{n \longrightarrow +\infty} x_n,$$

où

$$x_n = (-A)^{-1/2} y_n \in D_{(-A)^{1/2}},$$

et

$$x_n = (-A)^{-1/2} y_n = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma z^{-1/2} (A - z)^{-1} y_n dz,$$

alors $x_n = (-A)^{-1/2} y_n \in \overline{D_A}$ *vu que l'intégrale existe et dont les éléments à l'intérieur sont dans* D_A.

D'où :

$$x = \lim_{n \to +\infty} x_n \in \overline{D_A}.$$

Définition 2.2.1. *On dit que* $\left(e^{xQ}\right)_{x \geq 0}$ *est un semigroupe analytique généralisé si* Q *est un opérateur linéaire* X, *avec domaine non dense et vérifiant :*

$$\begin{cases} \rho(Q) \supset S_{\omega,\delta} = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \backslash \{\omega\} \ / \ |\arg(\lambda - \omega)| < \frac{\pi}{2} + \delta\right\} \text{ et} \\ \sup\limits_{\lambda \in S_{\omega,\delta}} \|(\lambda - \omega)(\lambda I - Q)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < +\infty, \end{cases}$$

où $\omega \in \mathbb{R}$ *et* $\delta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. *Dans ce cas* $\left(e^{xQ}\right)_{x \geq 0}$ *n'est pas supposé semi-groupe fortement continu (voir E. Sinestrari [46], A. Lunardi [32]).*

Remarque 2.2.1. *En posant* $r > 0$, $\delta_0 \in]0, \delta[$, *alors* $\left(e^{xQ}\right)_{x \geq 0}$ *est défini par*

$$e^{xQ} = \begin{cases} \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma e^{\lambda x} (\lambda I - Q)^{-1} d\lambda \text{ si } x > 0, \\ I \text{ si } x = 0, \end{cases}$$

où γ *est la courbe de limite sectorielle de* $S_{\omega,\delta_0} \backslash B(\omega, r)$ *orienté positivement. Les résultats suivants sont valables pour tous les opérateurs* Q *générateur infinitésimal de semi-groupe analytique généralisé.*

Proposition 2.2.1.

1. *Soit $\varphi \in X$. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes*
   (a) $e^{\cdot Q}\varphi \in C([0,1];X)$.
   (b) $\varphi \in \overline{D(Q)}$.
2. *Soit $\theta \in \left]0,1\right[$, $g \in C^{\theta}([0,1];X), \varphi \in X$. Posons*
$$v(x,\varphi,g,Q) = e^{xQ}\varphi + \int_0^x e^{(x-s)Q}g(s)ds, \quad x \in [0,1].$$
   Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes
   (a) $v \in C^1([0,1];X) \cap C([0,1];D(Q))$.
   (b) $\varphi \in D(Q)$ *et* $g(0) + Q\varphi \in \overline{D(Q)}$.

Preuve 2.2.2. *(voir H. Triebel [48] p. 25 et 76).*

On a aussi le résultat suivant :

Théorème 2.2.1.

1. *Soit $\theta \in \left]0,1\right[$. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes*
   (a) $e^{\cdot Q}\varphi \in C^{\theta}([0,1];X)$.
   (b) $\varphi \in (D(Q),X)_{1-\theta,\infty}$.
2. *Soit $\varphi \in X$, $\theta \in \left]0,1\right[$ et $g \in C^{\theta}([0,1];X)$. Posons*
$$v(x) = \int_0^x e^{(x-s)Q}\left[g(s) - g(0)\right]ds, \quad x \in [0,1],$$
   alors
$$v \in C^{1,\theta}([0,1];X) \cap C^{\theta}([0,1];D(Q)).$$
3. *Soit $g \in C([0,1];X)$ et $\varphi \in X$. Posons*
$$w(x) = e^{xQ}\varphi + \int_0^x e^{(x-s)Q}g(s)ds, \quad x \in [0,1].$$
   Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes.
   (a) $w \in C^{1,\theta}([0,1];X) \cap C^{\theta}([0,1];D(Q))$.
   (b) $g \in C^{\theta}([0,1];X)$, $\varphi \in D(Q)$ *et* $g(0) + Q\varphi \in (D(Q),X)_{1-\theta,\infty}$.
4. *Soit $g \in C^{\theta}([0,1];X)$. Alors*
$$Q\int_0^1 e^{sQ}\left(g(s) - g(0)\right)ds \in \left(D\left(Q\right)\right),X)_{1-\theta,\infty}.$$

Preuve 2.2.3. *La deuxième assertion est obtenue en utilisant la théorie des sommes de Da Prato-Grisvard [9]. L'assertion 3. découle immédiatement de la l'assertion 2. grâce à E. Sinestrari [46], voir aussi G. Da Prato [8].*

Proposition 2.2.2. *Soit $h \in C^{\theta}([0,1];X)$, $\varphi \in D(Q)$ et posons*

$$w(x) = e^{xQ}\varphi + \int_0^x e^{(x-s)Q}h(s)ds, \quad x \in [0,1];$$

alors

$$Qw(\cdot) \simeq_{\theta} e^{\cdot Q}\left(Q\varphi + h(0)\right).$$

Preuve 2.2.4. *On a*

$$\begin{aligned} Qw(x) &= Qe^{xQ}\varphi + Q\int_0^x e^{(x-s)Q}\left[h(s) - h(0)\right]ds + Q\int_0^x e^{(x-s)Q}h(0)\,ds \\ &= Qe^{xQ}\varphi + Q\int_0^x e^{(x-s)Q}\left[h(s) - h(0)\right]ds - \left(h(0) - e^{xQ}h(0)\right) \\ &= e^{xQ}\left(Q\varphi + h(0)\right) + Q\int_0^x e^{(x-s)Q}\left[h(s) - h(0)\right]ds - h(0). \end{aligned}$$

En utilisant le Théorème (2.2.1) et la proposition 1.2, assertion (ii) dans Sinestrari [46] on obtient le résultat.

Théorème 2.2.2. *Suppose que $f \in C^{\alpha}([0,T];E), (resp. h^{\alpha}([0,T];E)), x \in D(A)$ et, $Ax + f(0) \in D_A(\alpha,\infty), (resp. D_A(\alpha))$. Soit $u(t)$ la solution du problème :*

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = f(t) \\ u(0) = x \end{cases}$$

Ensuite, les propriétés suivantes sont vérifiant :

i $u', Au \in C^{\alpha}([0,T];E), (resp. h^{\alpha}([0,T];E))$, *et il existe une constante* $C = C(T,K,\alpha)$ *ne dépendant que de* T, K *et* α *tel que* $|u'|_{C^{\alpha}([0,T];E)} + |Au|_{C^{\alpha}([0,T];E)} \leqslant C(T,K,\alpha)\left(|Ax + f(0)|_{\alpha} + |f|_{C^{\alpha}([0,T];E)}\right)$

ii $Au(t) + f(t) \in D_A(\alpha,\infty)(resp D_A(\alpha)), \forall t \in [0,T]$

Preuve 2.2.5. *(voir G.Da Prato [48] page 361)*

Proposition 2.2.3. *Supposer (2.3). L'opérateur $(I - Z)$ a un inverse borné donné par*

$$(I - Z)^{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^{\#}} \frac{e^{2z}}{I - e^{2z}}(zI + B)^{-1}dz + I,$$

où $\gamma^{\#}$ est une courbe appropriée dans le plan complexe.

Preuve 2.2.6. *Voir Lunardi [32].*

On pose dans tout ce qui suit

$$B = \sqrt{-A} \text{ et } Z = e^{-2B}.$$

Remarque 2.2.2. *L'hypothèse (2.3) implique que l'opérateur $(-\sqrt{-A})$ est le générateur infinitésimal d'un semi groupe analytique noté $(e^{-\sqrt{-A}x})_{x\geqslant 0}$ sur X, voir Balakrishnan [3].*

2.3 Lemmes techniques

Pour $u_0 \in X$, on considère la fonction abstraite suivante :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{Q}_0 : \,]0,1] & \longrightarrow & X \\ x & \longmapsto & \mathcal{Q}_0(x,B)u_0 \end{array}$$

telle que

$$\mathcal{Q}_0(x,B)u_0 = (I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-xB}u_0.$$

On a le résultat suivant

Lemme 2.3.1. *On a :*

1. $\mathcal{Q}_0(\cdot,B)u_0 \in C^\infty(]0,1]\,;D(A^k)), k\in\mathbb{N}$
2. $\forall x \in \,]0,1]\,, \mathcal{Q}_0''(x,B)u_0 + A\mathcal{Q}_0(x,B)u_0 = 0,$
3. $\exists C>0, \forall x\in\,]0,1]\,, \|\mathcal{Q}_0(x,B)u_0\|_X \leq C\,\|u_0\|_X\,.$

Preuve 2.3.1. 1. *Soit $x>0, u_0\in X$. Il est facile de vérifier que*

$$(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-Bx} = e^{-Bx}(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2},$$

alors

$$\mathcal{Q}_0(x,B)u_0 = e^{-xB}(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}u_0,$$

donc en utilisant (ii) de la proposition 1.1 dans Sinestrari [46] page 20, on déduit la première assertion du lemme(2.3.1).

2. *On a, pour $x \in]0,1]$,*

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_0'(x,B)u_0 &= -(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-xB}Bu_0\\ &= -(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-xB}\sqrt{A}u_0.\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_0''(x,B)u_0 &= +(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-xB}B^2u_0\\ &= -(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-xB}Au_0\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_0''(x,B)u_0 + A\mathcal{Q}_0(x,B)u_0 &= -(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-xB}Au_0\\ &\quad -A(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-xB}u_0\\ &= -(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-xB}Au_0\\ &\quad -(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-xB}Au_0\\ &= 0.\end{aligned}$$

3. *On sait qu'il existe une constante $M>0$ telle que pour tout $x>0$, $u_0 \in X$, on a*

$$\left\|e^{-Bx}u_0\right\|_X \leq M\left\|u_0\right\|_X$$

voir Tanabe [47], page 66, formule (3.27). Alors, $\exists C>0$:

$$\begin{aligned}\left\|\mathcal{Q}_0(x,B)u_0\right\|_X &= \left\|(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-xB}u_0\right\|_X\\ &\leq C\left\|u_0\right\|_X.\end{aligned}$$

Maintenant, on étudie le comportement de $\mathcal{Q}_0(.,B)$ en 0.

Lemme 2.3.2. 1. *Soit $u_0 \in X$. Alors*

$$\mathcal{Q}_0(\cdot,\sqrt{-A})u_0 \in C([0,1];X) \text{ si et seulement si } u_0 \in \overline{D(A)}.$$

2. *Soit $u_0 \in D(A)$. Alors*

$$\mathcal{Q}_0(\cdot,\sqrt{-A})u_0 \in C([0,1];D(A)) \text{ si et seulement si } Au_0 \in \overline{D(A)}.$$

Preuve 2.3.2. *C'est une conséquence de la commutativité entre $(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}$ et A sur $D(A)$ d'une part et Sinestrari [46], Proposition 1.2, (ii), page 20, d'une autre part. On utilise aussi le fait que*

$$\overline{D(\sqrt{-A})} = \overline{D(A)},$$

voir Haase [23], Corollaire 3.1.11. Page 59.

Pour $u_0 \in X$, on considère la fonction abstraite suivante :

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{Q}_1 : & [0,1[& \longrightarrow & X \\ & x & \longmapsto & \mathcal{Q}_1(x,B)u_0 \end{array}$$

telle que

$$\mathcal{Q}_1(x,B)u_0 = -(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-(1-x)B}u_0.$$

On a le résultat suivant

Lemme 2.3.3. *On a :*

1. $\mathcal{Q}_1(\cdot,\sqrt{-A})u_0 \in C^{\infty}([0,1[; D(A^k)), k \in \mathbb{N}$.

2. $\forall x \in [0,1[, \mathcal{Q}_1''(x,\sqrt{-A})u_0 + A\mathcal{Q}_1(x,\sqrt{-A})u_0 = 0$.

3. $\exists C > 0, \forall x \in [0,1[, \left\|\mathcal{Q}_1(x,\sqrt{-A})u_0\right\|_X \leq C \left\|u_0\right\|_X$.

Preuve 2.3.3. *Il n'est pas difficile de montrer ce lemme, il suffit de remplacer x par $1-x$:*

Lemme 2.3.4. 1. *Soit $u_0 \in X$. Alors*

$$\mathcal{Q}_1(\cdot,\sqrt{-A})u_0 \in C\left([0,1];X\right) \text{ si et seulement si } u_0 \in \overline{D(A)}.$$

2. *Soit $u_0 \in D(A)$. Alors*

$$\mathcal{Q}_1(\cdot,\sqrt{-A})u_0 \in C\left([0,1];D(A)\right) \text{ si et seulement si } Au_0 \in \overline{D(A)}.$$

Preuve 2.3.4. *On montre ce lemme de la même manière que le lemme (2.3.2). pour la suite du travail ,nous avons besoin des résultas suivants qui sont en fait valables pour tout opérateur Q générateur d'un semi groupe analytique généralisé.*

2.4 Formule de représentation de la solution

Dans cette section, nous supposons que (2.3) nous fixons :

$$u(1) = u_1.$$

Supposons que le problème (2.1)-(2.2) admet une solution stricte u. Soit u est la solution stricte du problème suivant :

$$\begin{cases} u''(x) - B^2u(x) = f(x) \\ u(0) = u_0 \\ u(1) = u_1. \end{cases} \tag{2.4}$$

Donc la solution u est représentée par :
$u(x) = e^{-xB}\xi_0 + e^{-(1-x)B}\xi_1 - \frac{1}{2}B^{-1}\int_0^x e^{-(x-s)B}f(s)ds - \dfrac{1}{2}B^{-1}\int_x^1 e^{-(s-x)B}f(s)ds$
telle que
$\xi_0 = (I-Z)^{-1}\left(u_0 - e^{-B}u_1\right) + \dfrac{1}{2}(I-Z)^{-1}B^{-1}\left(\int_0^1 e^{-sB}f(s)ds - \int_0^1 e^{-(2-s)B}f(s)ds\right)$

$\xi_1 = (I-Z)^{-1}\left(-e^{-B}u_0 + u_1\right) + \dfrac{1}{2}(I-Z)^{-1}B^{-1}\left(\int_0^1 e^{-(1-s)B}f(s)ds - \int_0^1 e^{-(1+s)B}f(s)ds\right)$
$(see[16])$
par dérivation on obtient :

$$u'(x) = -Be^{-xB}\xi_0 + Be^{-(1-x)B}\xi_1 + \frac{1}{2}\int_0^x e^{-(x-s)B}f(s)ds - \frac{1}{2}\int_x^1 e^{-(s-x)B}f(s)ds$$

En utilisant que $u'(0) = u'(1)$ on obtient

$$u'(0) = u'(1) \Longrightarrow -B\xi_0 + Be^{-B}\xi_1 - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-(s)B}f(s)ds = -Be^{-B}\xi_0 + B\xi_1 + \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-(1-s)B}f(s)ds$$

d'où

$$\begin{aligned} u'(0) = u'(1) \quad \Longrightarrow \quad & -B\,(I-Z)^{-1}\left(a - e^{-B}u(1)\right) \\ & -\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}\left(\int_0^1 e^{-sB}f(s)ds - \int_0^1 e^{-(2-s)B}f(s)ds\right) \\ & +Be^{-B}\,(I-Z)^{-1}\left(-e^{-B}a + u(1)\right) \\ & +\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}\left(\int_0^1 e^{-(2-s)B}f(s)ds - \int_0^1 e^{-(2+s)B}f(s)ds\right) \\ & -\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-(s)B}f(s)ds \\ = \quad & -Be^{-B}\,(I-Z)^{-1}\left(a - e^{-B}u(1)\right) \\ & -\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}\left(\int_0^1 e^{-(1+s)B}f(s)ds - \int_0^1 e^{-(3-s)B}f(s)ds\right) \\ & +B\,(I-Z)^{-1}\left(-e^{-B}a + u(1)\right) \\ & +\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}\left(\int_0^1 e^{-(1-s)B}f(s)ds - \int_0^1 e^{-(1+s)B}f(s)ds\right) \\ & +\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-(1-s)B}f(s)ds \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
-B(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})(I-e^{-B})u(1) &= +B(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})(I-e^{-B})a \\
&\quad +(I-Z)^{-1}\int_0^1 e^{-sB}f(s)ds \\
&\quad -(I-Z)^{-1}\int_0^1 e^{-(2-s)B}f(s)ds \\
&\quad -(I-Z)^{-1}\int_0^1 e^{-(1+s)B}f(s)ds \\
&\quad +(I-Z)^{-1}\int_0^1 e^{-(1-s)B}f(s)ds.
\end{aligned}$$

Alors on en déduit

$$\begin{aligned}
u_1 &= -u_0 \\
&\quad -B^{-1}(I-e^{-B})^{-2}\int_0^1 e^{-sB}f(s)ds + B^{-1}(I-e^{-B})^{-2}\int_0^1 e^{-(2-s)B}f(s)ds \\
&\quad +B^{-1}(I-e^{-B})^{-2}\int_0^1 e^{-(1+s)B}f(s)ds - B^{-1}(I-e^{-B})^{-2}\int_0^1 e^{-(1-s)B}f(s)ds.
\end{aligned}$$

Donc la solution u est formellement donnée par

$$\begin{aligned}
u(x) &= +(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-xB}u_0-(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-(1-x)B}u_0\\
&\quad -(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-(4-x)B}u_0-(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-(2+x)B}u_0\\
&\quad +(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-(3+x)B}u_0-(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-(1+x)B}u_0\\
&\quad +(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-(2-x)B}u_0+(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-(3-x)B}u_0\\
&\quad +\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}B^{-1}\int_0^1 e^{-(x+s)B}f(s)ds\\
&\quad -\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}B^{-1}\int_0^1 e^{-(2+x+s)B}f(s)ds\\
&\quad +\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}B^{-1}\int_0^1 e^{-(2+x-s)B}f(s)ds\\
&\quad -\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}B^{-1}\int_0^1 e^{-(4+x-s)B}f(s)ds\\
&\quad -(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}B^{-1}\int_0^1 e^{-(1-x+s)B}f(s)ds \qquad (2.5)\\
&\quad +(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}B^{-1}\int_0^1 e^{-(3-x+s)B}f(s)ds\\
&\quad +\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}B^{-1}\int_0^1 e^{-(2-x+s)B}f(s)ds\\
&\quad -\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}B^{-1}\int_0^1 e^{-(4-x+s)B}f(s)ds\\
&\quad -\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}B^{-1}\int_0^1 e^{-(2-x-s)B}f(s)ds\\
&\quad +\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}B^{-1}\int_0^1 e^{-(4-x-s)B}f(s)ds\\
&\quad -\frac{1}{2}B^{-1}\int_0^x e^{-(x-s)B}f(s)ds-\frac{1}{2}B^{-1}\int_x^1 e^{-(s-x)B}f(s)ds.
\end{aligned}$$

2.5 Existence, unicité et régularité maximale

Théorème 2.5.1. *Soit $f\in C^{\alpha}([0,1];X); 0<\alpha<1$, et sous l'hypothèse (2.3). Alors les assertion suivantes sont équivalentes.*

1. *Le problème (2.1)-(2.2) admet une unique solution stricte u, telle que*

$$u\in C^2([0,1];X)\cap C([0,1];D(A)),$$

   (i.e satisfaisant (2.1)-(2.2)).

2.

$$u_0\in D(A) \text{ et } Au_0-f(0)\in\overline{D(A)}.$$

Preuve 2.5.1. *On suppose 2 de la théoréme (2.5.1) i.e*

$$u_0 \in D(A) \text{ et } Au_0 - f(0) \in \overline{D(A)}.$$

On a $u(x)$ souloution de probleme (2.1)-(2.2) donner par (2.5) d'où

$$\begin{aligned}
u'(x) &= -(I-Z)^{-1}e^{-xB}Ba - (I-Z)^{-1}e^{-(1-x)B}Ba \\
&\quad -(I-Z)^{-1}e^{-(1+x)B}Ba - (I-Z)^{-1}e^{-(2-x)B}Ba \\
&\quad -\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}\int_0^1 e^{-(x+s)B}f(s)ds \\
&\quad +\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}\int_0^1 e^{-(2+x+s)B}f(s)ds \\
&\quad -\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}\int_0^1 e^{-(2+x-s)B}f(s)ds \\
&\quad +\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}\int_0^1 e^{-(4+x-s)B}f(s)ds \\
&\quad -(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}\int_0^1 e^{-(1-x+s)B}f(s)ds \\
&\quad +(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}\int_0^1 e^{-(3-x+s)B}f(s)ds \\
&\quad +\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}\int_0^1 e^{-(2-x+s)B}f(s)ds \\
&\quad -\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}\int_0^1 e^{-(4-x+s)B}f(s)ds \\
&\quad -\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}\int_0^1 e^{-(2-x-s)B}f(s)ds \\
&\quad +\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}\int_0^1 e^{-(4-x-s)B}f(s)ds \\
&\quad +\frac{1}{2}\int_0^x e^{-(x-s)B}f(s)ds - \frac{1}{2}\int_x^1 e^{-(s-x)B}f(s)ds.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u''(x) &= -(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-xB}Au_0 + (I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-(1-x)B}Au_0 \\
&\quad +(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-(4-x)B}Au_0 + (I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-(2+x)B}Au_0 \\
&\quad -(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-(3+x)B}Au_0 + (I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-(1+x)B}Au_0 \\
&\quad -(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-(2-x)B}Au_0 - (I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-(3-x)B}Au_0 \\
&\quad +\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}B\int_0^1 e^{-(x+s)B}f(s)ds \\
&\quad -\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}B\int_0^1 e^{-(2+x+s)B}f(s)ds \\
&\quad +\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}B\int_0^1 e^{-(2+x-s)B}f(s)ds \\
&\quad -\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}B\int_0^1 e^{-(4+x-s)B}f(s)ds \\
&\quad -(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}B\int_0^1 e^{-(1-x+s)B}f(s)ds \\
&\quad +(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}B\int_0^1 e^{-(3-x+s)B}f(s)ds \\
&\quad +\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}B\int_0^1 e^{-(2-x+s)B}f(s)ds \\
&\quad -\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}B\int_0^1 e^{-(4-x+s)B}f(s)ds \\
&\quad -\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}B\int_0^1 e^{-(2-x-s)B}f(s)ds \\
&\quad +\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}B\int_0^1 e^{-(4-x-s)B}f(s)ds \\
&\quad -\frac{1}{2}B\int_0^x e^{-(x-s)B}f(s)ds - \frac{1}{2}B\int_x^1 e^{-(s-x)B}f(s)ds \\
&\quad +f(x)
\end{aligned}$$

on écrit donc $u''(x)$ *de la fourme*

$$\begin{aligned}
u''(x) \;=\; & -(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-xB}Au_0+(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-(1-x)B}Au_0\\
&+(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-(4-x)B}Au_0+(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-(2+x)B}Au_0\\
&-(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-(3+x)B}Au_0+(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-(1+x)B}Au_0\\
&-(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-(2-x)B}Au_0-(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-(3-x)B}Au_0\\
&+\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-xB}B\int_0^1 e^{-sB}(f(s)-f(0))ds\\
&-\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-(1+x)B}f(0)+\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-xB}f(0)\\
&-\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}B\int_0^1 e^{-(2+x+s)B}f(s)ds\\
&+\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}B\int_0^1 e^{-(2+x-s)B}f(s)ds\\
&-\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}B\int_0^1 e^{-(4+x-s)B}f(s)ds\\
&-(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-(1-x)B}B\int_0^1 e^{-sB}(f(s)-f(0))ds\\
&+(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-(2-x)B}f(0)-(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-(1-x)B}f(0)\\
&+(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}B\int_0^1 e^{-(3-x+s)B}f(s)ds\\
&+\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}B\int_0^1 e^{-(2-x+s)B}f(s)ds\\
&-\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}B\int_0^1 e^{-(4-x+s)B}f(s)ds\\
&-\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-(1-x)B}B\int_0^1 e^{-(1-s)B}(f(s)-f(1))ds\\
&-\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-(1-x)B}f(1)+\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-(2-x)B}f(1)\\
&+\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}B\int_0^1 e^{-(4-x-s)B}f(s)ds\\
&-\frac{1}{2}B\int_0^x e^{-(x-s)B}(f(s)-f(x))ds+\frac{1}{2}e^{-xB}f(x)\\
&-\frac{1}{2}B\int_x^1 e^{-(s-x)B}(f(s)-f(x))ds+\frac{1}{2}e^{-(1-x)B}f(x).
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
u''(x) \quad = \quad & -(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-xB}Aa + (I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-(1-x)B}Aa \\
& +(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-(1+x)B}Aa - (I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-(2-x)B}Aa \\
& +(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-(2+x)B}Aa - (I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-(3+x)B}Aa \\
& +(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-(4-x)B}Aa - (I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-(3-x)B}Aa \\
& +\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-xB}B\int_0^1 e^{-sB}(f(s)-f(0))ds \\
& +(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-xB}f(0) \\
& -\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}B\int_0^1 e^{-(2+x+s)B}f(s)ds \\
& +\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}B\int_0^1 e^{-(2+x-s)B}f(s)ds \\
& -\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}B\int_0^1 e^{-(4+x-s)B}f(s)ds \\
& -(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-(1-x)B}B\int_0^1 e^{-sB}(f(s)-f(0))ds \\
& +(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-(2-x)B}f(0) - (I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-(1-x)B}f(0) \\
& +(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}B\int_0^1 e^{-(3-x+s)B}f(s)ds \\
& +\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}B\int_0^1 e^{-(2-x+s)B}f(s)ds \\
& -\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}B\int_0^1 e^{-(4-x+s)B}f(s)ds \\
& -\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-(1-x)B}B\int_0^1 e^{-(1-s)B}(f(s)-f(1))ds \\
& +\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}B\int_0^1 e^{-(4-x-s)B}f(s)ds \\
& -\frac{3}{2}(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-(1+x)B}f(0) - \frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-(2-x)B}f(1) \\
& -\frac{1}{2}e^{-(1-x)B}f(1) - \frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-(5-x)B}f(1) \\
& +(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-(4-x)B}f(1) \\
& -\frac{1}{2}e^{-xB}f(0) - \frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-(4+x)B}f(0) \\
& +(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-(3+x)B}f(0) \\
& -\frac{1}{2}B\int_0^x e^{-(x-s)B}(f(s)-f(x))ds + \frac{1}{2}e^{-xB}f(x) \\
& -\frac{1}{2}B\int_x^1 e^{-(s-x)B}(f(s)-f(x))ds + \frac{1}{2}e^{-(1-x)B}f(x)
\end{aligned}
$$

Finalement, on obtient :

$$\begin{aligned}
u''(x) &= -(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}\left(Au_0-f(0)\right)e^{-xB}+(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}\left(Au_0-f(0)\right)e^{-(1-x)B}\\
&+(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}\left(Au_0+f(1)\right)e^{-(4-x)B}+(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-(2+x)B}Au_0\\
&-(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}\left(Au_0-f(0)\right)e^{-(3+x)B}+(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-(1+x)B}Au_0\\
&-(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}\left(Au_0-f(0)\right)e^{-(2-x)B}-(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-(3-x)B}Au_0\\
&+\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}\left(e^{-xB}B\int_0^1 e^{-sB}(f(s)-f(0))ds-B\int_0^1 e^{-(2+x+s)B}f(s)ds\right)\\
&+\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}\left(B\int_0^1 e^{-(2+x-s)B}f(s)ds-B\int_0^1 e^{-(4+x-s)B}f(s)ds\right)\\
&+(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}\left(B\int_0^1 e^{-(3-x+s)B}f(s)ds-e^{-(1-x)B}B\int_0^1 e^{-sB}(f(s)-f(0))ds\right)\\
&+\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}\left(B\int_0^1 e^{-(2-x+s)B}f(s)ds-B\int_0^1 e^{-(4-x+s)B}f(s)ds\right)\\
&+\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}\left(B\int_0^1 e^{-(4-x-s)B}f(s)ds-e^{-(1-x)B}B\int_0^1 e^{-(1-s)B}(f(s)-f(1))ds\right)\\
&-\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-(2-x)B}f(1)-\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-(5-x)B}f(1)\\
&-\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-(4+x)B}f(0)-\frac{3}{2}(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-(1+x)B}f(0)\\
&-\frac{1}{2}B\int_0^x e^{-(x-s)B}(f(s)-f(x))ds-\frac{1}{2}B\int_x^1 e^{-(s-x)B}(f(s)-f(x))ds\\
&+\frac{1}{2}\left(f(x)-f(0)\right)e^{-xB}+\frac{1}{2}\left(f(x)-f(1)\right)e^{-(1-x)B}.
\end{aligned}$$

On a les deux terme premier sont dans $C([0,1];X)$ d'après les lemme (2.3.2) et (2.3.4), et les autre sont continus car $f \in C^{\alpha}([0,1];X)$ d'où on déduit que $u'' \in C([0,1];X)$

on a écrit $Au(x)$ de la forme

$$\begin{aligned}
Au(x) = \; & +(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-xB}Au_0 - (I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-(1-x)B}Au_0 \\
& -(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-(4-x)B}Au_0 - (I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-(2+x)B}Au_0 \\
& +(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-(3+x)B}Au_0 - (I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-(1+x)B}Au_0 \\
& +(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-(2-x)B}Au_0 + (I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-(3-x)B}Au_0 \\
& -\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}B\int_0^1 e^{-(x+s)B}f(s)ds \\
& +\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}B\int_0^1 e^{-(2+x+s)B}f(s)ds \\
& -\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}B\int_0^1 e^{-(2+x-s)B}f(s)ds \\
& +\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}B\int_0^1 e^{-(4+x-s)B}f(s)ds \\
& +(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}B\int_0^1 e^{-(1-x+s)B}f(s)ds \\
& -(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}B\int_0^1 e^{-(3-x+s)B}f(s)ds \\
& -\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}B\int_0^1 e^{-(2-x+s)B}f(s)ds \\
& +\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}B\int_0^1 e^{-(4-x+s)B}f(s)ds \\
& +\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}B\int_0^1 e^{-(2-x-s)B}f(s)ds \\
& -\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}B\int_0^1 e^{-(4-x-s)B}f(s)ds \\
& +\frac{1}{2}B\int_0^x e^{-(x-s)B}f(s)ds + \frac{1}{2}B\int_x^1 e^{-(s-x)B}f(s)ds.
\end{aligned}$$

D'où donc même méthode comme faire calcule $u''(x)$ on obtient donc $Au(x)$ de la forme suivent

$$
\begin{aligned}
Au(x)= \; & +(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}\left(Au_0-f(0)\right)e^{-xB}-(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}\left(Au_0-f(0)\right)e^{-(1-x)B}\\
& -(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}\left(Au_0+f(1)\right)e^{-(4-x)B}-(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-(2+x)B}Au_0\\
& +(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}\left(Au_0-f(0)\right)e^{-(3+x)B}-(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-(1+x)B}Au_0\\
& +(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}\left(Au_0-f(0)\right)e^{-(2-x)B}+(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-(3-x)B}Au_0\\
& -\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}\left(e^{-xB}B\int_0^1 e^{-sB}(f(s)-f(0))ds-B\int_0^1 e^{-(2+x+s)B}f(s)ds\right)\\
& -\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}\left(B\int_0^1 e^{-(2+x-s)B}f(s)ds-B\int_0^1 e^{-(4+x-s)B}f(s)ds\right)\\
& -(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}\left(B\int_0^1 e^{-(3-x+s)B}f(s)ds-e^{(1-x)B}B\int_0^1 e^{-sB}(f(s)-f(0))ds\right)\\
& -\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}\left(B\int_0^1 e^{-(2-x+s)B}f(s)ds-B\int_0^1 e^{-(4-x+s)B}f(s)ds\right)\\
& -\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}\left(B\int_0^1 e^{-(4-x-s)B}f(s)ds-e^{-(1-x)B}B\int_0^1 e^{-(1-s)B}(f(s)-f(1))ds\right.\\
& +\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-(2-x)B}f(1)+\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-(5-x)B}f(1)\\
& +\frac{1}{2}(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-(4+x)B}f(0)+\frac{3}{2}(I-Z)^{-1}(I-e^{-B})^{-2}e^{-(1+x)B}f(0)\\
& +\frac{1}{2}B\int_0^x e^{-(x-s)B}(f(s)-f(x))ds+\frac{1}{2}B\int_x^1 e^{-(s-x)B}(f(s)-f(x))ds\\
& -\frac{1}{2}\left(f(x)-f(0)\right)e^{-xB}-\frac{1}{2}\left(f(x)-f(1)\right)e^{-(1-x)B}\\
& +f(x)
\end{aligned}
$$

alors aussi $Au(x)\in C\left([0,1];X\right)$ *car on a les deux terme premier sont dans* $C\left([0,1];X\right)$ *d'après les lemme (2.3.2) et (2.3.4), et les autre sont continus car* $f\in C^{\alpha}\left([0,1];X\right)$ *d'où* $Au(x)\in C([0,1];X)$

Inversement on Suppose que 1., alors

$$u_0=u(0)\in D(A),$$

et

$$Au_0-f(0) \;=\; -u''(0)\in\overline{D(A)}$$

finalement donc l'équation :

$$u''(x)+A(x)=f(x)$$

elle vérifiant pour la solution $u(x)$ *du la propléme (2.1)-(2.2) d'où théorème de régularité maximal exit.*

Théorème 2.5.2. *Soit* $f\in C^{\alpha}\left([0,1]\,;X\right), 0<\alpha<1$*, sous l'hypothèse (2.3) . Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *L'unique solution stricte* u *du problème (2.1)-(2.2) a la propriété de régularité maximale :*

$$u'',Au\in C^{\alpha}([0,1]\,;X).$$

2.

$$u_0 \in D(A), Au_0 - f(0) \in (D(A), X)_{1-\frac{\alpha}{2},+\infty}.$$

Preuve 2.5.2.

Supposons qu'il existe une solution stricte u du problème (2.1)-(2.2) ayant la propriété de régularité maximale. D'après le théorème précédent, on a

$$u_0 \in D(A).$$

Aussi le premier et le second termes dans la formule (u'') sont dans $C^\alpha([0,1];X)$ alors

$$e^{-B\cdot}(Au_0 - f(0)) \in C^\alpha([0,1];X),$$
$$e^{(1-\cdot)B}(Au_0 - f(0)) \in C^\alpha([0,1];X),$$

et appliquant la remarque, (f), page 39.dans [46], on obtient :

$$Au_0 - f(0) \in (D(B), X)_{1-\alpha,\infty}.$$

On conclut en notant que

$$(D(B), X)_{1-\alpha,\infty} = (D(A), X)_{1-\frac{\alpha}{2},\infty}.$$

Inversement, supposons que

$$u_0 \in D(A), Au_0 - f(0) \in (D(A), X)_{1-\frac{\alpha}{2},+\infty}.$$

Utilisant le théorème 1.4. Page 361 de [8] on a :

$$e^{-\sqrt{-A}\cdot}(Au_0 - f(0)) \in C^\alpha([0,1];X)$$

$$e^{(1-\cdot)\sqrt{-A}}(Au_0 - f(0)) \in C^\alpha([0,1];X)$$

$$\int_0^1 Be^{-sB}(f(s) - f(0))ds \in C^\alpha([0,1];X)$$

$$\int_0^1 Be^{-(1-s)B}(f(s) - f(1))ds \in C^\alpha([0,1];X)$$

D'où

$$u'',\ Au \in C^\alpha([0,1];X).$$

Chapitre 3

Résolution d'une équation différentielle abstraite dans un espace UMD

3.1 Le problème

On considère un espace de Banach complexe X. On cherche à rérésoudre, l'équation différentielle abstraite du second ordre

$$u''(x) + Au(x) = f(x), \quad x \in [0,1] \tag{3.1}$$

avec les conditions aux limites suivantes :

$$u(0) = u_0, \; u'(1) = u'_1. \tag{3.2}$$

Ici A est un opérateur linéaire fermé du domaine $D(A)$ non nécéssairement dense dans X, et u_0, u'_1 sont des éléments donnés dans X
On cherche pour

$$f \in L^p(0,1;X), \quad 1 < p < \infty$$

une solution stricte de (3.1)-(3.2) c'est-à-dire une fonction u vérifier :

$$u \in W^{2,p}(0,1;X) \cap L^p(0,1;D_A).$$

Notons que si $u \in W^{2,p}(0,1;X)$ alors d'après J. L. Lions (théorème des traces),

$$u \in C^1([0,1];X),$$

d'où $u(0), u'(1)$ sont bien définis.
On note par ($A \in Bip(\alpha, X)$) [Bounded Imaginary power] l'ensemble des opérateurs sectoriels sur X, voir, pour plus de details Prüss-Sohr [43]).

3.2 Les hypothèses

Notons que si X est un espace de Banach quelconque, plus de régularité est exigée sur f, pour obtenir une solution strict, c'est pourquoi on exige que

$$X \quad \text{est un espace} \quad UMD \tag{3.3}$$

Les hypothèses sur un opérateur A sont les suivantes. Satisfaisant l'hypothèse d'éllipticité

$$\rho(A) \supset [0, +\infty[\text{ and } \exists C > 0 : \forall \lambda \geq 0, : \left\|(A - \lambda I)^{-1}\right\|_{L(X)} \leq \frac{C}{1+\lambda}, \tag{3.4}$$

et vérifiant l'hypothèse suivante

$$\begin{cases} \forall s \in \mathbb{R}, (-A)^{is} \in L(X) \text{ and } \exists C \geqslant 1, \alpha \in]0, \pi[: \\ \left\|(-A)^{is}\right\|_{L(X)} < Ce^{\alpha[s]}. \end{cases} \tag{3.5}$$

On rappelle qu'un espace de Banach X est UMD si et seulement s'il existe $p > 1$ (et alors pour tout p), tel que la transformée de Hilbert est continue de $L^p(\mathbb{R}; X)$ dans lui-même (voir Bourgain [4], Burkholder [5]).

Remarque 3.2.1. *1. L'hypothèse (3.3) implique que X est réflexif, et alors $D(A)$ est dense dans X (voir Haase [23], Proposition 1.1, p. 18).*

2. L'hypothèse (3.4) implique que l'opérateur $\left(-\sqrt{-A}\right)$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique noté $\left(e^{-\sqrt{-A}x}\right)_{x \geqslant 0}$ sur X ,voir Balakrishnan [3].

3. L'hypothèse (3.5) est équivalente à

$$\exists C \geqslant 1, \alpha \in \,]0, \pi[\, : \forall s \in \mathbb{R}, \left\|\left(\sqrt{-A}\right)^{is}\right\| \leqslant Ce^{\left(\frac{\alpha}{2}\right)|s|},$$

(voir Haase [22], Proposition 2.18. p. 64).

On pose dans tout ce qui suit

$$B = \sqrt{-A}.$$

3.3 Lemmes techniques

Lemme 3.3.1. *Soit $K : \Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable telle que*

$$\exists a > 0 \ / \ \forall x_2 \in \Omega_2 \ , \ \int_{\Omega_1} |K(x_1, x_2)| \, dx_1 \leqslant a,$$

$$\exists b > 0 \ / \ \forall x_1 \in \Omega_1 \ , \ \int_{\Omega_2} |K(x_1, x_2)| \, dx_2 \leqslant b,$$

alors opérateur

$$F(f)(x_2) = \int_{\Omega_1} K(x_1, x_2) \, f(x_1) dx_1, \ x_2 \in \Omega_2,$$

vérifie

$$F \in \mathcal{L}(L^p(\Omega_1), L^p(\Omega_2)), \ 1 \leqslant p \leqslant +\infty.$$

Preuve 3.3.1. *(see [48]).*

Théorème 3.3.1. *(Mihlin [36]). Soit k un nombre entier naturel supérieur à $n/2$ et m une fonction C^k définie sur $\mathbb{R}^n$. Supposons qu'il existe une fonction c_0 telle que pour tout $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ multi-indices satisfaisant*

$$|\alpha| = |\alpha_1| + ... + |\alpha_n| \leqslant k,$$

on a :

$$|\lambda^\alpha||\partial^\alpha m(\lambda)/\partial\lambda^\alpha| \leqslant c_0.$$

Alors il existe une constante c_p dépendant seulement de n et p telle que l'opérateur défini par :

$$T_m f = F^{-1}(mF(f)),$$

vérifie :

$$||T_m f||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant c_p c_0 ||f||_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

où on a désigné par F la transformation de Fourier définie par

$$F(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x) dx,$$

et F^{-1} la transformation inverse de Fourier.

On en déduit un résultat de régularité sur les dérivées secondes croisées d'une fonction à partir de celle des dérivées pures.

corollaire 3.3.1. *Soient $p \in]1, +\infty[$ et $v : (x_1, ..., x_n) \longmapsto v(x_1, ..., x_n)$ une fonction donnée dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, telle que pour tout $i \in \{1, .., n\}$,*

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

Alors, pour tout $i, j \in \{1, .., n\}$,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

3.4 Formule de représentation de la solution

Nous supposons ici que les hypothèses (3.3), (3.4) et (3.5) sont vérifiées. L'hypothèse (3.4) implique qu'il existe $\theta_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $r_0 > 0$ tels que :

$$\varrho(A) \supset S_{\theta_0} = \{z \in \mathbb{C}^* : |\arg(z)| \leq \theta_0\} \cup \overline{B(0, r_0)},$$

et l'estimation dans (3.4) reste vraie dans S_{θ_0}. Soit γ le contour de S_{θ_0} orienté de $\infty e^{i\theta_0}$ à $\infty e^{-i\theta_0}$. La racine carrée de $-\lambda$ est la détermination analytique définie sur $\mathbb{C}$ par $Re\sqrt{-\lambda} > 0$. L'étude du problème (3.1)-(3.2) est basée sur une construction du solution sous la forme d'intégrale de Dunford (voir [9] et [28]) et sur la réduction de l'ordre de l'équation par la transformation du Krein's voir ([27]) Maintenant, considérons le problème

$$\begin{cases} v''(x) + \lambda v(x) = f(x), \\ v(0) = u_0. \\ v'(1) = u_1'. \end{cases} \tag{3.6}$$

où $\lambda \in \mathbb{C} - \mathbb{R}_+$. Un calcul simple prouve que la solution du problème (3.6) est donnée par

$$\begin{aligned} v_\lambda(x) &= +\frac{\sinh\sqrt{-\lambda}x}{\sqrt{-\lambda}\cosh\sqrt{-\lambda}}u_1' \\ &\quad +\frac{\cosh\sqrt{-\lambda}(1-x)}{\cosh\sqrt{-\lambda}}u_0 \\ &\quad -\int_0^1 K_\lambda(x,s)\, f(s)\, ds, \end{aligned}$$

où

$$K_\lambda(x,s) = \begin{cases} \dfrac{\sinh\sqrt{-\lambda}s\ \cosh\sqrt{-\lambda}(1-x)}{\sqrt{-\lambda}\cosh\sqrt{-\lambda}}; & \text{si } 0 \leqslant s \leqslant x, \\ \\ \dfrac{\sinh\sqrt{-\lambda}x\ \cosh\sqrt{-\lambda}(1-s)}{\sqrt{-\lambda}\cosh\sqrt{-\lambda}}; & \text{si } x \leqslant s \leqslant 1, \end{cases} \tag{3.7}$$

D'où, la solution du problème (3.1)-(3.2) est donnée par la formule suivante

$$
\begin{aligned}
u(x) &= +\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{\sinh\sqrt{-\lambda}x}{\sqrt{-\lambda}\cosh\sqrt{-\lambda}}\left(A-\lambda\right)^{-1}u_1' d\lambda \\
&\quad +\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{\cosh\sqrt{-\lambda}(1-x)}{\cosh\sqrt{-\lambda}}\left(A-\lambda\right)^{-1}u_0 d\lambda \\
&\quad -\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\int_0^1 K_\lambda\left(x,s\right)\left(A-\lambda\right)^{-1}f\left(s\right)dsd\lambda \\
&= \sum_{i=1}^{3} I_i.
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

3.5 Existence, unicité et régularité maximale

3.5.1 Problème avec conditions aux limites homogènes

Dans cette section on obtient l' existence, unicité et régularité maximal du problème (3.1)-(3.2) .
On considère le problème

$$u''(x) + Au(x) = f(x),\ x \in (0,1)\,, \tag{3.9}$$

avec les conditions aux limites homogènes

$$u(0) = 0,\ u'(1) = 0, \tag{3.10}$$

sous les hypothèses (3.3), (3.4) et (3.5). On écrit (3.9)-(3.10) sous la forme d'une somme de deux opérateurs :

$$\begin{cases} Su = Bu + Au = f \\ u \in D\left(A\right) \cap D\left(B\right) \end{cases}$$

où B est défini par :

$$\begin{cases} D_B = \left\{u \in L^p\left(0,1;E\right)/u', u'' \in L^p\left(0,1;E\right) \text{ et } u\left(0\right) = u'\left(1\right) = 0\right\} \\ Bu = u'' \end{cases}$$

Proposition 3.5.1. *L'opérateur linéaire fermé B satisfait :*

1. $\rho\left(B\right) \supset \mathbb{R}_+$ *et* $\exists K > 0 / \left\|\left(B-\lambda I\right)^{-1}\right\|_{L(E)} \leqslant \dfrac{K}{1+\lambda}, \forall\lambda \geqslant 0$
2. $\forall s \in \mathbb{R}, \left(-B\right)^{is} \in L\left(E\right)$ *et* $\exists K > 0, \exists\varepsilon > 0 : \forall s \in \mathbb{R}, \left\|\left(-B\right)^{is}\right\|_{L(E)} \leqslant Ke^{|s|\varepsilon}.$

Preuve 3.5.1. *Cette proposition signifie que l'opérateur B satisfait les hypothèses (DV1) et (DV3) de Dore-Venni [11].*
On résoud explicitement le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} v''(x) + \lambda v(x) = g(x) \ \ , \ \ g \in L^p(0,1;X) \ \ , \ \lambda > 0 \\ v(0) = v'(1) = 0 \end{array} \right\}$$

On obtient une solution unique $v \in D_B$ tel que $\left\{(B-\lambda)^{-1} g\right\}(x) = v(x)$ où :
$v(x) = -\int_0^1 K_\lambda(x,s)\, g(s)\, ds,$ *et $K_\lambda(x,s)$ est donné par* (3.7).
Pour montrer la première affirmation dans la proposition (3.5.1). On appliquer le lemme (3.3.1).
Vérifions les hypothèses du lemme (3.3.1)

$$\forall x, \int_0^1 |K_\lambda(x,s)|\, ds \leqslant C/(1+\lambda), \forall \lambda \geqslant 0$$

et

$$\forall s, \int_0^1 |K_\lambda(x,s)|\, dx \leqslant C/(1+\lambda), \forall \lambda \geqslant 0.$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |K_\lambda(x,s)|\, ds = \quad & + \int_0^x \left| \frac{\cosh \sqrt{-\lambda}(1-x) \sinh \sqrt{-\lambda}\ s}{\sqrt{-\lambda} \cosh \sqrt{-\lambda}} \right| ds \\
& + \int_x^1 \left| \frac{\sinh \sqrt{-\lambda}\ x \cosh \sqrt{1-s}}{\sqrt{-\lambda} \cosh \sqrt{-\lambda}} \right| ds \\
& \leqslant \frac{\cosh Re\sqrt{-\lambda}(1-x)}{Re\sqrt{-\lambda} \cosh Re\sqrt{-\lambda}} \int_0^x \sinh Re\sqrt{-\lambda}\ sds \\
& + \frac{\sinh Re\sqrt{-\lambda}\ x}{Re\sqrt{-\lambda} \cosh Re\sqrt{-\lambda}} \int_x^1 \cosh Re\sqrt{-\lambda}(1-s) ds \\
& \leqslant \frac{\cosh Re\sqrt{-\lambda}(1-x)}{\left(Re\sqrt{-\lambda}\right)^2 \cosh Re\sqrt{-\lambda}} \left(\cosh Re\sqrt{-\lambda}\ x - 1\right) \\
& + \frac{\sinh Re\sqrt{-\lambda}\ x}{\left(Re\sqrt{-\lambda}\right)^2 \cosh Re\sqrt{-\lambda}} \left(\sinh Re\sqrt{-\lambda}(1-x)\right) \\
& \leqslant \frac{\cosh Re\sqrt{-\lambda}}{\left(Re\sqrt{-\lambda}\right)^2 \cosh Re\sqrt{-\lambda}} - \frac{\cosh Re\sqrt{-\lambda}(1-x)}{\left(Re\sqrt{-\lambda}\right)^2 \cosh Re\sqrt{-\lambda}} \\
& \leqslant \frac{1}{\left(Re\sqrt{-\lambda}\right)^2} - \frac{\cosh Re\sqrt{-\lambda}(1-x)}{\left(Re\sqrt{-\lambda}\right)^2 \cosh Re\sqrt{-\lambda}} \\
& \leqslant \frac{1}{\left(Re\sqrt{-\lambda}\right)^2} \\
& \leqslant \frac{1}{\lambda}, \forall \lambda > 0.
\end{aligned}$$

De la même manière. On montre que

$$\int_0^1 |K_\lambda(x,s)|\, dx \leqslant \frac{C}{\lambda}, \forall \lambda > 0.$$

En utilisant le lemme (3.3.1), on obtient alors :

$$\int_0^1 |K_\lambda(x,s)\, g(s)|\, ds \leqslant \frac{C}{\lambda}, \forall \lambda > 0.$$

De plus, on montre que est B inversible

$$(B^{-1}g)(x) = -\int_0^1 K_0(x,s)\, g(s) ds,$$

où :

$$K_0(x,s)=\begin{cases} s\ ,\ si\ 0\leqslant s\leqslant x \\ x\ ,\ si\ x\leqslant s\leqslant 1\end{cases}$$

$$\left\|B^{-1}g\right\|_{L^p(0,1;X)}=\left(\int_0^1\left\|\left(B^{-1}g\right)(x)\right\|_X^p dx\right)^{1/p}$$

$$\begin{aligned}\left\|B^{-1}g\right\|_{L^p(0,1;X)}^p &= \int_0^1\left\|(B^{-1}g)(x)\right\|_X^p dx \\ &= \int_0^1\left|\int_0^1 K_0(x,s)\,g(s)ds\right|_X^p dx.\end{aligned}$$

Soit $x\in[0,1]$

$$\int_0^1|K_0(x,s)|\,ds=x-\frac{x^2}{2}\leqslant x\leqslant 1,$$

et soit $s\in[0,1]$,

$$\int_0^1|K_0(x,s)|\,dx=s-\frac{s^2}{2}\leqslant s\leqslant 1.$$

Après avoir utilisé le lemme (3.3.1), on en déduit que :

$$\left\|\int_0^1|K_0(x,s)g(s)|\,ds\right\|\leqslant\|g\|_X\,,$$

d'où :

$$\left\|B^{-1}g\right\|_{L^p(0,1;X)}^p\leqslant\|g\|_X^p\,,$$

alors B *est inversible et la première assertion de la proposition (3.5.1) est prouvée. On a donc besoin de vérifier l'assertion 2. Pour cela, on utilise la représentation intégrale suivante pour la puissance complexe d'un opérateur linéaire fermé pour* $0<Rez<\frac{1}{2}$, *on a :*

$$\begin{aligned}\left[(-B)^{-z}g\right](t) &= \frac{1}{\Gamma(1-z)\Gamma(z)}\int_0^\infty(-\lambda)^{-z}\left[(-B+\lambda)^{-1}g\right](t)d\lambda \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-z)\Gamma(z)}\int_0^\infty(-\lambda)^{-z}\left(\int_0^t\frac{\sinh\sqrt{-\lambda}s\cosh\sqrt{-\lambda}(1-t)}{\sqrt{-\lambda}\cosh\sqrt{-\lambda}}g(s)ds\right)d\lambda \\ &+\frac{1}{\Gamma(1-z)\Gamma(z)}\int_0^\infty(-\lambda)^{-z}\left(\int_t^1\frac{\sinh\sqrt{-\lambda}t\cosh\sqrt{-\lambda}(1-s)}{\sqrt{-\lambda}\cosh\sqrt{-\lambda}}g(s)ds\right)d\lambda \\ &= J_1+J_2\end{aligned}$$

où :

$$J_1=\frac{1}{\Gamma(1-z)\Gamma(z)}\int_0^\infty(-\lambda)^{-z}\left(\int_0^t\frac{\sinh\sqrt{-\lambda}s\cosh\sqrt{-\lambda}(1-t)}{\sqrt{-\lambda}\cosh\sqrt{-\lambda}}g(s)ds\right)d\lambda$$

Comme :

$$\begin{aligned}\frac{\sinh\sqrt{-\lambda}s\cosh\sqrt{-\lambda}\,(1-t)}{\sqrt{-\lambda}\cosh\sqrt{-\lambda}} &= +\frac{e^{-\sqrt{-\lambda}(t-s)}}{2\sqrt{-\lambda}}\\ &\quad+\frac{e^{-\sqrt{-\lambda}(t-s)}}{2\sqrt{-\lambda}}\left[\frac{e^{-2\sqrt{-\lambda}(1-t)}-e^{-2\sqrt{-\lambda}s}}{1+e^{-2\sqrt{-\lambda}}}\right]\\ &\quad+\frac{e^{-\sqrt{-\lambda}(t-s)}}{2\sqrt{-\lambda}}\left[\frac{-e^{-2\sqrt{-\lambda}(1-t+s)}-e^{-2\sqrt{-\lambda}}}{1+e^{-2\sqrt{-\lambda}}}\right]\end{aligned}$$

alors :

$$J_1=\sum_{i=1}^{5}K_i\ ,$$

où :

$$\begin{aligned}K_1 &= \frac{1}{2\Gamma\,(1-z)\,\Gamma(z)}\int_0^\infty(-\lambda)^{-z}\left(\int_0^t\frac{e^{-\sqrt{-\lambda}(t-s)}}{\sqrt{-\lambda}}g(s)ds\right)d\lambda\\ &= \frac{1}{2\Gamma\,(1-z)\,\Gamma(z)}\int_0^t\left(\int_0^\infty(-\lambda)^{-z}\,\frac{e^{-\sqrt{-\lambda}(t-s)}}{\sqrt{-\lambda}}d\lambda\right)g(s)ds,\end{aligned}$$

En posant : $\sigma=\sqrt{-\lambda}\,(t-s)$ *on a :*

$$\begin{aligned}K_1 &= \frac{1}{\Gamma(1-z)\Gamma(z)}\int_0^t(t-s)^{2z-1}\left(\int_0^\infty\sigma^{-2z}e^{-\sigma}d\sigma\right)g(s)ds\\ &= \frac{\Gamma\,(1-2z)}{\Gamma\,(1-z)\,\Gamma(z)}\int_0^t(t-s)^{2z-1}\,g(s)ds\\ &= \frac{\Gamma\,(1-2z)}{\Gamma\,(1-z)\,\Gamma\,(z)}\,(\Phi_z*G)\,(t),\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{cases}\Phi_z(t)=t^{2z-1}\chi_{[0,+\infty[}(t)\\ G(s)=f(s)\ \ sur\ \ [0,1]\ et\ nulle\ ailleurs,\end{cases}$$

où $\chi_{[0,+\infty[}$ *est la fonction caractéristique sur* $[0,+\infty[$ *. Soit* F*la transformée de Fourier :*

$$\begin{aligned}F\,(\Phi_z)\,(\xi) &= \Gamma\,(2z)\,[2i\pi\xi+0]^{-2z}\\ &= \Gamma\,(2z)\,|2\pi\xi|^{-2z}\left[h(\xi)e^{i\pi z}+h(-\xi)e^{-i\pi z}\right],\end{aligned}$$

tel que :

$$h(\xi)=\begin{cases}1 & si \quad \xi>0\\ 0 & si \quad \xi\leqslant 0.\end{cases}$$

On pose :

$$\begin{aligned} m_z(\xi) &= \frac{\Gamma(1-2z)}{\Gamma(1-z)\Gamma(z)} F(\Phi_z)(\xi) \\ &= \frac{\Gamma(1-2z)\Gamma(2z)}{\Gamma(1-z)\Gamma(z)} |2\pi\xi|^{-2z} \left[h(\xi)e^{i\pi z} + h(-\xi)e^{-i\pi z} \right], \end{aligned}$$

on peut donc écrire :

$$K_1 = \overline{F}(m_z.F(G))(t),$$

en utilisant les propriétés de la fonction Γ. *On a :*

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}} |m_z(\xi)| \leqslant \left| \frac{1}{\cos \pi z} . \frac{1}{(2\pi\xi)^{2z}} \right| e^{\pi|Imz|}$$

et

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}} \left| m_z'(\xi) \right| \leqslant |2z| \left| \frac{1}{\cos \pi z} . \frac{1}{(2\pi\xi)^{2z}} \right| e^{\pi|Imz|}$$

d'où on déduit par application du théorème de Mikhlin ([36]) et du même travail pour les autres termes K_i *, après les avoir mis sous forme de produit de convolution, l'existence d'une constante* C*, positive telle que :*

$$\left\| (-B)^{-z} \right\|_{L(L^p(0,1;X))} \leqslant C(1+|z|) \frac{1}{|\cos \pi z|} e^{\pi|Imz|}.$$

En posant : $z = \eta - is$*, et en passant à la limite quand* $\eta \longrightarrow 0$*, on obtient :*

$$\begin{aligned} \left| (-B)^{-is} \right|_{L(L^p(0,1;X))} &\leqslant C(1+|s|) \frac{1}{ch\pi\,|s|} e^{\pi|s|} \\ &\leqslant Ce^{\epsilon_1|s|}. \end{aligned}$$

Par ailleurs les deux opérateurs A *et* B *commutent au sens des résolvantes donc* A *et* B *sont Bip et on peut appliquer le résultat suivant :*

Théorème 3.5.1. *Soit* E *un espace de Banach* UMD. *Si*

$$A \in Bip(E, \theta_A) \text{ et } B \in Bip(E, \theta_B) \text{ avec } \theta_A \neq \theta_B$$

et leurs résolvantes commutent alors il existe $\varepsilon > 0$ *tel que la somme*

$$(A+B) \in Bip(E,\theta) \text{ où } \theta = \max(\theta_A, \theta_B) + \varepsilon.$$

Preuve 3.5.2. *Ce théorème est démontré dans Dore-Venni ([11]). De plus, il y a un résultat amélioré dans Pruss-Sohr ([43]) avec* $\theta = \max(\theta_A + \theta_B)$.

Le problème (3.9)-(3.10) admet alors une unique solution stricte .
On a montré que sous les hypothèses (3.3), (3.4) et (3.5), le problème (3.9)-(3.10) admet une unique solution stricte

$$u \in W^{2,p}(0,1;X) \cap L^p(0,1;D_A).$$

3.5.2 Problème avec conditions aux limites non homogènes

Maintenant, considérons le problème (3.1)-(3.2). La représentation de la solution est donnée par (3.8). Prouvons le résultat suivant :

Théorème 3.5.2. *Sous hypothèses (3.3), (3.4) et (3.5), si* $f \in L^p\left(0,1;X\right)$,

$$u_0 \in \left(D\left(A\right);X\right)_{\frac{1}{2p},p} \text{ et } u_1' \in \left(D\left(A\right);X\right)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p} \quad ,$$

alors le problème (3.1)-(3.2) admet une unique solution stricte :

$$u \in W^{2,p}(0,1;X) \cap L^p(0,1;D_A).$$

Preuve 3.5.3. *Il suffit de montrer que* $Au \in L^p\left(0,1;X\right)$

$$\begin{aligned}
Au(x) &= +\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\sinh\sqrt{-\lambda}x}{\sqrt{-\lambda}\cosh\sqrt{-\lambda}} A\left(A-\lambda\right)^{-1} u_1' d\lambda \\
&\quad +\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\cosh\sqrt{-\lambda}(1-x)}{\cosh\sqrt{-\lambda}} A\left(A-\lambda\right)^{-1} u_0 d\lambda \\
&\quad -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^1 K_\lambda\left(x,s\right) A(A-\lambda)^{-1} f\left(s\right) ds d\lambda \\
&= \sum_{i=1}^{3} H_i.
\end{aligned}$$

Théorème 3.5.2 implique que h_3 *est dans* $L^p(0,1;D_A)$, *montrons que* h_1 *et* h_2 *appartiennent à* $L^p(0,1;D_A)$ *sous les conditions :*

$$u_0 \in \left(D\left(A\right);X\right)_{\frac{1}{2p},p} \text{ et } u_1' \in \left(D\left(A\right);X\right)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p} \quad ,$$

on a :

$$H_1 = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\sinh\sqrt{-\lambda}x}{\sqrt{-\lambda}\cosh\sqrt{-\lambda}} A\left(A-\lambda\right)^{-1} u_1' d\lambda \ ,$$

alors

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \|H_1\|_X^p \, dx &= \int_0^1 \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\sinh \sqrt{-\lambda} x}{\sqrt{-\lambda} \cosh \sqrt{-\lambda}} A(A-\lambda)^{-1} u_1' d\lambda \right\|_X^p dx \\
&\leqslant C \int_0^1 \left(\int_\gamma \frac{\cosh Re\sqrt{-\lambda} x}{|\lambda|^{\frac{1}{2}} \left|\cosh \sqrt{-\lambda}\right|} \left\| A(A-\lambda)^{-1} u_1' \right\|_X d|\lambda| \right)^p dx \\
&\leqslant C \int_0^1 \left(\int_0^\infty \frac{e^{Re\sqrt{-\lambda} x} + e^{-Re\sqrt{-\lambda} x}}{|\lambda|^{\frac{1}{2}} e^{Re\sqrt{-\lambda}} \left|1 + e^{-2Re\sqrt{-\lambda}}\right|} \left\| A(A-\lambda)^{-1} u_1' \right\|_X d|\lambda| \right)^p dx \\
&\leqslant C_{\theta_0} \int_0^1 \left(\int_0^\infty \frac{1}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}} \left\| A(A-\lambda)^{-1} u_1' \right\|_X d|\lambda| \right)^p dx \\
&\leqslant C_{\theta_0} \int_0^1 \left(\int_0^\infty \frac{1}{|\lambda|^{\frac{1}{2}} |\lambda|^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}}} d|\lambda| \right)^p \|u_1'\|^p_{(D(A);X)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p}} dx \\
&\leqslant C_{\theta_0} \int_0^1 \left(\int_0^\infty \frac{1}{|\lambda|^{1+\frac{1}{2p}}} d|\lambda| \right)^p \|u_1'\|^p_{(D(A);X)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p}} dx \\
&\leqslant C_{\theta_0} \|u_1'\|^p_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p} \int_0^1 dx \\
&\leqslant C_{\theta_0} \|u_1'\|^p_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p} \quad ,
\end{aligned}
$$

et alors $H_1 \in L^p(0,1;E)$. *De la même manière on montre que* $H_2 \in L^p(0,1;E)$.

Chapitre 4

Exemples d'application

4.1 Applications dans le cas où f est dans un espace holdérien

Soient $X = L^2(\mathbb{R})$ et $f \in C^\alpha([0,1], L^2(\mathbb{R})), 0 < \alpha < 1$. Considérons le problème :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = f(x,y) \;\; (x,y) \in [0,1] \times \mathbb{R} \\ u(0,y) = u_0(y) \;,\;\; y \in \mathbb{R} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) = \dfrac{\partial u}{\partial y}(1,y) \end{cases} \tag{4.1}$$

On définie l'opérateur A comme suit :

$$\begin{cases} D(A) = H^2(\mathbb{R}) \\ Au = u'' \end{cases}$$

Comme X est un espace de Hilbert, $D(A)$ est dense dans X, de plus $(-A)$ est un opérateur auto-adjoint, alors

$$D(\sqrt{-A}) = (D(A), X)_{\frac{1}{2},2} = \left(H^2(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R})\right)_{\frac{1}{2},2} = H^1(\mathbb{R}),$$

voir [31]. En utilisant la transformation de Fourier, on montre que A vérifie (2.3). Le résultat suivant est une conséquence du théorème 2.5.2

Proposition 4.1.1. *Le problème* (4.1) *admet une unique solution stricte u, telle que :*

$$u \in C^2([0,1]; L^2(\mathbb{R})) \cap C([0,1]; H^2(\mathbb{R})),$$

satisfaisant

$$u'' \in C^\alpha([0,1]; L^2(\mathbb{R}))$$

si seulement si,

$$u_0 \in H^2(\mathbb{R}) \ et \ Au_0 - f(0) \in (H^2(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R}))_{1-\frac{\alpha}{2},\infty} = B^{\alpha}_{2,\infty}(\mathbb{R}),$$

(*l'espace de Besov* $B^{\alpha}_{2,\infty}(\mathbb{R})$ *est complètement décrit dans Grisvard [21]*).

4.2 Applications dans le cas où f est dans $L^p(0,1;X)$

Soient $X = L^p(\mathbb{R})$ et $f \in L^p(0.1; L^P(\mathbb{R})), 1 < p < \infty$. Considérons le problème :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = f(x,y), (x,y) \in]0,1[\times\mathbb{R}, \\ u(0,y) = u_0(y) \ , \ y \in \mathbb{R}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,y) = u_1'(y) \ , \ y \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{4.2}$$

On définie l'opérateur A comme suit :

$$\begin{cases} D(A) = W^{2,p}(\mathbb{R}) \\ Au = u'' \end{cases}$$

de plus

$$D(\sqrt{-A}) = (W^{2,p}(\mathbb{R}), L^p(\mathbb{R}))_{\frac{1}{2p},2} = W^{1,p}(\mathbb{R}),$$

voir [31]. On obtient le résultat suivant :

Proposition 4.2.1. *Le problème (4.2) admet une unique solution stricte u, telle que :*

$$u \in W^{2,p}(0,1; L^p(\mathbb{R})) \cap L^p(0,1; W^{2,p}(\mathbb{R}))$$

si seulement si :

$$\begin{cases} u_0 \in (W^{2,p}(\mathbb{R}), L^p(\mathbb{R}))_{\frac{1}{2p}+\frac{1}{2},p} = W^{1-\frac{1}{p},p}(\mathbb{R}), \\ u_1' \in (W^{2,p}(\mathbb{R}), L^p(\mathbb{R}))_{\frac{1}{2p},p} = W^{2-\frac{1}{p},p}(\mathbb{R}). \end{cases}$$

Bibliographie

[1] P. Acquistapace and B. Terreni., *A unified approach to abstract linear non autonom parabolic equations.* C.R.A.S Paris 301 (1985), 107-110.

[2] W. Arendt, C. J. K. Batty, M. Hieber and F. Neubrander., *Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems.* Second Edition, Monographs in Mathematics, 96, Birkhauser, 2011.

[3] A. V. Balakrishnan., *Fractional Powers of Closed Operators and the Semigroups Generated by Them.* Pac. J. Math. 10 (1960), 419-437.

[4] J. Bourgain., *Some remarks on Banach spaces in which martingale difference sequences are unconditional.* Ark. Mat. 21 (1983), 163-168.

[5] D. L. Burkholder., *A geometrical characterisation of Banach spaces in which martingale difference sequences are unconditional.* Ann. Probab. 9 (1981), 997-1011.

[6] P. L. Butzer and H. Berens., *Semigroups of Operators and Approximation.* Springer-Verlag, Berlin, 1967.

[7] P. R. Chernoff., *A semibounded closed symmetric operator whose square has trivial domain.* Proc. Amer. Math. Soc. 89(2) (1983) 289-290.

[8] G. Da Prato., *Abstract Differential Equations,Maximal Regularity and Linearization* .Proc. Symp. Pure Math. 45(1) (1986), 359-370.

[9] G. Da Prato and P.Grisvard., *Sommes d'opérateurs linéaires et équations différentielles opérationnelles.* J. Math. Pures Appl. (9) 54 (1975), 305-387.

[10] S. Dehimi, M. H. Mortad. Chernoff., *like counterexamples related to unbounded operators.* Kyushu J. Math., (à paraître).

[11] G. Dore and A. Venni., *On the Closedness of the Sum of two Closed Operators.* Math. Z. 196 (1987), 189-201.

[12] G.Dore and A. Venni., *Some Results about Complex Powers of Closed Operators.* J.Math. Anal. Appl. 149 (1990), 124-136.

[13] N. Dunford J. T. Schwartz., *Linear operators. Part 1 : General Theory, Interscience Publishers.* New York. 1958.

[14] K. J. Engel and R. Nagel., *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations.* Grad. Texts Math. 194, Springer, New York, 2000.

[15] A. Favini, R. Labbas, H. Tanabe and A. Yagi.,*On the Solvability of Complete Abstract Differential Equations of Elliptic Type.* Funkc. Ekv., 47 (2004), 205-224.

[16] A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, H. Tanabe and A. Yagi., *On the Solvability and the Maximal Regularity of Complete Abstract Differential Equations of Elliptic Type.* Funkcial.Ekvacioj. 47 (2004), 423-452.

[17] A. Favini, R. Labbas, S.Maingot, H. Tanabe and A. Yagi., *Etude unifiée de problèmes elliptiques dans le cadre höldérien.* C.R. Acad. Sci. Paris. 341(8) (2005), 485-490.

[18] A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, H. Tanabe and A. Yagi., *A Simplified Approach in the Study of Elliptic Differential Equations in UMD Spaces and New Applications.* Funkcial. Eckvac. 51(2) (2008), 165-187.

[19] A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, H. Tanabe and A. Yagi., *Necessary and Sufficient Conditions for Maximal Regularity in the Study of Elliptic Differential Equations in Hölder Spaces.* Disc. Contin. Dyn. Syst. 22(4) (2008), 973-987.

[20] P. Grisvard.,*Équations différentielles abstraites.* Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 2(3) (1969), 311-395.

[21] P. Grisvard., *Spazi di Tracce e Applicazioni.* Rendiconti di Matematica. (4) 6(5) (1972), 657-729.

[22] M. Haase., *The Functional Calculus for Sectorial Operators and Similarity Methods.* Thesis, Universität Ulm, Germany, 2003.

[23] M. Haase., *The Functional Calculus for Sectorial Operators.* Series : Operator Theory : Advances and Applications, Birkhâuser. 169 (2006).

[24] T. Kato., *Perturbation Theory for Linear Operators.* Springer- Verlag, Berlin, Heidel- berg, New York, 1966.

[25] H. Komatsu.,*Fractional Powers of Operators.* Pac. J. Math. 19 (1966), 285-346.

[26] H. Kosaki.,*On intersections of domains of unbounded positive operators.* Kyushu J. Math. 60(1) (2006), 3-25.

[27] S. G. Krein., *Linear Differental Equations in Banach Space*. Moscou,1967 ; English Translation , AMS, Providence. (1971).

[28] R. Labbas., *Problèmes aux limites pour une équation différentielle abstraite de type élliptique*. Thèse d'état, Université de Nice, (1987). semigroup Forum. 60 (2000), 187-201.

[29] R.Labbas and B. Terreni., *Sommes d'opérateurs linéaires de type parabolique*. I. Boll. Un. Mat. Ital. B(7) 1(2) (1987), 545-569.

[30] J.L. Lions., *Théorème de trace et d'interpolation*. I et II, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Sci. Fis. Mat. (3) 13 (1959), 389-403 , et 14 (1960), 317-331.

[31] J. L. Lions and J. Peetre., *Sur une classe d'espaces d'interpolation*. Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci. 19 (1964), 5-68.

[32] A. Lunardi., *Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems*. Birkhauser, Basel. 1995.

[33] C. Martinez and M. Sanz., *Fractionnal powers of non densely defined operators*. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di scienze Ser. (4) 18(3) (1991), 443-454.

[34] F. Z. Mezeghrani., *Necessary and Sufficient Conditions for the Solvability and Maximal Regularity of Abstract Differential Equations of Mixed Type in UMD spaces*. Tsukuba. J. Math. 35(2) (2011), 185-202.

[35] F. Z. Mezeghrani., *Necessary and Sufficient Conditions for the Solvability and Maximal Regularity of Abstract Differential Equations of Mixed Type in Holder spaces*. Osaka. J. Math. 50 (2013), 725-747.

[36] S.G.Mihlin., *On the multipliers of Fourier integrals*. Dokl. Akad. Nauk SSSR, N.S., 109 (1956), 701-703.

[37] S. Monniaux and J. Prüss., *A Theorem of Dore-Venni Type for noncommuting Operators*. Trans. Amer. Math. Soc., 349(12) (1997), 4787-4814.

[38] M. H. Mortad.,*An Operator Theory Problem Book*. World Scientific Publishing Co., (2018). ISBN : 978-981-3236-25-7 (hardcover).

[39] M. H. Mortad.,*On the triviality of domains of powers and adjoints of closed operators*. Acta Sci. Math. (Szeged), 85 (2019) 651-658.

[40] Y. Naas and F. Z. Mezeghrani., *strict solution for a second order differential equation in holder spaces* . International Journal of Analysis and Applications. 17(6) (2019), 980-993.

[41] A. Pazy., *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Springer- Verlag, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 1983.

[42] J. Prüss.,*Evolutionary Integral Equations and Applications*. Birkhauser, 1993.

[43] J. Prüss and H. Sohr., *Boundedness of Imaginary Powers of Second-order Elliptic Differential Operators in L^p*. Hiroshima Math. J. 23 (1993), 161-192.

[44] J. Prüss and H. Sohr.,*On operators with bounded imaginary powers in Banach spaces*. Math. Z. 203(3) (1990), 429-452

[45] K. Schmudgen.,*On domains of powers of closed symmetric operators*. J. Operator Theory. 9(1) (1983) 53-75.

[46] E. Sinestrari.,*On the abstract Cauchy problem of parabolic type in space of continuous functions*. J. Math. Anal. App. 107 (1985) 16-66.

[47] J. Tanabe., *Equations of Evolution*. Pitman, London, San Francisco, Melbourne, (1979).

[48] H. Triebel., *Interpolation Theory,. Function Spaces, Differential Operators*, Amsterdam, North Holland (1978).