la valeur absolue d'opérateurs linéaires non-bornés

(The Absolute Value of Unbounded Linear Operators)

Imene Boucif

Abstract

In this thesis in operator theory, we are interested in operators normal, to self-assistant operators, to positive operators, to the absolute value of an operator, with triangular inequality. This thesis revolves around the relationships of the type | AB | = | A || B |, | A || B | = | B || A |, | A ± B | ≤ | A | + | B |. In the first part we provide definitions and elementary notions in operator theory. After this introduction, in this chapter we are interested in bounded positive operators, to the square root of a positive operator, to the value absolute of a bounded operator, and we give results on the triangular inequality and other relations concerning the sum and the product of the absolute value in the case thick headed. In the last chapter, we are interested in the case of unbounded operators. We start first with definitions and primordial properties of unbounded operators, then we give results on the sum and the product of the value absolute in the case of unbounded operators. We provide this part with a few examples. As an interesting consequence, we obtain a characterization of invertibility for the class of unbounded normal operators. We obtain also a very simple proof of the inclusion in R of the spectrum of unbounded self-adjoining operators.

Remerciements
Je voudrais dans un premier temps remercier Allah tout puissant qui m'a aidé à élaborer ce modeste travail.
Je voudrais tout d'abord adresser toute ma reconnaissance à mon directeur de thèse, le professeur Mohammed Hichem Mortad, pour sa patience, sa disponibilité, ses judicieux conseils, et pour le temps qu'il a consacré à m'apporter les outils méthodologiques indispensables à la conduite de cette recherche.

Un grand merci au professeur monsieur K. Belghaba qui a accepté de présider le jury malgré ses nombreuses responsabilités et pour son soutien inestimable.
Je tiens à témoigner toute ma reconnaissance aux personnes suivantes d'avoir bien voulu participer à l'évaluation de ce travail :
A. Senoussaoui, M. Aïboudi, M. Benabdellah, M. Ould-Ali à tous ces intervenants, je présente mes remerciements, mon respect et ma gratitude.

Je remercie mes très chers parents, qui ont toujours été là pour moi. Un grand merci à ma famille et mes amies qui m'ont apporté leur soutien moral tout au long de ma démarche.

J'aimerais exprimer ma gratitude à tous les chercheurs et spécialistes, qui ont pris le temps de discuter de mon sujet.

Chapitre 1

Introduction

En analyse, on sait que tout nombre complexe z admet une écriture du type $z = re^{i\theta}$ appelée la forme polaire de z où r est la valeur absolue de z, qui est un nombre positif, et $e^{i\theta}$ est un élément du cercle unité, et d'une façon similaire en théorie des opérateurs, on peut définir, sous certaines conditions, la décomposition polaire d'un opérateur linéaire.
Toute matrice carrée à coefficients complexes admet une décomposition dite polaire de la forme $A = UP$, où P est une matrice hermitienne semi-définie positive, et U une matrice unitaire. Dans le cas des opérateurs bornés sur un espace de Hilbert, on conclut d'après le lemme de Douglas que, tout opérateur A borné admet de façon unique la factorisation $A = UP$, où P est un opérateur positif (donc autoadjoint) et U est une isométrie partielle sur $\overline{RanP}$.
Dans le cas non-borné, l'existence de cette décomposition n'est pas toujours garantie. En revanche lorsqu'un opérateur A non-borné est fermé et à domaine dense, entre deux espaces de Hilbert complexes, alors il possède de façon unique la décomposition polaire $A = U|A|$ où U est une isométrie partielle et $|A|$ est un opérateur positif autoadjoint de domaine $D(A)$.
D'après le théorème spectral, toute matrice normale peut être diagonalisée par une base orthonormée de vecteurs propres. On peut généraliser ce théorème à des matrices arbitraires où même rectangulaires, réelles ou complexes, d'où la notion de décomposition en valeurs singulières. La décomposition en valeurs propres n'est possible que pour certaines matrices carrées, mais la décomposition en valeurs singulières est applicable à toute matrice rectangulaire, donc cette dernière est plus générale. Lorsqu'il s'agit d'une matrice A hermitienne semi-définie positive, ou autrement dit quand les valeurs propres de A sont réelles et positives, alors les deux décompositions coïncident.

La valeur absolue intervient dans les valeurs singulières des matrices et dans la décomposition polaire.

On sait pour les nombres complexes qu'on a toujours $|x||y| = |y||x|$, $|xy| = |x||y|$ et $|x \pm y| \leq |x| + |y|$, on se demande si ces relations ont lieu d'être pour les opérateurs !

Dans cette thèse en théorie des opérateurs, on s'intéresse aux opérateurs normaux, aux opérateurs autoadjoints, aux opérateurs positifs, à la valeur absolue d'un opérateur, à l'inégalité triangulaire. Cette thèse s'articule autour des relations du type $|AB| = |A||B|$, $|A||B| = |B||A|$, $|A \pm B| \leq |A| + |B|$.
Dans la première partie on fournit des définitions et des notions élémentaires en théorie des opérateurs. Après cette introduction, dans ce chapitre on s'intéresse aux opérateurs positifs bornés, à la racine carrée d'un opérateur positif, à la valeur absolue d'un opérateur borné, et on donne des résultats sur l'inégalité triangulaire et d'autres relations concernant la somme et le produit de la valeur absolue dans le cas borné. Dans le dernier chapitre, on s'intéresse au cas des opérateurs non-bornés. On commence d'abord par des définitions et des propriétés primordiales des opérateurs non-bornés, ensuite on donne des résultats sur la somme et le produit de la valeur absolue dans le cas des opérateurs non-bornés. On fournit cette partie par quelques exemples. On obtient, comme conséquence intéressante, une caractérisation de l'inversibilité pour la classe des opérateurs normaux non-bornés. On obtient également une preuve très simple de l'inclusion dans $\mathbb{R}$ du spectre des opérateurs non-bornés autoadjoints.

Chapitre 2

Notions élémentaires

2.1 Opérateurs linéaires bornés

Définition 2.1.1. Soient H et K deux espaces de Hilbert. Un opérateur borné de H dans K est une application linéaire continue de H dans K. L'ensemble des opérateurs bornés de H dans K est noté $\mathcal{B}(H,K)$. Si $A \in \mathcal{B}(H,K)$, on note

$$\operatorname{ran}(A) = \{Ax,\ x \in H\} \text{ et } \ker(A) = \{x \in H,\ Ax = 0\}.$$

2.1.1 Adjoint d'une application linéaire continue entre espaces de Hilbert

Maintenant, on entame la notion d'adjoint ; plusieurs classes particulières d'opérateurs bornés seront définies à l'aide de cette notion.

Proposition 2.1.1. *Soient H et K des espaces de Hilbert et $A \in \mathcal{B}(H,K)$. Alors $\exists\ A^* \in \mathcal{B}(K,H)$ unique, tel que, $\forall x \in H, \forall y \in K$, on ait :*

$$< A(x), y >=< x, A^*(y) > .$$

De plus, on a $\|A^*\| = \|A\|$.

Définition 2.1.2. Soit $A \in \mathcal{B}(H,K)$, avec H et K deux espaces de Hilbert, on appelle l'adjoint de A l'unique application linéaire $A^* \in \mathcal{B}(K,H)$ telle que
$\forall x \in H,\ \forall y \in K$ on ait

$$< A(x), y >=< x, A^*(y) > .$$

Donnons quelques propriétés des adjoints.

Proposition 2.1.2. *Si H et K sont deux espaces de Hilbert, alors l'application $A \mapsto A^*$ est antilinéaire et isométrique de $\mathcal{B}(H, K)$ dans $\mathcal{B}(K, H)$. Et pour tout $A \in \mathcal{B}(H, K)$, on a*

1. $(A^*)^* = A$.
2. $\|A^*A\| = \|A\|^2$.
3. $(AB)^* = B^*A^*$.

Exemples d'opérateurs et calculs de leur adjoint

Exemples 2.1.1.

1. Soit $H = L^2(\Omega, \mu)$ et $f \in L^\infty(\Omega, \mu)$, on définit l'opérateur M_f par
$$M_f(g) = fg.$$
On peut vérifier que cet opérateur M_f est linéaire, continue, de norme $\|f\|_\infty$ et son adjoint $M_f^* = M_{\bar{f}}$.
2. Le shift (opérateur de décalage à droite) sur $H = l^2(\mathbb{N})$ ou $H = l^2(\mathbb{Z})$ est l'application linéaire définie par
$$S(x_1, x_2, \cdots) = (0, x_1, x_2, \cdots).$$
Alors, on vérifie facilement que S est de norme 1. Et S^*, son adjoint, est l'opérateur défini par $S^*(y_1, y_2, \cdots) = (y_2, y_3, \cdots)$.

On a les relations d'orthogonalité suivantes :

Proposition 2.1.3. *Soient H un espace de Hilbert et $A \in \mathcal{B}(H)$, alors*
$$\ker(A)^\perp = \overline{\operatorname{ran}(A^*)} \text{ et } \ker(A^*) = \operatorname{ran}(A)^\perp$$

Proposition 2.1.4. *Si H et K sont deux espaces de Hilbert, alors pour tout opérateur borné $A \in \mathcal{B}(H, K)$, on a*
$$K = \ker(A^*) \oplus \overline{\operatorname{ran}(A)}^\perp \text{ et } H = \ker(A) \oplus \overline{\operatorname{ran}(A^*)}^\perp,$$
avec $(\overline{\operatorname{ran}(A)})$ et $(\overline{\operatorname{ran}(A^*)})$ désignant respectivement la fermeture (pour la norme) de $\operatorname{ran}(A)$ et $\operatorname{ran}(A^*)$.

2.1.2 Opérateurs isométriques, normaux, hyponormaux, unitaires, positifs, et autoadjoints

Définition 2.1.3. Soient H et K deux espaces de Hilbert complexe, si $H = K$, alors on note $\mathcal{B}(H, K)$ par $\mathcal{B}(H)$.

1. Tout élément $U \in \mathcal{B}(H, K)$ et vérifiant $U^*U = Id_E$ et $UU^* = Id_K$ est appelé unitaire.
2. Tout élément $U \in \mathcal{B}(H, K)$ et vérifiant $\|U(x)\| = \|x\|$, pour tout $x \in H$, est appelé isométrique.
3. Tout élément $N \in \mathcal{B}(H)$ et vérifiant $NN^* = N^*N$ est appelé normal.
4. Tout élément $A \in \mathcal{B}(H)$ et vérifiant $\|A^*x\| \leq \|Ax\|$, pour tout $x \in H$ est appelé hyponormal.
5. Tout élément $S \in \mathcal{B}(H)$ et vérifiant $S = S^*$ est appelé hermitien ou autoadjoint.
6. Tout élément $P \in \mathcal{B}(H)$, autoadjoint et vérifiant pour tout $x \in H$ $< P(x), x >\geq 0$, est appelé positif (et est noté : $P \geq 0$).

Exemple 2.1.1. *Le shift S, (Opérateur de décalage à droite), est isométrique lorsqu'il est défini sur $l^2(\mathbb{N})$, et il est unitaire lorsqu'il est défini sur $l^2(\mathbb{Z})$.*

Proposition 2.1.5. *Soient H un espace de Hilbert complexe et $A \in \mathcal{B}(H)$ positif alors, A est un opérateur auto-adjoint.*

Remarque. Si H est un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$, alors $A \in \mathcal{B}(H)$ est positif si A est auto-adjoint et $< Ax, x >\geq 0,\ \forall x \in H$.

2.1.3 Spectre des applications linéaires et continues

Définition 2.1.4. Soit $A \in \mathcal{B}(H)$, où H est un espace de Hilbert complexe.

1. Le spectre de A est défini par :

$$\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C}\ :\ (\lambda Id - A) \text{ non inversible}\}.$$

2. L'ensemble résolvant de A est : $\rho(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$.

3. La résolvante de A est l'opérateur : $R(\lambda, A) := (\lambda Id - A)^{-1}$ où $\lambda \in \rho(A)$.

Dans le résultat suivant, on va établir la nature topologique du spectre.

Théorème 2.1.1. *Si $A \in \mathcal{B}(H)$ où H est non-trivial (i.e. $H \neq \{0\}$) alors l'ensemble $\sigma(A)$, (le spectre de cet opérateur), est un compact non vide de $\mathbb{C}$.*

Démonstration. ([27]) On montre d'abord que le spectre est non vide. Supposons que $\sigma(A) = \varnothing$, par conséquent $\rho(A) = \mathbb{C}$. On sait, d'après la proposition 7.1.18 de [27], que $R(\lambda, A)$ est analytique en tout point de $\rho(A)$. Puisque $\rho(A) = \mathbb{C}$, $R(\lambda, A)$ est entière, la proposition 7.1.15 de [27] donne

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} R(\lambda, A) = 0.$$

Donc l'application $R(., A)$ est bornée à l'infini. D'où $\lambda \mapsto R(\lambda, A)$ est une fonction bornée et entière. Le théorème de Liouville (Théorème 2.1.98 de [27]) implique que l'application $\lambda \mapsto R(\lambda, A)$ est forcément constante. Puisque $\lim_{|\lambda|\to\infty} R(\lambda, A) = 0$, on conclut que $R(\lambda, A) = 0$ ce qui est impossible, car sinon $H = \{0\}$. D'où $\sigma(A) \neq \varnothing$.
On montre maintenant que $\sigma(A)$ est borné. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| > \|A\|$, alors il est clair que $\lambda \neq 0$, donc $\|\lambda^{-1}A\| < 1$. D'après le théorème 2.1.88 de [27], on sait que $I - \lambda^{-1}A$ est inversible. D'où $\lambda I - A$ est inversible aussi. D'où $\lambda \notin \sigma(A)$.
Il reste à montrer que $\sigma(A)$ est fermé. Définissons la fonction $f : \mathbb{C} \to \mathcal{B}(H)$ par

$$f(\lambda) = \lambda I - A.$$

Alors pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, on a

$$\|f(\lambda) - f(\mu)\| = \|\lambda I - A - (\mu I - A)\| = \|(\lambda - \mu)I\| = |\lambda - \mu|$$

d'où f est une isométrie, donc elle est continue. On sait, d'après l'exercice 2.3.39 de [27], que l'ensemble des opérateurs inversibles, noté $\mathcal{B}_i(H)$, est borné dans $\mathcal{B}(H)$, on a évidemment :

$$\begin{aligned}
\sigma(A) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : f(\lambda) \ \text{ n'est pas inversible}\} \\
&= \{\lambda \in \mathbb{C} : f(\lambda) \notin \mathcal{B}_i(H)\} \\
&= \{\lambda \in \mathbb{C} : f(\lambda) \in [\mathcal{B}_i(H)]^c\} \\
&= f^{-1}([\mathcal{B}_i(H)]^c),
\end{aligned}$$

donc $\sigma(A)$ est fermé dans $\mathbb{C}$, car f est continue et $[\mathcal{B}_i(H)]^c$ est fermé dans $\mathcal{B}(H)$, ce qui achève la preuve.

□

Remarque. Sur $\mathbb{R}$ le spectre peut être vide, il suffit de prendre $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ par exemple.

Proposition 2.1.6. *Soit $A \in \mathcal{B}(H)$. A est positif ssi A est autoadjoint et $\sigma(A) \subset [0, \infty[$.*

Comparaison des opérateurs

Définition 2.1.5. Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$, et soient $A, B \in \mathcal{B}(H)$ autoadjoints. On dit que $A \geq B$ si $\forall x \in H,\ < Ax, x > \geq < Bx, x >$.

Lemme 2.1.1. *Soit H un espace de Hilbert, et soit $A \in \mathcal{B}(H)$ alors, AA^* et A^*A sont des opérateurs positifs.*

Démonstration. C'est évident puisque, pour tout $x \in H$, on a

$$\begin{aligned} < A^*Ax, x > &= < Ax, Ax > \\ &= \|Ax\|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned} < AA^*x, x > &= < A^*x, A^*x > \\ &= \|A^*x\|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

□

Corollaire 2.1.1. *Soit H un espace de Hilbert, et soit $A \in \mathcal{B}(H)$ autoadjoint alors, l'opérateur carré A^2 est positif.*

Démonstration. En effet, on a $A^2 = A^*A = AA^*$ qui est un opérateur positif d'après le lemme 2.1.1. □

Proposition 2.1.7. *Soit $A \in \mathcal{B}(H)$, hyponormal, alors*

$$AA^* \leq A^*A.$$

2.2 Le théorème spectral des opérateurs linéaires normaux bornés

Théorème 2.2.1. *(Théorème 11.1.37 de [27]) Soit $A \in \mathcal{B}(H)$ normal. Alors il existe une unique mesure spectrale E sur les sous-ensembles boréliens de $\sigma(A)$ telle que :*

$$A = \int_{\sigma(A)} a dE,$$

Si Y est un sous ensemble non vide de $\sigma(A)$, alors $E(Y) \neq 0$, de plus,

$$AE(\Delta) = E(\Delta)A$$

pour tout borélien Δ. Ainsi, si $B \in \mathcal{B}(H)$, alors
$BA = AB$ et $BA^* = A^*B \Leftrightarrow BE(\Delta) = E(\Delta)B$ pour tout Δ.
Et si f est une fonction bornée et borélienne sur $\sigma(A)$, alors

$$f(A) = \int_{\sigma(A)} f(a)dE.$$

Théorème 2.2.2. *(Théorème 11.1.41 de [27]) Soit $A \in \mathcal{B}(H)$ normal, et soient f, g deux fonctions boréliennes et bornées sur $\sigma(A)$. Alors :*

1. *$(f+g)(A) = f(A) + g(A)$ et $(\alpha f)(A) = \alpha f(A)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$.*
2. *$f(A)g(A) = fg(A)$, $[f(A)]^* = \overline{f}(A)$, $1(A) = I$ et $Id(A) = A$.*
3. *$\|f(A)\|_{\mathcal{B}(H)} \leq \|f\|_\infty$, et $\|f(A)\|_{\mathcal{B}(H)} = \|f\|_\infty$ si f est continue sur $\sigma(A)$.*

2.3 Opérateur racine carrée

Définition 2.3.1. Soit H un espace de Hilbert, et soit $A \in \mathcal{B}(H)$ positif, alors la racine carrée de l'opérateur A est l'opérateur positif B vérifiant $A = B^2$ et on écrit

$$B = \sqrt{A}.$$

Exemple 2.3.1.

1. *Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors cette matrice est sans racine carrée.*
   En effet, on suppose qu'il existe une matrice B telle que $B^2 = A$, alors $B^4 = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A$, car B est de format 2×2, ce qui est absurde.
2. *On considère la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on pose $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une racine de A i.e. $A = B^2$, en résolvant cette égalité, on trouve $B_x = \begin{pmatrix} x & \sqrt{1-x^2} \\ \sqrt{1-x^2} & -x \end{pmatrix}$ avec $0 \leq x \leq 1$, donc la matrice I admet une infinité de racines carrées.*
3. *Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, puisque c'est une matrice 2×2 sur $\mathbb{C}$, ayant 2 valeurs propres distinctes et non-nulles admet exactement 2^2 racines carrées, i.e. B admet 4 racines carrées.*

Cependant, un opérateur positif admet une unique racine carrée positive!
Afin de démontrer ceci, on a besoin des résultats suivants :

Proposition 2.3.1. *Soit $A \in \mathcal{B}(H)$ autoadjoint, et soit $f : \sigma(A) \to \mathbb{C}$ continue, alors $f(A)$ existe.*

Théorème 2.3.1. *(Corollaire 5.5 de [36]) Si A est un opérateur autoadjoint et positif sur H, alors il existe un unique opérateur B autoadjoint et positif sur H, noté par $\sqrt{A}$, tel que $B^2 = A$. De plus, si $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de polynômes telle que $p_n(a) \to \sqrt{a}$ uniformément sur $[0,b]$ et $\sigma(A) \subseteq [0,b]$, alors on a $\lim_{n\to\infty} \|p_n(A) - \sqrt{A}\| = 0$.*

On est prêt maintenant à démontrer l'existence et l'unicité de la racine carrée positive :

Démonstration. On montre l'existence de la racine carrée positive. Comme A est positif est borné, $\sigma(A) \subseteq [0,b]$ pour un certain $b > 0$. D'après le théorème 5.1 de [36], il existe une mesure spectrale E telle que $A = \int_{[0,b]} a dE(a)$. En posant $B := \int_{[0,b]} a^{\frac{1}{2}} dE(a)$, alors B est un opérateur autoadjoint et positif et $B^2 = A$. D'après la proposition 4.12 (iv) de [36], on a $\lim_n \|p_n(A) - B\| = 0$ si $p_n(a) \to \sqrt{a}$ uniformément sur $[0,b]$. Maintenant on montre l'unicité. Soit C un opérateur autoadjoint et positif tel que $C^2 = A$. Alors C commute avec A, et par conséquent C commute avec tout polynôme de A. D'où C commute avec $B = \lim_n p_n(A)$. Soit $x \in H$, posons $y := (B - C)x$. En utilisant $BC = CB$ et $B^2 = C^2 = A$, on obtient :

$$< By, y > + < Cy, y >=< (B + C)(B - C)x, y >=< (B^2 - C^2)x, y >= 0.$$

Donc $< By, y >=< Cy, y >= 0$ puisque $B \geq 0$ et $C \geq 0$. D'où, $By = Cy = 0$, d'après le lemme 3.4(iii) de [36]. Ainsi $\|(B-C)x\|^2 =< (B-C)^2x, x >=< (B-C)y, x >= 0$, et ceci entraîne $Bx = Cx$, ce qui prouve que $B = C$.

□

Théorème 2.3.2. *[Inégalité de Löwner-Heinz]*
Soient $A, B \in \mathcal{B}(H)$ autoadjoints. Si $A \geq B \geq 0$, alors pour tout $\alpha \in [0,1]$ on a $A^\alpha \geq B^\alpha$.

Lemme 2.3.1. *Soient $A, B \in \mathcal{B}(H)$ tels que $AB = BA$ et $A, B \geq 0$, alors*

1. *$AB \geq 0$.*
2. *$\sqrt{AB} = \sqrt{A}\sqrt{B}$.*

3. $\sqrt{A+B} \leq \sqrt{A} + \sqrt{B}$.

Démonstration. [27]

1. Puisque A est positif il possède une unique racine carrée positive P, i.e. $P^2 = A$, et comme B commute avec A, il commute avec P aussi. Soit $x \in H$, (on rappelle que les opérateurs positifs sont nécessairement autoadjoints) :

$$< ABx, x >=< P^2Bx, x >=< PBx, Px >=< BPx, Px >\geq 0$$

car B est positif. Par conséquent, $AB \geq 0$.

2. Comme A et B sont positifs leurs racines carrées existent et elles sont bien définies. Et en vertu de la première assertion démontrée, AB est positif, donc on peut définir sa racine carrée positive. Donc, grâce à l'unicité de la racine carrée, il suffit de montrer

$$(\sqrt{A}\sqrt{B})^2 = AB$$

Puisque A et B commutent, alors leurs racines carrées commutent aussi, et on a

$$(\sqrt{A}\sqrt{B})^2 = \sqrt{A}\sqrt{B}\sqrt{A}\sqrt{B} = \sqrt{A}\sqrt{A}\sqrt{B}\sqrt{B} = AB,$$

ce qui termine le deuxième point.

3. Comme $AB = BA$ et $A, B \geq 0$ on a $\sqrt{A}\sqrt{B} = \sqrt{B}\sqrt{A}$ d'où $\sqrt{A}\sqrt{B} \geq 0$. Par conséquent,

$$A + B \leq A + 2\sqrt{A}\sqrt{B} + B = (\sqrt{A} + \sqrt{B})^2.$$

Puisque $\sqrt{A} + \sqrt{B} \geq 0$, d'après l'inégalité de Löwner-Heinz ci-dessus pour $\alpha = \frac{1}{2}$, on obtient

$$\sqrt{A+B} \leq \sqrt{A} + \sqrt{B},$$

ce qui termine la preuve.

□

Théorème 2.3.3. *Soient $A, B \in \mathcal{B}(H)$ où A est inversible. Si $0 \leq A \leq B$ alors B est inversible et $B^{-1} \leq A^{-1}$.*

Démonstration. Comme dans la preuve du théorème 2.2 [9], on sait que $\sqrt{A} = K\sqrt{B}$ Pour une contraction $K \in \mathcal{B}(H)$. Puisque $\sqrt{A}$ est inversible (car A est inversible), alors $I = (\sqrt{A})^{-1}K\sqrt{B}$, i.e. l'opérateur autoadjoint $\sqrt{B}$ est inversible à gauche, et par conséquent il est inversible, d'où d'après [10] B est inversible aussi, et

$$(\sqrt{B})^{-1} = (\sqrt{A})^{-1}K = K^*(\sqrt{A})^{-1}.$$

Soit $x \in H$, comme $(\sqrt{A})^{-1}$ et $(\sqrt{B})^{-1}$ sont autoadjoints, et K^* est une contraction aussi, on obtient

$$< B^{-1}x, x >= \|(\sqrt{B})^{-1}x\|^2 = \|K^*(\sqrt{A})^{-1}x\|^2 \leq \|(\sqrt{A})^{-1}x\|^2 =< A^{-1}x, x > .$$

$\square$

Théorème 2.3.4. *Soit $A \in \mathcal{B}(H)$ normal inversible à droite (ou à gauche), alors A est inversible.*

En fait, d'après un résultat récent [10].

Proposition 2.3.2. *Si A est un opérateur linéaire tel que* $\ker A = \ker A^*$*, alors :*

$$\begin{aligned} A \textit{ est inversible à doite} &\Leftrightarrow A \textit{ est inversible à gauche} \\ &\Leftrightarrow A \textit{ est inversible.} \end{aligned}$$

2.4 La valeur absolue d'un opérateur borné

Définition 2.4.1. L'unique racine carrée positive de l'opérateur positif A^*A est appelée la valeur absolue de A, et est notée $|A| = \sqrt{A^*A}$

Exemples 2.4.1.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc $A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, ainsi $A^*A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, en cherchant la racine carrée positive de A^*A, on trouvera $|A| = \sqrt{A^*A} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Soit S l'opérateur shift, comme $S^*S = I$, alors $|S| = \sqrt{S^*S} = \sqrt{I} = I$.

Parmi les applications majeures de la valeur absolue est la décomposition polaire :

2.4.1 La décomposition polaire d'un opérateur borné

On sait que tout nombre complexe z peut être écrit sous la forme $z = re^{i\theta}$, où $r = |z|$ et $\theta = \arg z$, d'une façon analogue on définit la décomposition polaire d'un opérateur borné :

Définition 2.4.2. [27] Soit $A \in \mathcal{B}(H)$. Si A peut être écrit sous la forme $A = UP$, où U est unitaire et P est positif, alors on appelle UP la décomposition polaire de A.

Théorème 2.4.1. *[27] Soit $A \in \mathcal{B}(H)$ inversible. Alors A admet une unique décomposition polaire $A = U|A|$.*

Théorème 2.4.2. *[27] Soit $A \in \mathcal{B}(H)$ normal. Alors A admet une décomposition polaire :*

$$A = U|A| = |A|U,$$

où $U \in \mathcal{B}(H)$ est unitaire.

2.4.2 La conjecture de Fong-Tsui

Fong-Tsui ont démontré :

Théorème 2.4.3. *[13] Soit $A \in \mathcal{B}(H)$ avec $|A| \leq |\operatorname{Re} A|$, alors A est positif.*

Ils ont posé le problème suivant :

Conjecture : (Fong-Tsui [13]) Si A est un opérateur borné, et $|A| \leq |\operatorname{Re} A|$ alors l'opérateur A est auto-adjoint.

Cette conjecture est vraie si $\dim H < \infty$ ou si $A \in \mathcal{K}(H)$ i.e. si A est compact, comme ça a été démontré par Fong-Tsui. D'autres réponses partielles existent, par exemple :

Théorème 2.4.4. *[25] Soit A un opérateur linéaire sur un espace de Hilbert H, et soit U l'opérateur unitaire qui intervient dans la décomposition polaire de l'opérateur autoadjoint* $\operatorname{Re} A$. *Si $UA = AU^*$, alors*

$$|A| \leq |\operatorname{Re} A| \Longrightarrow A \text{ est autoadjoint.}$$

Démonstration. Soit U l'opérateur unitaire tel que $\operatorname{Re} A = U|\operatorname{Re} A|$. Alors on peut écrire

$$|A| \leq |\operatorname{Re} A| = U^* \operatorname{Re} A.$$

D'après l'hypothèse $UA = AU^*$ et comme U est unitaire, en utilisant le théorème de Fuglede-Putnam, on obtient : $U^*A = AU$. De plus, on obtient :

$$U^* \operatorname{Re} A = \operatorname{Re}(U^*A).$$

On observe que

$$|U^*A| = \sqrt{(U^*A)^*(U^*A)} = \sqrt{A^*UU^*A} = \sqrt{A^*A} = |A|.$$

Donc l'hypothèse $|A| \leq |\operatorname{Re} A|$ équivaut à

$$|U^*A| \leq \operatorname{Re}(U^*A).$$

D'après le théorème 2 de [25], on conclut que l'opérateur U^*A est positif, et donc il est autoadjoint. En vertu de l'hypothèse $UA = AU^*$, il découle

$$A^*U = (U^*A)^* = A^*U = U^*A = AU,$$

puisque U est unitaire, alors A est autoadjoint. □

Définition 2.4.3. [25] On dit qu'un opérateur A appartient à la Θ-classe si $A + A^*$ commute avec A^*A.

Théorème 2.4.5. *[25] Soit A un opérateur appartenant à la Θ-classe. Si $|A| \leq |\operatorname{Re} A|$ alors A est autoadjoint.*

Démonstration. Puisque $A + A^*$ commute avec A^*A, alors $|A|$ et $\operatorname{Re} A$ commutent. Et comme $\operatorname{Re} A$ est autoadjoint, alors $|A|$ commute avec $|\operatorname{Re} A|$. i.e.

$$|A||\operatorname{Re} A| = |\operatorname{Re} A||A|.$$

Puisque $|A| \leq |\operatorname{Re} A|$, (et $|A| \geq 0$), l'égalité précédente implique que

$$|A|^2 \leq |A||\operatorname{Re} A| \text{ et } |A||\operatorname{Re} A| \leq |\operatorname{Re} A|^2 = (\operatorname{Re} A)^2$$

c'est-à-dire

$$|A|^2 \leq (\operatorname{Re} A)^2.$$

En utilisant le théorème 1 de [25], on en déduit que A est autoadjoint. □

Remarque. Il est évident que tout opérateur normal ou isométrique appartient à la Θ-classe.

Corollaire 2.4.1. *[25] Soit A un opérateur normal tel que $|A| \leq |\operatorname{Re} A|$. Alors A est autoadjoint.*

Corollaire 2.4.2. *[25] Soit A un opérateur isométrique tel que $|A| \leq |\operatorname{Re} A|$. Alors A est autoadjoint.*

Remarque. Donc la conjecture de Fong-Tsui a été résolu seulement partiellement, on verra au dernier chapitre une autre réponse partielle dans le cas non-borné.

2.4.3 Théorème de Fuglede-Putnam dans le cas des opérateurs bornés

Théorème 2.4.6. *[27] Soient H un espace de Hilbert et $A, M, N \in \mathcal{B}(H)$, tels que M et N sont normaux et $MA = AN$ alors*

$$M^*A = AN^*$$

Démonstration. On a :

$$AN = MA \Longrightarrow AN^2 = MAN \Longrightarrow AN^2 = MMA = M^2A.$$

Donc

$$AN^p = M^pA \ \forall p \in \mathbb{N}$$

ainsi pour tout polynôme P on obtient :

$$AP(N) = P(M)A$$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, il existe une suite de polynômes (P_n) telle que :

$$P_n(N) \to e^{i\bar{\lambda}N} \text{ et } P_n(M) \to e^{i\bar{\lambda}M}$$

par conséquent

$$Ae^{i\bar{\lambda}N} = e^{i\bar{\lambda}M}A.$$

D'où

$$A = e^{-i\bar{\lambda}M}Ae^{i\bar{\lambda}N}$$

On définit : $F(\lambda) = e^{i\lambda M^*}Ae^{-i\lambda N^*}$.
D'autre part on a

$$e^{i\lambda M^*}(e^{-i\bar{\lambda}M}Ae^{i\bar{\lambda}N})e^{-i\lambda N^*} = (e^{i\lambda M^* - i\bar{\lambda}M}A)(e^{i\bar{\lambda}N - i\lambda N^*}).$$

On note

$$U(\lambda) = e^{i(\lambda M^* - \bar{\lambda}M)} \text{ et } V(\lambda) = e^{i(\lambda N^* - \bar{\lambda}N)}$$

On a

$$U(\lambda)^* = e^{-i(\bar{\lambda}M - \lambda M^*)} = U(\lambda)^{-1}.$$

Donc $U(\lambda)$ et $V(\lambda)$ sont unitaires. D'où :

$$\|F(\lambda)\| \leq \|A\|, \ \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Comme F est une fonction analytique bornée sur $\mathbb{C}$, alors d'après le théorème de Liouville, elle est constante, donc sa dérivée $F'(\lambda) = 0$, d'autre part :

$$F'(\lambda) = M^* e^{\lambda M^*} A e^{-\lambda N^*} + e^{\lambda M^*} A(-N^*) e^{-\lambda N^*}.$$

En particulier pour $\lambda = 0$, $F'(0) = 0$, d'où

$$M^* A = A N^*.$$

□

2.5 Opérateurs non-bornés

2.5.1 Domaine et fermeture

Considérons un espace de Hilbert H, alors $H \oplus H$ est l'espace de Hilbert $H \times H$ muni du produit scalaire $< (x,y),(x',y') >=< x,x' >_H + < y,y' >_H$.

Définition 2.5.1. Soient H un espace de Hilbert et $D(A) \subset H$ un sous-espace vectoriel. Un opérateur dans H est une application linéaire A définie sur $D(A)$ à valeurs dans H. On appelle $D(A)$ le domaine de cet opérateur.
Un opérateur peut être noté $(A, D(A))$ ou simplement par A.

Définition 2.5.2. On dit qu'un opérateur A de domaine $D(A)$ est borné si

$$\exists \alpha > 0, \|Ax\| \leq \alpha \|x\|, \forall x \in D(A).$$

Dans le cas contraire on dit que l'opérateur A est non-borné.

Définition 2.5.3. Soit A un opérateur de domaine $D(A)$, si $\overline{D(A)} = H$, on dit que cet opérateur est à domaine dense.

Définition 2.5.4.

1. On appelle le graphe d'un opérateur (A) de domaine $D(A)$, le sous espace de $H \oplus H$ donné par

$$\Gamma(A) = \{(x, Ax) \ : \ x \in D(A)\} \subset H \oplus H.$$

2. On dit que $(B, D(B))$ est une extension de $(A, D(A))$ si $D(A) \subset D(B)$ et $Ax = Bx$ pour tout $x \in D(A)$. (Autrement dit, $\Gamma(A) \subset \Gamma(B)$).
3. On dit que l'opérateur A est fermé si son graphe $\Gamma(A)$ est un fermé de $H \oplus H$.
4. On dit qu'un opérateur A est fermable s'il possède une extension fermée.

Proposition 2.5.1. *Un opérateur A de domaine $D(A)$ est fermé si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n$ de $D(A)$ telle que $\lim_n x_n = x$ et $\lim_n Ax_n = y$ on a alors $x \in D(A)$ et $y = Ax$.*

Proposition 2.5.2. *Si A est fermable alors*

$$B \subset A \Longrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$$

Proposition 2.5.3. *Si A est un opérateur fermable, alors il admet une plus petite extension fermée notée $\overline{A}$. De plus, on a*

$$\Gamma(\overline{A}) = \overline{\Gamma(A)}.$$

Définition 2.5.5. Soients H, K et G des espaces vectoriels, et soient A et B deux opérateurs de H dans K ; on définit l'opérateur $A + B$ en posant $D(A + B) = D(A) \cap D(B)$ et en posant $(A + B)(x) = Ax + Bx$ pour tout vecteur $x \in D(A + B)$.
Soit C un opérateur de K dans G ; on définit la composition CB de ces deux opérateurs en posant d'abord $D(CB) = \{x \in D(B) : Bx \in D(C)\}$ et en posant $(CB)x = C(Bx)$ pour tout $x \in D(CB)$.

Remarque. La somme et le produit de deux opérateurs A, B fermés n'est pas toujours fermé.

Théorème 2.5.1. *Soient A et B deux opérateurs, alors AB et $A + B$ sont fermés si A est fermé et $B \in \mathcal{B}(H)$.*

Définition 2.5.6. Soient $B \in \mathcal{B}(H)$ et A un opérateur non-borné, on dit que B commute avec A si $BA \subset AB$.

2.5.2 Adjoint d'un opérateur non-borné

Définition 2.5.7. Soit H un espace de Hilbert, et soit A un opérateur de domaine $D(A)$ dense, l'adjoint de cet opérateur est l'unique opérateur A^* de domaine

$$D(A^*) = \{x \in H : D(A) \ni y \mapsto < x, Ay > \text{ est continue}\}$$

et vérifiant

$$\forall x \in D(A^*), \forall y \in D(A) \quad < A^*x, y >=< x, Ay > .$$

En vertu de la densité de $D(A)$ dans H, pour tout $x \in D(A^*)$ la forme linéaire $y \mapsto < x, Ay >$ s'étend à un unique élément de H^* qu'on écrit par le Théorème de Riesz comme $< A^*x, . >_H$.

Théorème 2.5.2. *Si A est un opérateur à domaine $D(A)$ dense i.e. $\overline{D(A)} = H$. Alors*

1. *A^* est fermé.*
2. *A est fermable si et seulement si $D(A^*)$ est dense.*
3. *Si A est fermable alors $\overline{A} = A^{**}$ et $(\overline{A})^* = A^*$.*

Proposition 2.5.4. *Soient A, B deux opérateurs à domaines dense dans un espace de Hilbert H, alors*

$$A^*B^* \subset (BA)^* \text{ et } B^* + A^* \subset (B+A)^*.$$

Si $B \in \mathcal{B}(H)$ alors

$$A^*B^* = (BA)^* \text{ et } B^* + A^* = (B+A)^*.$$

Proposition 2.5.5. *Soient H et K deux espaces de Hilbert et A un opérateur à domaine dense, fermé de H dans K ; alors*

1. *si $A \subset C$ i.e. C est une extension de A, alors $C^* \subset A^*$;*
2. *si A est injectif et d'image dense, alors $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.*

2.5.3 Résolvante et spectre

Définition 2.5.8. Pour tout opérateur A fermé, on définit l'ensemble résolvant de A comme l'ensemble des nombres complexes λ tels que $A - \lambda\mathbb{1} : D(A) \to H$ est bijective avec un inverse continu, on le note $\rho(A)$.
Le spectre de A est l'ensemble $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$.
Soit $\lambda \in \rho(A)$, on appelle la résolvante de A en λ l'opérateur borné $R_\lambda(A) := (\lambda\mathbb{1} - A)^{-1}$.
Si $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\lambda\mathbb{1} - A : D(A) \to H$ n'est pas injective, i.e. il existe $x \neq 0$ tel que $Ax = \lambda x$, alors on dit que λ est une valeur propre de A et x un vecteur propre associé à λ. On appelle le spectre ponctuel de l'opérateur A l'ensemble des valeurs propres de A .
On appelle le spectre résiduel de A l'ensemble des $\lambda \in \sigma(A)$ tel que λ n'est pas une valeur propre et $Ran(\lambda\mathbb{1} - A)$ n'est pas dense dans H.

Le spectre d'un opérateur A est la réunion des trois ensembles disjoints suivants :
- le spectre ponctuel $Sp_p(A)$ de A est l'ensemble de ses valeurs propres ;
- le spectre résiduel $Sp_r(A)$ de A formé des $\lambda \in \mathbb{C}$ qui ne sont pas valeur propre de l'opérateur A et tels que l'image de $A - \lambda Id$ ne soit pas dense dans H ;
- le spectre continu $Sp_c(A)$ est le complémentaire dans $Sp(A)$ de la réunion des deux ensembles précèdents.

Remarque. Soit $\lambda \in Sp_c(A)$, l'opérateur $A - \lambda Id$ est injectif d'image dense, mais $(A - \lambda Id)^{-1}$ n'est pas continu.

Proposition 2.5.6. *Pour tout opérateur A fermé à domaine dense, l'ensemble résolvant de A, $\rho(A)$, est un ouvert de $\mathbb{C}$.*

Théorème 2.5.3. *Soit A un opérateur autoadjoint de domaine $D(A)$, alors son spectre est réel, i.e : $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.*

Démonstration. On montre que pour tout $\lambda \notin \mathbb{R}$ alors $\lambda \notin \sigma(A)$. Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\lambda = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. En effectuant un calcul direct, on obtient pour tout $x \in D(A)$:

$$\|(\lambda \mathbb{1} - A)x\|^2 = \|(a\mathbb{1} - A)x\|^2 + b^2\|x\|^2. \tag{2.1}$$

On voit facilement que $(\lambda \mathbb{1} - A)$ est injective. On montre que $Ran(\lambda \mathbb{1} - A)$ est un fermé. En effet, soit $(y_n)_n$ une suite convergente vers $y \in H$ telle que $y_n = (\lambda \mathbb{1} - A)x_n$ avec $x_n \in D(A)$. On déduit de 2.1 que $(x_n)_n$ converge vers $x \in H$. Puisque A est fermé, la suite $(x_n, Ax_n) \in \Gamma(A)$ converge dans $\Gamma(A)$ vers $(x, \lambda x - y)$. Donc, $x \in D(A)$ et $\lambda x - y = Ax$.
On montre que $Ran(\lambda \mathbb{1} - A)$ est dense dans H. Soit $y \in Ran(\lambda \mathbb{1} - A)^{\perp}$ alors

$$< y, Ax >= \lambda < y, x >, \ \forall x \in D(A).$$

Par conséquent, $y \in D(A^*) = D(A)$ et $A^*y = Ay = \overline{\lambda} y$ puisque $D(A)$ est dense. En utilisant 2.1 avec $\overline{\lambda}$ à la place de λ, il en résulte que $y = 0$. D'où $(\lambda \mathbb{1} - A)$ est inversible. De plus, on a l'inégalité

$$|b| \|(\lambda \mathbb{1} - A)^{-1} y\| \leq \|y\|, \ \forall y \in H,$$

qui découle de 2.1. □

Remarque. Dans le dernier chapitre on verra une autre preuve du théorème 2.5.3 ci dessus.

2.5.4 Opérateurs symétriques, autoadjoints, positifs, normaux, hyponormaux

Définition 2.5.9. Soit A un opérateur à domaine dense.
On dit qu'il est **symétrique** si $A \subset A^*$, i.e. :

$$D(A) \subset D(A^*) \text{ et } Ax = A^*x, \ \forall x \in D(A).$$

Autrement dit,

$$\forall x \in D(A), \forall y \in D(A) \quad < Ax, y > = < x, Ay > .$$

On dit qu'il est **auto-adjoint** si $A^* = A$, i.e. :

$$D(A) = D(A^*) \text{ et } Ax = A^* x, \forall x \in D(A).$$

Si de plus on a $< Ax, x > \geq 0$ pour tout $x \in D(A)$, alors on dit que A est **positif**.

On dit que A est **normal** s'il est fermé et $AA^* = A^* A$.
On dit qu'il est **hyponormal** si

$$D(A) \subset D(A^*) \text{ et } \|A^* x\| \leq \|Ax\|, \ \forall x \in D(A).$$

On définit la partie réelle la partie imaginaire de A respectivement par

$$\operatorname{Re} A = \frac{A + A^*}{2} \text{ et } \operatorname{Im} A = \frac{A - A^*}{2i}.$$

Remarque. Si A est un opérateur défini sur un domaine dense, il est clair que si A est fermé, alors $\operatorname{Re} A$ est symétrique, mais il n'est pas toujours auto-adjoint. En fait il peut même ne pas être fermé.

2.5.5 La décomposition polaire d'un opérateur non-borné

Théorème 2.5.4. *([36]) Soit A un opérateur à domaine dense. Alors il existe une isométrie partielle U de $(\ker A)^\perp$ dans $\overline{\operatorname{ran} A}$, telle que $A = U|A|$.*
Si A est normal sur H, alors

$$A = U|A| = |A|U,$$

de plus $\operatorname{ran}(A^*) = \operatorname{ran}(|A^*|) = \operatorname{ran}(|A|) = \operatorname{ran}(A)$.

2.5.6 Le théorème spectral des opérateurs linéaires normaux non-bornés

Définition 2.5.10. Soit Y un espace topologique, et soit $\mathfrak{B}(H)$ l'ensemble des fonctions mesurables de Borel. On appelle une mesure spectrale sur Y toute application $E : \mathfrak{B}(H) \longrightarrow \mathcal{B}(H)$ vérifiant :

1. $E(\emptyset) = 0, \ E(Y) = I$.

2. $E(K)$ est une projection orthogonale pour tout $K \in \mathfrak{B}(Y)$.
3. $E(K_1 \cap K_2) = E(K_1)E(K_2)$ pour tous $K_1, K_2 \in \mathfrak{B}(Y)$.
4. $E(K_1 \cup K_2) = E(K_1) + E(K_2)$ pour tous $K_1, K_2 \in \mathfrak{B}(Y)$ avec $K_1 \cap K_2 = \emptyset$.
5. Pour tout $x \in H$, $E_{x,x} : K \longmapsto < E(K)x, x >$ est une mesure sur Y.

Définition 2.5.11. Soient A et B deux opérateurs non-bornés normaux, on dit qu'ils commutent fortement si leurs mesures spectrales commutent.
Si A et B sont autoadjoints, alors la commutativité forte de A et B peut être exprimée par $e^{isT}e^{itS} = e^{itS}s^{isT}$ pour tous $s, t \in \mathbb{R}$.

Théorème 2.5.5. *([36]) Pour tout opérateur A normal, il existe une unique mesure spectrale E_A sur $\sigma(A)$ telle que*

$$A = \int_{\sigma(A)} adE_A(a).$$

Maintenant on passe à une généralisation du théorème précédent :

Théorème 2.5.6. *([36]) Soient $A_1, \cdots, A_n$ avec $n \in \mathbb{N}$ une famille finie d'opérateurs normaux non-bornés sur le même espace H, qui commutent fortement deux-à-deux. Alors il existe une unique mesure spectrale E_A sur les boréliens de $\mathfrak{B}(\mathbb{C}^n)$ sur l'espace de Hilbert H telle que*

$$A_k = \int_{\mathbb{C}^n} a_k dE_A(a_1, \cdots, a_n), \quad k = 1, \cdots, n.$$

Si A est autoadjoint alors $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$, d'où le théorème spectral des opérateurs autoadjoints non-bornés :

Théorème 2.5.7. *(Théorème 5.7 de [36]) Soit A un opérateur autoadjoint sur un espace de Hilbert H. Alors il existe une mesure spectrale unique E_A sur les boréliens de $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ telle que*

$$A = \int_{\mathbb{R}} adE_A(a).$$

On passe à une généralisation :

Théorème 2.5.8. *([36]) Pour toute famille $A_1, \cdots, A_n$, avec $n \in \mathbb{N}$, finie d'opérateurs autoadjoints non-bornés sur le même espace de Hilbert H, qui commutent fortement deux-à-deux, il existe une unique mesure spectrale E_A sur les boréliens de $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ telle que*

$$A_k = \int_{\mathbb{R}^n} a_k dE_A(a_1, \cdots, a_n), \quad k = 1, \cdots, n.$$

Donnons quelques propriéts du calcul fonctionnel qui est une conséquence du théorème spectral :

Proposition 2.5.7. *(Théorème 5.9 [36]) Soient A un opérateur auto-adjoint non-borné, f une fonction mesurable et finie E_A-presque partout, $x, y \in D(f(A))$, alors :*

1. $< f(A)x, y >= \int f(a) d < E_A(a)x, y >$.
2. $\overline{f}(A) = f(A)^*$. *En particulier, $f(A)$ est autoadjoint si f est réelle E_A-presque partout sur $\mathbb{R}$.*
3. *Si $f(t) \geq 0$ E_A-presque partout sur $\mathbb{R}$, alors $f(A) \geq 0$.*

En vertu du calcul fonctionnel, et d'une façon similaire au cas borné, on peut définir la racine carrée d'un opérateur positif. On a :

Proposition 2.5.8. *(Proposition 5.13 [36]) Si A est un opérateur positif et autoadjoint sur H, alors il existe un unique opérateur positif et autoadjoint B tel que $B^2 = A$. L'opérateur B est appelé la racine carrée positive de A et est noté par $\sqrt{A}$.*

Démonstration. Comme $A \geq 0$, on a $\operatorname{supp} E_A = \sigma(A) \subseteq [0, +\infty)$ d'après la proposition 5.10 de [36]. D'où la fonction $f(\lambda) := \sqrt{\lambda}$ est positive E_A- p.p. sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, l'opérateur $B := f(A)$ est positif, et $B^2 = f(A)^2 \subseteq (f^2)(A) = A$ d'après 10) et 6) du théorème 5.9 de [36]. Puisque B^2 est autoadjoint, $B^2 = A$.
On suppose que B' est un autre opérateur positif autoadjoint vérifiant $B'^2 = A$. Soit $B' = \int_{[0,+\infty)} t dF(t)$ la décomposition spectrale de B'. On définit une mesure spectrale F' par $F'(M) = F(M^2)$, $M \in \mathfrak{B}([0, +\infty))$, avec $M^2 = \{t^2 : t \in M\}$. En utilisant la propriété 4.24 de [36], on obtient alors

$$\int_{[0,+\infty)} \lambda dF'(\lambda) = \int_{[0,+\infty)} t^2 dF(t) = B'^2 = A = \int_{[0,+\infty)} \lambda dE_A(\lambda).$$

D'après l'unicité de la mesure spectrale de A (théorème 5.7 de [36]), il découle que

$$F'(M) \equiv F(M^2) = E_A(M) \text{ pour } M \in \mathfrak{B}([0, +\infty))$$

d'où d'après la formule (4.44) de [36] et la définition de B

$$B' = \int_{[0,+\infty)} t dF(t) = \int_{[0,+\infty)} \sqrt{\lambda} dF'(\lambda) = \int_{[0,+\infty)} \sqrt{\lambda} dE_A(\lambda) = B.$$

□

Lemme 2.5.1. *[2] Soient $B \in \mathcal{B}(H)$ et A un opérateur positif tels que $BA \subset AB$, alors $B\sqrt{A} \subset \sqrt{A}B$.*

Lemme 2.5.2. *[22] Soient A, B deux opérateurs tels que $BA \subset AB$ où $B \in \mathcal{B}(H)$ et positif, alors $\sqrt{B}A \subset A\sqrt{B}$.*

Théorème 2.5.9. *[36] Si A est à domaine dense et fermé, alors les opérateurs A^*A (et AA^*) sont autoadjoints et positifs, d'où on peut définir sa racine carrée.*

Remarque. Si A^*A est un opérateur autoadjoint alors A n'est pas toujours fermé, un contre-exemple est donné dans [37]. Cependant Sebestyén-Tarcsay ont démontré aussi, dans cette référence que l'autoadjonction de A^*A et AA^* implique la fermeture de A. On trouve une autre preuve dans [15].

2.5.7 La valeur absolue d'un opérateur non-borné

Définition 2.5.12. L'unique racine carrée positive autoadjointe de A^*A est notée par $|A|$, on l'appelle la valeur absolue ou le module de A.

Remarque. Il est également évident que si A est normal, alors $|A| = |A^*|$.

On a aussi, d'après [41], lorsque A est normal, $\overline{\mathrm{Re}(A)}$ et $\overline{\mathrm{Im}(A)}$ sont auto-adjoints.

Lemme 2.5.3. *(Lemme 7.1 [36]) Si A est fermé, alors*

$$D(A) = D(|A|) \text{ et } \|Ax\| = \||A|x\|, \ \forall x \in D(A).$$

Démonstration. Soit $x \in D(A^*A) = D(|A|^2)$, alors

$$\|Ax\|^2 =< Ax, Ax >=< A^*Ax, x >=< |A|^2x, x >= \||A|x\|^2.$$

D'après la proposition 3.18(ii) de [36], $D(A^*A)$ est un core pour l'opérateur A. Et en vertu du corollaire 4.14 de [36], $D(|A|^2)$ est un core pour $|A|$. Donc le résultat découle en prenant la fermeture de $D(A^*A) = D(|A|^2)$ par rapport à la norme du graphe $\|A.\| + \|.\| = \||A|.\| + \|.\|$. □

Les deux définitions suivantes coïncident lorsqu'il s'agit des opérateurs bornés :

Définition 2.5.13. ([36])Soient A et B deux opérateurs symétriques de domaines $D(A)$ et $D(B)$ respectivement. On écrit $A \succeq B$ si $D(A) \subset D(B)$ et

$$< Ax, x > \geq < Bx, x >, \ \forall x \in D(A).$$

Définition 2.5.14. ([36]) Soient A et B deux opérateurs non-bornés, positifs et autoadjoints. On dit que $A \geq B$ si $D(A^{\frac{1}{2}}) \subseteq D(B^{\frac{1}{2}})$ et $\|A^{\frac{1}{2}}x\| \geq \|B^{\frac{1}{2}}x\|$ pour tout $x \in D(A^{\frac{1}{2}})$.

L'inégalité de Heinz est vérifiée (d'après [36]) pour les opérateurs non-bornés, positifs, et autoadjoints. Donc en particulier si A et B sont des opérateurs autoadjoints, alors

$$A \geq B \geq 0 \Longrightarrow \sqrt{A} \geq \sqrt{B}.$$

Proposition 2.5.9. *[9] Pour tout opérateur A hyponormal fermé on a :*

$$A^*A \geq AA^*.$$

Démonstration. Puisque A est fermé, d'après ce qui précède, les opérateurs A^*A, AA^* sont autoadjoints et positifs, et

$$D(|A|) = D(A) \subseteq D(A^*) = D(|A^*|).$$

D'autre part, on sait que $|A| = (A^*A)^{\frac{1}{2}}$. Pour tout $x \in D(A)$, on a

$$\||A^*x| = \|A^*x\| \leq \|Ax\| = \||A|x\|.$$

D'où, d'après la définition ci-dessus, on a $A^*A \geq AA^*$. $\square$

Le résultat suivant sera utilisé pour démontrer quelques résultats ci-dessus.

Théorème 2.5.10. *([9]) Pour tout opérateur A hyponormal fermé on a :*

$$| < Ax, x > | \leq < |A|x, x > \ \textit{pour tout } x \in D(A).$$

Démonstration. Soit $A = U|A|$ la décomposition polaire de A où U est une isométrie partielle. On sait que

$$|A^*| = U|A|U^*.$$

et

$$U^*U|A| = |A|.$$

D'après la proposition 2.5.9, on a $AA^* \leq A^*A$. En vertu de l'inégalité de Heinz on déduit que $|A^*| \leq |A|$. D'autre part, soit $x \in D(A)$ alors

$$\begin{aligned}
| < Ax, x > |^2 &= | < U|A|x, x > |^2 \\
&= | < |A|x, U^*x > |^2 \\
&\leq < |A|x, x >< |A|U^*x, U^*x > \\
&= < |A|x, x >< U|A|U^*x, x > \\
&= < |A|x, x >< |A^*|x, x > \\
&\leq < |A|x, x >< |A|x, x > \text{ (car } A \text{ est hyponormal)}
\end{aligned}$$

D'où

$$| < Ax, x > | \leq < |A|x, x > .$$

□

2.5.8 Le théorème de Fuglede-Putnam dans le cas des opérateurs non-bornés

L'utilisation du théorème de Fuglede-Putnam est inévitable lorsqu'on travaille avec des opérateurs normaux.

Théorème 2.5.11. *Si A est un opérateur borné, N et M sont des opérateurs normaux et ils ne sont pas nécessairement bornés, alors*

$$AN \subset MA \Longrightarrow AN^* \subset M^*A.$$

Démonstration. ([34], cf. [24]) Puisque M et N sont normaux, alors

$$D(N) = D(N^*) \text{ et } D(M) = D(M^*)$$

et comme $AN \subset MA$, alors pour $x \in D(N) = D(N^*)$, on a $Ax \in D(M) = D(M^*)$. D'autre part, on considère e_α la fonction caractéristique de l'ensemble

$$\{z : |z| \leq \alpha,\ \alpha < \infty\}$$

Alors $Ne_\alpha(N)$ et $Me_\beta(M)$ sont des opérateurs normaux bornés tels que :

$$[e_\beta(M)Ae_\alpha(N)]Ne_\alpha(N) = Me_\beta(M)[e_\beta(M)Ae_\alpha(N)]$$

par conséquent,

$$[e_\beta(M)Ae_\alpha(N)][Ne_\alpha(N)]^* = [Me_\beta(M)]^*[e_\beta(M)Ae_\alpha(N)]$$

donc

$$e_\beta(M)AN^*e_\alpha(N)x = e_\beta(M)M^*Ae_\alpha(N)x$$

pour tout $x \in D(N^*)$, lorsque $\alpha \longrightarrow \infty,\ \beta \longrightarrow \infty$, on obtient :

$$AN^*x = M^*Ax$$

d'où découle

$$AN^* \subset M^*A.$$

□

Chapitre 3

La valeur absolue dans le cas borné

Les résultats de ce chapitre sont empruntés de [28].

Le lemme suivant sera très utilisé dans ce qui suit dans ce chapitre.

Lemme 3.0.4. *Soient $A, B \in \mathcal{B}(H)$ où A est normal, alors comme conséquence du théorème de Fuglede-Putnam on a :*

$$AB = BA \iff A^*B = BA^* \iff AB^* = B^*A \iff A^*B^* = B^*A^*.$$

3.0.9 Problématique

Soient $A, B \in \mathcal{B}(H)$, notre recherche concerne les relations suivantes :
- $|A||B| = |B||A|$;
- $|AB| = |A||B|$;
- $|A + B| \leq |A| + |B|$;
- $||A| - |B|| \leq |A + B|$;
- $\||A| - |B|\| \leq \|A + B\|$;

Notre objectif principal est de déterminer sous quelles conditions ces relations sont satisfaites.

3.1 La valeur absolue et le produit

3.1.1 Résultats principaux

Proposition 3.1.1. *Soient $A, B \in \mathcal{B}(H)$ tels que $AB = BA$, si A est normal, alors*

$$|A||B| = |B||A|.$$

Démonstration. Comme $AB = BA$ et A est normal, on a $A^*B = BA^*$. Alors il découle de ces dernières relations que :

$$AB = BA \Longrightarrow A^*AB = A^*BA = BA^*A.$$

D'où

$$|A|B = B|A|.$$

Puisque $|A|$ est autoadjoint, la dernière égalité donne (en prenant leurs adjoints) $|A|B^* = B^*|A|$. D'où

$$B^*|A|B = |A|B^*B \Longrightarrow B^*B|A| = |A|B^*B \Longrightarrow |B||A| = |A||B|.$$

□

Théorème 3.1.1. *Soient $A, B \in \mathcal{B}(H)$ deux opérateurs autoadjoints tels que AB est normal, alors*

$$|AB| = |A||B|.$$

Démonstration. Puisque A et B sont autoadjoints, on a

$$B(AB) = BAB = (AB)^*B.$$

Comme AB et $(AB)^*$ sont normaux, le théorème de Fuglede-Putnam donne

$$B(AB)^* = (AB)^{**}B \text{ ou simplement } B^2A = AB^2.$$

Par conséquent, $B^2A^2 = AB^2A = A^2B^2$.
D'autre part, on peut voir facilement que

$$|AB|^2 = (AB)^*AB = AB(AB)^* = AB^2A = A^2B^2$$

et donc

$$|AB| = \sqrt{A^2B^2} = \sqrt{A^2}\sqrt{B^2} = |A||B|. \text{ car } A^2 \text{ commute avec } B^2$$

□

Puisque $|AB|$ est autoadjoint, on a :

Corollaire 3.1.1. *Soient $A, B \in \mathcal{B}(H)$ deux opérateurs autoadjoints tels que AB est normal. Alors $|A||B|$ est autoadjoint, i.e. $|A||B| = |B||A|$. De plus, si on a $A, B \geq 0$, alors $AB \geq 0$.*

Remarque. Aucune hypothèse du théorème précédent peut être écartée. On donne un contre-exemple pour montrer l'importance de chaque hypothèse.

- Soient
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Alors A et B sont autoadjoints, mais AB n'est pas normal. En effet,
$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
et on peut facilement vérifier que
$$|AB| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \ |A| = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } |B| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\text{i.e. } |AB| \neq |A||B|.$$
- Soient
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Alors ni A ni B ne sont normaux. Cependant, leur produit AB est autoadjoint, donc normal, car
$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$
On a
$$|A| = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ |B| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } |AB| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
Par conséquent,
$$|AB| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = |A||B|.$$

Un résultat similaire au théorème 3.1.1 est :

Théorème 3.1.2. *Soient $A, B \in \mathcal{B}(H)$ tels que $AB = BA$. Si A est normal, alors*
$$|AB| = |A||B|.$$

Démonstration. Puisque $AB = BA$ et A est normal, alors $A^*B = BA^*$ ou $AB^* = B^*A$. D'où
$$|AB|^2 = (AB)^*AB = B^*A^*AB = A^*B^*AB = A^*AB^*B.$$

D'après la proposition 3.1.1, $A^*AB^*B = B^*BA^*A$. Par conséquent,

$$|AB| = \sqrt{A^*AB^*B} = \sqrt{A^*A}\sqrt{B^*B} = |A||B|.$$

$\square$

Corollaire 3.1.2. *Soient $A, B \in \mathcal{B}(H)$ tels que $AB = BA$. Si A et B sont normaux, alors*

$$|AB| = |A^*B| = |AB^*| = |A^*B^*| = |B^*A^*| = |B^*A| = |BA^*| = |BA|.$$

Démonstration. Comme A et B sont normaux, $|A| = |A^*|$ et $|B| = |B^*|$. Puisque $AB = BA$, alors $|A||B| = |B||A|$ pour A (ou B) normal, maintenant on applique le théorème 3.1.2 pour chacun des huit produits. $\square$

Corollaire 3.1.3. *Soient $A, B \in \mathcal{B}(H)$ tels que $AB = BA$. Si A est normal et B est inversible, alors*

$$|AB^{-1}| = |A||B^{-1}|.$$

Démonstration. Comme $AB = BA$ et B est inversible, alors $AB^{-1} = B^{-1}A$. On applique maintenant le théorème 3.1.2. $\square$

Corollaire 3.1.4. *Soit $A \in \mathcal{B}(H)$ normal et inversible. Alors,*

$$|A^{-1}| = |A|^{-1}.$$

Démonstration. Il est facile de voir que

$$I = |AA^{-1}| = |A||A^{-1}|.$$

Donc l'opérateur autoadjoint $|A|$ est inversible à droite, et est donc inversible et

$$|A|^{-1} = |A^{-1}|.$$

$\square$

Le théorème 3.1.2 peut être généralisé comme suit :

Proposition 3.1.2. *Soient $(A_i)_{i=1,\cdots,n}$une famille d'éléments de $\mathcal{B}(H)$ et commutants deux-à-deux. Si tous les $(A_i)_{i=1,\cdots,n}$ sont normaux sauf l'un d'eux, alors*

$$|A_1A_2 \cdots A_{n-1}A_n| = |A_1||A_2| \cdots |A_{n-1}||A_n|.$$

Démonstration. Si $A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}$ sont normaux, il suffit ensuite d'appliquer le théorème précédent en utilisant une preuve par induction. Par ailleurs, on utilise la commutativité plusieurs fois pour pousser l'opérateur qui n'est pas normal, jusqu'à ce qu'il soit en dernier, à droite du produit $\prod_{i=1}^{n} A_i$, puis on procède comme indiqué ci-dessus. □

Il est simple de voir que $|A^2| = |A|^2$ n'est pas toujours vraie. Par exemple, en prenant

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$|A^2| = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \neq |A|^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Corollaire 3.1.5. *Soit $A \in \mathcal{B}(H)$ normal et inversible, alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a*

$$|A^n| = |A|^n.$$

Démonstration. Pour $n \geq 0$, le résultat découle de la proposition 3.1.2.
Pour $n < 0$, le résultat découle de la proposition 3.1.2 et le corollaire 3.1.4. □

3.2 La valeur absolue et la somme

3.2.1 Résultats utilisés

Lemme 3.2.1. *Si $A \in \mathcal{B}(H)$ est anti-symétrique, i.e. $A^* = -A$, alors $A^2 \leq 0$.*

Lemme 3.2.2. *Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ hyponormal (i.e. $TT^* \leq T^*T$, ou autrement : $\|T^*x\| \leq \|Tx\|$ pour tout $x \in H$). Alors*

$$\operatorname{Re} T = \frac{T + T^*}{2} \leq \sqrt{T^*T} = |T|.$$

Démonstration. Il est facile de voir que l'opérateur $T - T^*$ est anti-symétrique, alors d'après le lemme 3.2.1 : $(T - T^*)^2 \leq 0$. D'où

$$(T - T^*)^2 \leq 0 \iff T^2 + T^{*2} - TT^* - T^*T \leq 0.$$

Mais comme T est hyponormal, il en résulte que $-TT^* - T^*T \geq -2T^*T$. Donc,

$$T^2 + T^{*2} - 2T^*T \leq 0$$

ou bien

$$T^2 + T^{*2} + TT^* + T^*T \leq T^2 + T^{*2} + 2T^*T \leq 4T^*T.$$

Par conséquent, on a

$$(T + T^*)^2 \leq 4T^*T \text{ ou bien } |T + T^*| \leq 2|T|$$

d'après le théorème 2.3.2.
Rappelons que $S^- = \frac{1}{2}(|S| - S) \geq 0$ lorsque S est auto-adjoint, on conclut que

$$T + T^* \leq |T + T^*| \leq 2|T| = 2\sqrt{T^*T}.$$

□

On a besoin aussi du résultat simple suivant :

Lemme 3.2.3. *Soient $A, B \in \mathcal{B}(H)$ tels que A est normal et B est hyponormal. Si A et B commutent i.e. $AB = BA$, alors l'opérateur A^*B est hyponormal.*

Démonstration. Soit $x \in H$. Puisque $AB = BA$, et en utilisant la normalité de A et l'hyponormalité de B on obtient :

$$\|(A^*B)^*x\| = \|B^*Ax\| \leq \|BAx\| = \|ABx\| = \|A^*Bx\|$$

ce qui prouve que A^*B est hyponormal. □

3.2.2 Résultats principaux

Voici la première version de l'inégalité triangulaire :

Théorème 3.2.1. *Soient $A, B \in \mathcal{B}(H)$ tels que $AB = BA$. Si A est normal et B est hyponormal, alors l'inégalité triangulaire suivante est vérifiée :*

$$|A + B| \leq |A| + |B|.$$

Démonstration. Puisque A est normal et $AB = BA$, alors en vertu de la proposition 3.1.1 on a $|A||B| = |B||A|$. D'où :

$$|A + B|^2 \leq (|A| + |B|)^2 \iff (A + B)^*(A + B) \leq A^*A + B^*B + 2\sqrt{A^*A}\sqrt{B^*B}$$

$$\iff A^*B + B^*A \leq 2\sqrt{A^*A}\sqrt{B^*B}.$$

On sait déjà d'après le lemme 2.3.1 qu'on a $\sqrt{A^*A}\sqrt{B^*B} = \sqrt{A^*AB^*B}$. Alors pour montrer l'inégalité triangulaire voulue, il suffit de montrer que

$$A^*B + B^*A \leq 2\sqrt{A^*AB^*B}.$$

Or

$$A^*AB^*B = AA^*B^*B = AB^*A^*B = B^*AA^*B.$$

Si on pose $T = A^*B$, alors la preuve est vérifiée si on montre que

$$T + T^* \leq 2\sqrt{T^*T}.$$

Mais cette dernière inégalité n'est autre que le lemme 3.2.2 une fois qu'on montre que A^*B est hyponormal. C'est en effet le cas, car A^*B est hyponormal d'après le lemme 3.2.3.

Donc, selon les hypothèses de notre théorème, on a montré que

$$|A + B|^2 \leq (|A| + |B|)^2.$$

En utilisant le théorème 2.3.2, il en résulte que

$$|A + B| \leq |A| + |B|.$$

□

Remarque. Le résultat précédent n'est plus vrai si on n'a pas la commutativité de A et B, même s'ils sont autoadjoints, on peut le vérifier facilement via l'exemple suivant :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Corollaire 3.2.1. *Si $T \in \mathcal{B}(H)$ est normal, alors*

$$|T| \leq |\operatorname{Re} T| + |\operatorname{Im} T|.$$

Démonstration. On écrit $T = \operatorname{Re} T + i \operatorname{Im} T$ où les opérateurs $\operatorname{Re} T$ et $\operatorname{Im} T$ sont autoadjoints et commutants. Puis on applique le théorème 3.2.1. □

On a une autre conséquence simple du théorème 3.2.1.

Corollaire 3.2.2. *Soient $A, B \in \mathcal{B}(H)$ tels que $AB = BA$. Si A est normal et B est hyponormal, alors l'inégalité triangulaire suivante est vérifiée :*

$$|A - B| \leq |A| + |B|.$$

Démonstration. Comme $AB = BA$, alors on a $A(-B) = (-B)A$. D'autre part $-B$ est aussi hyponormal. Finalement, on applique le théorème 3.2.1. $\square$

Le théorème 3.2.1 peut être généralisé à une somme finie d'opérateurs. Avant d'énoncer ce résultat, on rappelle que la somme de deux opérateurs normaux et commutants est normale [26]. Cela aussi peut être généralisé.

Proposition 3.2.1. *Soient $(A_i)_{i=1,\cdots,n}$une famille d'éléments normaux de $\mathcal{B}(H)$ et commutants deux-à-deux, alors l'opérateur $A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ est normal.*

Corollaire 3.2.3. *Soient $(A_i)_{i=1,\cdots,n}$une famille d'éléments de $\mathcal{B}(H)$ commutants deux-à-deux. Si tous les $(A_i)_{i=1,\cdots,n}$ sont normaux sauf peut être un, qui est hyponormal, alors on a*

$$|A_1 + A_2 + \cdots + A_n| \leq |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|.$$

Il est connu qu'une inégalité du type $\||A| - |B|\| \leq \|A \pm B\|$ n'est pas toujours vérifiée en général même si A et B sont autoadjoints.

Proposition 3.2.2. *Soient $A, B \in \mathcal{B}(H)$ normaux et tels que $AB = BA$, alors l'inégalité suivante est vérifiée :*

$$\||A| - |B|\| \leq \|A + B\|.$$

Le lemme suivant nous est utile :

Lemme 3.2.4. *Soient $S, T \in \mathcal{B}(H)$ autoadjoints et $S \geq 0$. Si $-S \leq T \leq S$, alors $\|T\| \leq \|S\|$.*

Démonstration. Pour tout $x \in H$, on a

$$- < Sx, x > \leq < Tx, x > \leq < Sx, x > \text{ ou bien } | < Tx, x > | \leq < Sx, x > .$$

Donc,

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} | < Tx, x > | \leq \sup_{\|x\|=1} < Sx, x > = \|S\|.$$

$\square$

Maintenant, on démontre la proposition 3.2.2.

Démonstration. Puisque A et B sont des opérateurs normaux et commutants, on sait que l'opérateur $A+B$ est aussi normal. Comme $A+B$ commute avec B, alors en vertu du corollaire 3.2.2, on obtient

$$|A| = |A+B-B| \leq |A+B| + |B| \Longrightarrow |A| - |B| \leq |A+B|.$$

D'une façon analogue, comme $A+B$ commute avec A, on obtient :

$$|B| - |A| \leq |A+B|.$$

D'où

$$-|A+B| \leq |A| - |B| \leq |A+B|.$$

D'après le lemme 3.2.4 (et on rappelle que $\|T\| = \||T|\|$ pour $T \in \mathcal{B}(H)$), on obtient :

$$\||A| - |B|\| \leq \||A+B|\| = \|A+B\|.$$

□

Remarque. Dans la proposition précèdente, si B est seulement hyponormal, alors à ce moment là on est seulement sûr qu'on a

$$|B| - |A| \leq |A+B|$$

car on peut prouver seulement que $A+B$ est hyponormal. On va remédier à ce petit problème brièvement.

Corollaire 3.2.4. *Soient $A, B \in \mathcal{B}(H)$ normaux, et commutants i.e. $AB = BA$, alors l'inégalité suivante est vérifiée :*

$$\||A| - |B|\| \leq \|A-B\|.$$

La proposition 3.2.2 peut être améliorée car il s'agit d'un cas particulier du résultat suivant :

Proposition 3.2.3. *Soient $A, B \in \mathcal{B}(H)$ commutants i.e. $AB = BA$. Si A est normal et B est hyponormal, alors*

$$||A| - |B|| \leq |A-B|.$$

Démonstration. Comme $|A||B| = |B||A|$, on voit facilement que

$$\begin{aligned}||A| - |B||^2 \leq |A - B|^2 &\Longleftrightarrow |A|^2 + |B|^2 - 2|A||B| \leq |A|^2 + |B|^2 - A^*B - B^*A \\ &\Longleftrightarrow A^*B + B^*A \leq 2\sqrt{A^*A}\sqrt{B^*B} \\ &\Longleftrightarrow A^*B + B^*A \leq 2\sqrt{B^*AA^*B}.\end{aligned}$$

Mais en vertu du lemme 3.2.2, ceci est toujours vrai, puisque A^*B est hyponormal. Donc on a montré que

$$||A| - |B||^2 \leq |A - B|^2.$$

Enfin, d'après le théorème 2.3.2, on obtient

$$||A| - |B|| \leq |A - B|.$$

□

Corollaire 3.2.5. *Soient $A, B \in \mathcal{B}(H)$ commutants i.e. $AB = BA$. Si A est normal et B est hyponormal, alors*

$$||A| - |B|| \leq |A + B|.$$

Démonstration. Puisque B est hyponormal, il en est de même pour $-B$, et le reste est évident. □

Voici l'amélioration de la proposition 3.2.2 :

Corollaire 3.2.6. *Soient $A, B \in \mathcal{B}(H)$ tels que $AB = BA$. Si A est normal et B est hyponormal, alors :*

$$\||A| - |B|\| \leq \|A \pm B\|.$$

Démonstration. D'après la proposition 3.2.2 et le corollaire 3.2.5, on sait que

$$||A| - |B|| \leq |A \pm B|.$$

Puis, en vertu du lemme 3.2.4, il en résulte que

$$\||A| - |B|\| = \|||A| - |B|\|| \leq \||A \pm B|\| = \|A \pm B\|.$$

□

Si on supprime la commutativité dans le théorème 3.2.1, alors on a besoin d'ajouter une condition supplémentaire. De plus, on doit seulement supposer que l'un des deux opérateurs est normal.

Théorème 3.2.2. *Soient $A, B \in \mathcal{B}(H)$ tels que $AB = BA$. Si A est normal et $A^*B + B^*A \leq 0$, alors :*

$$|A + B| \leq |A| + |B|.$$

Démonstration. Il est facile de voir que

$$(A + B)^*(A + B) = A^*A + A^*B + B^*A + B^*B.$$

Et comme $A^*B + B^*A \leq 0$, alors

$$A^*A + A^*B + B^*A + B^*B \leq A^*A + B^*B$$

en faisant appel au théorème 2.3.2, on obtient

$$|A + B| = \sqrt{A^*A + A^*B + B^*A + B^*B} \leq \sqrt{A^*A + B^*B}.$$

Puisque $AB = BA$ et A est normal, alors d'après la proposition 3.1.1, il en résulte que $|A||B| = |B||A|$ ou $|A|^2|B|^2 = |B|^2|A|^2$. Enfin, en vertu du lemme 2.3.1, on obtient

$$|A + B| \leq |A| + |B|.$$

Ce qui achève la preuve. $\square$

Chapitre 4

La valeur absolue dans le cas non-borné

L'objectif principal de ce chapitre est d'étudier le moment où les relations suivantes : $|AB| = |A||B|$, $|A \pm B| \leq |A| + |B|$, $||A| - |B|| \leq |A \pm B|$ et $|\overline{\operatorname{Re} A}| \leq |A|$ sont vérifiées lorsqu'au moins un des opérateurs est non-borné. Et comme conséquences, on obtient une caractérisation des opérateurs autoadjoints non-bornés, aussi bien qu'une caractérisation de l'inversibilité pour la classe des opérateurs normaux non-bornés. Ce chapitre constitue la partie originale de cette thèse.

4.1 La valeur absolue et le produit

Proposition 4.1.1. *Soit A un opérateur positif et autoadjoint et soit $B \in \mathcal{B}(H)$ positif (donc il est autoadjoint aussi). Si $BA \subset AB$, alors AB (et $\overline{BA}$) est autoadjoint, positif et $\overline{BA} = AB$. De plus,*

$$\sqrt{AB} = \sqrt{A}\sqrt{B}.$$

Démonstration. En vertu du théorème spectral, AB est autoadjoint et positif, et on a aussi l'égalité $\sqrt{AB} = \sqrt{A}\sqrt{B}$. Alternativement, on peut procéder comme suit : on a

$$BA \subset AB \Longrightarrow \sqrt{B}A \subset A\sqrt{B} \Longrightarrow \sqrt{B}\sqrt{A} \subset \sqrt{A}\sqrt{B}.$$

Maintenant, d'après la première partie de la preuve, $\sqrt{A}\sqrt{B}$ est autoadjoint (et positif) et donc même $(\sqrt{A}\sqrt{B})^2$. D'autre part, on a

$$(\sqrt{A}\sqrt{B})^2 = \sqrt{A}\sqrt{B}\sqrt{A}\sqrt{B} \subset \sqrt{A}\sqrt{A}\sqrt{B}\sqrt{B} = AB.$$

De plus, comme $(\sqrt{A}\sqrt{B})^2$ et AB sont autoadjoints, alors par la maximalité des opérateurs autoadjoints, on obtient

$$(\sqrt{A}\sqrt{B})^2 = AB.$$

D'où, par l'unicité de la racine carrée positive, on en déduit que

$$\sqrt{AB} = \sqrt{A}\sqrt{B}.$$

$\square$

Proposition 4.1.2. *Soient A un opérateur normal et $B \in \mathcal{B}(H)$. Alors*

$$BA \subset AB \Longrightarrow |B||A| \subset |A||B|,$$

i.e. pour tout $x \in D(B|A|) = D(|A|) = D(A)$, on a $|B||A|x = |A||B|x$.

Démonstration. Comme $BA \subset AB$ et A est normal, on a $BA^* \subset A^*B$. Donc

$$BA^*A \subset A^*BA \subset A^*AB.$$

Par conséquent, $B|A| \subset |A|B$. Puisque $|A|$ est autoadjoint, en prenant leurs adjoints il s'en suit que $B^*|A| \subset |A|B^*$. Ainsi,

$$B|A| \subset |A|B \Longrightarrow B^*B|A| \subset B^*|A|B \subset |A|B^*B.$$

D'où,

$$|B||A| \subset |A||B|.$$

$\square$

Corollaire 4.1.1. *Soient A un opérateur normal et $B \in \mathcal{B}(H)$. Si $BA \subset AB$, alors A^*AB^*B est autoadjoint.*

Démonstration. Comme ci-dessus, on obtient $B^*BA^*A \subset A^*AB^*B$. Puisque B^*B et A^*A sont autoadjoints, la proposition 4.1.1 implique que A^*AB^*B est autoadjoint. $\square$

Théorème 4.1.1. *Soient A un opérateur normal et $B \in \mathcal{B}(H)$. Si $BA \subset AB$, alors*

$$|\overline{BA}| = |AB| = |A||B| = \overline{|B||A|}.$$

Démonstration. L'égalité $|A||B| = \overline{|B||A|}$ est établie comme suit : Par la proposition 4.1.2, on a $|B||A| \subset |A||B|$. Puisque $|B|$ et $|A|$ sont autoadjoints, d'après la proposition 4.1.1 on a

$$\overline{|B||A|} = |A||B|.$$

Maintenant, $BA \subset AB$ donne $B^*A^* \subset A^*B^*$. Comme ci-dessus aussi, la normalité de A donne

$$BA \subset AB \Longrightarrow BA^* \subset A^*B.$$

D'où en passant aux adjoints, $B^*A \subset AB^*$. Donc,

$$(AB)^*AB \supset B^*A^*AB = B^*AA^*B \supset B^*ABA^* \supset B^*BAA^*.$$

Puisque AB est fermé, alors $(AB)^*AB$ est autoadjoint. L'inclusion précédente, en prenant les adjoints, devient

$$(AB)^*AB \subset AA^*B^*B = A^*AB^*B.$$

Comme $(AB)^*AB$ et A^*AB^*B sont autoadjoints, par la maximalité des opérateurs autoadjoints, on obtient

$$(AB)^*AB = A^*AB^*B.$$

En vertu de la proposition 4.1.1, on déduit que

$$|AB| = \sqrt{(AB)^*AB} = \sqrt{A^*AB^*B} = \sqrt{A^*A}\sqrt{B^*B} = |A||B|.$$

Pour montrer la dernière égalité, on procède comme avant. On a

$$(BA)^*BA = A^*B^*BA \supset B^*A^*BA \supset B^*BA^*A.$$

Puisque BA est fermable et $B^*B \in \mathcal{B}(H)$, en passant aux adjoints, il s'en suit que

$$(BA)^*\overline{BA} \subset [(BA)^*BA]^* \subset A^*AB^*B.$$

Comme ci-dessus, on obtient

$$(BA)^*\overline{BA} = A^*AB^*B.$$

Par conséquent,

$$|\overline{BA}| = \sqrt{(\overline{BA})^*\overline{BA}} = \sqrt{(BA)^*\overline{BA}} = \sqrt{A^*AB^*B} = |A||B|.$$

$\square$

Remarque. On peut obtenir la condition $BA \subset AB$ si :AB est normal, A et B sont autoadjoints (l'un d'eux est positif) et $B \in \mathcal{B}(H)$ (voir [22], [16], cf. [5]).

Corollaire 4.1.2. *Soit A un opérateur normal et soit $B \in \mathcal{B}(H)$. Si $BA \subset AB$, alors*

$$|AB| = |A^*B| = |\overline{BA}| = |\overline{BA^*}|.$$

Corollaire 4.1.3. *Soit A un opérateur normal d'inverse borné. Alors*

$$|A^{-1}| = |A|^{-1}.$$

Démonstration. On peut utiliser le théorème spectral. Autrement, d'après les hypothèses, on a

$$A^{-1}A \subset AA^{-1} = I$$

avec $A^{-1} \in \mathcal{B}(H)$. D'où

$$|A||A^{-1}| = |AA^{-1}| = |I| = I.$$

Puisque $|A|$ est autoadjoint et inversible à droite, donc il est inversible et

$$|A^{-1}| = |A|^{-1}.$$

□

Définition 4.1.1. Soit A un opérateur fermé densément défini sur un espace de Hilbert H, si $AA^*A = A^*AA$ alors A est dit quasinormal.

Proposition 4.1.3. *(lemme 3.5, [18]) Soit A un opérateur non-borné et quasinormal, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$(A^*A)^n = A^{*n}A^n = (A^n)^*A^n.$$

D'où, on a :

Corollaire 4.1.4. *Si A est un opérateur non-borné quasinormal, alors*

$$|A^n| = |A|^n$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Le corollaire précédent n'est pas valable pour la classe des opérateurs hyponormaux même dans le cas borné. En effet, on a :

Exemple 4.1.1. *Soit $S \in \mathcal{B}(l^2)$ l'opérateur shift. On rappelle que $SS^* \neq I$ et $S^*S = I$ où I est l'opérateur identité sur l^2. Maintenant, on prend $A = S + I$ pour que A soit hyponormal. Alors*

$$|A|^2 = |S + I|^2 = (S^* + I)(S + I) = 2I + S + S^*.$$

D'autre part,

$$|A^2| = \sqrt{(S^* + I)^2(S + I)^2} = \sqrt{6I + 4S^* + 4S + S^{*2} + S^2}.$$

Si $|A^2| = |A|^2$, alors on obtient $|A^2|^2 = |A|^4$. Un petit calcul donne $SS^* = I$ ce qui est impossible.

Remarque. Lorsque A est un opérateur symétrique fermé à domaine dense, alors l'égalité $|A|^2 = |A^2|$ n'est pas toujours vérifiée. Par exemple [7] Si A est un opérateur symétrique fermé tel que $D(A^2) = \{0\}$ alors $|A|$ existe, et donc même $|A|^2$ existe, cependant $D(A^2) = \{0\}$, par conséquent $|A^2|$ n'existe pas car $(A^2)^*$ n'existe pas. (Pour des exemples similaires à celui de Chernoff voir [11] et [29]).

Avant de passer aux inégalités, on généralise le théorème 4.1.1. D'abord, on a :

Proposition 4.1.4. *Soient A et B deux opérateurs normaux qui commutent fortement. Alors les opérateurs $\overline{AB} = \overline{BA}$ sont normaux et*

$$|\overline{BA}| = |\overline{AB}| = \overline{|A||B|} = \overline{|B||A|}.$$

Démonstration. On utilise le théorème spectral. Puisque A et B sont normaux, d'après le théorème spectral on peut écrire

$$A = \int_{\mathbb{C}} z dE_A \text{ et } B = \int_{\mathbb{C}} z' dF_B,$$

où E_A et F_B désignent les mesures spectrales associées. En vertu de la commutativité forte, on a (d'après [36])

$$E_A(I)F_B(J) = F_B(J)E_A(I)$$

pour tous les ensembles boréliens I et J sur $\mathbb{C}$. D'où

$$E_{A,B}(z, z') = E_A(z)F_B(z')$$

définit une mesure spectrale à deux paramètres. Ainsi

$$C = \int_{\mathbb{C}} \int_{\mathbb{C}} zz' dE_{A,B}$$

définit un opérateur normal, tel que $C = \overline{AB} = \overline{BA}$. Donc, comme $|zz'| = |z||z'|$ pour tous z, z', alors

$$|\overline{AB}| = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |zz'| dE_{A,B} = \overline{|A||B|}.$$

□

Corollaire 4.1.5. *Soient A et B deux opérateurs normaux qui commutent fortement. Alors*

$$|\overline{AB}| = |\overline{A^*B}| = |\overline{AB^*}| = |\overline{A^*B^*}| = |\overline{BA}| = |\overline{BA^*}| = |\overline{B^*A}| = |\overline{B^*A^*}|.$$

Démonstration. La preuve découle facilement de la proposition 4.1.4, et du fait que $|A| = |A^*|$ et $|B| = |B^*|$. □

En utilisant la décomposition polaire des opérateurs normaux non-bornés, le résultat suivant devient alors évident.

Corollaire 4.1.6. *Soient A et B deux opérateurs normaux qui commutent fortement. Alors*

$$\overline{BA} = \overline{AB} = U\overline{|A||B|} = U\overline{|B||A|} = \overline{|B||A|}U = \overline{|A||B|}U$$

pour un certain opérateur unitaire $U \in \mathcal{B}(H)$.

Maintenant, on donne un résultat sur la notion importante d'adjoint des produits :

Proposition 4.1.5. *Soient A et B deux opérateurs normaux qui commutent fortement. Alors*

$$(AB)^* = (\overline{AB})^* = \overline{B^*A^*} = \overline{A^*B^*} = (BA)^*.$$

Démonstration. La preuve est contenue dans la preuve de la proposition 4.1.4 en se rappelant que

$$A^* = \int_{\mathbb{C}} \overline{z} dE_A \text{ et } B^* = \int_{\mathbb{C}} \overline{z'} dF_B.$$

□

Proposition 4.1.6. *Soient A et C deux opérateurs normaux qui commutent fortement et soit $B \in \mathcal{B}(H)$. Si $BA \subset AB,\ BC \subset CB$ et AC est densément défini, alors*

$$|\overline{ABC}| = |\overline{AC}||B| = \overline{|A||C|}|B|.$$

La preuve de la proposition précédente s'appuie sur un résultat de type Fuglede.

Lemme 4.1.1. *Soit $B \in \mathcal{B}(H)$ et soit T un opérateur densément défini tel que $\overline{T}$ est normal. Si $BT \subset TB$, alors*

$$BT^* \subset T^*B,\ B\overline{T} \subset \overline{T}B \text{ et } B^*\overline{T} \subset \overline{T}B^*.$$

Démonstration. Comme $\overline{T}$ est normal, $\overline{T}^* = T^*$ reste normal. Maintenant,

$$\begin{aligned} BT \subset TB &\Longrightarrow B^*T^* \subset T^*B^* \ \ \text{(en prenant les adjoints)} \\ &\Longrightarrow B^*\overline{T} \subset \overline{T}B^* \ \ \text{(on utilise le théorème de Fuglede)} \\ &\Longrightarrow BT^* \subset T^*B \ \ \text{(en prenant les adjoints)} \\ &\Longrightarrow B\overline{T} \subset \overline{T}B \ \ \text{(on applique encore le théorème de Fuglede).} \end{aligned}$$

□

Remarque. [40] Il est à noter que : Si $B \in \mathcal{B}(H)$ et T est densément défini tel que $\overline{T}$ existe, alors

$$BT \subset TB \iff B\overline{T} \subset \overline{T}B.$$

Maintenant, on donne une preuve de la proposition 4.1.6.

Démonstration. D'après les hypothèses, on a

$$B(AC) \subset ABC \subset (AC)B.$$

Puisque AC est densément défini et $D(AC) = D(BAC) \subset D(ABC)$, il est clair que ABC est densément défini. D'où

$$(ABC)^* \subset [B(AC)]^* = (AC)^*B^*.$$

Comme $\overline{AC}$ est normal, alors le lemme 4.1.1 s'applique et nous donne

$$B(AC)^* \subset (AC)^*B \text{ ou } B^*\overline{AC} \subset \overline{AC}B^*.$$

On a aussi :

$$ABC \subset ACB \subset \overline{AC}B$$

et donc

$$\overline{ABC} \subset \overline{AC}B$$

pour $\overline{AC}B$ est fermé. On peut alors écrire :

$$(ABC)^*\overline{ABC} \subset (AC)^*B^*\overline{ABC} \subset (AC)^*B^*\overline{AC}B \subset (AC)^*\overline{AC}B^*B.$$

Le corollaire 4.1.1 donne l'auto-adjonction de $(AC)^*\overline{AC}B^*B$ et parce que $\overline{ABC}$ est fermé, alors on obtient

$$(ABC)^*\overline{ABC} = (AC)^*\overline{AC}B^*B.$$

Donc, la proposition 4.1.1 (et aussi le corollaire 4.1.1) donnent

$$|\overline{ABC}| = |\overline{AC}||B| = \overline{|A||C|}|B|.$$

$\square$

Corollaire 4.1.7. *Soient A un opérateur normal et $B \in \mathcal{B}(H)$. Si $BA \subset AB$, alors*

$$|\overline{ABA}| = |A|^2|B| = |A|\overline{|B||A|}.$$

Corollaire 4.1.8. *Soient $(A_i)_{i=1,\cdots,n}$ des opérateurs normaux, qui commutent deux-à-deux fortement. Alors*

$$|\overline{A_1A_2\cdots A_n}| = \overline{|A_1||A_2|\cdots|A_n|}.$$

Démonstration. On raisonne par récurrence, en utilisant des mesures spectrales à n paramètres. $\square$

On termine avec une généralisation.

Proposition 4.1.7. *Soient $(A_i)_{i=1,\cdots,n}$ des opérateurs normaux, qui commutent deux-à-deux fortement, tels que $A_1A_2\cdots A_n$ est densément défini. Soit $B \in \mathcal{B}(H)$ tel que $BA_i \subset A_iB$ pour $i = 1, 2, \cdots, n$. Alors*

$$|\overline{BA_1A_2\cdots A_n}| = |\overline{A_1A_2\cdots A_nB}| = |\overline{A_1A_2\cdots A_iBA_{i+1}\cdots A_n}| = \overline{|A_1||A_2|\cdots|A_n|}|B|.$$

Démonstration. Ces égalités sont des conséquences simples des résultats obtenus ci-dessus. Par exemple, pour montrer la dernière égalité, on remarque que $A_1A_2\cdots A_i$ et $A_{i+1}\cdots A_n$ sont normaux. Alors

$$|\overline{A_1A_2\cdots A_iBA_{i+1}\cdots A_n}| = |\overline{(A_1A_2\cdots A_i)(A_{i+1}\cdots A_n)}||B| = \overline{|A_1||A_2|\cdots|A_n|}|B|.$$

$\square$

4.2 La valeur absolue : Somme et Inégalités

On commence par l'inégalité triangulaire.

Théorème 4.2.1. *Soient A un opérateur normal et $B \in \mathcal{B}(H)$ hyponormal. Si $BA \subset AB$, alors*

$$|A+B| \leq |A| + |B|.$$

Remarque. L'importance du théorème précédent se trouve dans le fait que c'est impossible de le démontrer en utilisant le théorème spectral !

La preuve nécessite le résultat suivant qui est également intéressant.

Théorème 4.2.2. *Soient A un opérateur normal et $B \in \mathcal{B}(H)$ hyponormal. Si $BA \subset AB$, alors l'opérateur A^*B est hyponormal. i.e. :*

$$\|(A^*B)^*x\| \leq \|A^*Bx\|$$

pour tout $x \in D(A^*B) \subset D[(A^*B)^*]$.

Démonstration. Comme $BA \subset AB$, en vertu du théorème de Fuglede on a $BA^* \subset A^*B$ car A est normal. D'après le corollaire 4.1.2 on a

$$|A^*B| = |\overline{BA^*}|.$$

Puisque A^*B est fermé, on obtient

$$D(A^*B) = D(|A^*B|) = D(|\overline{BA^*}|) = D(\overline{BA^*}).$$

D'autre part, comme A^*B est densément défini, on a toujours

$$B^*A^{**} = B^*A \subset (A^*B)^*.$$

D'où

$$\overline{B^*A} \subset (A^*B)^*$$

et donc $D(A^*B) = D(\overline{B^*A}) \subset D[(A^*B)^*]$.
Pour tout $x \in D(A) = D(A^*) = D(BA^*) \subset D(A^*B) \subset D[(A^*B)^*]$, on a (en utilisant l'hyponormalité de B)

$$\|(A^*B)^*x\| = \|B^*Ax\| \leq \|BAx\| = \|ABx\| = \|A^*Bx\|$$

ce qui prouve que A^*B est hyponormal, tel que requis. $\square$

Corollaire 4.2.1. *Soient A un opérateur normal et $B \in \mathcal{B}(H)$ hyponormal. Si $BA \subset AB$, alors l'opérateur AB est hyponormal.*

Démonstration. Puisque $BA \subset AB$ alors $BA^* \subset A^*B$. Maintenant, le théorème précédent fournit l'hyponormalité de l'opérateur $A^{**}B = AB$. □

On est prêt à démontrer le théorème 4.2.1 :

Démonstration. D'abord, comme d'habitude on a $BA \subset AB$ et $BA^* \subset A^*B$ d'où, si $x \in D(A) = D(A^*)$, alors $Bx \in D(A) = D(A^*)$. De plus, l'autoadjonction de $|A|$ et $|B|$ donnent l'autoadjonction (et la positivité) de $|A| + |B|$ étant donné que $|B| \in \mathcal{B}(H)$. Ensuite, comme A est fermé et $B \in \mathcal{B}(H)$, $A + B$ est fermé. D'où $|A + B|$ a un sens et de plus

$$D(|A| + |B|) = D(|A|) = D(A) = D(A + B) = D(|A + B|).$$

D'autre part, puisque $|A + B|$ est autoadjoint et positif, pour montrer l'inégalité triangulaire nécessaire, en utilisant l'inégalité de Heinz (version non-borné), il suffit de montrer que

$$|A + B|^2 \leq (|A| + |B|)^2.$$

Soit $x \in D(A)$. Alors

$$\begin{aligned}
\||A + B|x\|^2 &= \|(A + B)x\|^2 \\
&=< (A + B)x, (A + B)x > \\
&= \|Ax\|^2 + \|Bx\|^2 + < Bx, Ax > + < Ax, Bx > \\
&= \|Ax\|^2 + \|Bx\|^2 + < Bx, Ax > + \overline{< Bx, Ax >} \\
&= \|Ax\|^2 + \|Bx\|^2 + 2\,\mathrm{Re} < Bx, Ax > \\
&= \|Ax\|^2 + \|Bx\|^2 + 2\,\mathrm{Re} < A^*Bx, x > \\
&\leq \|Ax\|^2 + \|Bx\|^2 + 2| < A^*Bx, x > |.
\end{aligned}$$

Or A^*B est fermé, il est aussi hyponormal d'après le théorème 4.2.2, et donc le théorème 2.5.10 donne

$$| < A^*Bx, x > | \leq< |A^*B|x, x >$$

pour tout x. En vertu de la proposition 4.1.2 et le théorème 4.1.1, on a pour tout $x \in D(A)$:

$$|A^*B|x = |A^*||B|x = |A||B|x = |B||A|x.$$

D'où

$$2| < A^*Bx, x > | \leq 2 < |A^*B|x, x >=< |A||B|x, x > + < |B||A|x, x > .$$

Par conséquent,

$$\||A+B|x\|^2 \leq \|Ax\|^2 + \|Bx\|^2 + < |A||B|x, x > + < |B||A|x, x >= \|(|A|+|B|)x\|^2$$

ou simplement

$$\||A+B|x\| \leq \|(|A|+|B|)x\|$$

pour tout $x \in D(A)$. Par définition, cela signifie

$$|A+B|^2 \leq (|A|+|B|)^2,$$

ce qui achève la preuve. □

On donne quelques exemples.

Exemples 4.2.1.

1. Soit $\mathcal{F}$ la transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$. Alors $\mathcal{F}$ est unitaire et donc
$$\mathcal{F} = \int_0^{2\pi} e^{i\lambda} dE_\lambda$$
en termes d'une mesure spectrale E_λ. Maintenant, on pose $A = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE_\lambda$ qui est non-borné et autoadjoint, et par construction, il commute fortement avec $\mathcal{F}$. Par conséquent, $A + \mathcal{F}$ vérifie
$$|A + \mathcal{F}| \leq |A| + I.$$

2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit U l'opérateur unitaire défini sur $L^2(\mathbb{R})$ par
$$(Uf)(x) = f(x+a),\ x \in \mathbb{R}.$$
Soit $Af(x) = xf(x)$ défini sur $D(A) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : xf \in L^2(\mathbb{R})\}$. Alors $|A|f(x) = |x|f(x)$ et $|U| = I$. Clairement, U commute avec A. D'après le théorème 4.2.1,
$$|A + U| \leq M$$
où $Mf(x) = (|x|+1)f(x)$ défini sur $D(A)$.

3. Soit A un opérateur normal inversible d'inverse borné, et soit A^{-1} son inverse borné partout. Alors
$$|A + A^{-1}| \leq |A| + |A^{-1}| = |A| + |A|^{-1}.$$

Corollaire 4.2.2. *Soient A un opérateur normal et $B \in \mathcal{B}(H)$ hyponormal. Si $BA \subset AB$, alors*
$$|A - B| \le |A| + |B|.$$

Proposition 4.2.1. *Soit A un opérateur fermé hyponormal. Alors*
$$|\overline{\operatorname{Re} A}| \le |A|$$
où $\overline{\operatorname{Re} A}$ désigne la fermeture de l'opérateur $\operatorname{Re} A$.

Démonstration. Comme A est hyponormal, on a $D(A) \subset D(A^*)$ et donc $A + A^*$ est densément défini. Puisque A est fermé, alors $A + A^*$ est symétrique. D'où, $\operatorname{Re} A \subset \overline{\operatorname{Re} A}$. Soit $x \in D(A)$. Alors
$$(\operatorname{Re} A)x = (\overline{\operatorname{Re} A})x.$$
Comme ci-dessus, il suffit de montrer que
$$|\overline{\operatorname{Re} A}|^2 \le |A|^2.$$
En vertu de la fermeture de A, on a
$$D(|A|) = D(A) = D(\operatorname{Re} A) \subset D(\overline{\operatorname{Re} A}) = D(|\overline{\operatorname{Re} A}|).$$
Soit $x \in D(|A|)$. On utilise le fait que A est hyponormal pour obtenir
$$\||\overline{\operatorname{Re} A}|x\| = \|(\overline{\operatorname{Re} A})x\| = \|(\operatorname{Re} A)x\| \le \frac{1}{2}(\|Ax\| + \|A^*x\|) \le \|Ax\| = \||A|x\|,$$
i.e. $|\overline{\operatorname{Re} A}|^2 \le |A|^2$. En utilisant l'inégalité de Heinz, on conclut que
$$|\overline{\operatorname{Re} A}| \le |A|.$$
□

De manière similaire, on peut montrer :

Proposition 4.2.2. *Soit A un opérateur fermé hyponormal. Alors*
$$|\overline{\operatorname{Im} A}| \le |A|$$
où $\overline{\operatorname{Im} A}$ désigne la fermeture de $\operatorname{Im} A$.

Le théorème suivant est une réponse partielle dans le cas non-borné de la conjecture de Fong-Tsui qui a été posée dans le cas borné.

Théorème 4.2.3. *Soit A un opérateur normal tel que*

$$|A| \leq |\overline{\mathrm{Re}\, A}|.$$

Alors A est forcément autoadjoint.

Démonstration. Puisque A est normal, il est évidemment fermé et hyponormal, et donc en vertu de la proposition 4.2.1 on a $|\overline{\mathrm{Re}\, A}| \leq |A|$. En utilisant l'hypothèse du théorème on obtient

$$|A| = |\overline{\mathrm{Re}\, A}|.$$

Par la normalité de A, on a $D(A) = D(A^*)$. Comme $\overline{\mathrm{Re}\, A}$ est autoadjoint, on peut écrire

$$D[(\mathrm{Re}\, A)^*] = D[(\overline{\mathrm{Re}\, A})^*] = D(\overline{\mathrm{Re}\, A}) = D(|A|) = D(A)$$

et

$$\|A^*x\| = \|Ax\| = \||A|x\| = \||\overline{\mathrm{Re}\, A}|x\| = \|\overline{\mathrm{Re}\, A}x\| = \|(\mathrm{Re}\, A)^*x\|.$$

Donc les conditions du théorème 3 de [19] sont vérifiées, d'où $A = A^*$. □

Théorème 4.2.4. *Soient A et B deux opérateurs non-bornés, normaux, et commutant fortement. Alors,*

$$|\overline{A+B}| \leq |A| + |B|.$$

Démonstration. Puisque A et B sont normaux, en vertu du théorème spectral, on peut écrire

$$A = \int_{\mathbb{C}} z dE_A \text{ et } B = \int_{\mathbb{C}} z' dF_B,$$

où E_A et F_B désignent les mesures spectrales associées. Comme A et B commutent fortement, alors il en est de même pour $|A|$ et $|B|$. Puisque $|A|$ et $|B|$ sont aussi autoadjoints et positifs, alors $|A|+|B|$ est autoadjoint [32] (et donc fermé) et positif. De plus :

$$D(|A|+|B|) = D(|A|)\cap D(|B|) = D(A)\cap D(B) = D(A+B) \subset D(\overline{A+B}) \subset D(|\overline{A+B}|).$$

Par la commutativité forte on a :

$$E_A(I)F_B(J) = F_B(J)E_A(I)$$

pour tous les ensembles boréliens I et J sur $\mathbb{C}$. D'où

$$E_{A,B}(z,z') = E_A(z)F_B(z')$$

définit une mesure spectrale à deux paramètres. Ainsi

$$C = \iint\limits_{\mathbb{C}^2} (z+z')dE_{A,B}$$

définit un opérateur normal tel que $C = \overline{A+B}$. Puisque $|z+z'| \leq |z| + |z'|$ pour tous z, z', et de là découle

$$|\overline{A+B}| = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} |z+z'|dE_{A,B}(z,z') \leq |A| + |B|$$

(on utilise la positivité de la mesure $< E_{A,B}(\Delta)x, x >$ avec Δ un sous-ensemble borélien de $\mathbb{R}^2$). En fait, ce qu'on a montré jusqu'à présent est "seulement" :

$$|\overline{A+B}| \preceq |A| + |B|.$$

Autrement dit, on a montré que

$$< |\overline{A+B}|x, x > \leq < (|A| + |B|)x, x >$$

pour tout $x \in D(|A| + |B|) \subset D(|\overline{A+B}|)$.
Comme $|\overline{A+B}|$ et $|A| + |B|$ sont autoadjoints et positifs, alors " $\preceq$ " devient " $\leq$ ", c'est-à-dire qu'on a montré l'inégalité

$$|\overline{A+B}| \leq |A| + |B|.$$

□

Remarque. La commutativité forte d'opérateurs normaux A et B ne suffit pas en général pour que la somme $A + B$ soit fermée même lorsque A et B sont auto-adjoints, comme le montre l'exemple habituel : On considère un opérateur A non-borné, auto-adjoint, de domaine $D(A)$ non-fermé. Alors $B = -A$ est aussi auto-adjoint et évidemment il commute fortement avec A, mais $A + B = 0$ est borné sur $D(A)$ n'est pas fermé (car sinon $D(A)$ serait fermé).

Exemples 4.2.2. 1. Soit $A = \frac{d^2}{dx^2}$ et $B = \frac{d}{dx}$ définis sur les espaces de Sobolev $H^2(\mathbb{R})$ et $H^1(\mathbb{R})$ respectivement. Alors A et B sont fermés. De plus,

$$ABf(x) = BAf(x) = f'''(x)$$

pour tout f appartenant au domaine commun $\{f \in L^2(\mathbb{R}) : f''' \in L^2(\mathbb{R})\}$. On sait que A est auto-adjoint, et que B et AB sont normaux. Donc, A et B commutent fortement.

Une façon de trouver explicitement $|A|$ et $|B|$ est via la transformée L^2-Fourier qu'on désigne par $\mathcal{F}$. Evidemment

$$(\mathcal{F}^*|A|\mathcal{F})f(t) = t^2 f(t) \text{ et } (\mathcal{F}^*|B|\mathcal{F})f(t) = |t|f(t).$$

On observe aussi qu'en utilisant la transformée de Fourier, on peut montrer que $A + B$ est normal (donc fermé). Par conséquent, on obtient

$$\left|\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx}\right| \le \left|\frac{d^2}{dx^2}\right| + \left|\frac{d}{dx}\right|.$$

2. On considère l'opérateur de Cauchy-Riemann

$$\overline{\partial} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})$$

et définissons $T = 2\overline{\partial},\ A = \frac{\partial}{\partial x}$ et $B = \frac{\partial}{\partial y}$ sur $L^2(\mathbb{R}^2)$. Les domaines sont

$$D(A) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^2) : Af \in L^2(\mathbb{R}^2)\},\ D(B) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^2) : Bf \in L^2(\mathbb{R}^2)\}$$

et $D(T) = D(A) \cap D(B)$. On peut montrer que A et B commutent fortement comme ci-dessus.

Ainsi, T est normal comme il est unitairement équivalent à l'opérateur de multiplication par la fonction $(\lambda, \mu) \mapsto i\lambda - \mu$ à valeurs complexes défini sur $L^2(\mathbb{R}^2)$. Comme ci-dessus, on utilise la transformée de Fourier $\mathcal{F}$ (sur $L^2(\mathbb{R}^2)$ cette fois-ci) pour obtenir

$$\left|\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right| \le \left|\frac{\partial}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial}{\partial y}\right|.$$

Remarque. Les deux exemples ci-dessus peuvent être traités assez facilement en utilisant la transformée de Fourier sur L^2. Par exemple, pour le premier cas :

$$\left|\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx}\right| \le \mathcal{F}M\mathcal{F}^*$$

avec $Mf(t) = (t^2 + |t|)f(t)$.
Dans le second cas, on utilise la transformée de Fourier $\mathcal{F}$ (sur $L^2(\mathbb{R}^2)$ cette fois) pour obtenir :

$$\left|\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right| \leq \mathcal{F}M\mathcal{F}^*$$

avec $Mf(\lambda, \mu) = (|\lambda| + |\mu|)f(\lambda, \mu)$.

Corollaire 4.2.3. *Soit A un opérateur normal. Alors*

$$|A| \leq |\overline{\operatorname{Re} A}| + |\overline{\operatorname{Im} A}|.$$

Démonstration. Comme A est normal, $\overline{\operatorname{Re} A}$ et $\overline{\operatorname{Im} A}$ sont des opérateurs auto-adjoints commutant fortement. D'où $\overline{\operatorname{Re} A}$ et $i\overline{\operatorname{Im} A}$ sont des opérateurs normaux commutant fortement. Maintenant, on applique le théorème 4.2.4. □

Corollaire 4.2.4. *Soient A et B des opérateurs normaux où $B \in \mathcal{B}(H)$. Si $BA \subset AB$, alors*

$$|A + B| \leq |A| + |B|.$$

Démonstration. Comme $B \in \mathcal{B}(H)$, la condition $BA \subset AB$ équivaut à la forte commutativité de A et B. Il est également évident que $A + B$ est fermé et cela termine la preuve. □

On obtient, comme conséquence intéressante, une caractérisation de l'inversibilité pour la classe des opérateurs normaux non-bornés.

Proposition 4.2.3. *Soit A un opérateur normal. Alors*

$$A \text{ est inversible} \iff |\overline{\operatorname{Re} A}| + |\overline{\operatorname{Im} A}| \text{ est inversible.}$$

Particulièrement, si $\lambda = \alpha + i\beta$, alors

$$\lambda \in \sigma(A) \iff |\overline{\operatorname{Re} A} - \alpha I| + |\overline{\operatorname{Im} A} - \beta I| \text{ n'est pas inversible.}$$

Démonstration. Puisque A est inversible, $|A|$ l'est aussi. D'où d'après le corollaire 4.2.3, $|\overline{\operatorname{Re} A}| + |\overline{\operatorname{Im} A}|$ est inversible aussi. Inversement, d'après les propositions 4.2.1 et 4.2.2

$$|\overline{\operatorname{Re} A}| \leq |A| \text{ et } |\overline{\operatorname{Im} A}| \leq |A|.$$

D'où, d'après les mêmes arguments comme dans les preuves précédentes, on peut facilement établir

$$|\overline{\operatorname{Re} A}| + |\overline{\operatorname{Im} A}| \leq 2|A|.$$

Ainsi, l'inversibilité de $|\overline{\operatorname{Re} A}| + |\overline{\operatorname{Im} A}|$ implique l'inversibilité de $|A|$. Puisque ce dernier signifie que l'opérateur normal A est inversible à gauche, on obtient que A est inversible. □

Une autre conséquence est la suivante :

Corollaire 4.2.5. *Soit A un opérateur normal. Alors*

$$\sigma(A) \subset \sigma(\overline{\operatorname{Re} A}) + i\sigma(\overline{\operatorname{Im} A})$$

où la somme des ensembles est définie de la manière habituelle.

Démonstration. Soit $\lambda = \alpha + i\beta \in \sigma(A)$. D'après la proposition 4.2.3, $|\overline{\operatorname{Re} A} - \alpha I| + |\overline{\operatorname{Im} A} - \beta I|$ n'est pas inversible. Si $|\overline{\operatorname{Re} A} - \alpha I|$ ou $|\overline{\operatorname{Im} A} - \beta I|$ est inversible, alors $|\overline{\operatorname{Re} A} - \alpha I| + |\overline{\operatorname{Im} A} - \beta I|$ serait inversible. Donc $|\overline{\operatorname{Re} A} - \alpha I|$ et $|\overline{\operatorname{Im} A} - \beta I|$ ne sont pas inversibles, i.e. $\overline{\operatorname{Re} A} - \alpha I$ et $\overline{\operatorname{Im} A} - \beta I$ ne sont pas inversibles. En d'autres termes, $\alpha \in \sigma(\overline{\operatorname{Re} A})$ et $\beta \in \sigma(\overline{\operatorname{Im} A})$. Par conséquent, $\lambda \in \sigma(\overline{\operatorname{Re} A}) + i\sigma(\overline{\operatorname{Im} A})$. □

On obtient également une preuve très simple et originale de l'inclusion dans $\mathbb{R}$ du spectre d'opérateurs non-bornés auto-adjoints.

Corollaire 4.2.6. *Soit A un opérateur auto-adjoint. Alors $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.*

Démonstration. Soit $\lambda \notin \mathbb{R}$, i.e. $\lambda = \alpha + i\beta \quad (\alpha \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R}^*)$. Puisque $A - \alpha I$ est auto-adjoint, alors $A - \alpha I - i\beta I$ est normal. D'après l'inversibilité de $|\beta| I$, il en résulte que $|A - \alpha I| + |\beta I|$ $(\geq |\beta| I)$. D'après la proposition 4.2.3 cela signifie simplement que $A - \lambda I$ est inversible, c'est-à-dire, $\lambda \notin \sigma(A)$. □

En utilisant une démonstration par récurrence, on peut généraliser le théorème 4.2.4 à une famille finie d'opérateurs normaux.

Théorème 4.2.5. *Soit $(A_i)_{i=1,\cdots,n}$ une famille d'opérateurs normaux, commutant fortement deux-à-deux. Alors*

$$|\overline{A_1 + A_2 + \cdots + A_n}| \leq |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|.$$

Corollaire 4.2.7. *Soit $(A_i)_{i=1,\cdots,n}$ une famille d'opérateurs normaux, commutant fortement deux-à-deux. Si $B \in \mathcal{B}(H)$ est hyponormal et $BA_i \subset A_i B$ pour $i = 1, 2, \cdots, n$, alors*

$$|\overline{A_1 + A_2 + \cdots + A_n} + B| \leq |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n| + |B|.$$

Passons à présent à une autre inégalité triangulaire.

Théorème 4.2.6. *Soient A un opérateur normal et $B \in \mathcal{B}(H)$ hyponormal. Si $BA \subset AB$, alors*

$$||A| - |B|| \leq |A + B|.$$

Démonstration. La preuve est assez similaire à celle du théorème 4.2.1 et on omet certains détails. Clairement, $|A|-|B|$ et $A+B$ sont fermés et

$$D(|A+B|)=D(A+B)=D(A)=D(|A|)=D(|A|-|B|)=D(||A|-|B||).$$

Soit $x\in D(A)$. Alors

$$\begin{aligned}\|||A|-|B||x\|^2 &= \|(|A|-|B|)x\|^2\\ &=<(|A|-|B|)x,(|A|-|B|)x>\\ &=\||A|x\|^2+\||B|x\|^2-<|A|x,|B|x>-<|B|x,|A|x>\\ &=\||A|x\|^2+\||B|x\|^2-<|B||A|x,x>-<|A||B|x,x>\\ &=\||A|x\|^2+\||B|x\|^2-2<|A||B|x,x>\\ &=\||A|x\|^2+\||B|x\|^2-2<|A^*||B|x,x>\\ &=\||A|x\|^2+\||B|x\|^2-2<|A^*B|x,x>.\end{aligned}$$

Puisque A^*B est fermé et hyponormal, on a pour tout x :

$$|<A^*Bx,x>|\leq<|A^*B|x,x>$$

et donc

$$-2<|A^*B|x,x>\leq -2|<A^*Bx,x>|\leq 2\,\mathrm{Re}(<A^*Bx,x>).$$

D'où

$$\begin{aligned}\|||A|-|B||x\|^2 &\leq \||A|x\|^2+\||B|x\|^2+2\,\mathrm{Re}(<A^*Bx,x>)\\ &=\||A|x\|^2+\||B|x\|^2+<A^*Bx,x>+\overline{<A^*Bx,x>}\\ &=\||A|x\|^2+\||B|x\|^2+<A^*Bx,x>+<x,A^*Bx>\\ &=\||A|x\|^2+\||B|x\|^2+<Bx,Ax>+<Ax,Bx>\\ &=\|Ax\|^2+\|Bx\|^2+<Bx,Ax>+<Ax,Bx>\\ &=\|(A+B)x\|^2\\ &=\||A+B|x\|^2.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\|||A|-|B||x\|\leq\||A+B|x\|,$$

i.e. on a montré que

$$||A|-|B||^2\leq|A+B|^2$$

ou simplement

$$||A|-|B||\leq|A+B|.$$

$\square$

Corollaire 4.2.8. *Soient A un opérateur normal et $B \in \mathcal{B}(H)$ hyponormal. Si $BA \subset AB$, alors*

$$||A| - |B|| \leq |A - B|.$$

On peut se demander si on peut adapter la démonstration du théorème 4.2.4 pour généraliser le théorème précédent à un couple d'opérateurs normaux non-bornés et commutant fortement ? La première observation conduit à un problème de domaines qui semble être une difficulté insurmontable à moins d'imposer une condition supplémentaire. Par exemple :

Théorème 4.2.7. *Soient A et B deux opérateurs normaux non-bornés qui commutent fortement. Si $D(\overline{A+B}) \subset D(\overline{|A| - |B|})$, alors,*

$$|\overline{|A| - |B|}| \leq |\overline{A+B}|.$$

Démonstration. La plupart des détails seront omis. On écrit

$$A = \int_{\mathbb{C}} z dE_A \text{ et } B = \int_{\mathbb{C}} z' dF_B.$$

Alors

$$|\overline{|A| - |B|}| = \int\int_{\mathbb{R}^2} ||z| - |z'|| dE_{A,B}$$

et

$$|\overline{A+B}| = \int\int_{\mathbb{R}^2} |z + z'| dE_{A,B}.$$

Par le même argument utilisé dans le théorème 4.2.4 on obtient l'inégalité requise :

$$|\overline{|A| - |B|}| \leq |\overline{A+B}|.$$

□

Remarque. La condition $D(\overline{A+B}) \subset D(\overline{|A| - |B|})$ peut être supprimée à condition de la remplacer par B (par exemple) est A-borné par une borne strictement inférieure à un. Dans ce cas $A + B$ est fermé. Comme $|B|$ est aussi $|A|$-borné, $|A| - |B|$ est aussi fermé. Tout le reste reste inchangé.

On termine avec une inégalité liée.

Proposition 4.2.4. *Si A est un opérateur normal, alors*

$$|\overline{|\overline{\operatorname{Re} A}| - |\overline{\operatorname{Im} A}|}| \leq |A|.$$

Démonstration. On sait que $||\operatorname{Re} z| - |\operatorname{Im} z|| \leq |z|$ pour tout complexe z. Egalement,

$$|\overline{\operatorname{Re} A}| = \int_{\mathbb{R}} |\operatorname{Re} z| dE_{\overline{\operatorname{Re} A}} \text{ et } |\overline{\operatorname{Im} A}| = \int_{\mathbb{R}} |\operatorname{Im} z| dF_{\overline{\operatorname{Im} A}}.$$

Comme $|\overline{\operatorname{Re} A}|$ et $|\overline{\operatorname{Im} A}|$ sont des opérateurs autoadjoints et commutant grâce à la normalité de A, on peut former la double intégrale définissant $|\overline{|\overline{\operatorname{Re} A}| - |\overline{\operatorname{Im} A}|}|$. Donc, il suffit de vérifier l'inclusion souhaitée de domaines (puis de procéder comme dans la preuve du théorème 4.2.4). Puisque A est normal, $D(A) = D(A^*)$. D'où

$$D(A) = D(\operatorname{Re} A) \subset D(\overline{\operatorname{Re} A}) = D(|\overline{\operatorname{Re} A}|) \text{ et } D(A) = D(|\overline{\operatorname{Im} A}|)$$

et donc

$$D(|A|) = D(A) \subset D(|\overline{\operatorname{Re} A}|) \cap D(|\overline{\operatorname{Im} A}|) = D(|\overline{|\overline{\operatorname{Re} A}| - |\overline{\operatorname{Im} A}|}|),$$

ce qui termine la démonstration. □

4.2.1 Perspectives

Bien que nous ayons traité plusieurs résultats sur la valeur absolue des opérateurs non-bornés, certaines questions restent sans réponse, par exemple :

1. Si $A, B \in \mathcal{B}(H)$ sont hyponormaux et commutants, est-ce que l'inégalité suivante est vérifiée ?
$$|A + B| \leq |A| + |B|$$
Cette question est intéressante dans le sens où il n'y a pas de contre exemple lorsque $\dim H < \infty$, car l'inégalité précèdente a été démontrée pour les opérateurs normaux et commutants (et on sait qu'en dim $< \infty$, les classes d'opérateurs normaux et hyponormaux coïncident).
2. Est-ce qu'on peut affaiblir le théorème 4.2.3 à la classe des opérateurs hyponormaux fermés sans ajouter d'autres hypothèses ?
3. Est-ce qu'on peut montrer que $|\overline{|A| - |B|}| \leq |\overline{A + B}|$ en supposant uniquement que A et B sont des opérateurs normaux qui commutent fortement ?
4. Est-ce qu'on peut généraliser le théorème 4.2.5 en une somme infinie ? i.e est-ce que l'inégalité $|\overline{\sum_{i=0}^{\infty} A_i}| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |A_i|$ est vérifiée sous certaines conditions ?
5. En considérant une famille $A_n \in \mathcal{B}(H)$ normaux qui commutent deux-à-deux, est-ce que l'inégalité $|\sum_{n=1}^{\infty} A_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |A_n|$ a lieu ?

Bibliographie

[1] A. Arai, *Generalized weak Weyl relation and decay of quantum dynamics* , Rev. Math.Phys., 17/9 (2005) 1071-1109.

[2] S. J. Bernau, *The square root of a positive self-adjoint operator*, J. Austral. Math. Soc., 8 (1968) 17-36.

[3] R. Bhatia, *Matrix analysis*, Graduate Texts in Mathematics, 169. Springer-Verlag, New york, 1997.

[4] M. Sh. Birman, M. Z. Solomjak, *Spectral theory of selfadjoint operators in Hilbert space*. Translated from the 1980 Russian original by S. Khrushchëv and V. Peller. Mathematics and its applications (Soviet Series). D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1987.

[5] Il Bong Jung, M. H. Mortad, J. Stochel, *On normal products of selfadjoint operators*, Kyungpook Math. J., 57 (2017) 457-471.

[6] I. Boucif, S. Dehimi, M. H. Mortad, *On the absolute value of unbounded operators*, J. Operator Theory, **82/2 (2019)**, 285-306.

[7] P. R. Chernoff,*A Semibounded Closed Symmetric Operator Whose Square Has Trivial Domain*, Proc. Amer. Math. Soc., 89/2 (1983) 289-290.

[8] J. B. Conway, *A course in functional analysis*, Graduate Texts in Mathematics, 96. Springer-Verlag, 1990 (2nd edition).

[9] S. Dehimi, M. H. Mortad, *Generalizations of Reid Inequality*, Mathematica Slovaca, 68/6 (2018) 1439-1446.

[10] S. Dehimi, M. H. Mortad, *Right (or left) invertibility of bounded and unbounded operators and applications to the spectrum of products*, Complex Anal. Oper. Theory, 12/3 (2018) 589-597.

[11] S. Dehimi, M. H. Mortad, Chernoff Like Counterexamples Related to Unbounded Operators, *Kyushu J. Math.*, (à paraître).

[12] A. Devinatz, A. E. Nussbaum, *On the Permutability of Normal Operators*, Ann. of Math. (2), 65 (1957) 144-152.

[13] C. K. Fong, S. K. Tsui, *A note on positive operators*, J. Operator Theory, 5/1, (1981) 73-76.

[14] T. Furuta, *Invitation to linear operators : From matrices to bounded linear operators on a Hilbert Space*, Taylor & Francis, Ltd., London, 2001.

[15] F. Gesztesy, K. Schmüdgen, On a theorem of Z. Sebestyén and Zs. Tarcsay, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **85/1-2** (2019) 291-293.

[16] K. Gustafson, M. H. Mortad, *Conditions implying commutativity of unbounded selfadjoint operators and related topics*, J. Operator Theory, 76/1 (2016) 159-169.

[17] R. Harte, *The triangle inequality in C^* algebras*, Filomat No. 20, part 2 (2006), 51-53.

[18] Z. J. Jablonski, Il B. Jung, J. Stochel, *Unbounded quasinormal operators revisited*, Integral Equations Operator Theory 79/1 (2014) 135-149.

[19] D. Jocic, *A characterization of formally symmetric unbounded operators*, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.), 46(60) (1989), 141-144.

[20] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer, 1980 (2nd edition).

[21] M. Meziane, M. H. Mortad, Maximality of Linear Operators, *Rend. Circ. Mat. Palermo, Ser II.*, **68/3** (2019) 441-451.

[22] M. H. Mortad, *An application of the Putnam-Fuglede theorem to normal products of selfadjoint operators*, Proc. Amer. Math. Soc. 131/10 (2003) 3135-3141.

[23] M. H. Mortad, *Self-adjointness of the Perturbed Wave Operator on $L^2(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 2$*, Proc. Amer. Math. Soc., 133/2 (2005) 455-464.

[24] M. H. Mortad, An all-unbounded-operator version of the Fuglede-Putnam theorem, *Complex Anal. Oper. Theory*, **6/6** (2012) 1269-1273.

[25] M. H. Mortad, *A contribution to the Fong-Tsui conjecture related to self-adjoint operators*. arXiv :1208.4346.

[26] M. H. Mortad, On the normality of the sum of two normal operators, *Complex Anal. Oper. Theory,* **6/1** (2012) 105-112.

[27] M. H. Mortad, *An Operator Theory Problem Book*, World Scientific Publishing Co., (2018) (hardcover).

[28] M. H. Mortad, On The Absolute Value of The Product and the Sum of Linear Operators, *Rend. Circ. Mat. Palermo, II. Ser*, **68/2** (2019) 247-257.

[29] M. H. Mortad, On the triviality of domains of powers and adjoints of closed operators, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, (à paraître). DOI : 10.14232/actasm-018-857-5.

[30] M. H. Mortad, On the Invertibility of the Sum of Operators, *Anal. Math.*, (à paraître).

[31] G. K. Pedersen, *Some operator monotone functions*, Proc. Amer. Math. Soc., 36 (1972) 309-310.

[32] C. R. Putnam, *Commutation properties of Hilbert space operators and related topics*, Springer-Verlag, New York, 1967.

[33] M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics*, Vol. 1 : Functional Analysis, Academic Press, 1972.

[34] M. Rosenblum, On a theorem of Fuglede and Putnam, *J. London Math. Soc.*, **33, (1958)** 376-377.

[35] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill Book Co., Second edition, International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill, Inc., New York, 1991.

[36] K. Schmüdgen, *Unbounded self-adjoint operators on Hilbert space*, Springer GTM 265 (2012).

[37] Z. Sebestyén, Z. Tarcsay, *A reversed von Neumann theorem*, Acta Sci. Math. (Szeged), 80/3-4 (2014) 659-664.

[38] Z. Sebestyén, Z. Tarcsay, *On the square root of a positive selfadjoint operator*, Period. Math. Hungar., 75/2 (2017) 268-272.

[39] B. Simon, *Operator theory*. A comprehensive course in analysis, Part 4. American Mathematical Society, Providence, RI, 2015.

[40] F. Tian, *On commutativity of unbounded operators in Hilbert space*. Thesis (Ph.D.) The University of Iowa (2011). http ://ir.uiowa.edu/etd/1095/.

[41] J. Weidmann, *Linear operators in Hilbert spaces* (translated from the German by J. Szücs), Springer-Verlag, GTM 68 (1980).

[42] R. Zeng. *Young's inequality in compact operators-the case of equality*, JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math., 6/4 (2005), Article 110, 10pp.

[43] X. Zhan, *Matrix inequalities*, Lecture Notes in Mathematics, 1790. Springer-Verlag, Berlin, 2002.