УДК 512.552

Бивекторная алгебра

С. Я. Котковский

В настоящей работе изучается алгебра бикватернионов ненулевой меры с их главной подалгеброй в виде комплекснозначных трехмерных векторов, которые в свою очередь подразделяются на моновекторы и бивекторы. Исследуются свойства комплексных векторов аналогичные параллельности и ортогональности обычных вещественных векторов. Найдены векторные структуры, цикличные относительно произведения, и доказана теорема о тождественности векторного цикла и ориентированного базиса. Как мы выяснили, базисы комплексного векторного пространства так же, как и в вещественном случае распадаются на две ориентации, непереводимые друг в друга непрерывными преобразованиями. Сравнение свойств бивекторов и нульвекторов при унитарных преобразованиях и их циклических структур позволяет говорить об однозначном соответствии этих алгебр заряженным частицам и свету. Тем самым даётся алгебраическое обоснование ключевого для физики векторного характера электромагнитного поля.

Ключевые слова: бикватернионы, комплексные векторы, моновекторы, бивекторы, нульвекторы, циклические структуры, ориентация, параллельность, ортогональность, векторный базис, электромагнитное поле.

1. Введение

Трехмерные комплексные векторы представляют собой частный случай бикватернионов, и их изучение невозможно без привлечения бикватернионной алгебры. Это можно непосредственно увидеть в том, что произведение двух векторов есть сумма скалярного и векторного произведений, в целом представляющая собой бикватернион. Тем не менее существует круг операций, включаюших сумму, унитарные преобразования (преобразования Лоренца), а также циклические произведения, относительно которых пространство этих векторов замкнуто. Эти свойства позволяют выделить собственную алгебру комплексных векторов, лежащую в основе теории электромагнитного поля.

2. Бикватернионы и комплексные векторы

Как и в работе [1] мы используем скалярно-векторное представление бикватернионов, в котором бикватернион $\mathscr{B}$ есть связка (сумма) комплексного числа $s = Sc(\mathscr{B})$ и трёхмерного комплексного вектора $\mathbf{u} = Vec(\mathscr{B})$:

$$\mathscr{B} = (s, \mathbf{u}) \equiv s + \mathbf{u}, \; s \in \mathbb{C}, \mathbf{u} \in \mathbb{C}^3 \tag{2.1}$$

а произведение двух бикватернионов $\mathscr{B}_1 = (s_1, \mathbf{u}_1)$ и $\mathscr{B}_2 = (s_2, \mathbf{u}_2)$ есть:

$$\mathscr{B}_1 * \mathscr{B}_2 \equiv \mathscr{B}_1\mathscr{B}_2 = (s_1 s_2 + (\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2), s_1\mathbf{u}_2 + s_2\mathbf{u}_2 + i[\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2]) \tag{2.2}$$

где $(\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2) \equiv \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2$ и $[\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2] \equiv \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2$ — соответственно скалярное и векторное произведения векторов $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$. В наших обозначениях $\mathbb{R}^\mathbf{3}$ и $\mathbb{C}^\mathbf{3}$ есть соответственно вещественное и комплексное трехмерные векторные пространства. Бикватернионное произведение двух векторов выражается в виде:

$$\mathbf{u}_1 * \mathbf{u}_2 = (\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2) + i[\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2] \tag{2.3}$$

Такое произведение векторов является клиффордовым [3], т.е. представляющим собой сумму внутреннего (скалярного) и внешнего (векторного) произведений. Здесь и далее под *вектором* мы понимаем комплексный вектор (векторную часть бикватерниона):

$$\mathbf{u} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}, \; \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^\mathbf{3} \tag{2.4}$$

специально оговаривая те случаи, когда рассматриваемые векторы сугубо вещественные. Бикватернион $\mathscr{B}$, имеющий данный вектор $\mathbf{u}$ в качестве векторной части: $\mathbf{u} = Vec(\mathscr{B})$, будем называть *образованным* от $\mathbf{u}$.

Определение 1. Бикватернион, *сопряжённый* данному бикватерниону $\mathscr{B} = (s, \mathbf{u})$, есть:

$$\overline{\mathscr{B}} \equiv (s, -\mathbf{u}) \tag{2.5}$$

Определение 2. Комплексное число

$$\|\mathscr{B}\| \equiv \mathscr{B}\overline{\mathscr{B}} = s^2 - \mathbf{u}^2 \tag{2.6}$$

называется *мерой*, или *квадратом модуля*, бикватерниона $\mathscr{B} = (s, \mathbf{u})$.

Мера бикватернионов обладает свойством мультипликативности:

$$\|\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2\| = \|\mathscr{B}_1\| \, \|\mathscr{B}_2\| \tag{2.7}$$

В зависимости от меры, все бикватернионы подразделяются на нулькватернионы и ненулевые бикватернионы. *Нулькватернионами* мы называем бикватернионы меры 0, а все остальные бикватернионы *ненулевыми*. Эта же классификация переносится на векторы, как частные случаи бикватернионов, откуда следует, что все векторы подразделяются на *нульвекторы* и *ненулевые векторы*.

Определение 3. Бикватернионы $\mathscr{B}_1$ и $\mathscr{B}_2$ *приводимы* друг к другу, если существует $c \in \mathbb{C}, c \neq 0$: $\mathscr{B}_2 = c\mathscr{B}_1$.

Частными случаями приводимости, когда множитель c чисто вещественный или чисто мнимый, является подобие бикватернионов:

Определение 4. Бикватернионы $\mathscr{B}_1$ и $\mathscr{B}_2$ *подобны*, если существует $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$: $\mathscr{B}_2 = \alpha\mathscr{B}_1$ или $\mathscr{B}_2 = i\alpha\mathscr{B}_1$.

3. Моновекторы и бивекторы

Определение 5. Ненулевой вектор $\mathbf{v} = \mathbf{a} + i\mathbf{b},\ \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{\mathbf{3}}$ называется *моновектором*, если $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ или один из векторов $\mathbf{a}$ или $\mathbf{b}$ равен 0.

Определение 6. Ненулевой вектор $\mathbf{w} = \mathbf{A} + i\mathbf{B},\ \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{\mathbf{3}}$ *правильный*, если $\mathbf{A}, \mathbf{B} \neq 0$ и $\mathbf{A} \perp \mathbf{B}$.

Определение 7. Ненулевой вектор $\mathbf{w}$ называется *бивектором*, если существуют правильный вектор $\mathbf{w}_0$, к которому он приводим.

Очевидно, что любой правильный вектор сам является бивектором. Критерием правильности бивектора является вещественность его квадрата: $\mathbf{w}^2 \in \mathbb{R}$, в чем можно убедиться путем разложения: $\mathbf{w}^2 = \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2 + 2i(\mathbf{AB}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2 \in \mathbb{R} \ \Leftrightarrow (\mathbf{AB}) = 0$.

Теорема 1. *Каждый ненулевой вектор* $\mathbf{u}$ *является либо моновектором, либо бивектором.*

Пусть $\mathbf{u} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$. Если $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ или один из векторов $\mathbf{a}$ или $\mathbf{b}$ равен 0, то $\mathbf{u}$ моновектор по определению. Покажем, что в противном случае $\mathbf{u}$ приводим к правильному. Будем искать этот правильный вектор в виде: $\mathbf{w} = \mathbf{A} + i\mathbf{B}, \mathbf{A} \perp \mathbf{B}$. а комплексно-числовой множитель в виде $c = \alpha + i\beta, \alpha^2 + \beta^2 = 1$. Тогда условие $\mathbf{u} = c\mathbf{w}$ сводится к системе двух линейных уравнений:

$$\begin{cases} \mathbf{a} = \alpha\mathbf{A} - \beta\mathbf{B} \\ \mathbf{b} = \beta\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B} \end{cases} \tag{3.1}$$

которая имеет решение:

$$\begin{cases} \mathbf{A} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} \\ \mathbf{B} = \alpha\mathbf{b} - \beta\mathbf{a} \end{cases} \tag{3.2}$$

существующее при $\mathbf{A} \perp \mathbf{B}$. Действительно, применяя условие $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = 0$ к решению (3.2), получаем уравнение

$$p(\alpha^2 - \beta^2) + q\alpha\beta = 0,\ p = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}),\ q = \mathbf{b}^2 - \mathbf{a}^2 \tag{3.3}$$

Поскольку вектор $\mathbf{u}$ не является моновектором или нульвектором, то $p \neq 0, q \neq 0$. Окончательно получаем уравнение для α:

$$\alpha^4 - \alpha^2 + \frac{1}{4 + r} = 0,\ r = \frac{q^2}{p^2} \tag{3.4}$$

которое всегда имеет решение: $\alpha^2 = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{4+r}})$. ⊠

Из доказательства теоремы 1 также следует

Лемма 1. *Операция приведения, т.е. умножения на комплексное число, оставляет моновектор моновектором, а бивектор бивектором.*

Лемма 2. *Для каждого ненулевого вектора* $\mathbf{u}$ *критерием его моновекторности служит тождество:*

$$[\mathbf{u}\mathbf{u}^*] = 0 \tag{3.5}$$

а критерием бивекторности неравенство:

$$[\mathbf{u}\mathbf{u}^*] \neq 0 \tag{3.6}$$

Для любого моновектора $\mathbf{u} = c\mathbf{a},\ c \in \mathbb{C}, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^{\not\mathbb{K}}$ выполняется (3.5), т.к. $\mathbf{u}^* = c^*\mathbf{a}$ и $[\mathbf{aa}] = 0$. Покажем, что (3.5) влечет за собой моновекторность $\mathbf{u}$. Пусть $\mathbf{u} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$. Тогда из (3.5) следует $[\mathbf{ab}] = 0$, что возможно для вещ. векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ только, когда они параллельны или один из них равен 0, т.е. когда $\mathbf{u}$ моновектор. Далее, согласно теореме 1 $\mathbf{u}$ есть либо моновектор, либо бивектор, а, значит, для бивекторов не может выполняться (3.5) и должно выполняться (3.6). ⊠

Классификация векторов переносится на ненулевые бикватернионы.

Определение 8. Ненулевой бикватернион, образованный от моновектора, называется *однородным*, а образованный от бивектора - *неоднородным*.

Заметим, что в литературе используется альтернативное нашему определение бивектора, как ориентированного паралеллограмма [4]. Изоморфизм так определенных бивекторов и бивекторов в нашей работе следует непосредственно из одинаково определенного в обоих случаях произведения бивекторов. Паре векторов, образующих ориентированный параллелограм, в нашем бивекторе сопоставляется пара, составленная из вещественного и мнимого векторов. Понятие ориентации бивектора будет рассмотрено в следующем разделе.

4. Бивекторные классы

Определение 9. *Ориентацией бивектора* $\mathbf{w} = \mathbf{a} + i\mathbf{b},\ \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{\not\mathbb{K}}$ называется вещ. единичный вектор, направленный по векторному произведению $[\mathbf{ab}]$:

$$\mathbf{n} = \frac{[\mathbf{ab}]}{|[\mathbf{ab}]|} \tag{4.1}$$

В отдельных случаях удобно вычислять ориентацию, как единичный вещ. вектор направленный по $i[\mathbf{ww}^*]$:

$$\mathbf{n} = i\lambda[\mathbf{ww}^*],\ \lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0 \tag{4.2}$$

Из последнего представления сразу видно, что приводимые бивекторы имеют одну и ту же ориентацию. Действительно, если $\mathbf{w}' = c\mathbf{w}$, то ориентация $\mathbf{w}'$ направлена по $i\mathbf{w}'\mathbf{w}'^* = i|c|^2\mathbf{ww}^*$, а значит, по ориентации $\mathbf{w}$. Обратное утверждение не имеет места: как мы увидим далее, два бивектора, имеющих одну ориентацию, могут быть не приводимы.

Определение 10. *Бивекторный класс* $\mathscr{K}$ это совокупность всех бивекторов, имеющих одну и ту же ориентацию.

Далее в нашей работе при отсутствии особых оговорок *классом* мы будем называть бивекторный класс. Вектор $\mathbf{n}$ является *определителем* класса $\mathscr{K}$:

$$\mathbf{n} \equiv Det\mathscr{K} = \frac{[\mathbf{ab}]}{|[\mathbf{ab}]|},\ \forall \mathbf{w} = \mathbf{a} + i\mathbf{b} \in \mathscr{K} \tag{4.3}$$

Очевидно, бивекторы одного класса лежат в одной плоскости. Существует, однако, и другой класс бивекторов, лежащих в той же плоскости, отвечающий противоположной ориентации.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Бивекторный класс $\mathscr{K}^*$ *сопряжен* данному классу $\mathscr{K}$, если его бивекторы лежат в той же плоскости, что и бивекторы $\mathscr{K}$, но имеют противоположную ориентацию.

Это означает, что определители сопряженных классов представляют собой противоположные единичные векторы. Бивекторы сопряженных классов находятся в отношении комплексного сопряжения к друг другу:

$$\forall \mathbf{w} \in \mathscr{K} : \ \mathbf{w}^* \in \mathscr{K}^* \tag{4.4}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. *Двухсторонний класс* $\tilde{\mathscr{K}}$ это совокупность всех бивекторов, лежащих в одной плоскости, а также однородных бикватернионов вида:

$$P = (s, \ c\mathbf{n}) \tag{4.5}$$

где $s, c \in \mathbb{C}, s^2 \neq c^2$, а $\mathbf{n}$ - вещ. вектор единичной длины, нормальный к этой плоскости.

Условие $s^2 \neq c^2$ требуется для исключения из множества P нулькватернионов. В качестве $\mathbf{n}$ можно выбрать любой из двух противоположных векторов нормальных к плоскости класса. Очевидно, любой бивектор или моновектор принадлежит только одному двухстороннему классу. Двухсторонний класс замкнут относительно операции умножения. Действительно, произведение его любых двух бивекторов всегда даёт бикватернион вида (4.5):

$$\mathbf{w}_1\mathbf{w}_2 = (s, c\mathbf{n}) \tag{4.6}$$

Произведение же $(s, c\mathbf{n})$ и бивектора $\mathbf{w}$ из $\tilde{\mathscr{K}}$ снова даёт бивектор $\mathbf{w}'$ из $\tilde{\mathscr{K}}$:

$$\mathbf{w}' = \mathbf{w}(s, c\mathbf{n}) = s\mathbf{w} + ic[\mathbf{wn}] \tag{4.7}$$

Совокупность бивекторов, принадлежащих данному двухстороннему классу, мы будем называть его *поперечником* $Tr(\tilde{\mathscr{K}})$, а совокупность однородных бикватернионов вида (4.5) - его *продольником* $Lat(\tilde{\mathscr{K}})$. Т.о. поперечник двухстороннего класса $\tilde{\mathscr{K}}$ есть объединение двух взаимно сопряженных бивекторных классов, имеющих общую плоскость:

$$Tr(\tilde{\mathscr{K}}) \ = \ \mathscr{K} \cup \mathscr{K}^* \tag{4.8}$$

Очевидно, что между плоскостями вещественного векторного трехмерного пространства и двухсторонними классами существует взаимно-однозначное соответствие. Поэтому принадлежность бивекторов одному двухстороннему классу мы можем по-другому обозначать как принадлежность этих бивекторов одной плоскости.

5. Унитарные векторы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. Бикватернион $\mathscr{U}$ единичной меры называется *унитарным*: $\|\mathscr{U}\| = 1$

Унитарные бикватернионы образуют мультипликативную группу: произведение двух унитарных бикватернионов снова даёт унитарный, у каждого унитарного бикватерниона существует обратный, число 1 является унитарным бикватернионом и представляет единицу группы.

Как частный случай бикватерниона, вектор $\mathbf{u}$ унитарен, когда $\mathbf{u}^2 = -1$, поскольку $\|\mathbf{u}\| = -\mathbf{u}^2$. Унитарный вектор может быть как моновектором, так и бивектором. Если бивектор $\mathbf{u} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$ унитарный, то он правильный:

$$\|\mathbf{u}\| = \mathbf{b}^2 - \mathbf{a}^2 - 2i(\mathbf{ab}) = 1 \;\Rightarrow\; (\mathbf{ab}) = 0 \tag{5.1}$$

В то же время правильный бивектор не обязан быть унитарным. Однако, правильный бивектор $\mathbf{w}$ всегда подобен (определение 4) некоторому унитарному $\mathbf{u}$. Действительно, пусть $\mathbf{w} = \mathbf{a} + i\mathbf{b},\ b > a$. Тогда $\|\mathbf{w}\| > 0$ и $\mathbf{w}$ подобен $\mathbf{u} = \pm\mathbf{w}/\sqrt{\|\mathbf{w}\|}$. Если же $b < a$, то $\|\mathbf{w}\| < 0$, и $\mathbf{w}$ подобен $\mathbf{u} = \pm i\mathbf{w}/\sqrt{-\|\mathbf{w}\|}$.

Произвольный неправильный бивектор $\mathbf{w}$ меры $c = \|\mathbf{w}\|$ может быть приведен к каждому из двух унитарных, а, значит, правильных бивекторов $\mathbf{u}_{1,2}$:

$$\mathbf{u}_{1,2} = \pm\frac{\mathbf{u}}{\sqrt{c}} \tag{5.2}$$

где $\sqrt{c}$ есть один из двух квадратных корней комплексного числа c.

Обратимся к построению произвольного бивектора данного класса $\mathscr{K}$. Пусть $\mathbf{u}_0$ некоторый унитарный бивектор, принадлежащий $\mathscr{K}$. Тогда любой другой правильный бивектор $\mathbf{u}$ этого класса может быть получен из $\mathbf{u}_0$ поворотом (с определителем этого класса $\mathbf{n} = Det(\mathscr{K})$ в качестве оси поворота) на некоторый угол ϕ и сжатия-растяжения, определяемого некоторым числом $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{u} = \alpha(\mathbf{u}_0 \cos\phi + [\mathbf{n}\mathbf{u_0}]\sin\phi) \tag{5.3}$$

Последнее преобразование иллюстрируется Рис.**??**.

Любой же неправильный бивектор $\mathbf{w}$ класса $\mathscr{K}$ приводится, согласно (5.2), к некоторому правильному бивектору, очевидно этого же класса, $\mathbf{u}$, в качестве которого можно взять, например, $\mathbf{u}_1$. Последний, в свою очередь, получается из $\mathbf{u_0}$ преобразованием (5.3). В итоге получаем, что любой бивектор $\mathbf{w}$ из $\mathscr{K}$ получается из $\mathbf{u_0}$ преобразованием поворота и приведения, т.е. умножения на некоторое комплексное число $d = \sqrt{c}\alpha$:

$$\mathbf{w} = \sqrt{c}\mathbf{u}_1 = \sqrt{c}\alpha(\mathbf{u}_0\cos\phi + [\mathbf{n}\mathbf{u}_0]\sin\phi) = d(\mathbf{u}_0\cos\phi + [\mathbf{n}\mathbf{u}_0]\sin\phi) \tag{5.4}$$

Как мы видели выше, в качестве базового вектора $\mathbf{u}_0$ можно выбрать любой унитарный бивектор данного класса.

6. Преобразования Лоренца

Давно известно бикватернионное представление преобразований пространства Минковского, по другому называемых преобразованиями Лоренца [5]. В настоящей статье нас будут интересовать векторные, т.е. переводящие вектор в вектор, лоренцевы преобразования.

Определение 14. *Непрерывным унитарным преобразованием*, или *преобразованием Лоренца*, мы назовём линейное преобразование бикватерниона $\mathscr{B}$ вида:

$$\mathscr{B}' = \overline{\mathscr{U}}\mathscr{B}\mathscr{U} \tag{6.1}$$

где $\mathscr{U}$ произвольный унитарный бикватернион: $\|\mathscr{U}\| = 1$.

Такие преобразования сохраняют меру:

$$\|\mathscr{B}'\| = \|\overline{\mathscr{U}}\|\|\mathscr{B}\|\|\mathscr{U}\| = \|\mathscr{B}\| \tag{6.2}$$

В силу этого нулькватернионы преобразуются в нулькватернионы, а ненулевые бикватернионы в ненулевые же. Непрерывное унитарное преобразование переводит вектор в вектор (без образования числовой части):

$$\mathbf{v}' = \overline{\mathscr{U}}\mathbf{v}\mathscr{U} \tag{6.3}$$

Непрерывные унитарные преобразования образуют группу (группу Лоренца), поскольку произведение унитарных бикватернионов есть снова унитарный бикватернион. Единицей группы является число 1.

Исследуем такие унитарные преобразования $\mathscr{U} = (s, \mathbf{u}),\ s \in \mathbb{C}, \mathbf{u} \in \mathbb{C}^3$, у которых $s \neq 0$ и $\mathbf{u}^2 \neq 0$. Поскольку числовая часть не равна 0, её можно выразить как $s = \operatorname{ch}\xi,\ \xi \in \mathbb{C}$. Из условия унитарности $s^2 - \mathbf{u}^2 = 1$, тогда $\mathscr{U}$ можно записать как:

$$\mathscr{U} = \operatorname{ch}\xi + \mathbf{k}\operatorname{sh}\xi,\ \mathbf{k} \in \mathbb{C}^3, \mathbf{k}^2 = 1 \tag{6.4}$$

Под действием преобразования (6.4), в соответствии с (6.3), вектор $\mathbf{v}$ переходит в $\mathbf{v}'$:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v}\operatorname{ch}2\xi - 2(\mathbf{vk})\mathbf{k}\operatorname{sh}^2\xi + i[\mathbf{vk}]\operatorname{sh}2\xi \tag{6.5}$$

Правая часть (6.4) есть не что иное, как экспонента от ненулевого векторного аргумента $\boldsymbol{\xi}$:

$$e^{\boldsymbol{\xi}} = \operatorname{ch}\xi + \mathbf{k}\operatorname{sh}\xi,\ \mathbf{k} = \frac{\boldsymbol{\xi}}{\xi},\ \xi = \sqrt{\xi^2} \tag{6.6}$$

Рассмотрим преобразования, задаваемые $\boldsymbol{\xi} : \boldsymbol{\xi}^2 \in \mathbb{R}$, что означает, что $\boldsymbol{\xi}$ есть либо моновектор, либо правильный бивектор. Возможны два случая, отвечающие двум знакам $\boldsymbol{\xi}^2$. Обозначим $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\theta} + i\boldsymbol{\phi},\ \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\phi} \in \mathbb{R}^3$,

1) $\boldsymbol{\xi}^2 > 0, \theta > \phi,\ \xi \equiv \pm\sqrt{\boldsymbol{\xi}^2}$:

$$\mathscr{U} = \operatorname{ch}\xi + \mathbf{k}\operatorname{sh}\xi,\ \xi \in \mathbb{R},\ \mathbf{k} \in \mathbb{C}^3, \mathbf{k}^2 = 1 \tag{6.7}$$

Это преобразование мы назовем *комплексным бустом.* При вещественном $\mathbf{k}$ оно превращается в обычный буст[1] вдоль направления $\mathbf{k}$.

2) $\boldsymbol{\xi}^2 < 0, \phi > \theta,\ \zeta \equiv \pm\sqrt{-\boldsymbol{\xi}^2}$

$$\mathscr{U} = \cos\zeta + i\mathbf{k}\sin\zeta,\ \zeta \in \mathbb{R},\ \mathbf{k} \in \mathbb{C}^3, \mathbf{k}^2 = 1 \tag{6.8}$$

Это преобразование мы назовем *комплексным поворотом*, или поворотом около комплексной оси $\mathbf{k}$. При вещественном $\mathbf{k}$ оно превращается в обычный поворот.

Исследуем вопрос, что происходит с унитарным бивектором $\mathbf{w}$, подвергнутым *продольному бусту*, т.е. бусту вдоль вещ. оси $\mathbf{n}$, являющейся определителем класса $\mathbf{w}$. Преобразование (6.7) согласно (6.5) переводит унитарный бивектор $\mathbf{w} = \mathbf{A} + i\mathbf{B}$ в:

$$\mathbf{w}' = \mathbf{w}\operatorname{ch}2\xi - 2(\mathbf{wn})\mathbf{n}\operatorname{sh}^2\xi + i[\mathbf{wn}]\operatorname{sh}2\xi = \alpha\mathbf{A} + i\beta\mathbf{B} \tag{6.9}$$

[1]Бустом называется переход в систему отсчета, движущуюся относительно данной с некоторой постоянной скоростью.

с $\alpha = (A \operatorname{ch} 2\xi - B \operatorname{sh} 2\xi)/A$ и $\beta = (B \operatorname{ch} 2\xi - A \operatorname{sh} 2\xi)/B$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Если увеличивать ξ от нуля, то при значении $\xi_0 : th2\xi_0 = A/B$ вектор $\mathbf{w}'$ становится моновектором $\mathbf{v} = i\mathbf{B}/B$, а при величинах $\xi > \xi_0$ происходит переворот ориентации исходного бивектора. Это можно увидеть непосредственно из определения (4.1), согласно которому ориентация $\mathbf{k}'$ бивектора $\mathbf{w}'$:

$$\mathbf{k}' = \frac{[\mathbf{A}'\mathbf{B}']}{A'B'} = \alpha\beta\frac{[\mathbf{AB}]}{AB} = \alpha\beta\mathbf{k} \tag{6.10}$$

При $\xi < \xi_0$: $\alpha > 0, \beta > 0$, и ориентации исходного $\mathbf{k}$ и конечного $\mathbf{k}'$ бивекторов совпадают. При $\xi > \xi_0$: $\alpha < 0, \beta > 0$, и направления $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}'$ оказываются противоположными. Иначе говоря, при определенных значениях параметра ξ продольные бусты переводят унитарные бивекторы из данного класса в унитарные бивекторы сопряженного класса.

Принципиальное отличие нульвекторов от бивекторов состоит в том, что подобный продольный буст никогда не меняет ориентацию первых. Продольный буст нульвектора $\mathbf{q} = \mathbf{A} + i\mathbf{B}, \mathbf{A} \perp \mathbf{B}, A = B$ выглядит как:

$$\mathbf{q}' = e^{2\xi}(\mathbf{A} + i\mathbf{B}) \tag{6.11}$$

откуда видно, что ориентация $\mathbf{q}'$ всегда та же, что и $\mathbf{q}$.

Как мы увидим ниже в разделе 9, бивектор может переходит в моновектор и обратно также в результате поворотов около комплексной оси, как это происходит с векторами смешанного цикла (9.10) .

7. Параллельные и ортогональные векторы

Воспользуемся определением параллельности и ортогональности (перпендикулярности) комплексных ненулевых векторов, данным в работе [2] (раздел 1.3):

Определение 15. Ненулевые векторы $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ *параллельны*: $\mathbf{u}_1 \| \mathbf{u}_2$, если их векторное произведение равно 0: $[\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2] = 0$

Определение 16. Ненулевые векторы $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ *ортогональны*: $\mathbf{u}_1 \perp \mathbf{u}_2$, если их скалярное произведение равно 0: $(\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2) = 0$

Как показано в [2],

Лемма 3. *Ненулевые векторы параллельны* $\mathbf{u}_1 \| \mathbf{u}_2$ *тогда и только тогда, когда они приводимы:* $\mathbf{u}_1 = c\mathbf{u}_2,\ c \in \mathbb{C}$

Из лемм 1 и 3 следует, что никакие моновектор и бивектор не могут быть параллельны.

Ненулевые векторы не могут быть одновременно параллельны и ортогональны, т.к. тогда бы их бикватернионное произведение (2.2) было бы равно 0, и по крайней мере один из них должен был бы иметь нулевую меру, т.е. быть нульвектором.

Параллельные бивекторы, являясь приводимыми, всегда лежат в одной плоскости. В то же время бивекторы, лежащие в одной плоскости, могут и не быть паралелльны, как, например, ортогональные бивекторы одного класса, рассматриваемые ниже.

Как показано в [2] (1.25)[2], наиболее общий вид вектора ортогонального данному бивектору $\mathbf{w}$:

$$\mathbf{u} = c_1\mathbf{n} + c_2[\mathbf{nw}],\ c_1, c_2 \in \mathbb{C} \tag{7.1}$$

где $\mathbf{n}$ - определитель класса $\mathbf{w}$.

Представляет интерес вопрос ортогональности бивекторов, принадлежащих одному классу или сопряженным классам.

Лемма 4. *Произведение двух ортогональных бивекторов $\mathbf{w}_1$ и $\mathbf{w}_2$ одного класса есть моновектор, приводимый к определителю этого класса.*

Выразим $\mathbf{w}_1$ и $\mathbf{w}_2$ с помощью базового представления (5.4). Условие ортогональности тогда принимает вид:

$$\begin{aligned} &d_1 d_2(\mathbf{u}_0\cos\phi_1 + [\mathbf{nu}_0]\sin\phi_1)(\mathbf{u}_0\cos\phi_2 + [\mathbf{nu}_0]\sin\phi_2) = 0 \\ &\quad\Rightarrow\ \cos(\phi_2 - \phi_1) = 0\ \Rightarrow\ \phi_2 = \phi_1 + (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{N} \end{aligned} \tag{7.2}$$

Произведение этих бивекторов:

$$\mathbf{w}_1\mathbf{w}_2 = i[\mathbf{w}_1\mathbf{w}_2] = id_1d_2\sin(\phi_1 - \phi_2)\mathbf{n} = \pm id_1d_2\mathbf{n} \tag{7.3}$$

приводимо к $\mathbf{n}$, т.к. $d_1 \neq 0$ и $d_2 \neq 0$, что и доказывает лемму. ⊠

Лемма 5. *Бивекторы из сопряженных классов не могут быть ортогональными:*

$$\forall\mathbf{w}_1 \in \mathscr{K}, \forall\mathbf{w}_2 \in \mathscr{K}^*:\ (\mathbf{w}_1\mathbf{w}_2) \neq 0 \tag{7.4}$$

Прибегнув к представлению (5.4) и взяв в качестве базовых векторов некоторый унитарный бивектор $\mathbf{u}$ из первого класса для представления $\mathbf{w}_1$ и комплексно сопряженный ему $\mathbf{u}^*$ из второго класса для представления $\mathbf{w}_2$, получим:

$$\begin{cases} \mathbf{w_1} = d_1(\mathbf{u}\cos\phi_1 + [\mathbf{nu}]\sin\phi_1) \\ \mathbf{w_2} = d_2(\mathbf{u}^*\cos\phi_2 - [\mathbf{nu}^*]\sin\phi_2) \end{cases} \tag{7.5}$$

Исходя из (7.5) можно выразить скалярное произведение рассматриваемых бивекторов:

$$(\mathbf{w}_1\mathbf{w}_2) = (a^2 + b^2)\cos\beta + 2iab\sin\beta),\ \beta = \phi_1 + \phi_2 \tag{7.6}$$

Ввиду того, что $a, b \neq 0$, а $\sin\beta$ и $\cos\beta$ не могут одновременно равняться 0, получаем: $(\mathbf{w}_1\mathbf{w}_2) \neq 0$, ч.т.д. ⊠

8. Векторный базис

Ниже под базисом мы будем понимать линейно независимый базис пространства комплексных векторов.

[2]В работе [2] векторы типа NLP соответствуют нашим бивекторам, LP - моновекторам, а CP - нульвекторам

Определение 17. *Базисом* называется совокупность линейно независимых векторов $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$,...,$\mathbf{u}_k$ таких, что любой вектор $\mathbf{u}$ может быть представлен в виде конечной суммы:

$$\mathbf{u} = z_1\mathbf{u}_1 + z_2\mathbf{u}_2 + ... + z_k\mathbf{u}_k \tag{8.1}$$

где $z_1, z_2, ..., z_k$ - комплексные числа.

Это определение является рекурсивным в том смысле, что сами линейно независимые векторы определяются, как не представимые с помощью частичного базиса, составленного из остальных векторов полного базиса. В работе [2] приведен базис комплексного векторного пространства, который может быть составлен из любых трех векторов $\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g}$, смешанное произведение которых отлично от нуля: $J = [\mathbf{e}\times\mathbf{f}]\cdot\mathbf{g} \neq 0$. Произвольный вектор $\mathbf{u}$ раскладывается по этому базису как:

$$\mathbf{u} = (\mathbf{u}\mathbf{e}')\mathbf{e} + (\mathbf{u}\mathbf{f}')\mathbf{f} + (\mathbf{u}\mathbf{g}')\mathbf{g} \tag{8.2}$$

где $\mathbf{e}' = [\mathbf{f}\mathbf{g}]/J$, $\mathbf{f}' = [\mathbf{g}\mathbf{e}]/J$, $\mathbf{g}' = [\mathbf{e}\mathbf{f}]/J$.

Определение 18. *Ортонормированной системой* называется совокупность унитарных взаимно-ортогональных векторов $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$,...,$\mathbf{u}_k$:

$$\forall n : \mathbf{u}_n^2 = -1 \tag{8.3}$$

$$\forall m, n,\ m \neq n : (\mathbf{u}_m\mathbf{u}_n) = 0 \tag{8.4}$$

Ортонормированной тройкой соответственно назовем систему из трех ортонормированных векторов.

Лемма 6. *Любая ортонормированная тройка образует базис.*

Пусть $\mathbf{e}$, $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ - ортонормированная тройка. Покажем, что $[\mathbf{e}\times\mathbf{f}]\cdot\mathbf{g} \neq 0$. От противного, положим $[\mathbf{e}\times\mathbf{f}]\cdot\mathbf{g} = 0$. Тогда с учетом (8.4) бикватернионное произведение (2.3) $\mathbf{e}*\mathbf{f}*\mathbf{g} = (i\mathbf{e}\cdot[\mathbf{f}\times\mathbf{g}], -\mathbf{e}\times[\mathbf{f}\times\mathbf{g}]) = -\mathbf{e}\times[\mathbf{f}\times\mathbf{g}] = -\mathbf{f}(\mathbf{e}\mathbf{g}) + \mathbf{g}(\mathbf{e}\mathbf{f}) = 0$. Здесь использовалось тождество для двойного векторного произведения, имеющее место для комплексных векторов аналогично вещественным (см. (1.1) в приложении). Но если $\mathbf{e}*\mathbf{f}*\mathbf{g} = 0$, то по крайней мере один из векторов $\mathbf{e}$, $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ должен быть нульвектором, в чем легко убедиться, оценивая согласно (2.7) меру их произведения:

$$\|\mathbf{e}*\mathbf{f}*\mathbf{g}\| = \|\mathbf{e}\|\|\mathbf{f}\|\|\mathbf{g}\| = 0 \tag{8.5}$$

В самом деле, хотя бы одна из мер $\|\mathbf{e}\|$,$\|\mathbf{f}\|$,$\|\mathbf{g}\|$ должна быть равна 0. Но по условию леммы $\mathbf{e}$, $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ унитарные, т.е. ненулевые. Далее, поскольку $[\mathbf{e}\times\mathbf{f}]\cdot\mathbf{g} \neq 0$, то любой вектор $\mathbf{u}$ раскладывается как (8.2), а, значит, $\mathbf{e}$, $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ образуют базис. ⊠

Лемма 7. *Ортонормированная система не может состоять из более чем трех векторов.*

Пусть существует 4 или более ортонормированных векторов $\mathbf{u}_1$,$\mathbf{u}_2$,...,$\mathbf{u}_k$. Три из них, например, $\mathbf{u}_1$,$\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$, в силу леммы 6 образуют базис, по которому можно разложить остальные векторы системы, в частности $\mathbf{u}_4$:

$$\mathbf{u}_4 = z_1\mathbf{u}_1 + z_2\mathbf{u}_2 + z_3\mathbf{u}_3 \tag{8.6}$$

Умножая обе стороны этого уравнения скалярно на $\mathbf{u}_1$, ввиду ортогональности $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_4$ получим: $z_1\mathbf{u}_1^2 = 0$, следовательно, в силу унитарности $\mathbf{u}_1$, $z_1 = 0$. Аналогично $z_2 = z_3 = 0$, т.е. $\mathbf{u}_4 = 0$. Подобным же образом показывается, что и все остальные $\mathbf{u}_k = 0$, $k > 3$. ☒

Покажем, что ортонормированный базис из меньшего чем три числа векторов также невозможен. Одного вектора в базисе недостаточно, поскольку всегда найдется другой вектор ортогональный ему, а, следовательно, не представимый через него. Двух векторов недостаточно по той же причине: можно взять векторное произведение этих векторов и оно уже не будет раскладываться по этим векторам. Этот факт и леммы 6 и 7 позволяют отождествить любую ортонормированную тройку и ортонормированный базис.

9. Векторные циклы

Для пространства кватернионов и связанных с ними алгебр характерно существование различных циклических структур. Примером такой структуры является цветовой круг Ньютона, состоящий из шести унитарных кватернионов, образующих циклическую группу по умножению [8] (раздел 3). Представляет большой интерес изучение фундаментальных мультипликативных структур, которыми являются тройки векторов, цикличные относительно операции произведения. Ниже мы покажем, что такие троичные циклы единственно возможные в $\mathbb{C}^3$.

Определение 19. Упорядоченную тройку векторов ($\mathbf{e}$, $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$) назовём *прямым циклом*, если:

$$\begin{cases} \mathbf{e} = \mathbf{f} * \mathbf{g} \\ \mathbf{f} = \mathbf{g} * \mathbf{e} \\ \mathbf{g} = \mathbf{e} * \mathbf{f} \end{cases} \tag{9.1}$$

и *обратным циклом*, если:

$$\begin{cases} \mathbf{e} = \mathbf{g} * \mathbf{f} \\ \mathbf{f} = \mathbf{e} * \mathbf{g} \\ \mathbf{g} = \mathbf{f} * \mathbf{e} \end{cases} \tag{9.2}$$

Т.о. для любого цикла существует его *порядок* - прямой или обратный. По определению векторы цикла можно циклически переставлять, т.е циклы ($\mathbf{e}$, $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$), ($\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$, $\mathbf{e}$) и ($\mathbf{g}$, $\mathbf{e}$, $\mathbf{f}$) тождественны друг другу. Далее при отсутствии специальных оговорок мы будем рассматривать прямые циклы, называя их просто циклами, и подразумевая прямое перенесение результатов на обратные циклы.

Векторы, входящие в цикл, взаимно-ортогональны, в чем можно непосредственно убедиться, расписывая, к примеру, первое тождество в (9.1):

$$\mathbf{e} = \mathbf{f} * \mathbf{g} = (\mathbf{fg}) + i[\mathbf{fg}] \;\Rightarrow\; (\mathbf{fg}) = 0 \tag{9.3}$$

Из первого и третьего уравнений (9.1) следует: $\mathbf{g} = \mathbf{f} * \mathbf{g} * \mathbf{f}$, или с учетом взаимной ортогональности рассматриваемых векторов: $\mathbf{f} \times [\mathbf{g} \times \mathbf{f}] = -\mathbf{g}$, откуда окончательно: $\mathbf{f}^2 = -1$. Аналогично, $\mathbf{e}^2 = -1$, $\mathbf{g}^2 = -1$. Т.о. вектора, образующие цикл всегда унитарные, и цикл образует ортонормированную систему. Но по лемме 7 максимальное количество векторов в такой системе равно трем. Итак, нами доказана

Лемма 8. *Любой цикл является упорядоченной ортонормированной тройкой.*

Прямая цикличность трех унитарных векторов $\mathbf{e}$, $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ может быть также выражена в виде:

$$\mathbf{e} * \mathbf{f} * \mathbf{g} = 1 \tag{9.4}$$

Это видно из того, что для унитарных векторов, (9.4) и (9.1) следуют друг из друга, в чем можно убедится умножением обеих сторон рассматриваемых уравнений на $\mathbf{e}$, $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ слева и справа.

Обратный цикл $\mathbf{e}$, $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ определяется, как:

$$\mathbf{g} * \mathbf{f} * \mathbf{e} = 1 \ \Leftrightarrow \ \mathbf{e} * \mathbf{f} * \mathbf{g} = -1 \tag{9.5}$$

Лемма 9. *Пусть* $\mathbf{u}$ *есть некоторый вектор. Если для любого вектора* $\mathbf{v}$*:* $(\mathbf{uv}) = 0$*, то* $\mathbf{u} = 0$.

Взяв в качестве $\mathbf{v}$ сам вектор $\mathbf{u}$, получим $\mathbf{u}^2 = 0$, т.е. $\mathbf{u}$ есть 0 или нульвектор. В последнем случае можно взять любой другой нульвектор $\mathbf{q}$, не приводимый к $\mathbf{u}$. Произведение $\mathbf{u}$ и $\mathbf{q}$ есть нульквaтернион $Q = \mathbf{u} * \mathbf{q}$ не равный 0 (см. [1] (6.1)). Следовательно, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{q} \neq 0$, что противоречит условию леммы. Значит, $\mathbf{u}$ не может быть нульвектором и должен быть равен 0. ⊠

Теперь мы можем доказать теорему о цикличности ортонормированного базиса.

Теорема 2. *Векторы любого ортонормированного базиса образуют цикл, а векторы любого цикла образуют ортонормированный базис.*

Докажем первую часть теоремы. Пусть $\mathbf{e}$, $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ ортонормированный базис. Произвольный вектор $\mathbf{u}$ раскладывается по этому базису в соответствии с (8.2). Умножая (8.2) скалярно поочередно на $\mathbf{e}$, $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ и учитывая их взаимно-ортогональность, получим:

$$\begin{cases} (\mathbf{e} + \mathbf{e}') \cdot \mathbf{u} = 0 \\ (\mathbf{f} + \mathbf{f}') \cdot \mathbf{u} = 0 \\ (\mathbf{g} + \mathbf{g}') \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases} \tag{9.6}$$

Но тогда согласно лемме 9: $\mathbf{e}' = -\mathbf{e}$, $\mathbf{f}' = -\mathbf{f}$, $\mathbf{g}' = -\mathbf{g}$, или:

$$\begin{cases} \mathbf{e} = -\frac{[\mathbf{fg}]}{J} \\ \mathbf{f} = -\frac{[\mathbf{ge}]}{J} \\ \mathbf{g} = -\frac{[\mathbf{ef}]}{J} \end{cases} \tag{9.7}$$

Из условия унитарности имеем: $J^2 = -1$, $J = \pm i$. Случаю $J = i$ соответствует прямой цикл (9.1), а случаю $J = -i$ - обратный цикл (9.2). Вторая часть теоремы была нами доказана выше в виде леммы (8). ⊠

В случае вещ. векторов, упорядоченный базис называется ориентированным базисом. Можно расширить это определение и на комплексные вектора

Определение 20. Упорядоченная тройка векторов $\mathbf{e}$, $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$, образующих базис, называется *ориентированным базисом.*

Теорема 2 утверждает тождественность цикла и упорядоченного ортонормального базиса.

Определим возможные виды циклов. Сначала рассмотрим случай, когда все три составляющих цикла моновекторы:

$$\begin{cases} \mathbf{e} = c_1\mathbf{a} \\ \mathbf{f} = c_2\mathbf{b} \\ \mathbf{g} = c_3\mathbf{c} \end{cases} \tag{9.8}$$

где $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^{\mathbf{3}}$. Такой базис напрямую соответствует обычному вещественному базису, состоящему из трех ортонормальных векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, с коэффициентами $c_1 = \pm i, c_2 = \pm i, c_3 = \pm i$.

Пусть теперь один из векторов базиса есть бивектор $\mathbf{u}_1 = \mathbf{w}$. Построим ортогональный к нему вектор согласно (7.1): $\mathbf{u_2} = c_1\mathbf{n} + c_2[\mathbf{nw}]$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, где $\mathbf{n}$ - определитель класса $\mathbf{w}$. Условие унитарности выливается в тождество: $c_2^2 - c_1^2 = 1$. Ортогональный же к $\mathbf{u_2}$ унитарный вектор будет иметь вид: $\mathbf{u_3} = ic_2\mathbf{n} + ic_1[\mathbf{nw}]$. По построению $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ представляют ортонормированную тройку, т.е ортонормированный базис:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_1 = \mathbf{w} \\ \mathbf{u_2} = c_1\mathbf{n} + c_2[\mathbf{nw}] \\ \mathbf{u_3} = ic_2\mathbf{n} + ic_1[\mathbf{nw}] \end{cases} \tag{9.9}$$

Из этого представления видно, что помимо рассмотренного выше моновекторного цикла (9.8) существует еще две возможности. Первая, при $c_1 \neq 0$ и $c_2 \neq 0$, когда все три составляющих есть бивекторы - *бивекторный цикл.* Вторая, при $c_1 = 0$ или $c_2 = 0$, когда две составляющих есть бивекторы одного класса, а третья есть моновектор - определитель этого класса. Такой цикл мы назовём *смешанным*:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_1 = \mathbf{w} \\ \mathbf{u_2} = [\mathbf{nw}] \\ \mathbf{u_3} = -i\mathbf{n} \end{cases} \tag{9.10}$$

Смешанный цикл реализует единственный вид ортогональности бивекторов одного класса, описываемый леммой 4. Также сразу видно, что векторы смешанного базиса принадлежат одному двустороннему классу (опр. 12). При этом разложение произвольного вектора по смешанному базису реализует ортогональную декомпозицию векторного пространства на два подпространства, соответствующие продольнику и поперечнику этого класса.

Как известно, составляющие векторы вещ. ортогонального базиса $\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g}$ могут быть получены друг из друга поворотами относительно оси $(\mathbf{e} + \mathbf{f} + \mathbf{g})$. Такое же утверждение имеет место и для комплексных векторов, но с обобщением понятия поворота на поворот около комплексной оси (6.8). Рассмотрим некоторый цикл $(\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g})$. Найдем такое лоренцево преобразование $\mathscr{U}$, которое переводит его векторы циклически друг в друга:

$$\begin{cases} \mathbf{e} = \overline{\mathscr{U}}\mathbf{f}\mathscr{U} \\ \mathbf{f} = \overline{\mathscr{U}}\mathbf{g}\mathscr{U} \\ \mathbf{g} = \overline{\mathscr{U}}\mathbf{e}\mathscr{U} \end{cases} \tag{9.11}$$

Применяя эти соотношения к уравнениям цикличности (9.1), получим:

$$\mathbf{e} = \overline{\mathscr{U}}^3\mathbf{e}\mathscr{U}^3 \tag{9.12}$$

и аналогичные соотношения для $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$. Поскольку $\mathscr{U}^3$ также является преобразованием Лоренца, то в соответствии с (6.5) вектор $\mathbf{v}$ переходит сам себя, если $\mathbf{k} \parallel \mathbf{w}$, либо $\mathscr{U}^3$ есть тождественное преобразование. Первая возможность отпадает, поскольку один и тот же вектор $\mathbf{k}$ не может быть одновременно параллелен всем трем векторам $\mathbf{e}, \mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$. Поэтому остаётся только вторая возможность: $\mathscr{U}^3 = 1$ Воспользуемся представлением числа 1 как поворота (6.8) на угол $2\pi N, N \in \mathbb{N}$ около некоторой оси $\mathbf{k} \in \mathbb{C}$: $\mathscr{U}^3 = e^{2\pi N i\mathbf{k}}$. Тогда $\mathscr{U} = e^{2\pi N i\mathbf{k}/3} = \pm e^{2\pi i\mathbf{k}/3}$, что есть поворот на угол $\frac{2\pi}{3}$ около некоторой комплексной оси $\mathbf{k}$, которую требуется определить.

Определение 21. *Осью цикла* называется вектор $\pm\mathbf{k} \in \mathbb{C}^3, \mathbf{k}^2 = 1$, служащий осью поворота, переводящего вектора цикла друг в друга.

В качестве оси поворота может быть выбран любой знак $\mathbf{k}$: при замене знака оси меняется знак угла поворота на противоположный. Мы будет считать осью поворота единичный комплексный вектор, определенной с точностью до знака.

Цикл имеет единственную ось. Чтобы убедиться в этом, разложим ось цикла по векторам цикла, как по базису: $\mathbf{k} = x\mathbf{e} + y\mathbf{f} + z\mathbf{g}$, $x, y, z \in \mathbb{C}$. В уравнения (9.11) неизвестные x, y, z будут входить симметрично, следовательно, $x = y = z$, и ось цикла должна иметь вид: $\mathbf{k} = \gamma(\mathbf{e} + \mathbf{f} + \mathbf{g})$, $\gamma \in \mathbb{C}$. Из нормировки $\mathbf{k}^2 = 1$ следует, что $\gamma = i/\sqrt{3}$:

$$\mathbf{k} = \frac{i}{\sqrt{3}}(\mathbf{e} + \mathbf{f} + \mathbf{g}) \tag{9.13}$$

$$\mathscr{U} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\mathbf{k}\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}(1, \mathbf{e} + \mathbf{f} + \mathbf{g}) \tag{9.14}$$

В силу построения полученное решение для поворота единственно, и мы можем сформулировать следующую лемму:

Лемма 10. *Ось цикла подобна сумме его составляющих.*

10. Преобразования циклов

При любых непрерывных унитарных преобразованиях цикл переходит в цикл, сохраняя свой порядок, что видно из того факта, что если критерий прямой цикличности (9.4) имеет место для исходных векторов, то он также выполняется и для преобразованных векторов. По этой же причине для любых двух циклов противоположных порядков нет непрерывного унитарного преобразования, переводящего их друг в друга.

В конце раздела 6 мы исследовали поведение бивектора при применении к нему продольных бустов. Аналогично ведет себя и смешанный цикл (9.10) при продольных к нему бустах, т.е. бустах, направленных по $\mathbf{n}$. При увеличении параметра буста до порогового значения $\theta = \theta_0$ смешанный цикл превращается в моновекторный, а затем обратно переходит в бивекторный.

Цикл, *сопряженный* данному $(\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g})$, есть $(\mathbf{e}^*, \mathbf{f}^*, \mathbf{g}^*)$. Сопряженные циклы имеют противоположные порядки: если один из них есть прямой, то сопряженный ему есть обратный. В этом несложно убедиться, взяв комплексное сопряжение от обеих сторон уравнения (9.4):

$$(\mathbf{e} * \mathbf{f} * \mathbf{g})^* = 1 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{g}^* * \mathbf{f}^* * \mathbf{e}^* = 1 \tag{10.1}$$

Последнее равенство есть критерий обратного цикла (9.5).

Помимо сопряжения существует другое преобразование (также не лоренцево), переводящее циклы противоположных порядков, или по-другому базисы противоположной ориентации, друг в друга: *отражение*, преобразование, при котором каждый вектор $\mathbf{v}$ меняется на противоположный ему по знаку $-\mathbf{v}$. Под действием одних непрерывныех унитарных преобразований (т.е. без сопряжений и отражений) любой базис будет переходить в базис той же ориентации, или цикл того же порядка.

В [7] (раздел 7.2) рассматриваются лоренцевы преобразования псевдоевклидова векторного пространства и показывается возможность преобразования любого базиса в любой другой той же ориентации, каких существует всего четыре. В суженном чисто векторном комплексном варианте, рассматриваемом нами, ориентаций базисов существует всего две.

Теорема 3. *Любые два цикла одного порядка можно перевести друг в друга некоторым непрерывным унитарным преобразованием.*

Построим конкретную процедуру преобразования, непрерывно переводящего некоторый цикл в любой другой цикл того же порядка. Хорошо известно, что всегда существуют повороты, переводящие два ортонормальных базиса вещественного (евклидова) пространства одной ориентации друг в друга. Это означает, что любой моновекторный базис переводится поворотами в любой другой. Но, с другой стороны, как мы видели выше, любой смешанный базис можно перевести в моновекторный с помощью продольного буста. Наконец, любой бивекторный базис можно перевести в смешанный или моновекторный. Для этого достаточно применить буст, продольный по отношению к одному из базисных векторов, в результате чего он перейдет в моновектор. Необходимая серия унитарных преобразований, приведенных выше, и будет непрерывным унитарным преобразованием, переводящим один цикл в любой другой цикл того же порядка. ⊠

Итак, как мы увидели, комплексное векторное пространство аналогично вещественному разбивается на два класса базисов противоположных ориентаций, или два класса циклов противоположного порядка. Базисы одной ориентации связаны между собой не только поворотами, как в вещественном случае, но также и поступательными движениями (бустами).

11. Бивекторные электромагнитные структуры

Алгебра комплексных векторов тесно связана с релятивистской физикой и теорией электромагнитного поля. Последнее представляется в виде комплексного вектора Римана-Зильберштейна [6].

Наше исследование позволяет сделать важные выводы для аксиоматической теории поля. Замкнутость пространства комплексных векторов относительно унитарных преобразований, наличие своего базиса и циклов даёт обоснование векторного характера электромагнитного поля. Действительно, для этого поля оказывается ненужной скалярная компонента, де-факто присутствующая в бикватернионном представлении преобразований Лоренца. Эта компонента поля, если бы она существовала, была бы полностью оторванной от векторной части. Исследованным нами циклам-базисам физически отвечают различные системы отсчета, которые могут быть связаны с частицами имеющими массу покоя. Соответственно, на этом основании возможно построение альтернативной теории спина.

12. Выводы

Настоящая работа совместно с нашей предыдущей работой по данной тематике [1] показывает, что все комплексные векторы подразделяются на три вида: нульвекторы, моновекторы и бивекторы. Как было продемонстрировано выше, моновекторы и бивекторы связаны друг с другом посредством лоренцевых преобразований типа буста.

Нами было получено и исследовано понятие поворота около комплексной оси, обобщающее обычные повороты в $\mathbb{R}^{\mathbf{3}}$ пространстве.

Отличительной чертой нашего подхода является, на наш взгляд, геометрическая наглядность и отсутствие явного использования размерности и координатного представления, на которых основывается матричный метод [3]. Это указывает на уникальность трехмерного векторного пространства (как вещественного, так и комплексного) в отношении таких свойств, как существование цикличных структур и цикличность базиса.

Ключевой вывод данной работы для физики заключается в том, что для построения электромагнитного поля с его безмассовымо структурами (фотонами) и структурами, обладающими массой (заряженными частицами), достаточно трехмерного комплексного векторного пространства. Четвертая скалярная составляющая оказывается излишней, что и определяет известный факт векторности ЭМП.

Приложение 1. Полилинейные тождества для комплексных векторов.

В работе [2] (раздел 1.2) приведено одно из главных правил для изучения комплексных векторов:

Лемма 11. *Все полилинейные тождества, справедливые для вещественных векторов, также верны и для комплексных векторов.*

Под полилинейной функцией понимается функция $\mathbf{F}(\mathbf{a_1},...,\mathbf{a_n})$ нескольких векторных аргументов, линейная по каждому из них, а полилинейное тождество имеет вид: $\mathbf{F}(\mathbf{a}_1,...,\mathbf{a}_n)=0$. Применяя это правило, можно показать, что в числе прочих комплексные векторы наследуют от вещественных следующие тождества:

$$\mathbf{a}\times[\mathbf{b}\times\mathbf{c}]=\mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})-\mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) \tag{1.1}$$

$$\mathbf{u}\cdot[\mathbf{v}\times\mathbf{w}]=\mathbf{v}\cdot[\mathbf{w}\times\mathbf{u}]=\mathbf{w}\cdot[\mathbf{u}\times\mathbf{v}] \tag{1.2}$$

$$[\mathbf{uv}]^2=\mathbf{u}^2\mathbf{v}^2-(\mathbf{uv})^2 \tag{1.3}$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] С.Я. Котковский, “Нульвекторная алгебра”, *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, **12**:2(23) (2015), 159-172.

[2] I.V. Lindell, *Methods for Electromagnetic Field Analysis*, University Press, Oxford, 1992.

[3] Г. Казанова, *Векторная алгебра*, Мир, М., 1979.

[4] S.J. Sangwine, T.A. Ell, N. Bihan, "Fundamental representations and algebraic properties of biquaternions or complexified quaternions", *Advances in Applied Clifford Algebras*, 2011, № 21 (3), 607-636 https://arxiv.org/abs/1001.0240.

[5] L. Silberstein, "Quaternionic Form of Relativity", *Philos. Mag. S. 6*, 1912, № 23 (137), 790-809.

[6] A. Aste, "Complex representation theory of the electromagnetic field", *J. Geom. Symmetry Phys.*, 2012, № 28, 47-58 https://arxiv.org/abs/1211.1218.

[7] И.Р. Шафаревич, А.О. Ремизов, *Линейная алгебра и геометрия*, Физматлит, М., 2009.

[8] С.В. Петухов, "Гиперкомплексные числа и алгебраическая система генетических алфавитов", *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, **8**:2(16) (2011), 118-139.

С. Я. Котковский

E-mail: s_kotkovsky@mail.ru