INTRODUÇÃO À TEORIA DE GRAFOS. UMA ABORDAGEM METODOLÓGICA DESDE A PERSPECTIVA DE PROBLEMA DE ORIGEM, SUAS APLICAÇÕES ATÉ A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS.

MACIALA, Faustino António*

Outubro 19, 2019

*Autor. ***Mestrando*** e ***Licenciado*** em Ensino da Matemática no Instituto Superior de Ciências Educação (ISCED – Cabinda) da Universidade 11 de Novembro. 1º Ano do Curso de Economia na Faculdade de Economia da Universidade 11 de Novembro. Técnico Médio no PUNIV, actual LICEU de Cabinda, no Curso de Ciências Físicas e Biológicas. Correio electrónico: *fausmaciala@gmail.com*

RESUMO

.

O presente trabalho traz um estudo sobre a introdução a teoria de grafos, do problema que os originou e faz um olhar a resolução de alguns problemas que o envolvem. A primeira secção, a introdução, faz-se uma abordagem introdutória da teoria de grafos, da problematização e da justificativa da escolha do tema. Na segunda secção, apresentamos uma resenha histórica, sua importância e o processo de ensino aprendizagem do mesmo tema acrescendo o conceito de grafo e diferentes tipos de grafos. Na terceira secção, resultados e Discussão, apresenta-se o problema das pontes de Na cidade de Königsberg e apresenta-se alguns problemas de aplicação, tais como, problema de coloração ou das 4 cores, chamadas telefónicas e Caminho de Longitude Mínima.

Palavras – Chave: Grafos, Teoria de Grafos e Resolução de Problemas.

ABSTRACT

.

The present work presents a study about the introduction to graph theory, of the problem that originated them and looks at the resolution of some problems that involve it. The first section, the introduction, presents an introductory approach to graph theory, problematization and justification of the choice of theme. In the second section, we present a historical review, its importance and the teaching process learning the same theme adding the concept of graph and different types of graphs. In the third section, Results and Discussion, we present the problem of bridges in the city of Königsberg and some application problems, such as color or 4-color problem, telephone calls and Minimum Longitude Path.

Keywords: Graphs, Graph Theory and Problem Solving.

1 INTRODUÇÃO

.

Ao contrário de muitos ramos da matemática, nascidos de especulações puramente teóricas, a teoria dos grafos tem sua origem no confronto de problemas práticos. A teoria dos grafos estuda objectos combinatórios - os grafos - que são um bom modelo para muitos problemas em vários ramos da matemática, da informática, da engenharia, da química, da psicologia e da indústria. Muitos dos problemas sobre grafos tornaram-se célebres porque são um interessante desafio intelectual e porque têm importantes aplicações práticas. É inevitável esbarrar em questões de complexidade computacional, pois muitos dos problemas da teoria dos grafos têm motivação algorítmica.

A Teoria de Grafos tem uma origem relativamente recente (século XVIII) na história da Matemática. Desenvolvida já no século XX, cuja importância se tem imposto por suas ligações e aplicações em outras ciências, bem como em outras áreas da Matemática. É na perspectiva do processo de ensino – aprendizagem que trazemos a teoria de grafos. Ela é uma parte da matemática, especificamente matemática discreta, que estuda as relações entre os objectos de um determinado conjunto. Para tal são empregadas estruturas chamadas de grafos, $G(V, E)$ onde V é um conjunto não vazio de objectos denominados vértices (ou nós) e E é um subconjunto de pares não ordenados de V.

Dependendo da aplicação, arestas podem ou não ter direcção, pode ser permitido ou não arestas ligarem um vértice a ele próprio e vértices e/ou arestas podem ter um peso (numérico) associado. Se as arestas têm uma direcção associada (indicada por uma seta na representação gráfica) temos um dígrafo (grafo orientado). Um grafo com um único vértice e sem arestas é conhecido como grafo trivial.

Estruturas que podem ser representadas por grafos estão em toda parte e muitos problemas de interesse prático podem ser formulados como questões sobre certos grafos. Por exemplo, a estrutura de ligações da Wikipédia pode ser representada por um dígrafo: os vértices são os artigos da Wikipédia e existe uma aresta do artigo A para o artigo B se e somente se A contém um link para B. dígrafos são também usados para representar máquinas de estado finito.

Problematização do tema

.

A Teoria de Grafos chama a atenção do autor desde o momento que este foi posto à experiência como Docente no Instituto Superior Politécnico de Cabinda – ISPCAB, na cadeira de Matemática Discreta, no Curso de Engenharia Informática e ter entrado em contacto com o Programa da mesma cadeira. Depois de em acção, a própria cadeira em si deixou muito a desejar pela quantidade de estudantes repetentes.

Após uma análise nos conteúdos tidos pelos estudantes repetentes, isto é, do ano anterior e de ter entrado em contacto com o regente da cadeira notou-se quase que não se chegava até a teoria de grafos mesmo sabendo que havia mais conteúdos depois deste tema, que é o caso das Bosques e árvores tal como Invariantes.

Feitas as investigações acerca do tema em questão observou-se as enumeras aplicações, tanto no quotidiano como na ciência em si, e é o caso de cadeiras e que os estudantes vêm a posterior tais como Circuitos Eléctrico, Inteligência Artificial entre outras, onde é explorado este conhecimento. Dentre outras questões adicionado as dificuldades encontrados pelos estudantes durante as aulas, o autor desta obra propôs-se um desafio que fazer uma abordagem metodológica do tema em questão, Teoria de Grafos.

Justificativa

.

Um dos problemas mais conhecidos em teoria dos grafos são os problemas das quatro pontes de Konisberg e também o problema das quatro cores: "É possível que qualquer mapa desenhado num plano, dividido em regiões, possa ser colorido com apenas quatro cores de tal forma que as regiões vizinhas não partilhem a mesma cor?". O primeiro a notar o problema das quatro cores foi August Ferdinand Möbius em 1840. Em 1852, Francis Guthrie escreveu em uma carta para seu irmão Frederick, estudante na University College London, sobre o problema. Mas nenhum deles conseguiu resolvê-lo. Então Frederick perguntou a um de seus professores, De Morgan.

Desenvolvimentos recentes na Matemática, particularmente nas suas aplicações, deram grande importância a tal teoria. Já no século XIX, grafos foram usados em circuitos elétricos e diagramas moleculares que estão relacionados a Física e Química, respectivamente. Hoje em dia, além dos grafos aparecerem em campos como a Economia e Biologia, existem tópicos na matemática pura que os utilizam como ferramenta. A Teoria de Grafos é classificada como um ramo da Topologia, mas está fortemente ligada à Álgebra e à Teoria de Matrizes.

2 MATERIAIS E MÉTODOS

.

2.1 Resenha histórica da Teoria de Grafos

.

Diante de todos avanços científicos e tecnológicos que o conhecimento matemático vem possibilitando auxiliando na compreensão, na avaliação e na análise dos fenómenos da realidade, percebemos que "é impossível imaginar o desenvolvimento de uma sociedade do tipo que conhecemos sem que a tecnologia tenha um papel destacado e com a Matemática tendo um papel dominante na sua formação. Dessa forma, a Matemática tem implicações importantes para o desenvolvimento e organização da sociedade embora essas implicações sejam difíceis de identificar". (SKOVSMOSE apud GOMES e XILAU, 2007). O artigo de Leonhard Euler, publicado em 1736, sobre o problema das sete pontes de Königsberg, é considerado o primeiro resultado da teoria dos grafos. É também considerado um dos primeiros resultados topológicos na geometria; isto é, não dependente de quaisquer medidas. Isso ilustra a profunda conexão entre a teoria dos grafos e topologia.

Mais de um século após a publicação do artigo de Euler sobre as pontes de Königsberg e enquanto Listing introduzia o conceito de topologia, Cayley foi levado por um interesse em formas analíticas particulares decorrentes do cálculo diferencial para estudar uma classe particular de grafos, as árvores. Esse estudo teve diversas implicações na química teórica. As técnicas usadas por ele eram relacionadas a enumeração de grafos com propriedades particulares. O primeiro livro didático sobre teoria dos grafos foi escrito por Dénes König e publicado em 1936.

Um dos problemas mais conhecidos em teoria dos grafos é problema das quatro cores: "É possível que qualquer mapa desenhado num plano, dividido em regiões, possa ser colorido com apenas quatro cores de tal forma que as regiões vizinhas não partilhem a mesma cor?". O primeiro a notar o problema das quatro cores foi August Ferdinand Möbius em 1840. Em 1852, Francis Guthrie escreveu em uma carta para seu irmão Frederick, estudante na University College London, sobre o problema. Mas nenhum deles conseguiu resolvê-lo. Então Frederick perguntou a um de seus professores, De Morgan.

2.2 Importância da Teoria de Grafos

Os conhecimentos têm uma importância fundamental no conteúdo de ensino. Desta maneira, são entendidos como sistema geral de conceitos, princípios, leis e teorias que constituem a base das ciências sobre a natureza, a sociedade e o pensamento.

Em nossa sociedade actual, as ciências e as técnicas evoluem de forma vertiginosa, acresce a complexidade dos conceitos teóricos, dado o progresso da tecnologia, criando a necessidade de uma Matemática cada vez mais forte, que é sem dúvida, a ciência que melhor permite analisar trabalho da mente e desembrulhar um raciocínio aplicável ao estudo de qualquer assunto ou temática.

Desenvolvimentos recentes na Matemática, particularmente nas suas aplicações, deram grande importância a tal teoria. Já no século XIX, grafos foram usados em circuitos elétricos e diagramas moleculares. Hoje em dia, além dos grafos aparecerem em campos como a Economia e Biologia, existem tópicos na matemática pura que os utilizam como ferramenta. A Teoria de Grafos é classificada como um ramo da Topologia, mas está fortemente ligada à Álgebra e à Teoria de Matrizes.

A teoria dos grafos é um ramo da matemática, ou mais precisamente da topologia, que estuda as relações entre os objetos de um determinado conjunto. Para tal são empregadas estruturas chamadas de grafos, G (V,E) onde V é um conjunto não vazio de objetos denominados vértices (ou nós) e E é um subconjunto de pares não ordenados de V.

Dependendo da aplicação, arestas podem ou não ter direção, pode ser permitido ou não arestas ligarem um vértice a ele próprio e vértices e/ou arestas podem ter um peso (numérico) associado. Se as arestas têm uma direção associada (indicada por uma seta na representação gráfica) temos um dígrafo (grafo orientado). Um grafo com um único vértice e sem arestas é conhecido como grafo trivial.

Estruturas que podem ser representadas por grafos estão em toda parte e muitos problemas de interesse prático podem ser formulados como questões sobre certos grafos. Por exemplo, a estrutura de ligações da Wikipédia pode ser representada por um dígrafo: os vértices são os artigos da Wikipédia e existe uma aresta do artigo A para o artigo B se e somente se A contém um link para B. Dígrafos são também usados para representar máquinas de estado finito.

2.3 Ensino – aprendizagem da Teoria de Grafos

A teoria de grafo introduz-se, de uma maneira implícita, no ensino primário, na 7ª classe, como nos referimos anteriormente. Nestas classes, são dadas destituída de rigor referenciado a topologia pois trata-se somente de Geometria. Necessidades há que os alunos saiam destas classes com as definições precisas do que é isto um vértice, uma aresta, figuras, sólidos e tudo mais.

Para o Ensino Superior, Ela é dada com mais rigor, u seja, a continuidade daquilo que é feita nas classes anteriores. Para o ensino da Matemática, Ensina-se conhecimentos relacionadas a teoria de grafos na cadeira de Geometria Superior, a que há conteúdos relacionados a geometria Euclidiana. Nas ciências da computação é onde há maior aplicação deste área pois, para montar um circuito por cima do outro circuito, para instalar uma rede de computadores, para resolver problemas relacionada a Inteligencia Artificial necessita-se deste conhecimento.

Para Duli (2014), o ensino aprendizagem da Matemática no Ensino Superior, relacionada ao Grafo, em Angola, em particular na província de Cabinda, responde os objectivos gerais da educação angolana para ciência da computação, se dota dos conhecimentos e as habilidades necessária aos estudantes para a sua activa participação na construção da sociedade, e para a formação de uma concepção científica do Mundo.

A busca pela melhoria no ensino de Matemática tem sido uma meta constante dos educadores dessa área. Uma preocupação comum entre os professores de Matemática do ensino de base é o ensino e a aprendizagem da álgebra elementar. Na educação básica, ficam evidentes as dificuldades dos alunos em relação aos conceitos abordados nas expressões algébricas elementares. Principalmente nas classes finais do ensino de base, em que a manipulação e as operações com expressões matemáticas são motivos de "pavor" para muitos alunos. Esse receio também é observado na dificuldade de muitos profissionais em ensinar esse tópico sem que ele se torne, para seus alunos, mera memorização e aplicação de regras e símbolos. (DULI, 2014)

É importante realçar que hoje, o ensino da Teoria de Grafos faz parte da vida escolar desde o ensino de base (Geometria), mas vem apresentando tantos fracassos que pode ser considerado um elemento de exclusão, pois grande parte dos alunos/Estudantes conseguem compreendem-no com certas debilidades.

O professor de Matemática deve ser, primeiro que tudo, um professor de matematização, deve habituar o aluno a reduzir situações concretas a modelos matemáticos e vice-versa, aplicar os esquemas lógicos da Matemática nos problemas concretos. É sobretudo pela iniciativa pessoal que se pode fazer de uma forma normal o desenvolvimento do espírito matemático, começando tanto com o professor como com o aluno. Não obstante, a iniciativa do primeiro é impedida pelas restrições e rigidez dos programas; O segundo, por sua vez, é geralmente desprovido de iniciativas, por não ter sido transmitido o gosto por ela ou ter sido influenciado a trabalhar muito, compreender pouco e procurar nada. (GOMES e XILAU, 2007)

O professor por sua vez também deve desenvolver a Matemática de forma que o aluno possa construir o seu conhecimento, assim o educando terá facilidade em assimilar os conteúdos. Este desenvolvimento virá de forma que o professor dê liberdade para o aluno trabalhar os diversos conteúdos matemáticos a sua maneira, mostrando que um determinado problema matemático pode ter diversas formas de resolução. (GOMES e XILAU, op cit)

Defende o Andrade (2013) que o professor deve apresentar ao aluno todas as formas de resolução dos problemas matemáticos e deixar ao critério de cada aluno qual a melhor forma de resolução. Quando o professor utiliza este método pedagógico ele trabalha com o raciocínio lógico do aluno, desenvolvendo assim todos os seus conhecimentos matemáticos. Ao ministrar os conteúdos, o professor deve visualizar as melhores formas de transmitir o conhecimento, porque dentro de uma sala de aula existem alunos com diversas habilidades matemáticas e também diversas dificuldades matemáticas.

Segundo o Pólya (1995), os problemas matemáticos, quando idealmente planejados, se tornam um recurso pedagógico eficaz para construção do conhecimento matemático, devem ser usados como instrumento facilitadores de aprendizagem, colaborando para trabalhar os bloqueios que os alunos apresentam em relação a alguns conteúdos matemáticos. A introdução de exercícios de aplicação prática nas aulas de Matemática possibilita diminuir os bloqueios apresentados por muitos alunos que temem a Matemática e sentem-se incapacitados para aprende-la. Nas situações onde é impossível a adopção de uma atitude passiva e a motivação é grande, nota-se que os alunos apresentam um melhor desempenho e atitudes mais positivas frente a seus processos de aprendizagem.

2.4 Conceito de grafo e diferentes tipos de grafos

Nesta Subsecção faz-se uma abordagem no que concerne o conceito de grafo e os diferentes tipos de grafos.

2.4.1 Conceito de grafo

Um grafo $G = G(V, E)$ pode ser definido como uma estrutura onde V é um conjunto discreto e ordenado de pontos chamados vértices, e E um conjunto de linhas chamadas arestas, e cada aresta está conectada em pelo menos um vértice.

Para Rabuske apud Ostroski1, A. e Menoncini, L. (2009:3), um grafo $G =$ *G (V,E)* é uma estrutura entre V e E, sendo V um conjunto discreto finito e não vazio, e E uma relação binária sobre V. Os elementos de V são representados por pontos. O par ordenado $(v, w) pertence E$, (ou simplesmente vw), onde $v, w pertence V$, é representado por uma linha ligando v a w.

Os elementos do conjunto E são denominados de *arestas, linhas* ou *arcos* do grafo, e em geral, são representados pelas letras minúsculas a, b, c, d, ou e_i, e_j. Os elementos do conjunto V são denominados de *vértices, pontos* ou *nós* do grafo, e em geral, são representados pelas letras minúsculas u, v, w, ou v_i, v_j ou por números $1, 2, 3$, etc. Em um grafo como por exemplo o da Figura a seguir, pode-se encontrar viários conceitos de grafos:

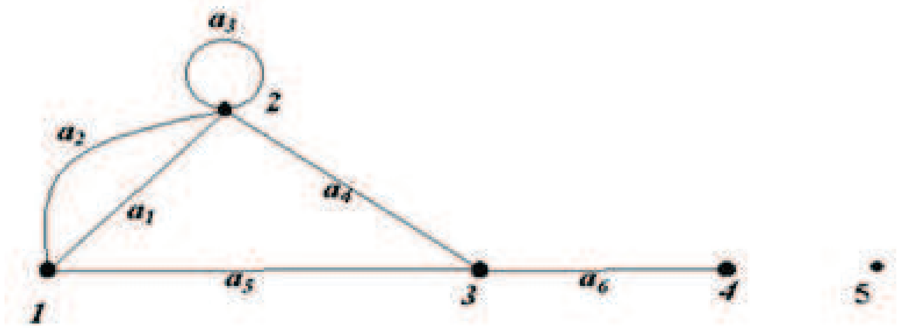

Figure 1: Grafo da combinação dos conceitos

Por exemplo a aresta a_5 que une os vértices 1 e 3 é denominada aresta incidente, pois liga o vértice 1 ao vértice 3. A aresta a_3 é chamada laço, pois relaciona o vértice a ele próprio. Já as arestas a_1 e a_2 denominam-se paralelas, pois estão ligadas aos mesmos vértices 1 e 2. Tem-se um vértice isolado quando não existe aresta incidindo sobre ele, esse é o caso do vértice 5. As arestas a_4 e a_5 são conhecidas como arestas adjacentes, pois incidem sobre o mesmo vértice, no caso, o vértice 3. Também existem vértices adjacentes, que são vértices que estão ligados por uma mesma aresta, esse é o caso dos vértices 1 e 2 que são ligados pela aresta

Os grafos são classificados segundo os conceitos presentes neles, por exemplo um grafo que possui laços ou arestas paralelas é denominado multigrafo. Quando um grafo não possui laços ou arestas paralelas ele é denominado de grafo simples. O grafo simples em que cada par de vértices é adjacente chamase grafo completo. Já um grafo que pode ser dividido em dois subconjuntosV_1 e V_2 , de forma que $V_1 \cap V_2 = \{\}$; e cada vértice $v_i \in v_1$ está unido a pelo menos um vértice $v_j \in v_2$ é denominado grafo bipartido. Quando um grafo tem seus vértices ou arestas associados a um rótulo que pode ser número, nome, letra ou outro este grafo e chamado rotulado, em especial se as arestas ou vértices receberam como rótulo um número este grafo será chamado valorado. Os grafos podem ainda ter suas orientadas ou não, quando suas arestas tiverem uma orientação o grafo é chamado de grafo dirigido ou dígrafo.

Um grafo pode ser representado de forma geométrica ou algébrica. A forma algébrica de se representar um grafo é através de matrizes, e é desta forma que um grafo pode ser identificado em um sistema computacional.

A matriz de adjacência $A = a_{ij}$ é uma matriz de ordem n que representa algebricamente um grafo e é definida por:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1; & \text{se e somente se existe } (\mathrm{v}_i; v_j) \in E \\ 0; & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A matriz de custo representa grafos valorados, onde o valor numérico da aresta pode representar distância, capacidade, fluxos, etc.

Todo grafo simples valorado pode ser representado por sua matriz de custo $W = [w_{ij}]_{(m \times n)}$, sendo seus elementos assim definidos:

$$w_{ij} = \begin{cases} \text{custo da aresta}; & \text{se}(\mathrm{v}_1; v_2) \in E \\ 0\text{ou}\infty; & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Desta forma, se existe aresta unindo dois vértices coloca-se como grau o valor/custo da aresta, se não houver tal aresta o valor colocado é zero ou infinito. Já a matriz de incidência de um grafo não orientado $G = G(V, E)$ com n vértices e m arestas é denotada por$B = [b_{ij}]$ e é uma matriz $m \times n$ definida como:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1; & \text{se } v_1 \text{ for vértice inicial da aresta} \mathrm{e}_i \\ 0; & \text{caso contrário se } e_j \text{ for um laço} \end{cases}$$

Se o grafo G for orientado, então poderá ser definida como:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1; & \text{se } v_i \text{ for vértice inicial da aresta} \mathrm{e}_i \\ \text{-1}; & \text{se } v_i \text{ for vértice final de } e_j \\ 0; & \text{caso contrário ou se } e_j \text{ for um laço} \end{cases}$$

2.5 Tipos de Grafos

Nota que na abordagem anterior a esta, já elucidamos os diferentes tipos de grafo partindo da figura em evidência. Nesta, faremos as abordagens com mais eloquência.

Grafo simples é um grafo não direcionado, sem laços e existe no máximo uma aresta entre quaisquer dois vértices (sem arestas paralelas). Para um grafo simples, o número de vizinhos de um vértice é igual à sua valência.

Grafo completo é o grafo simples em que, para cada vértice do grafo, existe uma aresta conectando este vértice a cada um dos demais. Ou seja, todos os vértices do grafo possuem mesmo grau. O grafo completo de n vértices é frequentemente denotado por K_n. Ele tem $n(n-1)/2$ arestas (correspondendo a todas as possíveis escolhas de pares de vértices).

Grafo nulo é o grafo cujo conjunto de vértices é vazio.

Grafo vazio é o grafo cujo conjunto de arestas é vazio.

Grafo trivial é o grafo que possui apenas um vértice e nenhuma aresta.

Grafo regular é um grafo em que todos os vértices tem o mesmo grau.

Multigrafo é um grafo que permite múltiplas arestas ligando os mesmos vértices (arestas paralelas).

Pseudografo é um grafo que contém arestas paralelas e laços.

Grafo conexo um grafo é conexo se for possível estabelecer um caminho de qualquer vértice para qualquer outro vértice de um grafo. Se for sempre possível estabelecer um caminho de qualquer vértice para qualquer outro vértice mesmo depois de remover$k - 1$ vértices, então diz-se que o grafo está *k-conexo*. Note que um grafo está *k-conexo* se, e somente se, contém k caminhos independentes entre qualquer par de vértices. O grafo de exemplo acima é conexo (e portanto 1-conexo), mas não é 2-conexo. Em um grafo genérico$G$, o corte associado a um conjunto X de vértices é o conjunto de todas as arestas que têm uma ponta em X e outra em $V(G) - X$, onde $V(G)$ é o conjunto de todos os vértices pertencentes ao grafo G.

Ponto de articulação ou ***Vértice de corte*** é um vértice cuja remoção desliga um grafo. Uma ponte é uma aresta cuja remoção desliga um grafo. Um componente biconectado é um conjunto máximo de arestas tal que qualquer par de arestas do conjunto fazem parte de um ciclo simples comum. O contorno de um grafo é o comprimento do ciclo simples mais curto no grafo. O contorno de um grafo acíclico é, por definição, infinito.

Árvore é um grafo simples acíclico e conexo. Às vezes, um vértice da árvore é distinto e chamado de raiz. As árvores são muito usadas como estruturas de dados em informática (veja estrutura de dados em árvore). Floresta é um conjunto de árvores; equivalentemente a uma floresta, em algum grafo acíclico.

Subgrafo de um grafo G é um grafo cujo conjunto dos vértices é um subconjunto do conjunto de vértices G, cujo conjunto de arestas é um subconjunto do conjunto de arestas de G, e cuja função w é uma restrição da função de G

Subgrafo gerador é aquele obtido pela remoção de uma ou mais arestas de um outro grafo, dizemos então que este novo grafo obtido é gerador do primeiro,

Subgrafo induzido é obtido pela remoção de vértices e consequente das arestas relacionadas com ele de um outro grafo, dizemos que este novo grafo é um grafo induzido do original.

Grafo parcial de um grafo G é um subgrafo com o mesmo conjunto de vértices que G. Uma árvore parcial é um grafo parcial que é árvore. Todo grafo tem pelo menos uma árvore parcial.

Clique em um grafo é um subgrafo que também é um grafo completo. No grafo do exemplo acima, os vértices 1, 2 e 5 formam um clique. Conjunto independente em um grafo é um conjunto de vértices não adjacentes entre si. No exemplo acima, os vértices 1, 3 e 6 formam um conjunto independente e 3, 5 e 6 são outro conjunto independente.

Grafo planar é aquele que pode ser representado em um plano sem qualquer intersecção entre arestas. O grafo do exemplo é planar; o grafo completo de n vértices, para $n > 4$, não é planar.

Grafo bipartido é o grafo cujos vértices podem ser divididos em dois conjuntos, nos quais não há arestas entre vértices de um mesmo conjunto. Para um grafo ser bipartido ele não pode conter circuitos de comprimento ímpar.

3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

.

3.1 As pontes de Königsberg

Na cidade de Königsberg (actual Kaliningrado), antiga capital da Prússia Oriental, o rio Pregel circunda uma ilha e separa a cidade em quatro zonas que, no séc. XVII estavam ligadas por sete pontes como na figura 2:

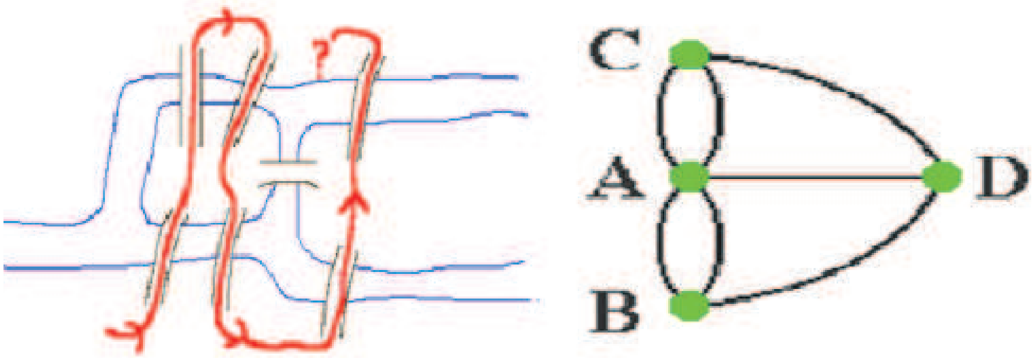

Figure 2: Imagem idealizada das pontes de Königsberg

Acredita-se que esse foi um dos primeiros exemplos da utilização de grafos. O problema consiste em partir de uma dessas regiões e determinar um trajecto pelas pontes segundo o qual se possa retornar à região de partida após atravessar cada ponte somente uma vez.

Este problema trata-se de um grafo euleriano, no qual não é possível fazer o percurso de iniciar em uma ponte, passar por todas as outras uma só vez e retornar ao ponto de origem, pois, um grafo só pode ser percorrido de tal maneira, se o diagrama tiver somente vértices de grau par, o que não acontece com o problema citado.

Para a resolução de situações práticas através do problema de coloração em grafos, foi utilizado o algoritmo para colorir um grafo contido em Rabuske (1996, p.148), e apresentado na p. 4. Deve-se salientar que tal algoritmo não garante a solução óptima, mas oferece uma boa aproximação.

Aplicação 1: Elaboração de horários de exames escolares Uma determinada escola pretende realizar seus exames anais de forma que não haja "choque"de horários entre eles, devido ao fato de alguns alunos terem exames em mais de uma disciplina. A escola também deseja utilizar a menor quantia de períodos (cada período corresponde a 2 horas de prova) possível para a realização destes exames. Como a escola poderia organizar os horários dos exames para que não haja "choque"entre as disciplinas, utilizando o menor número de períodos possível? Solução:

Para representar esta situação, tem-se o grafo $G_1(V, E)$ abaixo onde os vértices são as disciplinas que compõem o quadro de exames e cada aresta entre dois vértices indica que há alunos que devem realizar os exames correspondentes naquelas disciplinas.

Para facilitar a representação geométrica, será utilizada a seguinte legenda para as disciplinas do exame:

v_1 - Matemática; v_2- Português; v_3- Física; v_4- Química; v_5- História; v_6- Geografia; v_7- Artes e v_8- Educação Física.

A matriz de adjacência do grafo G_1 é:

Usando o algoritmo para colorir grafos, tem-se:

P1. Sejam $v_1; v_2; \ldots; v_8$ os vértices do grafo G_1 Fila $V = v_3; v_8; v_1; v_6; v_2; v_4; v_5; v_7$, de acordo com o grau de cada vértice.

P2. $i = 1$

P3.

$v_3 \in T_1 \longrightarrow T_1 = \{v_3; v_2\}$ e $V_1 = \{v_8; v_1; v_6; v_4; v_5; v_7\}$ T_1 (Cor Amarela) = Física (v_3), Português (v_2)

$v_8 \in T_2 \longrightarrow T_2 = \{v_8; v_1\}$ e $V_2 = \{v_6; v_4; v_5; v_7\}$

T_2 (Cor Azul) = Educação Física (v_8), Matemática (v_1)

$v_6 \in T_3 \longrightarrow T_3 = \{v_6; v_4; v_5\} e V_3 = \{v_7\}$

T_3 (Cor Verde) = Geografia (v_6), Quimica (v_4); História (v_5)

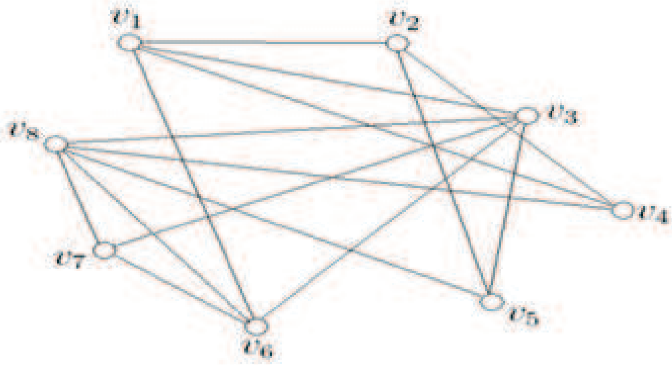

Figure 3: Grafo $G_1(V, E)$.

$v_7 \in T_4 \longrightarrow T_4 = v_7$

T_4 (Cor Vermelha) = {Artes (v_7)}

P4. O número cromático é $i = 4$ e os vértices de mesma cores estão em T_i.

Cada conjunto $T_i, i = 1; \ldots ; 4$ receberá uma cor e representará um período de 2 horas para a realização dos exames.

Logo se obtém as cores dos vértices do grafo.

Assim, pode-se estabelecer a seguinte resposta a situação de elaboração de exames:

Período 1: $8h$ as $10h$

Exames: Português e Física

Período 2: $10h$ as $12h$

Exames: Matemática e Educação Física

Período 3: $14h$ as $16h$

Exames: Química, História e Geografia

Período 4: 16h as $18h$

Exames: Artes

Aplicação 2: Chamadas Telefónicas entre os números exibidos Há muitos problemas que podem representar por meio de caminhos que se formam ao ir percorrendo as arestas de um grafo. Por exemplo, os problemas usados na Polícia Secreta, através de Redes Telefónicas, que consiste em controlar todas chamadas que entram e saem num determinado número telefónico, os problemas de planificar de forma eficiente as rotas de um viajante, comerciante, visitante, turista, um entregador de Pizzas e muitos outros problemas que soluciona a Teoria de grafos.

As figura 4 e 5, ilustram redes telefónicas com as chamadas efectuadas uma da outra em relação aos números em questão. Deste modo, com os grafos não dirigidos, controlar a quantidade de vezes que um terminal se comunica e, com os grafos dirigidos, consegue-se controlar as chamadas que entram e saem de um determinado terminal. Assim efectuam as operações das redes telefónicas, não só com as chamadas mas, também, com as mensagens.

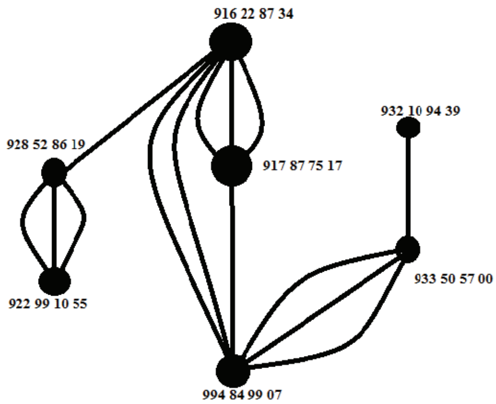

Figure 4: Rede telefónica não dirigida

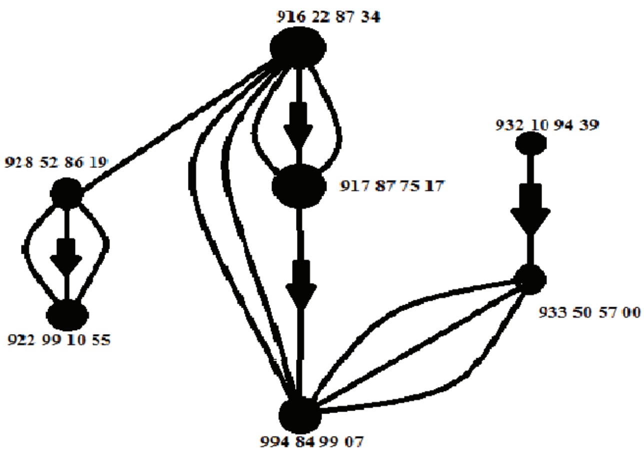

Figure 5: Rede telefónica Dirigida

Aplicação 3: Caminho de Longitude Mínima
De maneira informal, um caminho é uma sequência de arestas que começa em um vértice do grafo e percorre certas arestas do grafo sempre conectando pares de vértices adjacentes. Longitude de um caminho é a soma do número de arestas que sai de um vértice para outro. Caso as arrestas estejam nomeadas com o tem, a distância ou a tarifa, estes serão as variáveis que determinarão a esses elementos.

Muitos Problemas se podem representar utilizando grafos nos que contem um nome a cada aresta. Consideramos, o modo de ilustração, a forma cem que é representado o sistema de voos de uma linha aérea ou a frota de uma agência de automóveis (autocarros). Construímos o modelo básico representando as cidades mediante vértices e a frota dos autocarros mediante arestas. Os problemas relacionados com a distancia, tempo ou tarifa de viagem podem ser representados assinalando as arestas das distancias entre cidades. Trazemos como exemplo uma agência que tem sua frota nacional, em Angola, e de como os viajantes, comerciantes, turistas, entre outros podem operar.

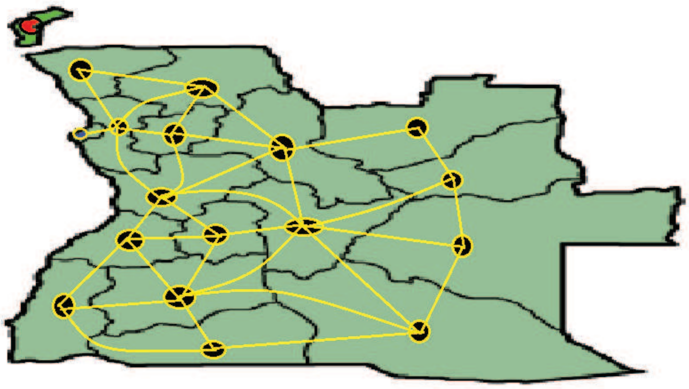

Figure 6: Grafo com frotas do Mapa de Angola

A teoria dos grafos é essencial para resolução de problemas, desde os mais simples aos elaborados. São problemas que justificam atenção devido ao fato de aparecerem diversas aplicações e serem considerados difícil solução. Grafos são uma inesgotável fonte de problemas com enunciado simples, mas que escondem, muitas vezes, uma sofisticada estrutura matemática.

4 CONCLUSÕES

.

Através deste trabalho, pôde-se compreender a origem e o processo de evolução dos grafos, considerado uma teoria recente se comparado com outras teorias científicas. Também possibilitou entender definições e resultados como as diversas maneiras geométricas e algébricas de representar um grafo, e de modo geral, os problemas clássicos intitulados problema de coloração e problema das 4-cores, bem como diferencia-los.

Nossa pesquisa foi muito satisfatória, pois além de proporcionar o estudo de um ramo da matemática que dificilmente é abordado no currículo da graduação, mostrou uma visão da matemática não somente na área teórica, mas também na área prática. Podemos agora, através dos conceitos e modelos estudados, resolver muitas situações -problemas do quotidiano.

5 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

.

1. DULI, J. L. B. (2014). Estudo sobre as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de problemas contextualizados em Cabinda/Angola. Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação – Conhecimento e Inclusão Social – da Faculdade de Educação da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito à obtenção do título de Mestre em Educação. Belo Horizonte. Faculdade de Educação da UFMG.

2. GOMES, J. e XILAU, D. (2007). *Estudo diagnóstico do rendimento académico dos estudantes nas provas de admissão de matemática no Isced-Cabinda(2004-2007).* Trabalho Apresentado Para a Obtenção do Grau de Licenciado em Ciências da Educação.

3. INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS (INPE). Disponível em http://www2.dem.inpe.br/ijar/Grafos.htm. Acesso em: 11 Out. 2019.

4. OSTROSKI, A. e MENONCINI, L (2009). *TEORIA DOS GRAFOS E APLICAÇÕES. 13º Encontro Regional de Matemática Aplicada e Com-*

putacional - XIII ERMAC. Synergismus scyentifica UTFPR, Pato Branco, 04 (2).

5. PEREIRA, G. M. R. e CAMARA, M. A (2008). *Algumas aplicações da Teoria de Grafos*. UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA – FACULDADE DE MATEMÁTICA.

6. POLYA, G. (1975). *A arte de resolver problemas: Um novo aspecto do método matemático*. (2ª edição), Rio de Janeiro - Brasil. Editora: interciência Ltda.

7. RABUSKE, M.A(1992). *Introdução á teoria dos grafos*. Florian _ opolis: UFSC, 1992.

8. ROSEN, K. H. (2004). *Matemática Discreta y sus aplicaciones*.5.ª Edición. Editora: Concepción Fernández. Mc Graw Hill. ISBN: 84-481-4073-7.