CALCUL DES INTÉGRALES DES LIGNES GÉODÉSIQUES DU TORE

par

Abdelmajid BEN HADJ SALEM
Ingénieur Géographe Général

Résumé. — Dans ce deuxième papier concernant les lignes géodésiques du tore, nous donnons en détail les expressions des intégrales définissant la longueur de la ligne géodésique du tore $s = s(\varphi)$ et de la longitude $\lambda = \lambda(\varphi)$ d'un point appartenant à la géodésique en question.

Abstract. — In this second paper about the geodesic lines of the torus, we calculate in detail the integrals giving the length $s = s(\varphi)$ and the longitude $\lambda = \lambda(\varphi)$ of a point on the geodesic lines of the torus.

Table des matières

1. Introduction

Dans un article précédent [**1**], nous avons écrit les équations des géodésiques d'un tore et nous avons obtenu les intégrales suivantes :

$$\boxed{s = \int_0^{\varphi} \frac{R(a + Rcost)dt}{\sqrt{(a + Rcost)^2 - C^2}}} \tag{1}$$

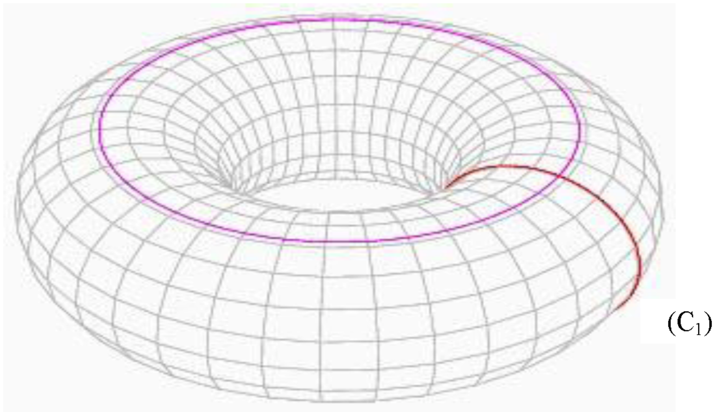

Figure 1. Le Tore T

avec $s(\varphi = 0) = 0$, et :

$$\boxed{\lambda - \lambda_0 = \int_0^{\varphi} \frac{C.Rdt}{(a + Rcost)\sqrt{(a + Rcost)^2 - C^2}}} \tag{2}$$

Rappelant qu'un tore T est défini par les équations suivantes :

$$M(\varphi, \lambda) = \begin{cases} x = (a + Rcos\varphi)cos\lambda \\ y = (a + Rcos\varphi)sin\lambda \\ z = Rsin\varphi \end{cases} \tag{3}$$

où a, R deux constantes positives avec $a > R$, $(\varphi, \lambda) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$.

2. Calcul de l'Intégrale (1)

Ecrivons l'intégrale concernée :

$$s = \int_0^{\varphi} \frac{R(a + Rcost)dt}{\sqrt{(a + Rcost)^2 - C^2}}$$

avec la constante $C > 0$. Soit le changement de variables suivant : $\theta = cost \Longrightarrow dt = \dfrac{-d\theta}{\sqrt{1-\theta^2}}$ en choisissant que $\varphi \in [0, +\pi/2] \Longrightarrow sin\varphi \geq 0$. L'équation (1) devient :

$$s = \int_{cos\varphi}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-\theta^2}} d\sqrt{R^2\theta^2 + 2aR\theta + a^2 - C^2} \tag{4}$$

Pour calculer numériquement l'intégrale ci-dessus, on écrit un développement limité de $(1-\theta^2)^{-1/2}$. Pour les premiers termes, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{1-\theta^2}} = (1-\theta^2)^{-1/2} = 1 + \frac{\theta^2}{2} + \frac{3\theta^4}{8} + \epsilon(\theta^2)$$

On obtient donc les 3 intégrales :

$$s = I_1 + I_2 + I_3$$

$$I_1 = \int_{cos\varphi}^{1} d\sqrt{R^2\theta^2 + 2aR\theta + a^2 - C^2} = \left[\sqrt{R^2\theta^2 + 2aR\theta + a^2 - C^2}\right]_{cos\varphi}^{1}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\int_{cos\varphi}^{1} \theta^2 d\sqrt{R^2\theta^2 + 2aR\theta + a^2 - C^2}$$

$$I_3 = \frac{3}{8}\int_{cos\varphi}^{1} \theta^4 d\sqrt{R^2\theta^2 + 2aR\theta + a^2 - C^2} \tag{5}$$

Calculons les intégrales I_1,I_2 et I_3, on utilise l'intégration par parties, d'où :

$$I_1 = \sqrt{(a+R)^2 - C^2} - \sqrt{(a+Rcos\varphi)^2 - C^2} \tag{6}$$

(7)

$$I_2 = \left[\frac{1}{2}\theta^2.\sqrt{R^2\theta^2 + 2aR\theta + a^2 - C^2}\right]_{cos\varphi}^{1} - \int_{cos\varphi}^{1} \sqrt{R^2\theta^2 + 2aR\theta + a^2 - C^2}.\theta.d\theta$$

(8)

$$I_3 = \left[\frac{3}{8}\theta^4.\sqrt{R^2\theta^2 + 2aR\theta + a^2 - C^2}\right]_{cos\varphi}^{1} - \frac{3}{2}\int_{cos\varphi}^{1} \sqrt{R^2\theta^2 + 2aR\theta + a^2 - C^2}.\theta^3.d\theta$$

Le second terme de I_2 sans le signe, qu'on note I_{22} peut s'écrire après un autre changement de variables comme suit :

$$I_{22} = \frac{1}{R^2}\int_{a+Rcos\varphi}^{a+R} \sqrt{\delta^2 - C^2}\delta.d\delta - \frac{a}{R^2}\int_{a+Rcos\varphi}^{a+R} \sqrt{\delta^2 - C^2}.d\delta \tag{9}$$

Pour calculer I_{22}, on utilise les formules suivantes :

$$\int \sqrt{x^2-r^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-r^2} - \frac{r^2}{2}Log(x+\sqrt{x^2-r^2})$$

$$\int x\sqrt{x^2-r^2}dx = -\frac{1}{3}(r^2-x^2)\sqrt{x^2-r^2}$$

Ce qui donne :

$$I_{22} = \frac{1}{R^2}\int_{a+Rcos\varphi}^{a+R} \sqrt{\delta^2-C^2}.\delta.d\delta - \frac{a}{R^2}\int_{a+Rcos\varphi}^{a+R} \sqrt{\delta^2-C^2}.d\delta$$

$$I_{22} = \frac{-1}{3R^2}\left[(C^2-\delta^2)\sqrt{\delta^2-C^2}\right]_{a+Rcos\varphi}^{a+R} - \frac{a}{R^2}\left[\frac{\delta}{2}\sqrt{\delta^2-C^2} - \frac{C^2}{2}Log(\delta+\sqrt{\delta^2-C^2})\right]_{a+Rcos\varphi}^{a+R}$$

Pour calculer une approximation du terme $\frac{3}{2}\int_{cos\varphi}^{1} \sqrt{R^2\theta^2+2aR\theta+a^2-C^2}.\theta^3.d\theta$, on utilise la formule connue :

$$\int_b^a f(x)dx = (a-b)f'(c), \quad c \in]b,a[\tag{10}$$

Pour faciliter les calculs, on prendra c le milieu de l'intervalle d'intégration, soit $c = (1+cos\varphi)/2 = 2cos^2(\varphi/2)/2 = cos^2(\varphi/2)$. On obtient après calculs :

$$\frac{3}{2}\int_{cos\varphi}^{1} \sqrt{R^2\theta^2+2aR\theta+a^2-C^2}.\theta^3.d\theta =$$

$$\frac{3}{4}sin^2\varphi cos^2\frac{\varphi}{2}\left(4R^2cos^4\frac{\varphi}{2} + 7aR.cos^2\frac{\varphi}{2} + 3a^2 - 3C^2\right) \tag{11}$$

Enfin, on laisse à titre d'exercice pour le lecteur, d'écrire la formule donnant la longueur de l'arc de la ligne géodésique du tore $s = s(\varphi)$ en fonction de φ et des constantes a, R et C à partir des calculs précédents.

3. Calcul de l'Intégrale (2)

Elle est donnée par l'expression :

$$\lambda - \lambda_0 = \int_0^{\varphi} \frac{C.Rdt}{(a+Rcost)\sqrt{(a+Rcost)^2-C^2}}$$

Telle qu'elle est écrite ci-dessus, le calcul de l'intégrale ne peut pas se ramener aux intégrales classiques. On va approximer son calcul comme dans le calcul de la section précédente. Faisons le changement de variables $cost = \theta \Longrightarrow dt = \frac{-d\theta}{\sqrt{1-\theta^2}}$ en choisissant la racine carrée positive. L'expression de l'intégrale en question devient :

$$\lambda - \lambda_0 = CR \int_{cos\varphi}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-\theta^2}} \frac{d\theta}{\sqrt{R^2\theta^2 + 2aR\theta + a^2 - C^2}}$$

qu'on écrit comme suit :

$$\lambda - \lambda_0 = C \int_{cos\varphi}^{1} (1-\theta^2)^{-1/2}. \left(1 + \left(\frac{2a}{R\theta} + \frac{a^2 - C^2}{R^2\theta^2}\right)\right)^{-1/2} \frac{d\theta}{\theta} \tag{12}$$

Posons $\beta = \dfrac{2a}{R\theta} + \dfrac{a^2 - C^2}{R^2\theta^2}$ et :

$$\begin{cases} A = (1-\theta^2)^{-1/2} = 1 + \dfrac{\theta^2}{2} + \dfrac{3\theta^4}{8} + \epsilon(\theta^2) \\ B = \left(1 + \left(\dfrac{2a}{R\theta} + \dfrac{a^2 - C^2}{R^2\theta^2}\right)\right)^{-1/2} = (1+\beta)^{-1/2} = \\ B = 1 - \dfrac{\beta}{2} + \dfrac{3\beta^2}{8} + \epsilon(\beta^2) \end{cases}$$

Développons le terme B en fonction de θ, nous obtenons :

$$B = 1 - \frac{\beta}{2} + \frac{3\beta^2}{8} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2a}{R\theta} + \frac{a^2 - C^2}{R^2\theta^2}\right) + \frac{3}{8}\left(\frac{2a}{R\theta} + \frac{a^2 - C^2}{R^2\theta^2}\right)^2 =$$

$$B = 1 - \frac{a}{R\theta} - \frac{a^2 - C^2}{2R^2\theta^2} + \frac{3}{8}\left(\frac{4a^2}{R^2\theta^2} + \frac{4a(a^2 - C^2)}{R^3\theta^3} + \frac{(a^2 - C^2)^2}{R^4\theta^4}\right)$$

$$B = 1 - \frac{a}{R\theta} + \frac{2a^2 + C^2}{2R^2\theta^2} + \frac{3a(a^2 - C^2)}{2R^3\theta^3} + \frac{3(a^2 - C^2)^2}{8R^4\theta^4} \tag{13}$$

Ecrivons l'équation (12) sous la forme :

$$\lambda - \lambda_0 = C \int_{cos\varphi}^{1} D.d\theta \tag{14}$$

$$avec: \quad D = \frac{1}{\theta}.A.B \tag{15}$$

Calculons alors D :

$$D = \frac{1}{\theta}.A.B = \left(\frac{1}{\theta} + \frac{\theta}{2} + \frac{3\theta^3}{8}\right).B \tag{16}$$

On trouve :

$$D = \frac{a(a^2-8R^2-C^2)}{16R^3} + \frac{8R^2+6a^2+3C^2}{16R^2}.\theta - \frac{3a}{8R}.\theta^2 + \frac{3}{8}.\theta^3 + \left(1+\frac{2a^2+C^2}{4R^2}+\frac{9(a^2-C^2)^2}{64R^4}\right).\frac{1}{\theta} + \frac{a[3(a^2-C^2)-4R^2]}{4R^3}.\frac{1}{\theta^2} + \left(\frac{2a^2+C^2}{2R^2}+\frac{3(a^2-C^2)^2}{16R^4}\right).\frac{1}{\theta^3} + \frac{3a(a^2-C^2)}{2R^3}.\frac{1}{\theta^4} + \frac{3(a^2-C^2)^2}{8R^4}.\frac{1}{\theta^5}$$

On constate que l'intégrale (14) est devenue facilement calculable puisque on va intégrer des fonctions simples. On laisse au lecteur le soin de déterminer l'expression mathématique de $\lambda - \lambda_0$ en fonction de $cos\varphi$ et des constantes a, R et C.

17 Juillet 2021

Références

[1] Abdelmajid Ben Hadj Salem. 2015. Calculs des Géodésiques du Tore. 6 pages. https ://vixra.org/pdf/1512.0233v1.pdf

Abdelmajid BEN HADJ SALEM, Ingénieur Géographe Général, ,
Résidence Bousten 8, Mosquée Raoudha, 1181 Soukra Raoudha, Tunisia.
E-mail : abenhadjsalem@gmail.com