Applications conformément isométriques

Antoine Balan

April 3, 2021

Abstract

We show that an application of the space which is conformally isometric is an isometry composed with an homothety.

1 Applications conformément isométriques

Soit f une application lisse de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^3$, f est conformément isométrique si sa différentielle est une isométrie à un facteur près :

$$df_x = c(x)O(x)$$

avec $c(x) > 0$ et $O(x) \in O(3)$.

2 Caractérisation des applications CI

Théorème : *une application est CI si elle est la composée d'une isométrie et d'une homothétie.*

Démonstration :

Si on a $f(0) = 0$, alors :

$$||f(x)|| = c(0)||x|| + o(||x||)$$

En effet, on a :

$$f(x) - f(0) = df_0(x) + o(x)$$

De sorte qu'on a aussi :

$$||f(x) - f(x_0)|| = c(x_0)||x - x_0|| + o(||x - x_0||)$$

Et donc :

$$||f(x) - f(x_0)|| = ||c(x)x - c(x_0)x_0|| + o(||x - x_0||)$$

Ce qui donne :

$$||f(x/e(x)) - f(x_0/e(x_0))|| = ||c(x/e(x))x/e(x) - c(x_0/e(x_0))x_0/e(x_0)|| + o(||x - x_0||)$$

On choisit e tel que $c(x/e(x)) = e(x)$ (voir la discussion ci-dessous). On a alors que :

$$||f(x/e(x)) - f(x_0/e(x_0))|| = ||x - x_0|| + o(||x - x_0||)$$

$f \circ (1/e)$ est une isometrie O' de $\mathbf{R}^3$. Et donc :

$$f(x) = e(x)O'(x)$$

Comme $df_x(h) = c(x)O(x)(h)$, cela entraîne que :

$$de_x(h)O'(x) + e(x)O'(h) = c(x)O(x)(h)$$

Et donc :

$$h + d(ln(e))_x(h)x = (c(x)/e(x))O'^{-1}O(x)(h)$$

Et donc $e = f$ et $e = cst$ ou $e = ||x||^2$ ou $e = 1/||x||^2$, ce qui donne :

$$f = \lambda O'$$

2.1 Définition de e

On doit résoudre $c(x/e(x)) = e(x)$ en zéro, on a, en développant à l'ordre un :

$$c(0) + dc_0(x/e(x)) + o(||x||) = e(x)$$
$$dc_0(x) = e(x)^2 - c(0)e(x) + o(||x||)$$

On a un polyôme de degré deux en $e(x)$. On a donc une solution car $\Delta > 0$ en zéro et on obtient e autour de zéro, avec $e(0) = c(0)$.