# Числофизика: Сборник статей 2014 г
# (Number physics: Collected papers 2014)

Александр Васильевич Исаев
(Alexander Vasilievich Isaev)

Abstract

В данный сборник вошли такие статьи: Мир чисел – это мир Платона; Что такое математика?; «Головоломка» – это порой … мошенничество; Сумма цифр натурального числа; Три миллиона долларов за теорему; Объяснение больших чисел Дирака.

This collection includes the following articles: The world of numbers is the world of Plato; What is mathematics ?; "Puzzle" is sometimes ... a fraud; The sum of the digits of a natural number; Three million dollars for the theorem; Explanation of large Dirac numbers.

https://photos-mt.kcdn.kz/1f/96382ba7edbb4065158958ceb21685/1-full.jpg

## О Г Л А В Л Е Н И Е



## 1. Мир чисел – это мир Платона

Мир Платона – так мы будем называть мир ***математических истин***, которые якобы могут существовать вне времени (вечно) и независимо от нас смертных. Знаменитый древнегреческий философ Платон, очевидно, первым (около 360 г. до н.э.) высказал данную мысль, правда, у Платона речь идет о *любых истинах-идеях* – не только в точных науках (прежде всего в математике), но и в других сферах человеческой мысли (что, по-моему, уже совсем спорно): в искусстве, поэзии, литературе, философии, политике и т.д.

Ниже коротко изложен взгляд на мир Платона одного из лучших умов нашего времени – ***Роджера Пенроуза*** (род. 1931) – это известный английский учёный, активно работающий в различных областях математики, общей теории относительности (ОТО) и квантовой теории; автор теории твисторов. Роджер Пенроуз возглавляет кафедру математики Оксфордского университета, а также является почётным профессором многих зарубежных университетов и академий. Он является членом Лондонского королевского общества. Среди его наград – премия Вольфа (1988, совместно с С. Хокингом), медаль Копли (2008), премия Альберта Эйнштейна и медаль Королевского общества. В 1994 году за выдающиеся заслуги в развитии науки королевой Англии ему был присвоен рыцарский титул. В части мира Платона – см. замечательную научно-популярную книгу Р. Пенроуза «Новый ум короля….» М.: Едиториал УРСС, 2005). [В квадратных скобках – мои замечания, «пояснения» и т.д. *Курсив* ниже – также мой. На фото из Википедии – Роджер Пенроуз в январе 2011 года (автор фотографии: Biswarup Ganguly).]

Мир Платона доступен нам исключительно посредством интеллекта (с помощью математических рассуждений и интуитивных догадок), это та реальность, с которой исследователи имеют дело в минуты творчества. Это царство чистой математики (её объектов), это «божественная книга», в которой записаны все лучшие доказательства. И математикам иной раз приоткрывается та или иная её страница: ***в моменты прозрения разум просто соприкасается с объективной истиной (приходящей в голову «с неба»)***. В части личных «прозрений» Пенроуз говорит, что им всегда предшествуют долгие упорные сознательные раздумья, хотя само искомое решение возникает неожиданно подобно «вспышке» (когда он думал о проблеме в «фоновом режиме», не целенаправленно), причем при полной уверенности в правильности и красоте решения. Примечательно также, что многим идеям, рожденным в минуты вдохновения присуще *масштабность*, т.е. идея охватывает весьма обширную область математической мысли [Например, моя «гениальная» идея – виртуальная космология – охватила весь бесконечный мир чисел и всю Вселенную)].

Платон, в частности, учил: наша душа существовала то того, как мы родились [Но, когда и откуда появилась наша душа? Подобным вопросам нет конца?]; душа умершего продолжает существовать в Аиде (царстве мертвых) и обладает способностью мыслить; душа бессмертна и неуничтожима. Именно поэтому *математическое открытие, возможно, – всего лишь одна из форм воспоминания*! Во всяком случае, Пенроуз говорит: «… меня часто поражало сходство между двумя состояниями, когда ты мучительно стараешься вспомнить чье-то имя – и когда пытаешься найти адекватное математическое понятие».

Альберт Эйнштейн как-то написал в письме: «Слова или язык, как в устной, так и в письменной форме, по-видимому, не играют никакой роли в механизме моего мышления». Об этом же говорит и Пенроуз: «… *я нахожу слова бесполезными для математического мышления*… Нет сомнения, что каждый человек думает по-своему… Наиболее полярными стилями математического мышления являются, как кажется, аналитический и геометрический».

Многие думают, что математическое доказательство строится в виде цепочки последовательных утверждений, где каждый шаг вытекает из предыдущего. Однако лишь общее представление и интуитивно понятное концептуальное содержание – вот что в действительности необходимо для построения математического доказательства. Любопытно такое наблюдение Пенроуза: «Во сне необычные идеи возникают легко и в большом количестве – но лишь в очень редких случаях они проходят критический контроль бодрствующего сознания. (Что касается меня, то у меня во сне никогда не возникали плодотворные научные идеи…)»

Все наиболее точные теории (СТО, ОТО, КМ, ТС, …) необычайно плодотворны и с точки зрения математики, что свидетельствует о глубоких связях между реальным миром и миром Платона. Быть может, эти миры тождественны? ***Функционирование реального мира, в конечном счете, может быть понято только в терминах математики***, т.е. в терминах платоновского мира. Сама точность ОТО и КМ обеспечивает почти математический уровень существования нашей физической реальности (и она кажется нам уже не столь очевидной, как до создания этих глубоких теорий).

Понятие математической истины выходит за пределы сотворенного человеком. ***Истинные математические открытия должны, как правило, рассматриваться как достижения более великие, чем «просто» изобретения*** – суть «творения человека». В математике нередко происходят самые настоящие открытия – это когда некая структура (объект) дает гораздо больше того, что в неё было заложено изначально (скажем, автором, предложившим к рассмотрению данный объект). Примеры таких объектов: *комплексные числа*, *множество Мандельброта* и т.д. [По моему мнению, к таким объектам следует отнести и ***натуральный ряд*** (законы *теории чисел*), значение которого для фундаментального понимания мироустройства до сих пор, практически игнорируется физиками-теоретиками.] В связи с такими объектами даже ученые-атеисты задумываются о возможности «творений» Сверхразума, некого высшего существования мыслительной деятельности. ***Математическое открытие состоит в расширении области прямого контакта с миром Платона***. Никакой содержательной «информации» в общепринятом смысле исследователь математического объекта не получает, т.к. вся информация уже находилась там изначально. Всё, что требовалось от исследователя – это соединить разные части и «увидеть» ответ. «Независимость-от-исследователя» математического объекта и обеспечивает ему платоническое существование.

Подчеркнем, что математические структуры (даже самые экзотические, такие как фрактальные структуры) существуют не менее «реально», чем гора Эверест, и могут быть исследованы точно также, как исследуются джунгли (это относится и к миру чисел). Но платоновский мир состоит не из осязаемых вещей, а из «математических объектов». Объекты, скажем, чистой геометрии – прямые, окружности, треугольники, плоскости и т.п. – могут быть лишь приблизительно реализованы в реальном мире физических вещей.

При общении (беседе), скажем, двух математиков их отдельные предложения (фразы, факты, образы, понятия) ***чаще всего остаются… не поняты***. Тем не менее, два человека все-таки способны понять друг друга, ибо интересные или глубокие математические истины растворены (с небольшой плотностью) в массе всех возможных математических истин. Во время беседы каждый из математиков вступает в прямой контакт с одним и тем же миром Платона, что приводит к взаимному пониманию на уровне интуиции.

Одно из наиболее поразительных свойств математики заключается в том, что истинность математических утверждений может быть установлена посредством абстрактных рассуждений (которые передаваемы)! Математическая истина строится из простых и очевидных составляющих, и когда они становятся ясны и понятны нам, с их истинностью соглашаются все без исключения. Мы должны «видеть» истинность математических рассуждений, чтобы убедиться в их обоснованности. Это «видение»

– самая суть сознания. Абсолютно точные, корректные формулировки иной раз являются помехой при первом изложении математической идеи, так что вначале может потребоваться менее четкая описательная форма (характерная, например, для научно-популярной литературы).

Свойство вычислимости – не то же самое, что математическая точность. Сколько тайны и красоты в мире Платона – а ведь большая непознанная часть этого мира связана далеко не с алгоритмами и вычислениями. Пенроуз говорит: «… я не могу отделаться от ощущения, что в случае математики вера в некоторое высшее вечное существование – по крайней мере, для наиболее глубоких математических концепций, – имеет под собой гораздо больше оснований, чем в других областях человеческой деятельности. Несомненная уникальность и универсальность такого рода математических идей по своей природе существенно отличается от всего того, с чем приходится сталкиваться в области искусства и техники».

Далее идут рассуждения автора (то есть считайте, что ниже весь текст статьи – зеленый).

Безусловно, *мир чисел* (в том числе *теория чисел*) является важной частью мира Платона, в том смысле, как об этом говорит Пенроуз (см. выше). Поскольку теория автора – *виртуальная космология* – это на 99% просто *законы мира чисел*, то это значит, что, занимаясь виртуальной космологией (ведь любой читатель может развивать её в своём ключе), вы вполне можете «контактировать» с миром Платона. Например, подобно Пенроузу, автор тоже испытывал удивительные «моменты прозрения» (когда идея приходила в голову «с неба»). Скептики-всезнайки, разумеется, мне в этом не поверят, а остальным советую испытать эти *острые* мгновения – просто займитесь миром чисел «вплотную».

Перефразируя слова Пенроуза, замечу также следующее. При общении (в сети Интернета), скажем, двух *любознательных* людей их отдельные предложения (фразы, факты, образы, понятия, или даже… посты целиком) ***чаще всего остаются… не поняты***. Тем не менее, два человека все-таки *способны понять друг друга*, ибо интересные или глубокие истины растворены (с небольшой плотностью) в массе всех возможных истин. Во время «беседы» (в сети Интернета) каждый из этих людей вступает в прямой контакт с одним и тем же миром Платона, что приводит к ***взаимному пониманию на уровне интуиции***. В связи с этим любопытно знать, например, как читатели Интернета воспринимают мою теорию – *виртуальную космологию*?

Чтобы ответить на этот вопрос напомню, мою ключевую гипотезу: ***мир чисел – это некая наипростейшая математическая модель пространства-времени*** **(ММПВ)*, то есть некая модель Вселенной*** (отдельных её аспектов, фрагментов, сфер). Поскольку, грубо говоря, *во Вселенной почти ничего нет кроме… пространства-времени*, то есть Вселенная – это почти… «пустота» (для человека), ведь барионная (обычная, доступная нам прямым наблюдениям) материя имеет плотность около 0,25 атома водорода на кубический метр (на долю водорода приходится около 88,6 % всех атомов Вселенной). Таким образом, сам *человек – это всего-навсего лишь некая микроскопическая флуктуация пространства-времени* на фоне бесконечной вселенской пустоты. Короче говоря, изучая «только» ММПВ – мы изучаем Вселенную на самом что ни на есть *фундаментальном* уровне.

В теоретической физике есть множество самых разных ММПВ: Стандартная модель, Минимальная суперсимметричная стандартная модель, Теория квантовых струн, М-теория, теория твисторов (Р. Пенроуза), и т.д. Как правило, это очень сложные теории, написанные ***исключительно на языке математики*** (поэтому – ММПВ). В полном объеме эти теории доступны для понимания только узкому кругу профессионалов. Нам, «обычным» людям, такие ММПВ доступны лишь в научно-популярном изложении таких ученых, как Роджер Пенроуз, Брайан Грин и др.

Самые «продвинутые» из числа «обычных» людей – это, скажем так, *альтернативные физики* (альты), которые выдвигают свои «фундаментальные» теории устройства мироздания (!), при этом многие альты, как правило, отвергают (игнорируют) официальную физику, считая огромное (и умнейшее, как мне кажется) сообщество физиков-теоретиков… глупее себя. Более того, многие альты обходятся почти без математики, им вполне достаточно наукообразных слов, нехитрых рисунков, схем, таблиц. Подобных примеров немало на портале «Техно-Сообщество России» (http://technic.itizdat.ru/). Там множество ярких, весьма искусных альтов, скажем, Веселов Александр Васильевич (под ником «guryan»), издавший свои красиво оформленные книги.

В отличие от многих альтов, автор никогда не противопоставлял свою виртуальную космологию официальной теоретической физике, космологии (вершине человеческой мысли!). Ведь все труды автора – это на 99% просто ***теория чисел*** (сложный, «скучный», «бесполезный» раздел *высшей математики*), которую автор пытается излагать в *научно-популярной*, *игровой* форме. «Игровой» в том смысле, что бесконечный «поток» *вещественных* чисел (в том числе и натуральных: $N = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$) предлагается рассматривать как поток… *времени* ($t$). Одна из последних идей автора (которые также меняются со временем), например, проста и лаконична: $\boldsymbol{t \equiv \ln\ln N}$. Значит, то, что мы называем «*время*», в мире чисел «отражается», «моделируется» очень «просто» – двойным логарифмом числа $N$, при этом ***мир чисел словно «оживает» в нашем воображении***. Например, автор предлагает так называемую *ПТС-ю модель времени*: наше «сегодня» (возраст Вселенной около 13,798 миллиарда лет) на числовой оси (отсчитывая от 1) – это число $N \equiv$ e^(e^137), при котором $t$ = 137 виртуальных времен (*вв*), где 137 – это величина, обратная *постоянной тонкой структуры* (ПТС ≈ 1/137).

Подобные гипотезы автора приводят к удивительным фактам – законы мира чисел (его математическое «устройство», его «жизнь», его «биография во времени») становятся похожими на самые фундаментальные законы… реальной Вселенной (в трактовке общепринятой теоретической физики). Более того, мир чисел содержит многие «подсказки» в тех вопросах, где современные точные науки сами «гадают на кофейной гуще»: тёмная энергия, время, отрицательное время, довзрывная эпоха, Большой взрыв, тёмная материя, и т.д. Только в подобных (полных тайн и загадок) вопросах автор позволяет себе фантазировать – просто «расшифровывает» (в меру своих способностей) сообщения, «закодированные» в мире чисел и рассказывает об этом читателю. Подобные *фантазии* в целом занимают около 1 % текста всех трудов автора (виртуальной космологии). Причем автор не претендует на истину в последней инстанции (его гипотезы – не догма). Автор всего лишь призывает физиков (ну и всех любознательных читателей) взглянуть на мир чисел (теорию чисел) «свежим взглядом». Можно сказать, что автор пытается «спровоцировать» читателя к собственным исследованиям мира чисел, доказывая своими трудами, что это может сделать буквально каждый школьник на своём компьютере в общедоступной программе «Excel»…



---

# 2. ЧТО ТАКОЕ МАТЕМАТИКА?

«***Тот, кто не знает математики, не может узнать никакой другой науки и даже не может обнаружить своего невежества***». Роджер Бэкон (ок. 1214–1292), известный английский философ и естествоиспытатель.

«***Тот, кто порицает высшую точность математики, кормится за счет путаницы и никогда не отступится от уловок софистских наук, порождающих бесконечную болтовню». … «Никакой достоверности нет в науках там, где нельзя приложить ни одной из математических наук***». Леонардо да Винчи (1452–1519)

**Самые общие понятия**

Математика – это наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира. Такое короткое определение было общепринятым в советской литературе. Однако самое корректное определение математики заключается… в её непосредственном рассмотрении (завершаемом словами «всё это и есть математика!»), или, как минимум, в перечислении названий основных разделов математики. И если в начале XX века было всего 4 раздела: теория чисел и алгебра, геометрия, анализ, механика и математическая физика, то к началу XXI века добавилось ещё свыше 11(!) новых разделов: математическая логика, топология, теория групп Ли и теория представлений, комбинаторика, теория информации и т.д.

На протяжении двух тысячелетий обладание довольно глубокими математическими знаниями являлось необходимым интеллектуальным багажом каждого образованного человека. В связи с этим уместно вспомнить слова Роджера Бэкона или Леонардо да Винчи (см. выше).

Математика всегда была одним из краеугольных камней цивилизации, но в современную эпоху её роль становится решающей. Например, вся теоретическая физика – это сверхсложная математика, особенно это касается глобальной физической «теории всего» (теории суперструн). И весьма символично, что греческое слово «математика» переводится как знание, наука. Гениальный немецкий математик Карл Гаусс однажды сказал: «***Математика – королева наук, а теория чисел – королева математики***». Первая часть этого пророчества сомнений не вызывает, но что касается теории чисел, то физиками-теоретиками она явно игнорируется.

Одновременно с бурным развитием всех наук за последние три столетия, математика становилась всё более недоступной даже для якобы образованной гуманитарной публики. При этом общественно-гуманитарные науки утонули в бурном океане Схоластики, а главное их «достижение» в том, что будущее человечества находится в руках малочисленных элит, действующих в корыстных целях.

Математика продолжает быстро развиваться и в настоящее время (причем Россия, как не удивительно, продолжает удерживать здесь лидирующую позицию). Так, журнал «Математическое обозрение» («Mathematical Review») публикует ежегодно около 8000 кратких резюме статей, содержащих последние результаты – новые математические факты, новые доказательства старых фактов и даже сведения о совершенно новых областях математики. Ещё лет 30 назад выходило более 250 математических журналов во всем мире. Главными результатами современной математики можно считать увеличение разрыва между чистой и прикладной математикой, а также полное переосмысление традиционных областей математики.

**Развитие математического метода**

Для того чтобы понять, в какой мере математика может иметь отношение к реальному миру, мы вкратце рассмотрим развитие самого математического метода.

Рождение математики произошло около 2000 лет до н.э., когда было замечено, что в треугольнике со сторонами в 3, 4 и 5 единиц длины один из углов равен 90° (что позволяло строить прямой угол). Ещё через несколько веков было открыто *общее правило* – «теорема Пифагора», а, по сути, – первый пример чисто научного достижения, так как теорему не только сформулировали, но и доказали, то есть показали, что она с необходимостью следует из геометрических свойств.

Одной из фундаментальных особенностей математического метода является процесс создания с помощью тщательно выстроенных чисто логических аргументов цепочки утверждений, в которой каждое последующее звено соединено с предыдущими. Причем в любой цепочке должно быть первое звено – *аксиома* (постулат). Знаменитые «Начала» Евклида (3 век до н.э.) – это первый из дошедших до нас теоретических трактатов по математике. Так вот, у Евклида аксиомы представлены лишь как исходные пункты для построения математики без каких-либо комментариев об их природе.

Вплоть до 1800 г. ответ на вопрос «Что такое математика?» был достаточно простым. Считалось, что у математиков имеется своя собственная область исследования – числа и геометрические объекты и что математики не пользуются экспериментальным методом. Однако, начиная с Ньютона, механику и астрономию стали изучать также с помощью аксиоматического метода по аналогии с геометрией Евклида. Было признано, что любая наука, в которой результаты эксперимента представимы с помощью чисел, становится областью приложения математики.

Какова природа таких математических объектов, как точка («не имеющая размеров» у Евклида), прямая линия («бесконечно протяженная»), поверхность, угол, число и т.д.? Все эти понятия – «платоновские идеи», которые являются, так сказать, «предельными случаями» физических объектов. Аксиомы Евклида были поставлены на один уровень с физическими законами, поэтому логические следствия из аксиом подлежали проверке путем сравнения с экспериментальными данными. На протяжении 18 века находилось все больше подтверждений того, что все следствия, полученные из основных аксиом, в особенности в астрономии и механике, согласуются с данными экспериментов. А поскольку эти следствия получались с использованием существовавшего в то время математического аппарата, достигнутые успехи способствовали укреплению мнения об истинности аксиом Евклида, которая, как говорил Платон, «ясна каждому» и не подлежит обсуждению.

Однако среди аксиом Евклида одна была явно неочевидна: через точку, лежащую вне данной прямой, можно провести только одну прямую, параллельную данной прямой. Только в 19 веке математики (Лобачевский и Бойаи независимо друг от друга) поняли, что эта аксиома недоказуема, то есть в «неевклидовой геометрии» противоречие не появится. С возникновением неевклидовой геометрии сразу же возникло несколько философских проблем. Поскольку претензия на априорную необходимость аксиом отпала, оставался единственный способ проверки их «истинности» – экспериментальный. Но, как заметил Пуанкаре, в описании любого явления скрыто такое множество физических допущений, что ни один эксперимент не может дать убедительного доказательства истинности или ложности математической аксиомы. Кроме того, даже если допустить, что наш мир является «неевклидовым», следует ли из этого, что вся евклидова геометрия ложна? Интуиция подсказывала, что и евклидова и неевклидова геометрии являются примерами полноценной математики.

Неожиданно к таким же выводам пришли совершенно с другой стороны – были открыты «кривые», не имевшие касательной в любой своей точке. Позднее (1890 г.) был получен куда более «патологический» результат: удалось построить пример непрерывной кривой, которая целиком заполняет квадрат, т.е. проходит через все его точки (кривая Пеано). С тех пор были изобретены сотни таких математических «монстров», противоречивших «здравому смыслу» и повергших математиков в шок. Однако существование столь необычных объектов следует из основных аксиом столь же строго и логически безупречно, как существование треугольника или эллипса. Поскольку математические «монстры» не могут соответствовать никакому экспериментальному объекту, то, вероятно, мир математических «идей» гораздо богаче и необычнее, чем можно было ожидать, и лишь очень немногие из них имеют соответствия в мире наших ощущений (который, впрочем, вряд ли является верхом совершенства). Но если математические «монстры» логически следуют из аксиом, то можно ли по-прежнему считать аксиомы истинными?

Упомянутые выше результаты получили подтверждение еще с одной стороны: в математике (чаще в алгебре), один за другим стали возникать новые математические объекты, представлявшие собой обобщения понятия числа. После того как выяснилось, что число (скажем, $\sqrt{2}$ ) не представимо в виде дроби, греки были вынуждены рассматривать иррациональные числа (хотя вряд ли они соответствует чему-нибудь реальному в физическом мире?). Иррационáльное числó – это вещественное число, которое не может быть представлено в виде дроби $m/n$, где $m$ – целое число, n – натуральное число (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, …). Иррациональное число может быть представлено в виде бесконечной непериодической десятичной дроби. Тем не менее, введение иррациональных чисел происходило в духе «идеализации» физических понятий. Но что сказать об отрицательных числах, о «мнимых» («комплексных») числах, для которых весьма трудно подобрать аналогии в реальном мире. Всё это очень далеко от понятия, «ясного каждому», как того требовал Платон от идей, лежащих в основе математики. И всё же с конца 16 века математики, не колеблясь, производят вычисления с комплексными числами, как если бы они «имели смысл», хотя ещё 200 лет эти числа не могли интерпретировать с помощью какой-либо вспомогательной конструкции (вектор на плоскости и прочие интерпретации появились позже).

## Современная аксиоматика

Переворот произошел во второй половине 19 века: де-факто была провозглашена декларации независимости математики от внешнего мира. С этой точки зрения, математические «объекты», если вообще имеет смысл говорить об их «существовании», – чистое порождение разума, и имеют ли они какие-нибудь «соответствия» и допускают ли какую-нибудь «интерпретацию» в физическом мире, для математики несущественно.

«Истинные» утверждения о таких «объектах» – все те же логические следствия из аксиом. Но теперь аксиомы следует рассматривать как совершенно произвольные, и поэтому отпадает необходимость в их «очевидности» или выводимости из повседневного опыта посредством «идеализации». На практике полная свобода ограничена разного рода соображениями. Разумеется, «классические» объекты и их аксиомы остаются без изменений, но теперь их нельзя считать единственными объектами и аксиомами математики, и в повседневную практику вошла привычка выбрасывать или переделывать аксиомы так, чтобы была возможность использовать их различными способами, как это было сделано при переходе от евклидовой геометрии к неевклидовой.

Хотелось бы особенно подчеркнуть одно обстоятельство, следующее из нового подхода к математическим «объектам»: все доказательства должны опираться исключительно на аксиомы. Если мы вспомним об определении математического доказательства, то подобное высказывание может показаться повтором. Однако это правило редко соблюдалось в классической математике из-за «интуитивной» природы ее объектов или аксиом. Даже в «Началах» Евклида, при всей их кажущейся «строгости», многие аксиомы не формулируются явно и многие свойства либо молчаливо предполагаются, либо вводятся без достаточного обоснования. Чтобы поставить евклидову геометрию на прочную основу, понадобился критический пересмотр самих её начал. Вряд ли стоит говорить о том, что педантичный контроль над мельчайшими деталями доказательства является следствием появления «монстров», научивших современных математиков соблюдать крайнюю осторожность в выводах. Самое безобидное и «самоочевидное» утверждение о классических объектах, например, утверждение о том, что кривая, соединяющая точки, расположенные по разные стороны от прямой, непременно пересекает эту прямую, в современной математике требует строгого формального доказательства.

Возможно, покажется парадоксальным утверждение, что именно из-за своей приверженности аксиомам ***современная математика служит наглядным примером того, какой должна быть любая наука.*** Тем не менее, такой подход иллюстрирует характерную особенность одного из наиболее фундаментальных процессов научного мышления – получения точной информации в ситуации неполного знания. Научное исследование некоторого класса объектов предполагает, что особенности, позволяющие отличать одни объекты от других, умышленно предаются забвению, а сохраняются лишь общие черты рассматриваемых объектов. То, что выделяет математику из общего ряда наук, заключается в неукоснительном следовании этой программе во всех ее пунктах. Считается, что математические объекты полностью определены аксиомами, используемыми в теории этих объектов; или, по словам Пуанкаре, аксиомы служат «замаскированными определениями» тех объектов, к которым они относятся.

**Современная математика**

Хотя теоретически возможно существование любых аксиом, до настоящего времени было предложено и исследовано лишь небольшое число аксиом. Обычно в ходе развития одной или нескольких теорий замечают, что какие-то схемы доказательства повторяются в более или менее аналогичных условиях. После того как свойства, используемые в общих схемах доказательств, обнаружены, их формулируют в виде аксиом, а следствия из них выстраивают в общую теорию, не имеющую прямого отношения к тем конкретным контекстам, из которых были абстрагированы аксиомы. Получаемые при этом общие теоремы применимы к любой математической ситуации, в которой существуют системы объектов, удовлетворяющие соответствующим аксиомам. Повторяемость одних и тех же схем доказательства в различных математических ситуациях свидетельствует о том, что мы имеем дело с различными конкретизациями одной и той же общей теории. Это означает, что после соответствующей интерпретации аксиомы этой теории в каждой ситуации становятся теоремами. Любое свойство, выводимое из аксиом, будет справедливо во всех этих ситуациях, но необходимость в отдельном доказательстве для каждого случая отпадает. В таких случаях говорят, что математические ситуации обладают одной и той же математической «структурой».

Чтобы лучше понять процесс, обрисованный выше в общих чертах, читателю полезно самостоятельно обратиться к *теории групп* – одному из основных инструментов современного математика. Группы широко применяются во всех разделах математики, в физике (кристаллография, квантовая механика). Природа объектов, образующих группу, может быть весьма разнообразной, но на самом деле в каждом случае все сводится к одному и тому же сценарию: из свойств множества объектов мы рассматриваем лишь те, которые превращают это множество в группу (пример неполноты знания).

В таких случаях говорят, что мы рассматриваем групповую *структуру*. Существуют многие типы структур, теории которых полностью разработаны: структура порядка, структура метрического пространства и т.д. Точное определение понятия структуры довольно сложно. Не вдаваясь в подробности, можно сказать, что на множестве $E$ задана структура определенного типа, если между элементами множества $E$ (а иногда и другими объектами, например, числами, которые играют вспомогательную роль) заданы отношения, удовлетворяющие некоторому фиксированному набору аксиом, характеризующему структуру рассматриваемого типа.

С понятием структуры тесно связаны многие абстрактные понятия в том числе одно из наиболее важных в современной математике – понятие *изоморфизма*. Внутреннее «устройство» (природа) двух внешне не похожих задач может быть совершенно одинакова и изучение свойств одной системы можно в значительной мере свести к изучению другой системы. Можно показать, что понятие изоморфизма распространяется на структуры любого типа.

Понятие структуры и связанные с ним другие понятия заняли в современной математике центральное место как с чисто «технической», так и с философской и методологической точек зрения. Общие теоремы основных типов структур служат чрезвычайно мощными инструментами математической «техники». Всякий раз, когда математику удается показать, что изучаемые им объекты удовлетворяют аксиомам определенного типа структур, он тем самым доказывает, что все теоремы теории структуры этого типа применимы к конкретным объектам, изучением которых он занимается (без этих общих теорем он, весьма вероятно, упустил бы из виду конкретные их варианты или был бы вынужден обременять свои рассуждения излишними допущениями). Аналогично, если доказано, что две структуры изоморфны, то число теорем немедленно удваивается: каждая теорема, доказанная для одной из структур, сразу же дает соответствующую теорему для другой. Неудивительно поэтому, что существуют весьма сложные и трудные теории, например, «теория поля классов» в *теории чисел*, главная цель которых – доказательство изоморфизма структур. С философской точки зрения, широкое использование структур и изоморфизмов демонстрирует основную особенность современной математики – то обстоятельство, что «природа» математических «объектов» не имеет особого значения, значимы лишь отношения между объектами (разновидность принципа неполноты знания).

Наконец, понятие структуры позволило по-новому классифицировать разделы математики. Современный подход научил нас видеть не только то, что лежит на поверхности, но и заглядывать глубже и пытаться распознавать фундаментальные структуры, лежащие за обманчивой внешностью математических объектов. С этой точки зрения, значение имеет исследование наиболее важных типов структур. Вряд ли в нашем распоряжении имеется полный и окончательный список этих типов; некоторые из них были открыты в последние 40 лет, и есть все основания ожидать в будущем новых открытий. Однако мы уже имеем представление о многих основных «абстрактных» типах структур. (Они «абстрактны» по сравнению с «классическими» объектами математики, хотя и те вряд ли можно назвать «конкретными»; дело скорее в степени абстракции.)

Многие математики надеются с помощью новых средств лучше понять классические теории и решить трудные проблемы. Огромные фрагменты классического материала оказались под властью новой математики и были преобразованы или слились с другими теориями. Однако остаются обширные области, в которых современные методы проникли не столь глубоко (теория дифференциальных уравнений, значительная часть *теории чисел*).

**Философские трудности**

Еще древние греки отчетливо понимали, что математическая теория должна быть свободна от противоречий. Это означает, что невозможно вывести как логическое следствие из аксиом утверждение $P$ и его отрицание не-$P$. Но, поскольку считалось, что математические объекты имеют соответствия в реальном мире, а аксиомы являются «идеализациями» законов природы, ни у кого не возникало сомнений в непротиворечивости математики. При переходе от классической математики к математике современной проблема непротиворечивости приобрела иной смысл. Свобода выбора аксиом любой математической теории должна быть заведомо ограничена условием непротиворечивости, но можно ли быть уверенным в том, что это условие окажется выполненным?

Понятие *множества* всегда использовалось более или менее явно в математике и логике. К концу 19 века были получены важные результаты, составившие содержание так называемой *теории множеств*, ставшей как бы субстратом всех остальных математических теорий. К 1895 казалось, что математика покоится на незыблемом фундаменте теории множеств. Но в следующее десятилетие возникли новые аргументы, которые, по-видимому, показывали внутреннюю противоречивость теории множеств (и всей остальной математики).

Новые парадоксы были простыми. Первый из них – парадокс Рассела («парадокс брадобрея»): в некотором городке брадобрей бреет всех жителей, которые не бреются сами. Кто бреет самого брадобрея? Вместо ответа мы приходим к явному противоречию.

Еще более показателен парадокс Берри. Рассмотрим множество всех русских фраз, содержащих не более 17 слов; число слов русского языка конечно, поэтому конечно и число таких фраз. Выберем среди них такие, которые однозначно задают какое-нибудь целое число, например: «Наибольшее нечетное число, меньшее 10». Число таких фраз также конечно; т.е. конечно и множество определяемых ими целых чисел (пусть это множество $D$). Из аксиом арифметики следует, что существуют целые числа, не принадлежащие $D$, и что среди этих чисел существует наименьшее число $n$. Это число $n$ однозначно определяется фразой: «Наименьшее целое число, которое не может быть определено фразой, состоящей не более чем из 17 русских слов». Но в этой фразе 17 слов, значит, она определяет число $n$, которое принадлежит $D$, то есть мы получили противоречие.

Шок, вызванный парадоксами теории множеств, разделил всех математиков на *интуиционистов*, *формалистов* и *платонистов*. С точки зрения первых, неправильно применять логические процессы к интуитивно непредставимым объектам. Единственными интуитивно ясными объектами являются натуральные числа 1, 2, 3,... и конечные множества натуральных чисел, «построенные» по точно заданным правилам. Но даже к таким объектам интуиционисты не разрешали применять все дедукции классической логики. Например, они не признавали, что для любого утверждения $P$ истинно либо $P$, либо не-$P$. Располагая столь ограниченными средствами, они легко избегали «парадоксов», но при этом выбрасывали за борт не только всю современную математику, но и значительную часть результатов классической математики, а для тех, что еще оставались, необходимо было найти новые, более сложные доказательства.

Большинство математиков высказалось за метод, который состоит в воздержании от использования обыденного языка при формулировке аксиом и теорем; только предложения, построенные в соответствии с явной системой жестких правил, допускаются в качестве «свойств» или «отношений» в математике и входят в формулировки. Такой процесс называется «формализацией» математического языка, при этом сами слова заменялись специальными *символами*: & («и»); $\vee$ («или»); ~ («не»); ] («пусть»); $\in$ («принадлежит»); $\notin$ («не принадлежит»); $\exists$ («существует…такое, что»); $\forall$ («для любого… выполняется»); *def* («по определению»); $\Rightarrow$ («следует»); $\Leftrightarrow$ («тогда и только тогда»); $\rightarrow$ («стремится к…»); $\uparrow$,$\downarrow$ («растет», «убывает»); и т.д.

В 1931 г. Курт Гёдель показал, что непротиворечивость арифметики (если она действительно такова) невозможно доказать столь ограниченными средствами, которые считают допустимыми интуиционисты. Иначе говоря, есть положения, которые не могут быть «извлечены» из основных аксиом (надо привлекать все новые аксиомы-допущения). Нельзя дедуктивным путем получить все свойства целых чисел, тем более нельзя надеяться охватить все свойства решений дифференциальных уравнений. ***Значительное количество законов природы нельзя ограничить никакими рамками***.

Из результатов Гёделя следует, что *любая* достаточно широкая формальная система аксиом и правил вывода, свободная от противоречий, должна содержать утверждения, которые нельзя ни доказать, ни опровергнуть в рамках этой формальной системы. Иначе говоря, какой бы (достаточно сложный) алгоритм ни использовал математик для установления математической истины – всегда найдутся математические суждения, на которые его алгоритм не сможет дать ответа (единого алгоритма для решения всех задач не существует).

Поэтому *интуиция* (а не формализм) во многом определяет развитие математики, а интуитивные критерии («глубина», «оригинальность», «красота», «соответствие реалиям нашего мира») приходится относить к самым строгим математическим результатам. Все-таки именно «смысл» – а не слепые алгоритмические вычисления – составляют сущность математики. А понятие математической *истины* только частично досягаемо в рамках любой формальной системы. При этом надо помнить о «слабостях» человеческой интуиции.

Гёдель нанес формализму («бессмысленной игре») сокрушительный удар, но с другой стороны его доказательство не приводит нас и к абсолютно надежной альтернативе (этот вопрос до сих пор не разрешен?). Поэтому существует ещё и *платонисткая* точка зрения, согласно которой математическая истина абсолютна и вечна, является внешней по отношению к любой теории и не базируется ни на каком «рукотворном» критерии; а математические объекты обладают свойством собственного вечного существования, не зависящего ни от человеческого общества, ни от конкретного физического объекта.

Резюмируя сложившуюся проблемную ситуацию, мы должны признать, что она далека от завершения. Использование понятия множества ограничивалось оговорками, которые специально вводились, чтобы избежать известных парадоксов, и нет никаких гарантий, что в аксиоматизированной теории множеств не возникнут новые парадоксы. Тем не менее, ограничения аксиоматической теории множеств не помешали рождению новых жизнеспособных теорий.

**Математика и реальный мир**

Несмотря на заявления о независимости математики, никто не станет отрицать, что математика и физический мир связаны друг с другом. Разумеется, остается в силе математический подход к решению проблем классической физики. Верно и то, что в весьма важной области математики, а именно в теории дифференциальных уравнений, обыкновенных и в частных производных, процесс взаимообогащения физики и математики достаточно плодотворен.

Математика полезна при интерпретации явлений микромира. Однако новые «приложения» математики существенно отличаются от классических. Одним из важнейших инструментов физики стала теория вероятностей, которая раньше применялась главным образом в теории азартных игр и страховом деле. Математические объекты, которые физики ставят в соответствие «атомным состояниям», «переходам», «пространство Калаби – Яу» и т.д., носят весьма абстрактный характер и ***были введены и исследованы математиками задолго до появления квантовой механики***. Следует добавить, что после первых успехов возникли серьезные трудности. Это произошло в тот момент, когда физики пытались применить математические идеи к более тонким аспектам квантовой теории; тем не менее, многие физики по-прежнему с надеждой взирают на новые математические теории, полагая, что те помогут им в решении новых проблем (скажем, в теории струн).

Даже если мы включим в «чистую» математику теорию вероятностей и математическую логику, выяснится, что ***в настоящее время другие естественные науки используют менее 50% известных математических результатов***. Что же мы должны думать об оставшейся половине? Какие мотивы стоят за теми областями математики, которые не имеют отношения к решению физических проблем?

Мы уже упоминали об иррациональности числа как о типичном представителе такого рода теорем. Другим примером может служить теорема, доказанная Лагранжем. «Важная» и «красивая» с точки зрения любого математика эта теорема утверждает, что любое натуральное число представимо в виде суммы квадратов не более чем *четырех* чисел (например, 23 = 3^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2). Однако в настоящее время немыслимо, чтобы этот результат мог пригодиться физику-теоретику, а тем более экспериментатору (этот результат очень важен для… ***виртуальной космологии***, как обоснование именно *четырех* измерений, доступных человеку). Правда, физики имеют дело с целыми числами сегодня гораздо чаще, чем в прошлом, но целые числа, которыми они оперируют, всегда ограничены (они редко превышают несколько сотен); следовательно, такая теорема, как теорема Лагранжа, может быть «полезна» только в том случае, если применять ее к целым числам, не переходящим некоторой границы. Но стоит нам ограничить формулировку теоремы Лагранжа, как она сразу перестает быть интересной для математика, поскольку вся притягательная сила этой теоремы заключается в ее применимости ко всем целым числам. (Существует великое множество утверждений о целых числах, которые можно проверить с помощью компьютеров для очень больших чисел; но, коль скоро общего доказательства не найдено, они остаются гипотетическими и не интересны профессиональным математикам)

Сосредоточенность на темах, далеких от непосредственных приложений, не является чем-то необычным для ученых, работающих в любой области, будь то астрономия или биология. Однако в то время как экспериментальный результат можно уточнить и улучшить, математическое доказательство всегда носит окончательный характер. Именно поэтому трудно удержаться от искушения рассматривать математику, или, по крайней мере, ту ее часть, которая не имеет отношения к «реальности», как искусство (а не науку).

Математические проблемы не навязываются извне, и, если принять современную точку зрения, мы совершенно свободны в выборе материала. При оценке некоторых математических работ у математиков нет «объективных» критериев, и они вынуждены полагаться на собственный «вкус». Вкусы же сильно меняются в зависимости от времени, страны, традиций и отдельных личностей. В современной математике существуют мода и три «школы»: «классицисты», «модернисты» и «абстракционисты». Чтобы лучше понять различия между ними, проанализируем четыре критерия, которыми пользуются математики, когда оценивают теорему или группу теорем:

1). «Красивый» математический результат должен быть нетривиальным. Это не следствие аксиом или известных теорем; должна быть новая идея или остроумно применены старые представления. То есть для математика важен не сам результат, а процесс преодоления трудностей, с которыми он столкнулся при его получении.

2). Существенным элементом «красоты» теоремы является ее простота. Поиск простоты свойствен всей научной мысли начиная ещё с Эпикура, впервые высказавшего мысль о том, что за кажущейся сложностью и бесконечным разнообразием окружающего нас мира может скрываться внутренняя простота структуры (и лучший пример этому – мир чисел, теория чисел).

3). Математик обязан решить новую задачу любыми возможными средствами. Однако, начиная с 19 века, математики явно делятся на «тактиков», стремящихся найти чисто силовое решение задачи (классическими средствами математики), и на «стратегов», склонных к обходным маневрам (более «абстрактным» структурам), дающим им возможность сокрушить проблему малыми силами.

4). У любой математической проблемы есть своя история («родословная»). Когда решение получено (например, через 356 лет как у Великой теоремы Ферма), история на этом не заканчивается, ибо начинаются известные процессы расширения и обобщения. Так, теорема Лагранжа приводит к вопросу о представлении любого целого числа в виде суммы кубов, четвертых степеней и т.д. («проблема Варинга», до сих пор окончательно не решенная). Даже если первоначальная теория, в конце концов «умирает», она, как правило, оставляет после себя многочисленные живые побеги.

***Математики уже столкнулись с такой необозримой россыпью задач, что, даже если бы прервалась всякая связь с экспериментальной наукой, их решение заняло бы еще несколько столетий!***

Однако экспериментаторы готовы примириться с «некрасивыми решениями», лишь бы задача была решена. Точно так же и в математике классицисты и абстракционисты не очень обеспокоены появлением «патологических» результатов. С другой стороны, модернисты заходят так далеко, что усматривают в появлении «патологий» в новой теории – симптом, свидетельствующий о несовершенстве основополагающих понятий.

**Классическая теория чисел**

Теория чисел – это бесконечно обширная область математики, которую можно исследовать с самых разных точек зрения. Об этом говорит тот факт, что перед словами “теория чисел” часто уточняют название раздела этой теории: классическая (аналитическая) …, аддитивная …, мультипликативная …, а также ещё различают теорию алгебраических чисел и трансцендентных чисел.

Классическая теория чисел – чрезвычайно сложный раздел математики. Мы проиллюстрируем это в небольшом экскурсе в историю, связанном с тремя яркими, талантливыми личностями, внесшими заметный вклад в математику (и теорию чисел).

Основные труды английского математика Г. Х. Харди (1877–1947) посвящены теории чисел и теории функций. Большинство его трудов выполнено совместно с английским математиком – Дж. И. Литлвудом (1885–1977), но отдельные работы Харди были выполнены вместе с самобытным индийским математиком С. Рамануджаном (1887–1920), которого Харди считал своим открытием и “единственным романтическим событием” в жизни. Харди говорит о нём так (Харди Г. «Двенадцать лекций о Рамануджане», М.: Институт КИ, 2002).

Рамануджан был самой романтической фигурой в современной истории математики. Не имея специального математического образования, он за свою короткую жизнь сделал многое: его опубликованные работы образуют книгу в 400 страниц, и осталось масса не опубликованных работ. Его можно считать самым великим формалистом своего времени, ибо его формулы (показывал их Харди полдюжины почти каждый день) – просто поражают.

Исключительные способности в математике у Рамануджана проявились к 10 годам. Однако критический для карьеры любого математика период (18÷25 лет, когда ум наиболее эластичен) был, к сожалению, упущен в борьбе с трудностями жизни бедной индуской семьи (в 22 года Рамануджан женился). Таким образом, в лучшие годы его гений был направлен в неверном направлении, отодвинут на запасные пути и до некоторой степени искажен. Только в возрасте 26 лет Рамануджан написал письмо Харди, после чего тот смог доставить его из Индии в Англию. Но всего 3 года спустя Рамануджан заболел туберкулёзом и так больше и не выздоровел.

Рамануджан говорил Харди, что богиня Намаккал внушала ему формулы во снах. Часто, встав с кровати, он мог записать результаты и быстро проверить их, хотя и не всегда мог дать строгое доказательство. Но Рамануджан не был мистиком и религия не являлась важной частью его жизни; он считал, что все религии более или менее одинаково истинны, то есть никак не выделял индуизм, а только выполнял его обряды [сам Харди не верил в древнюю мудрость Востока]. Рамануджан не являлся убежденным атеистом, он был типичным агностиком и ортодоксальным индусом из высокой (но очень бедной) касты; был строгим вегетарианцем, и сам готовил себе еду (предварительно переодевшись в пижаму).

В самостоятельных работах Рамануджана нет простоты и неизбежности, свойственных величайшим работам других математиков. Его работы были скорее странными. Большую часть своей жизни [до приезда в Англию] он работал, оставаясь в неведении относительно открытий современных европейских математиков (около 2/3 его работ – это переоткрытия). Отсюда идет его вызов почти всем канонам: его формулы практически не содержат доказательств; он не до конца понимал, что такое аналитическая функция; он никогда не использовал глубокую теорему Коши. Рамануджан был далек от понимания настоящих сложностей аналитической теории чисел, которая оказалась его единственным настоящим поражением: здесь он в одиночку почти ничего не доказал и многое из того, что он вообразил, было ложным. Но, вместе с тем, у него была страсть к самим числам: его способность помнить характерные особенности чисел была почти сверхъестественной. По словам Литлвуда, каждое положительное число было одним из личных друзей Рамануджана…

В словах Харди для нас важен тот факт, что даже такому гению как Рамануджан теория чисел не открыла свои тайны. Вот как это объясняет сам Харди (*курсив* мой): “Аналитическая теория чисел является одной из тех исключительных областей математики, в которых доказательство является всем и ***ничего, лишенное абсолютной строгости, не принимается***. … вы не можете достигнуть никакого настоящего понимания структуры и смысла теории [чисел] или получить какой-либо здравый инстинкт, ведущий вас в дальнейших исследованиях, пока вы не изучите доказательства. Сравнительно просто делать остроумные догадки, действительно, существуют теоремы, подобные “теореме Гольдбаха”, которые никогда не были доказаны и которые любой дурак1 может угадать”. “Математик обычно получает теорему с помощью интуиции; он обнаруживает правдоподобное заключение и начинает работать над созданием доказательства. Иногда это является рутинным действием, и любой хорошо обученный профессионал может представить требуемый результат, но более часто воображение является очень ненадежным проводником. В частности, так происходит в аналитической теории чисел, где даже воображение Рамануджана вело его по неправильному пути”. “Никто не может убедить себя, что $(2^{127} – 1)$ является простым числом, если не изучить доказательство. Никто не имеет столь живого и всеобъемлющего воображения”.

**Великое заблуждение?**

Как правило, ещё в школе на уроке арифметики мы впервые узнаем слова гениального Карла Гаусса: “Математика – королева наук, а теория чисел – королева математики”. Однако далеко не все математики разделяли такую точку зрения. Например, уважаемый Харди соглашался с Гауссом, но в том смысле, что *теория чисел также бесполезна, как английская королева*. Это остроумное высказывание Харди, возможно, является примером великого заблуждения (оно исходит от великих умов). В истории науки таких примеров (заблуждений гениев) немало, так, Эйлер считал, что человеческий ум никогда не проникнет в тайну распределения простых чисел, а Эйнштейн не признавал квантовую механику…

Общеизвестно, что со священным трепетом относился к натуральным числам знаменитый Пифагор: “Бог – это число”. “Самое мудрое – число”. “Числу же все подобно”. “Первообразы и первоначала не поддаются ясному изложению на словах, потому что их трудно уразуметь и трудно высказать, – оттого и приходится для ясности обучения прибегать к числам”. “Все происходит не из числа, но сообразно с числом, ибо в числе – первичная упорядоченность...". Однако преклонение древних пифагорейцев перед числами со временем стали объяснять исключительно ограниченностью их знаний. Но это мнение может быть спорным, так считал, например, даже гениальный Эйлер: “Из всех проблем, рассматриваемых в математике, нет таких, которые считались бы в настоящее время более бесплодными и лишенными предложений, чем проблемы, касающиеся природы чисел и их делителей.... В этом отношении нынешние математики сильно отличаются от древних, придававших гораздо большее значение исследованиям такого рода. ... Математика, вероятно, никогда не достигла бы такой степени совершенства, если бы древние не посвятили столько сил развитию вопросов, которыми сегодня большинство пренебрегает из-за их мнимой бесплодности”.

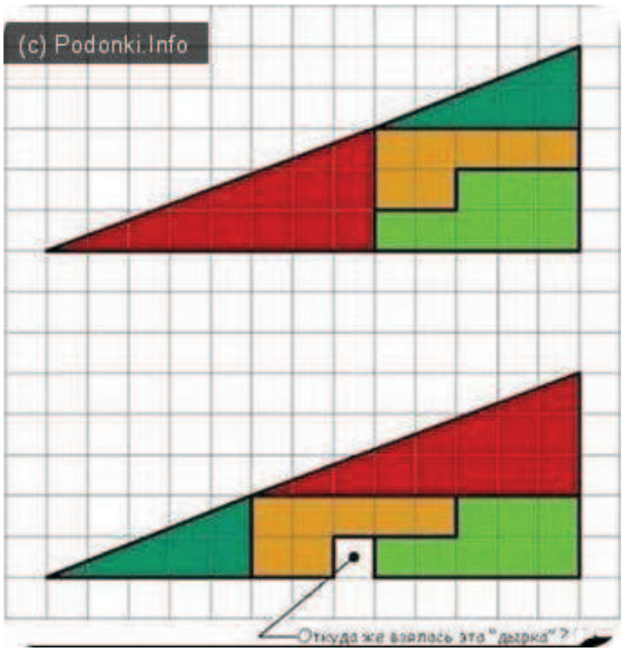
А вот ещё мнения великих ученых. ”... Единственной целью науки является возвеличить человеческий ум, и при таком подходе вопрос о числах столь же значителен, как вопрос о системе мира”. К. Якоби (1804–1851). “Целые числа сотворил господь бог, а все прочее – дело людских рук”. Л. Кронекер (1823 – 1891)

В наше время значение теории чисел явно занижено даже среди профессиональных математиков. Например, в Санкт-Петербургском математическом институте им. В. А. Стеклова РАН в 2005 г. был только один единственный (!) специалист по теории чисел – уважаемый Борис Вениаминович Лурье. Что касается «широкой публики», то для неё теория чисел – это что-то вроде кабалистики («науки» о числах), астрологии и т.п. мракобесья.

Главным аргументом «полезности» теории чисел в реальной жизни стало применение простых чисел в криптографии (с 1977 г.), занимающейся, как известно, кодированием секретных сообщений. Оказалось, что удобным шифровальным ключом может служить огромное составное число, полученное перемножением двух больших простых чисел (скажем, порядка $10^{80}$). Эти два числа – надежный дешифровальный ключ, для поиска которого надо факторизовать шифровальный ключ на два простых множителя, что сделать практически невозможно, т.к. даже самым мощным компьютерам в мире на это потребуется несколько лет работы.

Ещё простые числа якобы причастны к миру живой природы, однако, доказательства этого факта выглядят пока малоубедительно. На фоне весьма скромной роли, которую официальная наука отводит теории чисел, моя ***виртуальная космология*** выглядит полным безумием, ибо она «обнаруживает» глубочайшую связь мира чисел с фундаментальными основами мироздания (пространства-времени). Можно сказать, что виртуальная космология – это пифагореизм 21 века, апеллирующий к открытиям естественных наук. Кстати говоря, львиная доля этих открытий совершена за последние лет 300 (миг в истории человечества), и подобными знаниями, в принципе, могла обладать предыдущая «волна» человеческой цивилизации, исчезнувшей в некой глобальной катастрофе. Быть может, девиз пифагорейцев «Всё есть число» – это своеобразное «эхо» погибшей цивилизации, ведь любые устные предания быстро утрачивают достоверную информацию, «растворяя» её практически до нуля.

# 3. «ГОЛОВОЛОМКА» – это порой… мошенничество




«Головоломка – непростая задача, для решения которой, как правило, требуется сообразительность, а не специальные знания высокого уровня» (такое определение приводится в Википедии).

Ещё пару лет назад «мылом» мне прислали «головоломку» (см. рис.). Я долго и тупо смотрел на рисунок, но, увы, так ничего и не придумал. А вскоре и «забыл» (свои неудачи мы забываем быстрее всего) …

А позавчера (25 января, около 16:20) эту же «головоломку» я вдруг увидел на сайте «Макспарк». И на этот раз… сразу догадался в чем дело (см. ниже мой ответ лиловым текстом). При этом пока набирал (5 минут) свой ответ, появились подсказки, которых я ***не видел*** (см. по минутам). Теперь я пишу «головоломка» в кавычках, поскольку это скорее «мошенничество» (и это – моя *подсказка*, читающему данную статью), нежели «непростая задача». И если Вы сами хотите догадаться (с моей подсказкой), то не читайте пока текст, идущий ниже (и отсортированный по минутам).

## Разминка для мозгофф

Аз Буки
\# написал 25 января 2014, 16:04
Предлагаю решить задачку: откуда взялся лишний квадратик, если (как нас учили) от перемены мест слагаемых сумма не должна меняться

Аз Буки
\# написал комментарий 25 января 2014, 16:20
Ну..... Неужели мозги так засраны всякими коммунизмами?
Есть умные люди? -----
Конечно есть! И это будет не сталинист-коммуниЗт.

Наталия Николаевна
\# написала комментарий 25 января 2014, 16:23
Таких задачек в учебнике второклашки столько, что голова кругом. Какой идиот писал их? Фамилия то есть. Но поговорить бы с этим. Над детьми издеваются просто

Alex Kuz
\# написал комментарий 25 января 2014, 16:23
Очень забавная шутка, старая, еще из "науки и жизни"
– забыл, в чем фокус...:-)))

kavkazik. ru
\# написал комментарий 25 января 2014, 16:24
у верхнего - гипотенуза впуклая
у нижнего - гипотенуза выпуклая
потому что острый угол зеленого треугольника больше, чем острый угол красного треугольника, поэтому - площадь нижнего треугольника больше на 1 единицу

Аз Буки
\# ответил на комментарий Alex Kuz 25 января 2014, 16:25

Подсказка - тангенс

Александр Числов
# написал комментарий 25 января 2014, 16:25
Зеленый треугольник: 2/5 = 0,400 – это тангенс угла наклона гипотенузы (судя по количеству клеток на катетах треугольника)
Красный треугольник: 3/8 = 0,375 – угол наклона меньше!
Значит, гипотенузы двух треугольников просто не могут лежать на одной линии. Этот рисунок – просто... мошенничество "художника"?

Аз Буки
# ответил на комментарий kavkazik. ru 25 января 2014, 16:26
Совершенно правильно!

Аз Буки #
ответил на комментарий Александр Числов 25 января 2014, 16:27
Правильно!

Alex Kuz
#ответил на комментарий Александр Числов 25 января 2014, 16:30
Ну с такой-то фамилией канешна....:-)))

Alex Kuz
# ответил на комментарий Аз Буки 25 января 2014, 16:33
Да, с функциями все связано.
Зашибись, ишо давай, надоели майданы да омериканцы!

Арег Авагян
# написал комментарий 25 января 2014, 16:38
Если наложить друг на друга два полученных треугольника, то по гипотенузе будет видна некоторая разница, которая и компенсирует одинаковость площади треугольников.

Ладобер Ладобер
# написал комментарий 25 января 2014, 16:44
Вот на эти "крошки" и живёт Израиловка

Alexey Sorokin
# написал комментарий 25 января 2014, 19:12
вот так и образуется энтропия

Тимур Ермолов
# написал комментарий 25 января 2014, 19:36
То, что на данный случай распространяется правило "от перестановки мест слагаемых сумма не меняется", способны сказать только демалибералы (дема - от "демагогия").

Alexander Baus
# ответил на комментарий kavkazik. ru 26 января 2014, 02:22
Вы совершенно правы.
Я даже сделал анимацию, чтобы было лучше видно, как гипотенуза "выпучивается" и принимает под себя площадь лишней клетки.

# 4. СУММА ЦИФР НАТУРАЛЬНОГО ЧИСЛА

Ссылка на рисунок: http://rodiles.com.mx/images/numerosFOAM-port.jpg

### Красота и «коварство» мира чисел

Ряд натуральных чисел ($N$ = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, …) – это первая абстрактная истина, которая открылась ещё древнему человеку при счёте предметов (натуры, природы). И это ряд чисел – бесконечен. Главное свойство ряда – это очевидное правило (главный закон):
– каждое число $N$ натурального ряда делится на 1;
– каждое 2-ое число (начиная с 2) делится на 2;
– каждое 3-ое число (начиная с 3) делится на 3;
– каждое 4-ое число (начиная с 4) делится на 4;
– каждое 5-ое число (начиная с 5) делится на 5 и т.д.
Именно это бесхитростное правило (бесконечный алгоритм) делает «внутреннее устройство» мира чисел (его математических законов) настолько… *сложным* (!), что натуральный ряд изучает довольно сложный раздел *высшей* математики – ***теория чисел***. И в этом парадоксальном факте заключается главная ***красота*** мира чисел: предельно простой алгоритм – порождает бесконечно сложную «внутреннюю» структуру мира чисел (его сложнейших законов).

При этом альфа и омега теории чисел – это так называемые ***простые числа*** (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17,… – их ряд также бесконечен). Крылатое выражение «альфа и омега» («от первой до последней буквы») означает «от и до, всё полностью, с начала и до конца, всеобъемлюще». Простые числа $N$ делятся только на единицу и на самих себя, то есть у них только два делителя (1 и $N$). Все прочие натуральные числа являются *составными*, то есть у них есть и другие делители (хоть один целый делитель отличный от 1 и $N$).

Необходимо особо подчеркнуть «***коварство***» *мира чисел* (его законов). Так, экстраполяция гипотезы с конечного множества на бóльшее множество (а тем более на бесконечное множество) – игра рискованная и, вообще говоря, неприемлемая. Например, вы обнаружили, что следующие семь чисел: 31, 331, 3.331, 33.331, 333.331, 3.333.331, 33.333.331 – это *простые* числа, и на основе этого выдвигаете свою гипотезу: мол, все такие числа – простые. Однако уже следующее число 333.333.331 – *составное* (у него есть четыре делителя: 1, 17, 19.607.843, 333.333.331), и вся ваша гипотеза мгновенно рушится, как карточный домик.

### Признак делимости числа *N* на 3

В википедии есть статья «Признаки делимости», где самый простой – это признак делимости на 2, а именно: число $N$ делится на 2, когда его последняя цифра чётная (то есть делится на 2). А самый интересный – это ***признак делимости на 3***, а именно: число $N$ делится на 3, когда сумма ($S$) всех его цифр делится на 3. Данный признак делимости – красивый и мощный инструмент *теории чисел*, ведь глядя на число, скажем, $N$ = 7577478 трудно сказать делится ли оно на 3 или нет, а вот сумму его цифр легко найти даже расчётом в уме: $S = 7 + 5 + 7 + 7 + 4 + 7 + 8 = 45$, и, поскольку эта сумма делится на 3 без остатка ($S/3 = 45/3 = 15$), значит, данное число $N$ делится на 3 (без остатка, нацело). Выше говорилось, что, начиная с числа $N = 3$, каждое третье число также делится на 3, то есть на 3 будет делиться *бесконечный ряд чисел* ***кратных тройке***: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27,…. Значит, если у некого числа $N$ сумма ($S$) его цифр принадлежит указанному ряду (кратному тройке), то данное число $N$ делится на 3. И отсюда же следует важный вывод: у любого *простого* числа $N > 3$ (свыше 3) сумма ($S$) всех его цифр не принадлежит ряду, кратному тройке: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, … .

### Максимально возможная сумма всех цифр числа $N$

Когда мы говорим о сумме ($S$) всех цифр числа $N$, то сразу же напрашивается вопрос о максимально возможном значении этой суммы. То есть чему равен «потолок» ($S_{max}$) суммы всех цифр у числа порядка $N$? Очевидно, что $S_{max} = 9*k$, где $k$ – это количество девяток у числа вида $N = 999999…999$ (все цифры у данного $N$ – это девятки). То есть можно записать $N = 10\hat{}k - 1$, откуда получаем: $k = \ln(N + 1)/\ln10 \approx \ln N/\ln10$ (для очень больших чисел $N$). Но, с другой стороны, $k = S_{max}/9$, поэтому:

$$\mathbf{S_{max} \approx (9/\ln10)*\ln N \approx 3{,}90865*\ln N}\,. \tag{1}$$

Рассмотрим, например, число-монстр $N = e\hat{}(e\hat{}t) = 10\hat{}W$, где $W = (e\hat{}t)/\ln10 \approx 1{,}418*10\hat{}59$, и такое число $N$ мы не в силах себе никак представить. Поясню, что $t = 1/ПТС \approx 137{,}036$, так как ПТС = 0,0072973525698 (см. мою книгу «Время-2», в которой речь идет о *ПТС-й модели Вселенной* в мире чисел). Это число-монстр можно представить и так: $N = 9999999999…999$, где количество девяток: $k \approx 1{,}418*10\hat{}59$, значит, их сумма будет равна следующему: $S = S_{max} = 9*k \approx 9*(1{,}418*10\hat{}59) \approx 1{,}3*10\hat{}60$. И такой же результат нам выдает формула (1), при этом подчеркну, что логарифм нашего числа-монстра $N$ вполне поддается осмыслению: $\ln N = e\hat{}t \approx 3{,}3*10\hat{}59$ – это почти в 24,5 раза меньше, чем возраст Вселенной, выраженный в *элементарных временных интервалах* (*эви*) – это просто второе (равноправное) название *планковского времени* (возраст Вселенной – это порядка 8*10^60 *эви*). Значит, у нашего числа-монстра $N \approx 10\hat{}(10\hat{}59)$ сумма всех его цифр не превысит значения: $S_{max} \approx 3{,}9*\ln N \approx 3{,}9*(3{,}3*10\hat{}59) \approx 1{,}3*10\hat{}60$, что в 6,3 раза меньше, чем возраст Вселенной, выраженный в *эви*.

### Очевидная «теорема» и её следствие

Возьмем огромное *исходное* число $N = 9999999999…999$, в котором все цифры – девятки и пусть их количество $k = 31$. Очевидно, что данное число $N$ делится на 3 и, в силу *признака делимости на 3*, сумма всех цифр данного числа $N$ также делится на 3, что легко проверить: $S = 9 + 9 + 9 + 9 + 9 +…+ 9 = 9*31 = 279$ (причем $279/3 = 93$). В силу всё того же *признака делимости на 3* сумма всех цифр у числа $S$ будет делиться на 3: $S_2 = 2 + 7 + 9 = 18$, а сумма всех цифр у числа $S_2$ будет делиться на 3: $S_3 = 1 + 8 = 9$. При этом мы будем говорить, что $S_2$ – ***вторая сумма*** (исходного числа $N$), а $S_3$ – ***третья сумма*** (исходного числа $N$) или ***последняя сумма*** (исходного числа $N$), поскольку она представлена одной цифрой (в данном случае 9). Так вот, теперь должно быть понятно следующее утверждение («теорема», которую мы сейчас доказали путем логических рассуждений): ***если сколь угодно большое число N делится на 3, то все его суммы цифр делятся на 3***, где «все его суммы цифр» – это выше оговоренные суммы $S$, $S_2$, $S_3$, $S_4$, $S_5$,… (вплоть до *последней* суммы в виде одной цифры).

Вычислим все выше оговоренные суммы нашего (ПТС-го) числа-монстра $N$, полагая, что все его цифры – это якобы только девятки: $N = 99999…999$ (количество девяток: $k \approx 1{,}418*10\hat{}59$):
$S = S_{max} \approx 3{,}91*\ln N \approx 3{,}91*(3{,}2657*10\hat{}59) \approx 1{,}276*10\hat{}60$,
$S_2 \approx 3{,}91*\ln S \approx 3{,}91*\ln(1{,}276*10\hat{}60) \approx 3{,}91*138{,}399 \approx 541$,
$S_3 = 5 + 4 + 1 = 10$ (заметим, что числа 541 и 10 не делится на 3),
$S_4 = 1 + 0 = 1$. То есть *последняя сумма* нашего числа-монстра $N$ также не делится на 3 (хотя само $N$ якобы делится на 3) – всё это противоречит нашей «теореме». Поэтому можно предположить, что наше число-монстр $N$ (а из каких цифр оно реально составлено – нам, разумеется, не известно) явно не делится на число 3.

### Средняя сумма цифр первых $N$ чисел

Выше мы установили (см. гл. 3), что у произвольного числа $N$ сумма ($S$) всех его цифр может находиться в диапазоне от $S = 1$ до $S = S_{max} \approx (9/\ln 10)*\ln(N + 1) \approx 3{,}90865*\ln(N+1)$. Причем у *простых чисел* $N > 3$ (которые свыше 3) сумма всех цифр никогда не будет числом, кратным 3, то есть не будет числом из бесконечного ряда: 3, 6, 9, 12, 15, 18,… (каждое число на 3 больше предыдущего).

Если сложить суммы ($S$) всех цифр у всех первых $N$ чисел (начиная с самого начала натурального ряда: $N = 1, 2, 3, 4, 5,\ldots$), а затем результат разделить на $N$ (на количество всех рассмотренных чисел), то мы получим ***среднюю сумму*** ($S_c$) цифр первых $N$ чисел. По моей оценке (гипотезе) указанная сумма ($S_c$) устремляется к половине максимально возможной суммы ($S_{max}$), то есть:

$$S_c \approx S_{max}/2 \approx (4{,}5/\ln 10)*\ln(N + 1) \approx 1{,}95432*\ln(N + 1). \qquad (2)$$

При этом если рассмотреть аналогичным образом *среднюю сумму* ($S_c$) цифр первых $N$ *простых чисел* ($N = 2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots$), то формула (2) срабатывает также хорошо (не менее точно), как и для *всех* натуральных чисел (составных и простых чисел).

Таким образом, можно говорить, что *средняя сумма* ($S_c$) цифр первых $N$ чисел устремляется к *масштабному фактору* мира чисел (см. мою книгу «Время-2»).

### Подсчёт суммы цифр у числа $N$ с помощью ПК

Рассмотрим натуральное число $N = 1234$ (тысяча двести тридцать четыре). У этого числа первая цифра $X_1 = 1$; вторая цифра $X_2 = 2$; третья цифра $X_3 = 3$; четвертая цифра $X_4 = 4$. Путь $K$ – это количество всех цифр у натурального числа $N$, то есть в данном случае $K = 4$. Чтобы компьютер «увидел» каждую цифру в нашем числе, ему надо «расчленить» наше число 1234 на четыре цифры $X_1$; $X_2$; $X_3$; $X_4$. Для этого воспользуемся функцией ***антье*** (**А** – так мы её обозначим), которая «выделяет» *целую часть* вещественного числа $Z$. Функция антье «зашита» во всякий персональный компьютер (ПК) в качестве стандартной математической функции (скажем, как и корень квадратный из положительного числа). Например, если $Z_1 = 1{,}234$, то $A(Z_1) = A(1{,}234) = 1$, то есть функция антье просто «отбросила» все цифры, стоящие после запятой у вещественного числа $Z_1$.

Итак, вот алгоритм, по которому компьютер может найти все четыре цифры нашего числа $N = 1234$ (где $K = 4$):

$X_1 = A\{N/10\text{^}(K - 1)\}$;

$X_2 = A\{[N - X_1*10\text{^}(K - 1)]/10\text{^}(K - 2)\}$;

$X_3 = A\{[N - X_1*10\text{^}(K - 1) - X_2*10\text{^}(K - 2)]/10\text{^}(K - 3)\}$;

$X_4 = [N - X_1*10\text{^}(K-1) - X_2*10\text{^}(K-2) - X_3*10\text{^}(K-3)]/10\text{^}(K-4)$

(для последней цифры любого числа $N$ функция антье не нужна).

Если в эти формулы подставить наше число $N = 1234$, то получим следующее (это поможет понять мой алгоритм):

$X_1 = A\{1234/1000\} = A\{1{,}234\} = 1$;

$X_2 = A\{[1234 - 1000]/100\} = A\{234/100\} = A\{2{,}34\} = 2$;

$X_3 = A\{[1234 - 1000 - 200]/10\} = A\{34/10\} = A\{3{,}4\} = 3$;

$X_4 = [1234 - 1000 - 200 - 30]/1 = 4/1 = 4$.

Указанный алгоритм – это, скажем, ***алгоритм оцифровки*** натурального числа $N$, то есть его разложение на отдельные цифры $X_1$; $X_2$; $X_3$; $X_4$;…, с которыми уже легко работать на компьютере (даже в программе «Excel»). Например, все цифры числа $N$ можно *суммировать* ($S = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + \ldots$). И если вы поняли суть алгоритма оцифровки, то сможете оцифровать достаточно большие числа $N$ (с большим количеством цифр). Например, $N = 123456789$, у которого $K = 9$ разных цифр, а сумма ($S$) всех цифр равна:

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45.$$

Подобное суммирование всех цифр числа $N$ – это далеко не пустое занятие (хотя бы даже в силу всего выше сказанного). Могу также добавить, что данный вопрос (точнее говоря, вопрос о сумме всех цифр очень больших *простых чисел* $N$) мне задал один петербургский… ***физик-профессионал*** (9 июня сего года). И этот вопрос у физика возник в связи с гипотезой, касающейся самых фундаментальных основ микромира. Разумеется, меня обрадовал тот факт, что физик-профессионал *сам* «вышел» на *простые числа* (на главные законы мира чисел) в ходе своих размышлений. Хочется верить, что законы мира чисел (***теории чисел***, космологии чисел), действительно, помогут физикам по-новому (с весьма неожиданной стороны) взглянуть на физическую реальность.

13.06.2014



---

# 5. ТРИ МИЛЛИОНА ДОЛЛАРОВ ЗА ТЕОРЕМУ

Сейчас самой крупной в мире научной премией в области математики является ***премия за прорыв в математике*** (Breakthrough Prize in Mathematics) – это ежегодная премия, присуждаемая за значительные (прорывные) достижения в области математики. Эта премия учреждена в 2013 году интернет-предпринимателями Юрием Мильнером (Mail.ru Group), Марком Цукербергом (Facebook), Сергеем Брином (Google), Джеком Ма (англ. Jack Ma) (Alibaba Group). Размер премии составляет по ***3 миллиона долларов*** США каждому лауреату. Кстати, именно в такую сумму обходится всего лишь *один день войны* Украины с восставшим народом Донбасса и Луганска (такая сумма фигурирует в российских СМИ). Поэтому можно сказать, что человечеству все достижения математики достаются даром.

Первые пять лауреатов (2014 года) указанной премии выбраны Юрием Мильнером (он начинал как физик-теоретик, работал под руководством Виталия Гинзбурга) и другими учредителями премии после консультаций с экспертами. Среди пяти лауреатов есть и ***Теренс Тао***, который получил премию за прорывной вклад в гармонический анализ, комбинаторику, дифференциальные уравнения в частных производных и аналитическую ***теорию чисел*** (что мы и рассмотрим ниже).

***Тéренс Чи Шен Тао*** (род. 17 июля 1975 года, Аделаида) – австралийский математик, наиболее известным достижением которого (в 2004 году совместно с британским математиком Беном Грином) является доказательство существования *неограниченно длинных арифметических прогрессий простых чисел* [теорема Грина-Тао, за которую (и здесь я лишь немного преувеличиваю) Тао получил премию в 3 миллиона долларов].

Напомню, что ***простое число*** ($P$) – это натуральное (целое положительное) число, большее единицы, имеющее только два натуральных делителя: 1 и $P$. Другими словами, простое число $P$ не делится (нацело) ни на какое другое число, кроме самого себя и единицы. Последовательность простых чисел начинается так: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, … . Натуральные числа ($N$), которые больше единицы и не являются простыми, называются *составными* и все они, согласно *основной теореме арифметики*, «строятся» из простых чисел (путем их перемножения, например, $N$ = 1234567890 = 2*3*3*5*3607*3803). Таким образом, все натуральные числа разбиваются на три класса: простые, составные и единицу (это совершенно *особое* число). Изучением свойств простых чисел занимается *теория чисел* (раздел высшей математики). В теории колец простым числам соответствуют *неприводимые элементы*.

Чем дальше (от числа 2 к бесконечности ∞) мы уходим по числовой оси – тем, *вообще говоря* (бывают случаи, когда это не так), всё реже и реже встречаются простые числа. При этом можно полагать, что «рождение» очередного простого числа – это *псевдо*случайный процесс, то есть лишь только похожий на некую «игру случая» в мире чисел (который *детерминирован*).

Чем больше число $N$, тем точнее выполняется главный закон мира чисел, указывающий *количество* ($K$) простых чисел на числовом отрезке [2; $N$], то есть от числа 2 до числа $N$:

$$\boldsymbol{K \sim N/\ln N}. \qquad (1)$$

Иначе говоря, асимптотическая формула (1) указывает (с некой погрешностью) *порядковый номер* ($K$, в ряду всех простых чисел) наибольшего простого числа $P$, не превосходящего числа $N$. Разумеется, что *правая граница* ($N$) отрезка [2; $N$] может быть и простым числом ($P$). Например, простое число $P$ = 137 имеет порядковый номер $K$ = 33 (см. выше ряд простых чисел), а формула (1) выдает нам: $K \approx P/\ln P = 137/\ln 137 \approx 137/4{,}92 \approx 28$ (относительная погрешность этого результата – около 18,5%).

Из формулы (1) в частности следует, что $\boldsymbol{N/K \sim \ln N}$, то есть на числовом отрезке [2; $N$] *среднее расстояние* между простыми числами (это отношение $N/K$) устремляется (с ростом числа $N$) – к логарифму натуральному числа $N$ (правой границе отрезка).

Итак, ***теорема Грина-Тао*** утверждает, что существуют *арифметические прогрессии простых чисел* (АППЧ), состоящие из $L$ членов, где $L$ может быть любым натуральным числом (в том числе и сколь угодно большим). Вот примеры четырех таких прогрессий (из Википедии, сам я АППЧ до настоящего времени никогда не искал):
1). 3, 5, 7 (*длина* прогрессии $L = 3$; *разность* прогрессии $R = 2$);
2). 5, 11, 17, 23, 29 (длина $L = 5$; разность $R = 6$);
3). 7, 37, 67, 97, 127, 157 (длина $L = 6$; разность $R = 30$);
4). 7, 157, 307, 457, 607, 757, 907 (длина $L = 7$; разность $R = 150$).

Можно потребовать, чтобы, скажем, между соседними членами АППЧ не было других простых чисел, то есть, чтобы прогрессия представляла собой часть общей последовательности простых чисел (АППЧ ***«без пропусков»***, также из Википедии):
3, 5, 7 (длина прогрессии $L = 3$; разность прогрессии $R = 2$);
251, 257, 263, 269 (длина $L = 4$; разность $R = 6$);
9843019, 9843049, 9843079, 9843109, 9843139 ($L = 5$; $R = 30$);
121174811, 121174841, 121174871, 121174901, 121174931, 121174961 ($L = 6$; $R = 30$).
Самые длинные из ныне известных АППЧ «без пропусков» имеют длину $L = 10$. Очевидно, что АППЧ «без пропусков» – это совершенно особая тема («внутри» всевозможных разновидностей АППЧ). И в рамках данной статьи мы не будем больше касаться АППЧ «без пропусков».

Каждый член *арифметической прогрессии простых чисел* (АППЧ) можно вычислить по следующей очевидной формуле:

$$\boldsymbol{P}_{\mathrm{k}} = \boldsymbol{P}_{\min} + \boldsymbol{k}*\boldsymbol{R}\ , \qquad (2)$$

где $k = 0, 1, 2, 3, 4,\ldots, (L - 1)$ – порядковый номер члена данной АППЧ; $L$ – *длина* АППЧ, то есть количество всех её членов;
$\boldsymbol{P}_{\min}$ – *первый член* арифметической прогрессии (при $k = 0$);
$\boldsymbol{P}_{\mathrm{k}}$ – $k$-й член данной арифметической прогрессии (АППЧ);
$\boldsymbol{R}$ – *разность* АППЧ (расстояние между соседними членами);
$\boldsymbol{P}_{\max}$ – *старший член* данной АППЧ (при $k = L - 1$), равный:

$$\boldsymbol{P}_{\max} = \boldsymbol{P}_{\min} + (\boldsymbol{L} - 1)*\boldsymbol{R}. \qquad (3)$$

Из теоремы Грина-Тао следует, что на числовой оси есть *сколь угодно много* АППЧ. Однако их поиск, даже с помощью мощнейших компьютеров, – дело весьма трудное. Так, помимо четырех АППЧ, указанных выше, в Википедии ещё приведены всего лишь шесть АППЧ (попробуйте сами найти другие АППЧ):

5). $L = 10$; $k = 0, 1, 2, 3,\ldots, 9$; $P_{\min} = 199$; $R = 210$.

6). $L = 12$; $k = 0, 1, 2, 3,\ldots, 11$; $P_{\min} = 110.437$; $R = 13.860$.

7). $L = 13$; $k = 0, 1, 2,\ldots, 12$; $P_{\min} = 14.933.623$; $R = 30.030$.

8). 8.01.2007 г. Ярослав Вроблевский нашёл первый случай АППЧ из 24 простых чисел: $L = 24$; $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,\ldots, 23$;
$P_{\min} = 468.395.662.504.823$ (первый член данной АППЧ);
$R = 205.619*223.092.870 \approx 45.872.132.836.530$, где константа 223.092.870 – это произведение всех простых чисел $P < 23$.

9). 17.05.2008 г. Вроблевский и Раанан Чермони нашли АППЧ из 25 простых чисел: $L = 25$; $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,\ldots, 24$;
$P_{\min} = 6.171.054.912.832.631$ (первый член данной АППЧ);
$R = 366.384*223.092.870 \approx 81.737.658.082.080$ (разность АППЧ).

10). 12.04.2010 г. Бенуа Перишон, пользуясь программой Вроблевского и Джефа Рейнолдса в проекте распределённых вычислений *Prime Grid*, нашёл арифметическую прогрессию из 26 простых чисел: $L = 26$; $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,\ldots, 25$;
$P_{\min} = 43.142.746.595.714.191$ (первый член данной АППЧ);
$R = 23.681.770*223.092.870 \approx 5.283.234.035.979.900$ (разность) и это – самая длинная из всех известных АППЧ по состоянию на апрель 2010 года (последовательность A204189 в OEIS). Вполне возможно, что скоро математики придумают законы, алгоритмы, позволяющие находить сколь угодно много других АППЧ. При этом их «видовое» разнообразие также будет неисчерпаемо…

Далее приводятся результаты моего исследования десяти АППЧ, взятых из Википедии (и выше мною пронумерованных). В десяти указанных АППЧ я рассмотрел зависимость $P_{\min}$ от $P_{\max}$ и, с учетом своих представлений о… *гармонии* мира чисел, пришел к такой (весьма и весьма сомнительной) гипотезе:

$$\boldsymbol{P}_{\min} \sim \boldsymbol{P}_{\max}/\mathbf{ln}(\boldsymbol{P}_{\max}). \quad (4)$$

То есть, в данной конкретной АППЧ первый член ($P_{\min}$) численно близок к количеству ($K$, см. выше формулу 1) *простых чисел*, содержащихся на отрезке [2; $P_{\max}$], где правая граница – это старший член ($P_{\max}$) данной АППЧ. Вероятно, подобных АППЧ существует сколь угодно много, и чем больше $P_{\max}$, тем точнее выполняется асимптотический закон (4) (моя гипотеза).

Пусть $P_{\min}$* (со звездочкой) – это первый член – как результат вычисления по формуле (4). Тогда для данной АППЧ отношение $Z = P_{\min}/P_{\min}$* показывает во сколько раз реальный первый член ($P_{\min}$) больше (при $Z > 1$) или меньше (при $Z < 1$) гипотетического первого члена ($P_{\min}$*). Выше приведенные АППЧ выдают нам десять разных значений параметра $Z$, которые представлены на рис. 1 – для каждой длины ($L$) отложен свой параметр $Z$, причем в логарифмической шкале. При этом, если верна моя формула (4) (если верна моя гипотеза), то существует множество АППЧ, у которых параметр $Z$ будет близок к единице ($Z \sim 1$). То есть множество точек на графике (подобном рис. 1) должны «толпиться» именно вокруг горизонтальной линии $Z = 1$. Разумеется, что лишь десять точек на рис. 1 – это сугубо «инженерный» (то есть почти абсурдный) аргумент в пользу моей *математический* гипотезы (4). Однако законы мира чисел иногда и… угадываются (и даже глупцами).

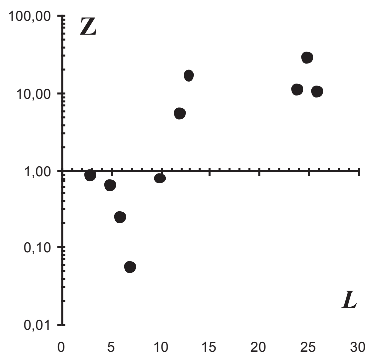


Рис. 1. Параметр $Z$ для 10-ти АППЧ

Ещё одна моя гипотеза касается *разности* ($R$) АППЧ:

$$\boldsymbol{R} \sim \boldsymbol{P}_{\min}. \quad (5)$$

То есть у нашей АППЧ, подчиняющейся гипотезе (4), разность ($R$) численно близка (по порядку величины) к первому члену данной АППЧ. В пользу данной гипотезы говорят аргументы, аналогичные гипотезе (4), то есть можно построить график, аналогичный приведенному на рис. 1 (со своим параметром $Z$).

С учетом гипотез (4) и (5) из формулы (3) мы получим:

$$\boldsymbol{L} \sim \mathbf{ln}(\boldsymbol{P}_{\max}), \quad (6)$$

то есть *длина* ($L$) нашей АППЧ численно близка (по порядку величины) к логарифму старшего члена ($P_{\max}$) нашей АППЧ. Иначе говоря [см. пояснения к формуле (1)], количество ($L$) всех членов нашей АППЧ численно близко к среднему расстоянию между *простыми числами* на отрезке [2; $P_{\max}$], где правая граница – это старший член ($P_{\max}$) данной АППЧ.

Из формулы (4) следует, что у нашей АППЧ при большом $P_{\max}$ количество ($K$) *простых чисел*, расположенных на числовой оси *между* первым членом [$P_{\min} \sim P_{\max}/\ln(P_{\max})$] и старшим членом ($P_{\max}$) будет порядка $K \sim P_{\max}/\ln(P_{\max})$. Значит, получаем:

$$\boldsymbol{L}/\boldsymbol{K} \sim [\mathbf{ln}(\boldsymbol{P}_{\max})]\text{^}\mathbf{2}/\boldsymbol{P}_{\max}. \quad (7)$$

То есть с ростом старшего члена ($P_{\max}$) наших АППЧ отношение количества ($L$) простых чисел, входящих в данную АППЧ, к количеству ($K$) всех простых чисел, заключенных между $P_{\min}$ и $P_{\max}$ (в данной АППЧ) быстро убывает, устремляясь к нулю. Иначе говоря, рассматривая числа большого отрезка [2; $P_{\max}$], ***вероятность*** ($L/K$) обнаружить первый член ($P_{\min}$) некой АППЧ длинной $L \sim \ln(P_{\max})$ – будет очень малой (близкой к нулю).

Например, у нашей 10-й АППЧ мы имеем (см. выше):
$L = 26$ – это количество всех членов АППЧ (26 простых чисел);
$P_{\min} = 43.142.746.595.714.191 \approx 4{,}314*10\text{^}16$ (первый член);
$R \approx 5.283.234.035.979.900 \approx 5{,}283*10\text{^}15$ (разность АППЧ);
$P_{\max} = P_{\min} + (L - 1)*R \approx 1{,}752*10\text{^}17$ (старший член АППЧ).
Поэтому формула (7) даёт нам следующую *вероятность* ($L/K$):
$L/K \sim [\ln(P_{\max})]\text{^}2/P_{\max} \approx 8{,}997*10\text{^}{-15}$ и это, согласитесь, – очень малая вероятность. Отчасти поэтому столь долго вёлся поиск первого члена данной АППЧ, длинной «всего лишь» $L = 26$. Кстати, нетрудно убедиться, что более точный (и трудоёмкий) метод вычисления даёт, практически, такой же результат: $L/K \approx L/[P_{\max}/\ln(P_{\max}) - P_{\min}/\ln(P_{\min})] \approx 7{,}910*10\text{^}{-15}$.

Любопытно оценить указанные выше параметры, скажем, для ПТС-й АППЧ, у которой (по определению) $P_{max}$ ≈ e^(e^137) ~ 10^(10^59) – см. мою книгу «Время-2». Для такой АППЧ мы получаем следующее параметры:

$L$ ~ ln($P_{max}$) ~ e^137 = 10^(137/ln10) ≈ 3,15*10^59,

то есть количество членов такой АППЧ по порядку величины близко к количеству *планковских времен* (5,39106*10^–44 сек), которые «помещаются» в возрасте Вселенной (13,798 миллиардов лет).

$R$~$P_{min}$ ~ $P_{max}$/ln($P_{max}$) ≈ e^(e^137)/e^137 = 10^(1,368*10^59) /3,15*10^59 ~ 10^(10^59) – даже и не пытайтесь хоть как-то представить себе это число (увы, это человеку не дано сделать).

$L/K$ ~ [ln($P_{max}$)]^2/$P_{max}$ ~ 1/10^(10^59) и это «почти» ноль, то есть найти (по крайней мере, с помощью пусть даже *квантового* компьютера) *реальные, точные* параметры подобной АППЧ – это, практически, не решаемая задача?

Кто-то из читателей скажет, что столь малая вероятность – $L/K$ ~ 1/10^(10^59) – лишена всякого смысла. Однако это далеко не так. Например, в реальной космологии (физике) есть оценка вероятности выбора Творцом именно нашей Вселенной (с известной нам физикой) среди умопомрачительного количества всевозможных вселенных с иными, отличными от наших, законами физики. Так вот, указанная вероятность воплощения данного замысла Творца оценивается как 1/10^(10^123). См. замечательную научно-популярную книгу английского ученого Роджера Пенроуза «Новый ум короля…», М.: Едиториал УРСС, 2005 (стр. 297–301). И, вполне возможно, что законы мира чисел гораздо теснее связаны с реальными (физическими) законами, чем принято сейчас думать. Собственно об этом и говорит моя ***виртуальная космология*** (космология чисел).

08.07.2014



---

# 6. Объяснение больших чисел Дирака

Поль Адриен Морис Дирак

Поль Дира́к (1902 – 1984) – английский физик-теоретик, один из создателей квантовой механики, лауреат Нобелевской премии по физике 1933 года (совместно с Эрвином Шрёдингером). Помимо всех прочих заслуг Дираку принадлежат две необычные физические гипотезы: *магнитный монополь* (1931) и «*гипотеза больших чисел*» (1937). Физики предприняли целый ряд попыток обнаружить магнитный монополь в эксперименте, однако до сих пор не получено никаких окончательных свидетельств их существования. Тем не менее, монополи прочно вошли в современные теории Великого объединения и могли бы служить источником важной информации о строении и эволюции Вселенной. Так же до сих пор никем не создана и некая «красивая теория», объясняющая существование в природе *больших чисел Дирака.* Поэтому в данной статье я и предлагаю свой вариант этой «красивой теории» (*виртуальной космологии*), объясняющей (?) феномен больших чисел Дирака. Но прежде приведу несколько интересных фактов о необычной личности самого Поля Дирака.

## 1. От простого инженера до величайшего физика

Поль Дирак родился 8 августа 1902 года в Бристоле в семье учителя, в которой всего было трое детей. Его отец преподавал французский язык, а мать, дочь капитана торгового судна, работала в библиотеке. В 12-летнем возрасте Поль Дирак стал учеником средней школы Технического колледжа, а в 16 лет Дирак поступил на инженерный факультет Бристольского университета. Несмотря на то, что его любимым предметом была математика, он неоднократно говорил, что инженерное образование дало ему очень много: «Раньше я видел смысл лишь в точных уравнениях. Мне казалось, что если пользоваться приближёнными методами, то работа становится невыносимо уродливой, в то время как мне страстно хотелось сохранить *математическую красоту*. Инженерное образование, которое я получил, как раз научило меня смиряться с приближенными методами, и я обнаружил, что *даже в теориях, основанных на приближениях, можно увидеть достаточно много красоты* [это показывает (?) и моя виртуальная космология; при цитировании здесь и далее – *курсив* мой]… Я оказался вполне подготовленным к тому, что все наши уравнения надо рассматривать как приближения, отражающие существующий уровень знаний, и воспринимать их как призыв к попыткам их усовершенствования. Если бы не инженерное образование, я, наверное, никогда не добился бы успеха в своей последующей деятельности…» («Воспоминания о необычайной эпохе»).

После двухлетнего углубленного изучения математики в Бристольском университете в 1923 году у Дирака появилась возможность поступить в аспирантуру Кембриджского университета. И уже к 1927 году благодаря своим новаторским работам по теоретической физике Поль Дирак приобрел широкую известность в самых высоких научных кругах (хотя ему было только 25 лет)…

Подводя итог жизненного пути Поля Дирака, можно привести слова нобелевского лауреата Абдуса Салама: «Поль Адриен Морис Дирак – без сомнения, *один из величайших физиков* этого, да и любого другого столетия. В течение трех решающих лет – 1925, 1926 и 1927 – своими тремя работами он заложил основы, во-первых, квантовой физики в целом, во-вторых, квантовой теории поля и, в-третьих, теории элементарных частиц… Ни один человек, за исключением Эйнштейна, не оказал столь определяющего влияния за столь короткий период времени на развитие физики в этом столетии.»

Ещё при жизни Дирак вошёл в научный фольклор как персонаж многочисленных анекдотических историй разной степени достоверности. Они позволяют в какой-то мере понять особенности его характера: молчаливость, серьёзное отношение к любой теме обсуждения, нетривиальность ассоциаций и мышления в целом, стремление к предельно четкому выражению своих мыслей, рациональное отношение к проблемам (даже абсолютно не связанным с научным поиском). Он не употреблял алкоголь и не курил, был равнодушен к пище или удобствам, избегал внимания к себе. Дирак долгое время был неверующим, но с годами его отношение к религии смягчилось (возможно, под влиянием жены), и он даже стал членом Папской академии наук.

## 2. Математическая красота в понимании Дирака

С точки зрения научной методологии Дирака первостепенное значение приобретает понятие «*математической красоты*», под которым понимается не только логическая ясность и последовательность теории, но и нечто бо́льшее. Так, Википедия, рассказывая о личности великого физика, в разделе «Интересные факты» говорит, что якобы именно Поль Дирак нашёл способ выразить любое *натуральное число* ($N$ = 2, 3, 4, 5, 6, 7, …) такой красивой формулой:

$$N = -\log_2(\log_2(\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{2}}})), \tag{2.1}$$

где количество знаков корня (√) равно данному числу $N$. Например, чтобы получить число $N = 3$ в формуле Дирака надо три раза извлечь корень квадратный из числа 2. [На языке программы “Excel” формула (2.1) записывается так: $N$ = – log(log($X$;2);2), где $X$ = ((2^½)^½)^½ = 2^(2^–3). При этом в “Excel” легко проверить, что если $Z$ – это *любое* вещественное число бо́льшее единицы (Дирак взял $Z$ = 2), принятое в качестве основания логарифма, то тогда $N$ = –log(log($X$;$Z$);$Z$), где $X$ = $Z$^($Z$^–$N$).]

Формула (2.1) – это простейший пример «математической красоты», столь характерной для ***теории чисел*** (раздел высшей математики, изучающей мир чисел). Дирак, безусловно, глубоко «чувствовал» удивительную красоту *мира чисел*, а это дано далеко не каждому физику (не говоря уже о всей прочей публике). Кстати, многие профессиональные математики, независимо от их специализации (в самых разных областях *бесконечно* обширной математики), в качестве своего «хобби» обращались именно к *теории чисел*, как к некому эталону математической красоты, полному хитроумных парадоксов, загадок, тайн. Когда в 1956 году во время лекции в Московском университете Дирака спросили о его понимании философии физики, он написал на доске: «***Физические законы должны обладать математической красотой***. (Physical laws should have mathematical beauty).»

Эта методологическая установка Дирака была ярко и однозначно выражена им в статье, посвященной столетнему юбилею со дня рождения Эйнштейна: «… нужно в первую очередь руководствоваться соображениями *математической красоты*, не придавая особого значения расхождениям с опытом. Расхождения вполне могут быть вызваны какими-то вторичными эффектами, которые прояснятся позже. Хотя пока еще никаких расхождений с теорией гравитации Эйнштейна не обнаружилось, в будущем такое расхождение может появиться. Тогда его надо будет объяснять не ложностью исходных посылок, а необходимостью дальнейших исследований и усовершенствований теории.» Часто Дирак говорил о своей научной работе как об *игре с математическими соотношениями*, считая первостепенной задачей – поиск красивых уравнений, которые впоследствии могут получить физическую интерпретацию (в качестве примера успешности такого подхода он называл *уравнение Дирака* и идею *магнитного монополя*).

В статье «Эволюция взглядов физиков на картину природы» Дирак сделал такое заключение: «По-видимому, одним из фундаментальных свойств природы является то, что ***основные физические законы описываются с помощью математической теории***, обладающей настолько большим изяществом и мощью, что требуется чрезвычайно высокий уровень математического мышления, чтобы понять ее. Вы можете спросить: почему природа устроена именно так? На это можно только ответить, что наши современные знания показывают, что природа, по-видимому, устроена именно таким образом. Мы просто должны согласиться с этим. Описывая эту ситуацию, можно сказать, что *Бог является математиком весьма высокого класса* и в своем построении Вселенной он пользовался весьма сложной математикой.»

Говоря о личности Поля Дирака можно добавить, что ещё в августе 1926-го Эйнштейн писал Паулю Эренфесту: «У меня проблемы с Дираком. Это балансирование на головокружительной грани между гением и безумием – ужасно». А великий Нильс Бор сказал как-то: «Из всех физиков у Дирака самая чистая душа».

### 3. Большие числа Дирака

*Большие числа Дирака* (БЧД) относится к наблюдениям Поля Дирака в 1937 году. В них речь идет о неких фундаментальных *отношениях*, например, отношения размеров Вселенной (мегамир) к размерам элементарных частиц (микромир), или, например, отношения сил природы различных масштабов. Эти отношения выражаются очень большими числами, скажем, порядка 10^40 (это 10 в 40-й степени, то есть это число 1000000000000000000000000000000000000000…000, где после единицы стоит 40 нулей). И все эти большие числа – *безразмерные*, поскольку размерности просто сокращаются (скажем, при делении «метров» на «метры»). Вот наиболее ***популярные*** примеры больших чисел Дирака:

– отношение радиуса Вселенной к радиусу электрона ~ 4,4*10^40;
– отношение массы Вселенной к массе электрона ~ 4,3*10^41;
– отношение кулоновской силы к силе тяготения ~ 4,2*10^42;
– отношение радиуса Вселенной к длине Планка ~ 0,7*10^61;
– отношение энергии Вселенной к «нулевой энергии» ~ 5,3*10^121.

В 1938 году Поль Дирак в рамках своей гипотезы больших чисел предположил, что гравитационная постоянная может уменьшаться обратно пропорционально времени. При этом Дирак считал постоянную тонкой структуры (α) истинной константой, однако отметил, что в будущем это может оказаться не так. ***Постоянная тонкой структуры*** (ПТС), обычно обозначаемая как альфа (α = 0,0072973525698) – это *безразмерная* физическая постоянная, характеризующая силу электромагнитного взаимодействия. ПТС описывает вероятность фундаментального физического процесса: поглощения или излучения электроном фотона. Величина, обратная ПТС, близка к целому числу: 1/α = 137,0359990741 ≈ 137. Существуют различные физические интерпретации ПТС, например, ПТС может быть определена как квадрат отношения элементарного электрического заряда ($e$) к планковскому заряду ($q$), то есть **α = (*e*/*q*)^2**. Данная интерпретация ПТС любопытна тем, что аналогичное выражение (по форме и, если пофантазировать, даже по «смыслу»?) можно обнаружить в *мире чисел* при рассмотрении «мощных» натуральных чисел $N$, содержащих достаточно много целых делителей, – см. формулу (14.12) в моей книге «Зеркало» Вселенной».

Эти идеи Дирака (затрагивающие и вопрос изменения ПТС во времени) вызвали значительный интерес, который сохраняется до сих пор. В 1948 году, пытаясь опровергнуть гипотезу Дирака, Эдвард Теллер (1908 – 2003), американский физик-теоретик (широко известный как «отец водородной бомбы» в США), упомянул возможность логарифмической зависимости **1/α ~ ln*T***, то есть с ростом времени ($T$), возможно, происходит и рост параметра 1/α (который дорастает до значения 1/α ≈ 137 при $T$ ≈

13,798 миллиарда лет – это возраст Вселенной). Однако вопрос о том, постоянна ли $\alpha$, считается открытым, поскольку в нашу эпоху возможные изменения $\alpha$ едва уловимы современными техническими средствами. В связи со своей гипотезой ($1/\alpha \sim \ln T$) Теллер предложил следующее, скажем, ПТС-ое *большое число* ($\gamma$), учитывающее постоянную тонкой структуры (ПТС):

$$\gamma = \exp(1/\alpha) = 3{,}2657*10^{\wedge}59, \qquad (3.1)$$

которое позволяет получить якобы *наиболее приемлемое* большое число Дирака (приведенное к ПТС): $2\gamma/\alpha$ = 8,95*10^61. Очевидно, что это число не вытекает из какой-то физической теории, поэтому его значение может быть представлено и другими путями (другими рассуждениями и формулами). Так, в Википедии представлено ещё три таких «пути», приводящих к *наиболее приемлемым* большим числам Дирака (лежащих в диапазоне от 8,77*10^61 до 9,08*10^61).

Согласно гипотезе Дирака, современная эквивалентность подобных отношений (больших чисел Дирака) является не простым совпадением, а обусловлено космологическими свойствами Вселенной с необычными свойствами (не исключается зависимость физических фундаментальных постоянных от времени). Большие числа Дирака привлекали большое внимание физиков (и нумерологов всех мастей) на протяжении многих десятилетий, но до сих пор «красивая теория», объясняющая большие числа Дирака, так и *не создана*, то есть, не признана сообществом *физиков-теоретиков*. Всё прочее – не в счёт. Так и моя виртуальная космология останется не более, чем игрой разума, если мои идеи не будут восприняты физиками-теоретиками. Впрочем, меня утешает то, что сам я получаю наивысшее наслаждение разума от «общения» с миром чисел и, как надеюсь, мне удалось увлечь этой «игрой» хотя бы ещё несколько умов…

## 4. Понятие о типе (*T*) натурального числа *N*

Далее я приведу минимум сведений из моей *виртуальной космологии* – игры-теории, которая, начиная с 2010 года, развивается на глазах читателей, можно сказать, в режиме «онлайн». Эти сведения позволят читателю понять, как *мир чисел* может объяснить большие числа Дирака (то есть и всю природу Мироздания).

Всякое натуральное (целое положительное) число $N$ имеет *целые* делители. Числа $N$, имеющие только два делителя (1 и $N$) называются *простыми* числами, и ряд таких чисел бесконечен: 2, 3, 5, 7, 11, 13,… (единица – это совершенно особое число). Из простых чисел, как из кирпичиков, строятся все прочие натуральные числа. Например, $N$ = (2*2*2*2)*(3*3*3)*5*(11*11) = (2^4)*(3^3)*5*(11^2) = 261360 и никакой другой набор простых чисел (порядок следования сомножителей значения не имеет) не даст нам числа 261360 – именно это и утверждает *основная теорема арифметики* (но кто её помнит со школы?). Таким образом, мир чисел символизирует некое фундаментальное «устройство» Мироздания, которое физика пытается объяснить в рамках, скажем, *струнной теории*: всё вещество и все силы природы обязаны своим происхождением *одной* фундаментальной величине – колеблющейся квантовой струне (у меня её символизирует число), которая имеет резонансные частоты (их символизируют *простые* числа или некие *типы* чисел?). То есть ВСЁ в этом мире состоит из комбинаций вибрирующих волокон (квантовых струн). Микроструктура Вселенной – это сложно переплетенный, многомерный лабиринт (но именно так «устроен» и мир чисел!), в котором струны бесконечно закручиваются и вибрируют, ритмично отбивая законы космоса (законы *теории чисел*). То есть ВСЁ (в том числе все тайны жизни, наши мысли) – это своеобразный танец квантовых струн. Представить это непросто, однако в этом нам способен помочь… мир чисел – это лейтмотив всей виртуальной космологии.

Выше мы представили число $N$ = 261360 в так называемом *каноническом виде*, а зная его – легко найти *тип* ($T$) данного числа $N$, то есть *количество* всех его целых делителей (от 1 до $N$ включительно): для этого надо перемножить все показатели степени, увеличив их на единицу: $T$ = (4+1)*(3+1)*(1+1)*(2+1) = 120. Это очень красивое утверждение (теорема) *теории чисел*, и с помощью компьютера легко убедиться, что у числа $N$ = 261360 именно 120 делителей (поясню, что термин «*тип*» числа придуман мною для удобства разговора).

Единица ($N$ = 1) – это единственное число, тип которого $T$ = 1. Очевидно, что все *простые* числа ($N$ = 2, 3, 5, 7, …) имеют тип $T$ = 2. Типы всех прочих натуральных чисел $N$, в свою очередь, также образуют натуральный ряд: $T$ = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, … и т.д. до бесконечности. При этом, вообще говоря, нельзя предсказать с какого именно числа $N$ впервые «открывается» данный тип $T$ («открывается» мир

*T* – удобно и полезно мысленно полагать, что всё *бесконечное* множество чисел, имеющих одинаковый тип *T*, образуют свой уникальный мир, со своими законами).

## 5. Закон распределения простых чисел

Какое *количество* (*K*) простых чисел будет содержаться на отрезке [1; *N*]? На этот (ключевой) вопрос важнейшая теорема *теории чисел* дает поразительно *лаконичный* ответ (и в этом лаконизме – наивысшая красота мира чисел):

$$\boldsymbol{K \sim N/\ln N}, \tag{5.1}$$

где символ «тильда» (~) означает (в рамках теории чисел), что реальное количество (*K*) простых чисел тем ближе к отношению $N/\ln N$, чем больше число *N*. Здесь необходимо подчеркнуть, что почти все важнейшие ***законы мира чисел «заточены» на… бесконечность*** (∞), а именно: чем больше аргумент (здесь это *N*) – тем точнее работают законы теории чисел. В этом отношении мир чисел «подтверждает» нам, что Вселенная колоссальна по своим размерам. Более того, возможно, Вселенная *бесконечна*, как бесконечен и мир натуральных чисел (в том числе и мир *простых* чисел, что совершенно очевидно для математиков).

Рассмотрим конкретный (*рабочий*) отрезок [1; *N*] числовой оси с правой границей $N = 520000$, то есть наш отрезок содержит свыше полумиллиона первых натуральных чисел. Тогда по формуле (5.1) мы получим $K \sim 520000/\ln(520000) \approx 39508$, что всего лишь на 9% меньше реального количества простых чисел ($K = 43061$) на отрезке [1; 520000]. При этом, чем дальше «вправо» (от единицы) мы уходим по числовой оси – тем, *вообще говоря* (бывают случаи, когда это не так), всё реже и реже встречаются простые числа. Однако всегда (?) будут встречаться *простые близнецы* – простые числа, разность между которыми равна 2 (и в этом – одна из многочисленных ещё не разгаданных тайн мира чисел).

Если мы знаем реальный *порядковый номер* (*K*) простого числа *N* (в ряду всех простых чисел: 2, 3, 5, 7, 11, 13,…), то из формулы (5.1) можно найти и само простое число *N* (и тем точнее, чем больше его порядковый номер *K*):

$$\boldsymbol{N \sim K * \ln K}. \tag{5.2}$$

Формула (5.2) эквивалентна формуле (5.1), то есть обе эти формулы (как бы «с разных сторон») говорят о главном – о *законе распределения* идеальных простых чисел («вырастающих» по закону $N \sim K*\ln K$) среди всех прочих натуральных чисел. Реальные простые числа появляются в ряду всех чисел так, словно их появление – «*случайный*» (непредсказуемый) процесс. При $K = 43061$ из формулы (5.2) мы получим $N \approx 459477$, а реальное 43061-ое простое число – это $N = 519997$ (что легко проверить на замечательном портале «Империя чисел» http://ru.numberempire.com/ ).

Зная, закон распределения *идеальных* простых чисел ($N \sim K*\ln K$) мы можем вычислить в мире чисел, скажем, ***масштабный фактор*** (*M*) – расстояние между соседними *идеальными* простыми числами (эту формулу нетрудно доказать):

$$\boldsymbol{M \approx 1 + \ln N - \ln\ln N}\ . \tag{5.3}$$

«Поведение» (математические свойства) параметра *M* в мире чисел напоминает «поведение» *масштабного фактора* из реальной космологии – науки изучающей реальную Вселенную. Это очень важный аргумент в защиту моей виртуальной космологии (идеи о том, что мир чисел «отражает» реальный физический мир). Чуть ниже я ещё покажу, к каким любопытным аналогиям с реальной Вселенной приводит данный параметр *M* из мира чисел.

## 6. Нормальный тип числа

Мы уже знаем, сколько на отрезке [1; *N*] будет содержаться *простых* чисел (имеющих тип $T = 2$). А сколько на отрезке [1; *N*] будет содержаться чисел, имеющих тип $T = 3$, $T = 4$, $T = 5$, и т.д.? Возможно, *теория чисел* уже содержит ответы и на эти вопросы, но лично мне такие ответы (формулы) не известны. Поэтому здесь я обратился за помощью к компьютеру, который «тупо» находил типы (*T*) всех подряд натуральных чисел нашего отрезка. И оказалось, что на рабочем отрезке [1; 520000] содержится всего лишь… 82 разных типа: $T = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,\ldots, 22$ – эти типы идут без пропусков (копируя начало натурального ряда), а вот дальше начинаются пропуски типов – не появились *типы-фантомы* $T = 23$, 29, 30,31, 37, 38,…, 197, 198, 199. «Фантомы» – поскольку с ростом правой границы отрезка (при $N >$

520000) данные типы ($T$) непременно появятся (а фантомами станут уже б*о*льшие типы $T > 200$, поскольку $T$max = 200 – см. ниже).

На отрезке [1; 520000] *максимальный тип* ($T$max) оказался равным $T$max = 200 – столько целых делителей содержит число $N = 498960$ и никакое иное число на отрезке [1; 520000] не содержит так много делителей. А согласно теории чисел данный (важнейший) параметр оценивается так (*формула Вигерта*):

$$\boldsymbol{T\max \sim 2^{(\ln N/\ln\ln N)}}, \qquad (6.1)$$

что дает нам явно заниженный результат: $T$max ~ 2^(ln(520000)/ln(ln(520000))) ≈ 34. Однако напомню, что все основные (и неизменно красивые в своем лаконизме, кажущейся простоте) формулы *теории чисел* «заточены» на отрезки [1; $N$] *колоссальной* длины (с колоссальной правой границей $N$). По моим грубым оценкам формула Вигерта выдает значения $T$max уже довольно близкие к реальным начиная с чисел порядка $N \approx 10^{1144}$, когда $T$max ~ 5*10^100 (см. мою книгу «Бесконечность», гл. 8, где, кстати, мною допущена опечатка в части указанного значения $N$).

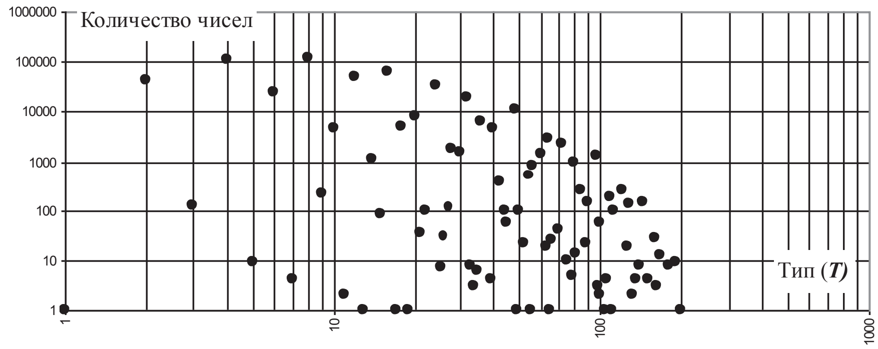



Рис. 6.1. Количество чисел, имеющих данный тип $T$ на отрезке [1; 520000]

С помощью компьютера нетрудно установить, что на отрезке [1; 520000] всем появившимся 82-м разным типам $T$ = 1, 2, 3, 4, …, 192, 200 (идут по возрастанию) соответствуют такие количества натуральных чисел: $K$ = 1, 43061, 128, 112317, 9, 24374, 4, 116650, 213, 4532,…, 9, 1. Данную информацию наглядно показывает график на рис. 6.1, где каждая жирная точка – это количество ($K$) натуральных чисел, имеющих некий (конкретный) тип $T$ (этот параметр отложен по горизонтальной оси графика в логарифмической шкале). Хорошо видно, что если все точки графика «накрыть» сверху некой воображаемой огибающей линией, то её наивысшая точка расположится над значением $T \approx 6$. И хотя сама 6-я точка ($T = 6$) слегка «провалилась» между двумя наивысшими точками $T = 4$ и $T = 8$, тем не менее, почти половина (49%) чисел рабочего отрезка [1; 520000] имеют типы $T$ = 4, 5, 6, 7, 8. Именно в этом смысле мы вправе сказать, что на отрезке [1; 520000] б*о*льшая часть натуральных чисел имеет примерно 6 делителей, то есть имеет тип $T \approx 6$. А согласно терминологии, принятой в теории чисел, мы должны сказать так: на отрезке [1; 520000] «***нормальный***» тип ($T$н) примерно равен 6. Причем теория чисел дает нам очередную красивую формулу для любого большого отрезка [1; $N$]:

$$\boldsymbol{T\text{н} \sim 2^{\ln\ln N} = (\ln N)^{\ln 2} = (\ln N)^{0{,}693\ldots}}. \qquad (6.1)$$

Для нашего $N$ = 520000 мы получим $T$н ~ (ln(520000))^0,693… = 5,968… ≈ 6, что хорошо стыкуется с данными, которые мы рассмотрели выше на графике (рис. 6.1).

## 7. Понятие «время» в виртуальной космологии

Последние (самые «свежие») версии моей *виртуальной космологии* строятся на основе ключевых гипотез о времени (для вещественных чисел $N > e$):

1). ***Время (t) – это двойной логарифм числа N***, то есть $\boldsymbol{t = \ln\ln N}$, где $N$ – правая граница рассматриваемого отрезка [$e$; $N$] числовой оси; $e$ = 2,718… – основание натуральных логарифмов (важная математическая константа). При этом (для достаточно больших времен $t$) *масштабный фактор* ($M$) растет почти по экспоненте от времени: $M \approx 1 + \ln N - \ln\ln N = 1 + \exp(t) - t$, то есть $M \sim \exp(t)$. Значит, (для больших $t$) время – это логарифм масштабного фактора: $t \sim \ln M$.

Данная гипотеза согласуется (?) с теоретической физикой, в которой математические описания *пространства* (у меня – масштабного фактора $M \sim \ln N$) и *времени* (у меня $t = \ln\ln N$) оказались очень похожими и в действительности это две стороны одной единственной структуры, именуемой «***пространство-время***». Пространство-время – это основные формы существования материи, которые имеют решающее значение для построения физической картины мира, нашей Вселенной. В современной квантовой теории пространству и времени отводится центральная роль, существуют даже теории, где вещество рассматривается не более как возмущение этой основной структуры (в классической физике пространство и время строится из материи, и только это доступно нам в ощущениях). Таким образом, исследуя «поведение» наших параметров $M$ и $t$ в *мире чисел* – мы исследуем (пытаемся «расшифровать») «устройство» реального Мироздания, причем на самом что ни на есть фундаментальном уровне, «ниже» которого – только мнимые миры, *изоморфные* комплексной области в мире чисел. Поясню, что объекты, между которыми существует изоморфизм, являются в определённом смысле «одинаково устроенными» (с точки зрения их «математики») и называются изоморфными.

2). ***Возраст Вселенной изоморфен значению*** $\boldsymbol{t = 1/\alpha \approx 137}$ (в неких виртуальных единицах времени). То есть прошедшие с момента возникновения Вселенной (с момента так называемого Большого взрыва) 13,798 миллиарда лет изоморфны (эквивалентны, тождественны) обратной величине *постоянной тонкой структуры* (α). В оправдание данной гипотезы (помимо выше упомянутых идей Теллера) могу добавить, что постоянная тонкой структуры, являясь безразмерной величиной, которая никак не соотносится ни с какой из известных математических констант, всегда являлась объектом восхищения для физиков. А выдающийся американский учёный, один из основателей квантовой электродинамики, лауреат Нобелевской премии по физике Ричард Фейнман (1918 – 1988), даже называл постоянную тонкой структуры «одной из величайших проклятых тайн физики: магическое число, которое приходит к нам без какого-либо понимания его человеком».

Данную главу я закончу иллюстрацией некоторых своих идей, вытекающих из гипотезы $t = \ln\ln N$ и доказывающих (?), что мир чисел, действительно, «отражает» некие важные аспекты реального (физического) мироустройства.

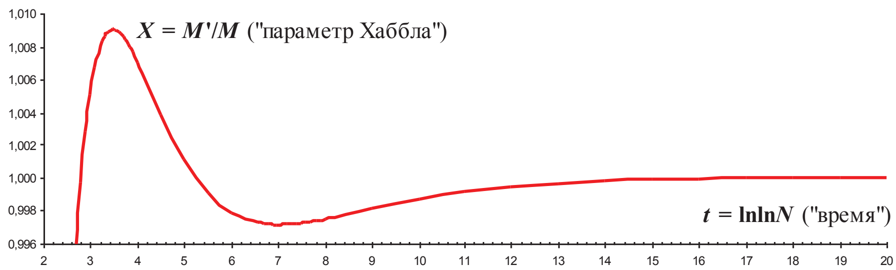



Рис. 7.1. «Параметр Хаббла» в рамках виртуальной космологии

Выше говорилось, что в мире чисел (как и во Вселенной) можно увидеть свой «масштабный фактор» $M \approx 1 + \ln N - \ln\ln N$. После введения понятия «время» ($t = \ln\ln N$), параметр $M$ логично записать в следующем виде: $M \approx 1 + e\hat{}t - t$. Причем не трудно повысить точность этой формулы (в области малых времен $t$), скажем, так:

$$\boldsymbol{M \approx [1 + 0{,}5/e\hat{}(t/2)]*(1 + e\hat{}t - t).} \qquad (7.1)$$

В данной формуле параметр $M$ – это некая функция ($f$) от времени: $M = f(t)$. И нам нетрудно взять *первую производную* по времени ($M' \equiv dM/dt$) от функции $M = f(t)$. Физический смысл такой производной – это *скорость изменения* функции $M = f(t)$ с ростом времени $t$. Выглядит указанная производная следующим образом:

$$\boldsymbol{M' = e\hat{}(-t/2)*[4*e\hat{}(3*t/2) + e\hat{}t - 4*e\hat{}(t/2) + t - 3]/4.} \qquad (7.2)$$

Взяв первую производную ($M' \equiv dM/dt$), мы можем вычислить некий, скажем, *X-параметр*: $X \equiv M'/M$, который «отражает» ***параметр Хаббла*** из реальной космологии. Наш $X$-параметр, по крайней мере, *качественно* «отражает» один из любопытных сценариев поведения реального параметра Хаббла при эволюции Вселенной (см. график на рис. 7.1): сначала был бурный рост («взрыв») $X$-параметра (пик в районе $t \approx 3{,}5$); потом $X$ стал убывать (замедляясь во времени вплоть до времени $t \approx 7$); а затем начинается *бесконечный* рост $X$-параметра (и скорость этого роста постоянно замедляется, «замораживается», когда $X$ устремляется к единице).

Необходимо подчеркнуть, что в последних версиях виртуальной космологии рассматриваются не только натуральные (целые положительные) числа, но и все *вещественные* положительные числа ($N$), которые мы будем условно делить на 4 множества (их названия придумал сам для упрощения разговора):

– на полуинтервале [0; 1) находятся *экзочисла* (Э) и их также бесконечно много;

– единица – это совершенно особое число (у меня символизирует *сингулярность*);
– на интервале (1; e) находятся *проточисла* (*П*) и их также бесконечно много;
– на отрезке [e; ∞] находятся *обычные* числа, в том числе и натуральные числа.
При этом время ($t$) постулируется как $\boldsymbol{t = \ln|\ln N|}$, где $|\ln N|$ – это *модуль* $\ln N$, то есть величина $\ln N$, взятая без знака «минус» (который появляется у экзочисел Э). То есть для экзочисел Э на графике (рис. 7.2) показана вещественная часть комплексного логарифма (который в мире чисел, возможно, «отражает»… *тёмную энергию*).

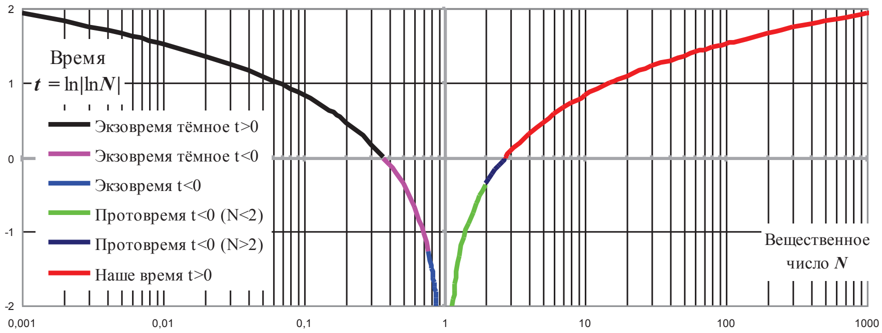



Рис. 7.2. Семь ипостасей времени ($t = \ln|\ln N|$) в рамках виртуальной космологии

Тем читателям, кому приведенные в данной работе идеи, мысли, гипотезы кажутся любопытными, рекомендую заглянуть в мои статьи и книги на портале «Техно-сообщество России».

### 8. Большие числа Дирака в мире чисел

Итак, в виртуальной космологии возрасту Вселенной (13,798 миллиарда лет) ставится в соответствие колоссальное число $N = \exp(\exp(t)) \approx \exp(\exp(137)) \approx \exp(3{,}2657*10\text{^}59) \approx 10\text{^}(10\text{^}59)$, то есть 10 в степени 1000000000000000000…000, где после единицы стоит 59 нулей (и если читатель найдет теорию, в которой речь идет о ещё б**о**льшем числе, то пусть сообщит мне об этом!). Наш мозг не способен представить отрезок [$e$; $N$] числовой оси, когда $N \approx 10\text{^}(10\text{^}59)$, однако мы, благодаря *теории чисел*, твердо знаем, что *типы* ($T$) натуральных чисел на этом отрезке изменяются в пределах от $T\text{min} = 2$ (у всех простых чисел) до $T\text{max} = 2\text{^}(\ln N/\ln\ln N) \approx 10\text{^}(7{,}17*10\text{^}56)$ – согласно формуле Вигерта. При этом б**о**льшая часть указанных чисел имеет (*нормальный*) тип $T\text{н} \sim 2\text{^}\ln\ln N = (\ln N)\text{^}\ln 2 = (\ln N)\text{^}0{,}693… \approx 1{,}786*10\text{^}41$ – это, иначе говоря, количество целых делителей у б**о**льшей части натуральных чисел на отрезке от $N = 2{,}718…$ до $N \approx 10\text{^}(10\text{^}59)$.

Значит, мы вправе записать такое отношение: $\boldsymbol{T\text{н}/T\text{min} \approx 8{,}931*10\text{^}40}$, которое (с точки зрения виртуальной космологии) можно трактовать как некое (скажем, *нормальное*) ***большое число Дирака*** – отношение нормального типа ($T$н) к минимальному типу ($T$min) в современную нам эпоху (при $t \approx 137$), то есть при $N \approx 10\text{^}(10\text{^}59)$. Найденное нами (довольно долгим путем) отношение $T$н/$T$min, с моей точки зрения, имеет очень важное значение, поскольку понятие «нормальный» тип ($T$н) раскрывает «*вероятностную*» («*случайную*») природу мира чисел, что совпадает с реальной картиной Мироздания, ведь в реальном мире правит *Его Величество Случай*. По крайней мере, физикам-теоретикам кажется именно так. Однако на самом деле в мире чисел… нет места ни малейшей случайности (поэтому выше я и ставил кавычки). Ведь появление каждого целого делителя ($d$) у каждого натурального числа ($N$) – это абсолютно… *детерминированный* процесс, суть которого это – ***бесконечное «расширение» мира чисел***:
$d = 2$ появляется у числа $N = 2$, а дальше появляется – у каждого 2-го числа;
$d = 3$ появляется у числа $N = 3$, а дальше появляется – у каждого 3-го числа;
$d = 4$ появляется у числа $N = 4$, а дальше появляется – у каждого 4-го числа;
$d = 5$ появляется у числа $N = 5$, а дальше появляется – у каждого 5-го числа;
и так далее до *бесконечности*. Другое дело, что ни самому гениальному человеку, ни даже (гипотетическому) квантовому компьютеру не дано *точно* проследить за работой этого алгоритма (детерминированного «расширения») вплоть до числа $N \approx 10\text{^}(10\text{^}59)$. В результате хитроумный человек придумал ***теорию чисел***, в формулах которой вместо знаков точного равенства (=) часто стоят таинственные тильды (~).

Оказывается, что в мире чисел можно обнаружить множество больших чисел Дирака (БЧД). Приведу пример предельно короткого поиска БЧД. На отрезке [*e*; *N*] *среднее расстояние* (*L*) между простыми числами – это отношение длины отрезка (*N*) к количеству всех простых чисел (*К*) на данном отрезке: $L \approx N/K$. Из важнейшей формулы теории чисел ($K \sim N/\ln N$) следует, что $L \sim \ln N$. В нашем случае $N \approx$ 10^(10^59), поэтому мы получим $L \sim$ 3,2657*10^59. А минимальное расстояние между простыми числами – это $L\text{min} = 2$ (у простых чисел-близнецов). Значит, мы вправе записать отношение ***L*/*L*min ≈ 1,6*10^59**, которое также можно трактовать как ***большое число Дирака***, порожденное миром чисел в рамках нашей модели.

Упомяну ещё один путь получения целого ряда *больших чисел Дирака* в мире чисел. Согласно моим оценкам (см. книгу «Зеркало» Вселенной», гл.10) некоторые натуральные числа (я назвал их «мощные») вида $N = \exp(\exp(t))$ могут содержать порядка $\ln N = \exp(t)$ *линейных* целых делителей (*d*), которые в точности (без пропусков) копируют начало натурального ряда: $d = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots, \ln N$ (в нашем случае $\ln N \approx$ 3,2657*10^59). Можно сказать, что эти делители образуют так называемый *Большой отрезок* (на числовой оси), который я всесторонне исследовал в рамках виртуальной космологии (в её ранней версии). При этом я также находил некие аналоги *больших чисел Дирака* – см. мою статью «Большие числа Дирака и… Пирамида делителей» (Сборник-2012).

Итак, рассматривая *мир чисел* под всевозможными углами зрения, мы будем обнаруживать бесконечно много аналогов *больших чисел Дирака*, которые можно трактовать как некие «отражения» реальных отношений физических величин во Вселенной. Вопрос только в том, как правильно «расшифровать» мир чисел. Однако не вызывает сомнений главная «подсказка» мира чисел: все мыслимые *большие числа Дирака* тесно *связаны* между собой «внутренним устройством» *единой* Вселенной (наподобие *единого* мира чисел, который, как и Вселенная, также «расширяется»). И нет в математике иного объекта (кроме мира чисел), который бы «выдавал» аналоги *больших чисел Дирака* в бесконечных (!) количествах и столь «близкие» по смыслу к физике, описывающей (с помощью математики) реальную Вселенную.

29.10.2014



---