Note sur Une Propriété des Lignes Géodésiques de l'Ellipsoïde de Révolution

Abdelmajid Ben Hadj Salem

Ingénieur Général Géographe

Résumé

Dans cette note, on présente une propriété des lignes géodésiques de l'ellipsoïde de révolution.

Abstract

In this note, we give one propriety of the geodesic lines of the ellipsoid of revolution.

Version 2. Décembre 2020

Table des matières

Note sur Une Propriété des Lignes Géodésiques de l'Ellipsoide

ABDELMAJID BEN HADJ SALEM, ING. GÉNÉRAL

OFFICE DE LA TOPOGRAPHIE ET DU CADASTRE

A la mémoire d'Henri Duquenne

Résumé

Cette note présente une propriété des lignes géodésiques de l'ellipsoide.

1 Quelques Rappels sur la Théorie des Surfaces

1.1 Définition

Un point d'une surface (σ) est défini par la donnée d'une application vectorielle $\boldsymbol{M}(u,v)$ de $R^2 \longrightarrow R^3$.

1.2 Définitions

La première forme fondamentale en un point $\boldsymbol{M}(u,v)$ est :

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdud + Gdv^2 \tag{1}$$

avec :

$$E = \|\boldsymbol{M}'_u\|^2$$
$$F = \boldsymbol{M}'_u.\boldsymbol{M}'_v$$
$$G = \|\boldsymbol{M}'_v\|^2$$

Le couple (u,v) forme un système de coordonnées symétriques sur la surface (σ) si (u,v) est un système de coordonnées orthogonales soit :

$$F = 0 \ \ et \ \ E = G$$

ce qui permet d'écrire :

$$ds^2 = E(du^2 + dv^2) \tag{2}$$

2 Quelques Exemples de Coordonnées Symétriques

2.1 Les Coordonnées Cartésiennes

Dans le plan, les coordonnées cartésiennes (x,y) sont des coordonnées symétriques. En effet, l'élément linéaire infinitésimal s'écrit :

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \Longrightarrow ds^2 = dx^2 + dy^2 \tag{3}$$

Donc :

$$E = G = 1 \quad et \quad F = 0$$

2.2 Les Coordonnées Polaires

Dans le plan, on peut utiliser les coordonnées polaires (ρ, θ) . Elles sont liées aux coordonnées cartésiennes (x,y) par :

$$x = \rho cos\theta \tag{4}$$

$$y = \rho sin\theta \tag{5}$$

Les coordonnées polaires ne sont pas des coordonnées symétriques. En effet, l'élément linéaire infinitésimal s'écrit :

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \Longrightarrow ds^2 = dx^2 + dy^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 \tag{6}$$

Donc :

$$E = 1 \ G = \rho^2; \quad et \quad F = 0$$

Mais, on peut écrire (6) sous la forme :

$$ds^2 = \rho^2(\frac{d\rho^2}{\rho^2} + d\theta^2) = \rho^2(dLog\rho^2 + d\theta^2) \tag{7}$$

C'est-à-dire que $(Log\rho, \theta)$ forme un système de coordonnées sysmétriques orthogonales.

2.3 Les Coordonnées Géographiques sur la Sphère

Soit une sphère σ de rayon R. Un point M de σ est défini par ses coordonnées géographiques (φ, λ). On a alors :

$$ds^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 = R^2 d\varphi^2 + R^2 cos^2\varphi d\lambda^2 \tag{8}$$

De (8), (φ, λ) forme un système de coordonnées orthogonales non symétriques. Posons :

$$L_M = Logtg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \tag{9}$$

L_M est appelée latitude croissante ou latitude de Mercator, dans ce cas, (8) s'écrit :

$$ds^2 = R^2 cos^2\varphi(dL_M^2 + d\lambda^2) \tag{10}$$

et (L_M, λ) est un système de coordonnées orthogonales symétriques.

2.4 Les Coordonnées Géodésiques de l'Ellipsoide

Soit un ellipsoide σ de paramètres (a, e) où a et e sont respectivement le demi grand axe et la première excentricité. Un point M de σ est défini par ses coordonnées géodésiques (φ, λ). On a alors :

$$ds^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 = \rho^2 d\varphi^2 + N^2 cos^2\varphi d\lambda^2 \tag{11}$$

avec :

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 sin^2\varphi}} \tag{12}$$

La grande normale. De (11), (φ, λ) forme un système de coordonnées orthogonales non symétriques. Posons :

$$L = Logtg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) - \frac{e}{2} Log\frac{1 + esin\varphi}{1 - esin\varphi} \tag{13}$$

L est appelée latitude isométrique, dans ce cas, (11) s'écrit :

$$ds^2 = N^2 cos^2\varphi(dL^2 + d\lambda^2) \tag{14}$$

et (L, λ) est un système de coordonnées orthogonales symétriques.

3 Une propriété des lignes géodésiques de l'ellipsoide

3.1 Calculs Préliminaires

Soit $\boldsymbol{E}$ un ellipsoide de révolution de paramètres (a, e) et (g) une géodésique partant d'un point $E(\varphi = 0, \lambda_e)$ sur l'équateur et d'azimut Az_e. A cette géodésique, on lui fait correspondre une géodésique (g') sur la sphère de Jacobi de rayon a, ayant le même azimut Az_e au point $E'(\varphi' = 0, \lambda_e)$. De même au point $M(\varphi, \lambda)$

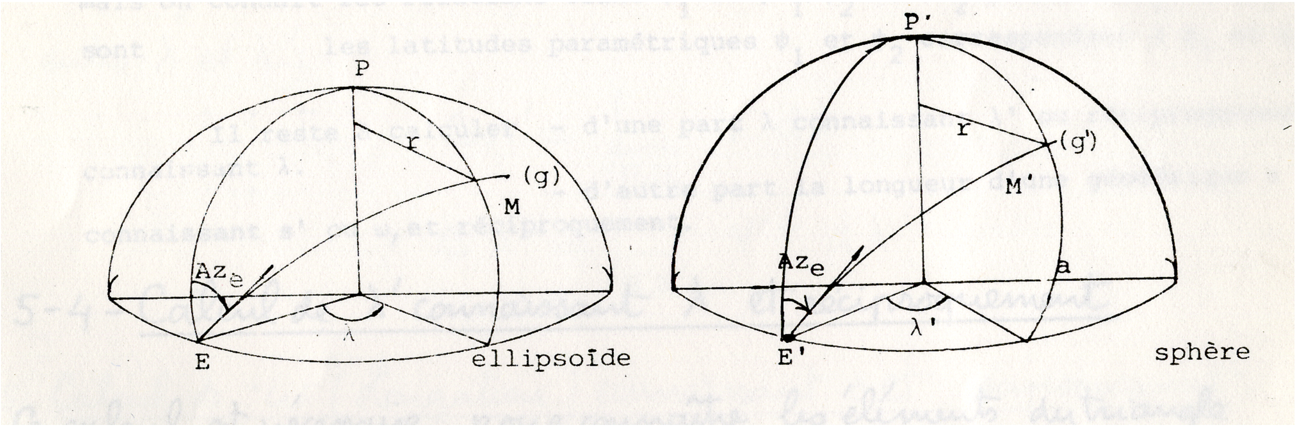

Fig. 1: La Correspondance de la sphère de Jacobi, **[2]**

de la géodésique (g) de l'ellipsoide, on lui fait correspondre le point $M'(\varphi', \lambda')$ de (g') de la sphère. Le point M de la géodésique (g) vérifie l'équation de Clairaut :

$$rsinAz_g = asinAz_e = constante \tag{15}$$

avec $r = Ncos\varphi$. De même M' de la géodésique (g') vérifie :

$$r'sinAz_{g'} = asinAz_e = constante \tag{16}$$

avec $r' = acos\varphi'$. Donc, on a :

$$rsinAz_g = r'sinAz_{g'} \Rightarrow \text{si } Az_g = Az_{g'} \text{ alors, } r = r' \tag{17}$$

soit :

$$Ncos\varphi = acos\varphi' \Rightarrow \varphi' = \text{la latitude paramétrique de M vérifiant } tg\varphi' = \frac{b}{a}tg\varphi \tag{18}$$

Sur la géodésique (g), on a :

$$tgAz_g = \frac{rd\lambda}{\rho d\varphi} \tag{19}$$

De même sur la géodésique (g'), on a :

$$tgAz_{g'} = \frac{r'd\lambda'}{ad\varphi'} \tag{20}$$

Comme $Az_g = Az_{g'}$, on déduit :

$$\frac{rd\lambda}{\rho d\varphi} = \frac{r'd\lambda'}{ad\varphi'} \Rightarrow d\lambda = \frac{\rho d\varphi}{ad\varphi'}d\lambda' \tag{21}$$

En utilisant (18), on obtient :

$$d\lambda = \sqrt{1 - e^2cos^2\varphi'}d\lambda' \tag{22}$$

3.2 Une propriété des lignes géodésiques de l'ellipsoide

En intégrant l'équation (22), on obtient :

$$\lambda - \lambda_e = \int_{\lambda_e}^{\lambda'+\lambda_e} \sqrt{1 - e^2cos^2\varphi'}d\lambda' \tag{23}$$

λ' est comptée à partir de λ_e.

Comme :

$$\sqrt{1 - e^2cos^2\varphi'} = 1 - \frac{e^2}{2}cos^2\varphi' + o(e^4)$$

où $o(e^4)$ est un infiniment petit d'ordre 4 en e dont on néglige l'intégrale entre λ_e et $\lambda_e + \lambda$.

Par suite, (23) s'écrit :

$$\lambda - \lambda_e = \int_{\lambda_e}^{\lambda'+\lambda_e} d\lambda' - \frac{e^2}{2}\int_{\lambda_e}^{\lambda'+\lambda_e} cos^2\varphi'd\lambda' \tag{24}$$

Comme (g') est une géodésique de la sphère, on a **[1]** :

$$cos^2\varphi'd\lambda' = \frac{sinAz_e}{a}ds' \tag{25}$$

où ds' est l'élément différentiel de l'abscisse curviligne sur la géodésique (un grand cercle). Alors en posant $s' = 0$ au point E', l'équation (24) s'écrit :

$$\lambda = \lambda_e + \lambda' - \frac{e^2sinAz_e}{2a}\int_0^{s'} ds' \tag{26}$$

Quand la géodésique (g') coupe la première fois le plan de l'équateur en un point F', on a :

$$\lambda'_F = \pi \quad (27)$$

$$s' = \pi a \quad (28)$$

$$\lambda = \lambda_e + \pi - \frac{e^2\pi sinAz_e}{2} \quad (29)$$

La géodésique (g') partant de F' a pour azimut $\pi - Az_e$, elle coupe une deuxième fois l'équateur au point E', mais la géodésique (g) sur l'ellipsoide coupe une deuxième fois le plan de l'équateur au point correspondant à H dont la longitude est :

$$\lambda_H = \lambda_e + 2\pi - \frac{e^2\pi sinAz_e}{2} - \frac{e^2\pi sin(\pi - Az_e)}{2} = \lambda_e + 2\pi - e^2\pi sinAz_e \quad (30)$$

D'où la propriété des lignes géodésiques de l'ellipsoide de révolution :

Propriété :*une ligne géodésique de l'ellipsoide, différente de la méridienne, ne revient jamais à son point de départ.*

Références

1. A. Ben Hadj Salem. 2010. Note sur les lignes géodésiques de la sphère. v2. 10p.

2. J. Lemenestrel. 1980. Cours de géodésie, ENSG,IGN.