LA COURBURE DES TRANSFORMÉES PLANES CONFORMES DES GÉODÉSIQUES

ABDELMAJID BEN HADJ SALEM, DIPL.-ENG.

À mon père

Résumé. Dans cette note, nous présentons la formule de la courbure de l'image, dans le cas d'une représentation plane conforme, des géodésiques du modèle terrestre choisi comme une ellipsoïde. Comme exemple, nous considérons le cas de la représentation plane conforme UTM.

Abstract. In this paper, we give the formula of the curvature of the curve image, in the case of a conformal map projection, of geodesic curves of the ellipsoid as the model of the Earth. As an example, we consider the UTM map projection and we give the expression of the formula of the curvature.

1. Note sur l'emploi des latitudes isométriques

L'établissement d'une représentation plane conforme consiste à assurer une correspondance bijective entre un système de coordonnées symétriques de l'ellipsoïde et un système de coordonnées sur le plan. Nous aurons ainsi décomposé les deux surfaces en carrés infinitésimaux qu'il suffira de faire correspondre pour obtenir une représentation conforme.

Les coordonnées rectangulaires planes (X, Y) sont des coordonnées symétriques mais les coordonnées géographiques ou géodésiques ne le sont pas. En effet, si nous comparons un élément ds d'une méridienne à un élément dl d'un parallèle, nous avons :

$$ds = \rho d\varphi \tag{1.1}$$

$$\text{et } \ dl = Ncos\varphi d\lambda \tag{1.2}$$

Et pour $d\varphi = d\lambda$, nous obtenons $ds \neq dl$.

Pour obtenir sur l'ellipsoïde un système de coordonnées symétriques, nous sommes tenus d'effectuer le changement de variables suivant :

$$\varphi \longrightarrow L$$

Et pour avoir $ds = dl$ quand $dL = d\lambda$, il faut écrire :

$$\rho d\varphi = Ncos\varphi dL \tag{1.3}$$

Soit :

$$dL = \frac{\rho d\varphi}{N cos\varphi} \tag{1.4}$$

D'où L la latitude isométrique :

$$\boxed{L = \int_0^{\varphi} \frac{\rho d\varphi}{N cos\varphi} = Logtg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) - \frac{e}{2} Log \frac{1 + esin\varphi}{1 - esin\varphi}} \tag{1.5}$$

(L, λ) sont donc des coordonnées symétriques de l'ellipsoïde et pour obtenir une représentation plane conforme, il suffira d'établir une correspondace bijective entre (L, λ) et (X, Y).

2. Note sur l'expression générale de la courbure des transformées planes conformes des géodésiques

Soit un élément ds de la transformée plane conforme d'une géodésique, la corde D joignant les extrémités A et B de cet élément G. Soient M_A et M_B les images des méridiens passant par A et B. Les tangentes T_A et T_B à la transformée forment un angle $d\theta$ et la courbure de l'élément G (inverse du rayon de courbure) a pour expression :

$$\Gamma = \frac{d\theta}{ds} \tag{2.1}$$

Or sur la figure ci-dessous, nous avons :

$$d\theta = C\hat{A}B + C\hat{B}A = Z_D - Z_G + Z'_G - Z'_D = (Z'_G - Z_G) - (Z'_D - Z_D) \tag{2.2}$$

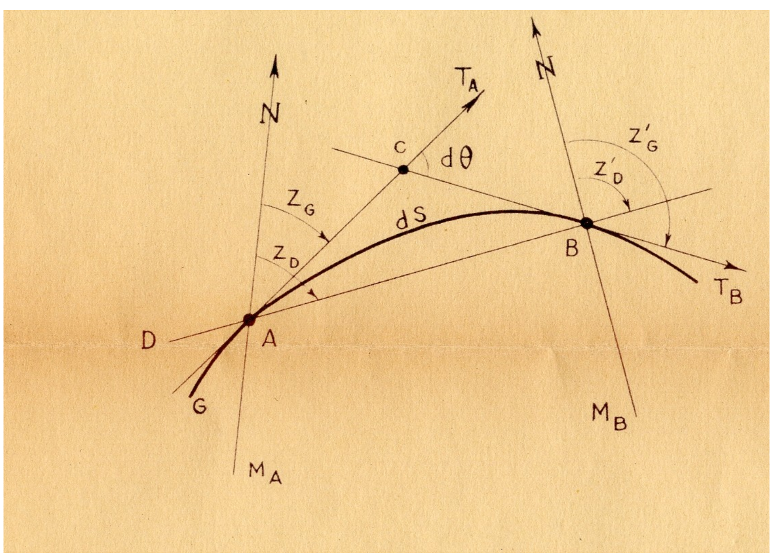

Figure 1. Transformée de la géodésique

Comme la représentation est conforme, la variation d'azimut du point A au point B est donnée par la relation de Laplace :

$$dAz = Z'_G - Z_G = d\lambda sin\varphi \tag{2.3}$$

Quant à la variation de l'azimut de la corde D, elle est égale à la différence des convergences des méridiens γ entre A et B :

$$Z'_D - Z_D = d\gamma \tag{2.4}$$

Nous obtenons alors :

$$\boxed{\Gamma = \frac{d\lambda sin\varphi - d\gamma}{ds}} \tag{2.5}$$

3. Application à la représentation UTM

Pour la représentation UTM, nous avons :

$$\gamma = (\lambda - \lambda_0) sin\varphi \tag{3.1}$$

D'où :

$$d\gamma = d\lambda sin\varphi + (\lambda - \lambda_0) cos\varphi d\varphi \tag{3.2}$$

Par suite :

$$\Gamma = \frac{d\lambda sin\varphi - d\gamma}{ds} = \frac{d\lambda sin\varphi - d\lambda sin\varphi - (\lambda - \lambda_0) cos\varphi d\varphi}{ds} = \frac{(\lambda_0 - \lambda) cos\varphi d\varphi}{ds}$$

Soit :

$$\boxed{\Gamma = \frac{(\lambda_0 - \lambda) cos\varphi d\varphi}{ds}} \tag{3.3}$$

De [1], on a l'expression de ds d'une géodésique (différente de l'équateur et de la méridienne) comme suit :

$$ds = \frac{a(1-e^2) cos\varphi d\varphi}{cos(Aze)(1-e^2 sin^2\varphi)\sqrt{(1-k^2 sin^2\varphi)(1-e^2 sin^2\varphi)}} \tag{3.4}$$

Par suite la formule de la courbure ci-dessus devient :

$$\boxed{\Gamma = \frac{a(1-e^2)(\lambda_0 - \lambda)}{cos(Aze)(1-e^2 sin^2\varphi)\sqrt{(1-k^2 sin^2\varphi)(1-e^2 sin^2\varphi)}}} \tag{3.5}$$

où Aze l'azimut de la géodésique au point intersectant l'équateur, k la constante :

$$k = \frac{\sqrt{1 - e^2 sin^2 Aze}}{cosAze} \tag{3.6}$$

Références

[1] **A. Ben Hadj Salem**. 2015. Le Calcul des Géodésiques de l'Ellipsoïide. 12 pages.

[2] **W.A. Heiskanen, H. Moritz**. 1967. Physical Geodesy. Freeman, San Francisco. Reprint, 1979. Institute of Theoretical Geodesy, Technical University, Graz, Austria.

[3] **J. Lemenestrel**. 1980. Cours de géodésie. ENSG. IGN France.

[4] **P. Vanicek, E. J. Krakiwsky**. 1986. Geodesy : the Concepts. North Holland. 2ème Edition.

Abdelmajid Ben Hadj Salem, Résidence Bousten 8, Mosquée Raoudha, Bloc B, 1181 Soukra Raoudha, Tunisia
Email address: abenhadjsalem@gmail.com